

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 6 (1940-1941)

**Artikel:** Die Biegung eines Balkens aus Baustahl im plastischen Bereich  
**Autor:** Fritsche, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7092>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# DIE BIEGUNG EINES BALKENS AUS BAUSTAHL IM PLASTISCHEN BEREICH.

LA FLEXION DANS LE DOMAINE PLASTIQUE D'UNE POUTRE EN ACIER DE CONSTRUCTION.

THE BENDING OF A STRUCTURAL-STEEL BEAM WITHIN THE PLASTIC REGION.

Prof. Dr. J. FRITSCHE, Deutsche Technische Hochschule in Prag.

Für die Beurteilung der Sicherheit von Stahlbauwerken ist ihr Verhalten bei Überschreiten des elastischen Bereiches von großer Wichtigkeit. Die frühere Annahme, daß dafür die untere Fließgrenze  $\sigma_F$  des Zugversuches allein entscheidend sei, konnte nach einer genaueren Beobachtung und gedanklichen Durchdringung der tatsächlichen Erscheinungen nicht aufrecht erhalten werden. Einmal kommt auch das Übergangsgebiet zwischen  $P$ - und  $F$ -Grenze durch Fließvorgänge zustande, andererseits ist die Fließgrenze des Zugversuches kein Spannungsmaßstab für das Fließen bei der Biegung, da infolge der Wirkung des elastischen Spannungsfeldes längs der Hauptschubspannungsflächen eine Hebung der  $P$ - und der  $F$ -Grenze verursacht wird, wobei allerdings noch eine vom Feingefüge abhängige Größe  $c$  den Einfluß der Stahlart zum Ausdruck bringt. Da durch Gefügestörungen verschiedener Art Schichten verschiedener Festigkeit<sup>1)</sup> zustande kommen, ist  $c$  für den Baustahl keine unveränderliche Größe, sondern schwankt in einem bestimmten Bereich, so daß sich den Schichten geringster Festigkeit, die für die  $P$ -Grenze verantwortlich sind, ein Kleinstwert  $c_P$  und den Schichten höchster Festigkeit und völlig störungsfreiem Gefüge ein Größtwert  $c_F$  zuordnet.

$c_P$  und  $c_F$  bestimmen auf bekannte Weise<sup>2)</sup> für jede Querschnittsform die gehobene  $P$ - bzw.  $F$ -Grenze  $\sigma'_P$  bzw.  $\sigma'_F$ , die durch die Feldwirkung an den Gebietsgrenzen

$$\chi_P = \frac{\sigma'_P - \sigma_P}{\sigma_P} \quad \text{bzw.} \quad \chi_F = \frac{\sigma'_F - \sigma_F}{\sigma_F} \quad (1)$$

zum Ausdruck gebracht werden soll. Für  $\sigma'_P < \sigma' < \sigma'_F$  ist die Feldwirkung  $\chi = \frac{\sigma' - \sigma}{\sigma}$  und dafür soll, solange noch keine näheren Untersuchungen vorliegen, der geradlinige Ansatz

$$\chi = \chi_P + (\chi_F - \chi_P) \frac{\eta}{\eta_F} \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Unter Festigkeit wird in diesem Zusammenhange jene Grenzspannung verstanden, die Gefügeveränderungen auslöst, wie z. B. die  $P$ - oder die  $F$ -Grenze.

<sup>2)</sup> J. FRITSCHE, Zur Mechanik des Fließvorganges. Stahlbau 1938, Heft 16 und 17.  
— Derselbe, Die neuere Fließbedingung und die Ergebnisse der Werkstoffprüfung. Stahlbau 1939, Heft 3.

angenommen werden, worin  $\eta$  die dimensionslose Zahl

$$\eta = \frac{\sigma' - \sigma'_P}{\sigma'_P} \quad \text{und} \quad \eta_F = \frac{\sigma'_F - \sigma'_P}{\sigma'_P} \quad (3)$$

bedeutet, die den Gütegrad oder die Festigkeit einer Einzelschicht kennzeichnet\*). Das Fließen einer solchen Einzelschicht von der Dicke  $s$  soll in einer ruckartigen Winkeländerung  $s \gamma_F$  bestehen, genau so wie es beim Zug in einer ruckartigen Verlängerung von der Größe  $s \lambda_F$  vor sich geht. Danach setzt dann wieder eine Verfestigung ein und es soll angenommen werden, daß nun innerhalb eines begrenzten Verformungsbereiches die betrachtete Schicht keinen Beitrag zur plastischen Verformung mehr leistet. Die Spannungsdehnungslinie einer Einzelschicht von der Festigkeit  $\sigma'$  wird daher eine Stufe, deren Trittfäche entsprechend dem Elastizitätsgesetz geneigt ist. Es

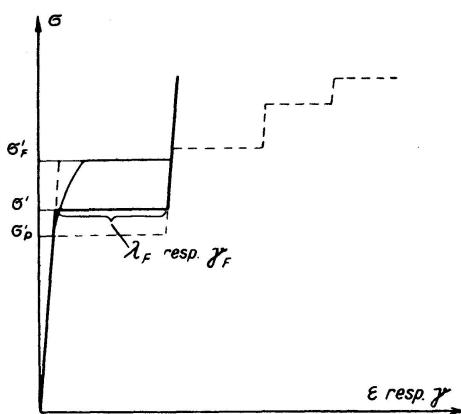


Fig. 1

Das Formänderungsgesetz einer Einzelschicht von der Festigkeit  $\sigma'$  — La loi de déformation d'une couche unique de résistance  $\sigma'$  — Law of change of shape of a single layer of the strength  $\sigma'$ .

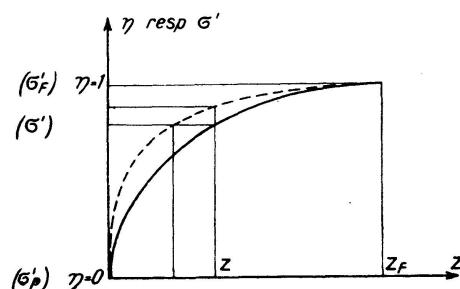


Fig. 2

Verteilungsgesetz der Festigkeiten  $z(\sigma')$  in der Länge 1 — Loi de répartition des résistances  $z(\sigma')$  sur la longueur 1 — Law of distribution of the strengths  $z(\sigma')$  in the length 1.

ist natürlich klar, daß im Verfestigungsbereiche weitere Sprünge mit abnehmender Stufenhöhe erfolgen, die neuerdings eintretenden, plötzlichen Änderungen im Feingefüge ihre Entstehung verdanken, doch tritt dies erst bei starken Verformungen auf, die für die hier berücksichtigten Erscheinungen nicht mehr in Betracht kommen. In Fig. 1 ist dieses Verformungsgesetz der Einzelschicht dargestellt; die vollgezogene Linie ist der Rechnung zu Grunde gelegt, die gestrichelte wird den tatsächlich vorliegenden Verhältnissen entsprechen. Von der Festigkeit  $\sigma' = \sigma (1 + \alpha)$  oder vom Gütegrad  $\eta$  sind im Stab von der Längeneinheit  $z$  Schichten vorhanden; nimmt man mit Rücksicht auf die Randbedingungen für  $z$  den Ansatz<sup>3)</sup> (Fig. 2)

$$z = z_F \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{\eta}{\eta_F} \right)^2} \right] \quad (4)$$

\* )  $\sigma'$  ist demnach jene Spannung, die die Festigkeitszahlen  $\sigma'_P$  und  $\sigma'_F$  der Spannung  $\sigma$  des Zugversuches zuordnen.

<sup>3)</sup> J. FRITSCHE, Das Formänderungsgesetz des Baustahles im bildsamen Bereich. Stahlbau 1939, Heft 14/15.

an<sup>4)</sup>), so erhält man die plastische Winkeländerung der Längeneinheit  $d\gamma_{pl}$  beim Übergang von den Schichten mit der Festigkeit  $\sigma'$  zu den Schichten mit der Festigkeit  $\sigma' + d\sigma'$  mit

$$d\gamma_{pl} = ks\gamma_F z(1 + \alpha)d\eta, \quad (5)$$

denn es liegt nahe, daß das Maß des ruckartigen Fließens einer Einzelschicht umso größer ist, je höher die Feldwirkung die Festigkeit dieser Schicht hinaufgetrieben hat.  $k$  ist darin eine versuchsmäßig zu bestimmende Verhältniszahl. Damit bekommt man mit der Abkürzung  $\nu = \frac{\eta}{\eta_F}$

$$\gamma_{pl} = ks\gamma_F z_F \eta_F [(1 + \alpha_P)f_1(\nu) + (\alpha_F - \alpha_P)f_2(\nu)], \quad (6)$$

worin

$$f_1(\nu) = \nu - \frac{1}{2}\nu\sqrt{1 - \nu^2} - \frac{1}{2}\arcsin\nu \quad (7)$$

und

$$f_2(\nu) = \frac{1}{2}\nu^2 - \frac{1}{3}\left[1 - \sqrt{(1 - \nu^2)^3}\right]$$

bedeutet.

Es ist nun eine nur durch genaue Beobachtung von Versuchsreihen zu klärende Frage, ob bei der Biegung der Fließstoß durch eine bezogene Winkeländerung  $\gamma_F$  oder durch eine bezogene Randfaserdehnung  $\lambda_F$  gekennzeichnet ist, die dann jedenfalls der Fließlänge des Zugversuches entsprechen müßte. Die derzeit aus dem Fachschrifttum bekannten Versuche lassen eine eindeutige Beurteilung dieser Frage noch nicht zu, und es müssen daher beide Möglichkeiten rechnerisch verfolgt werden, um vielleicht dann aus den Rechenergebnissen entsprechende Schlüsse ziehen zu können. Für den Fall a) erhält man aus (6) die plastische Randfaserdehnung unter Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte mit

$$\epsilon'_{pl} = \frac{h}{2}ks\gamma_F z_F \eta_F [(1 + \alpha_P)f_1(\nu) + (\alpha_F - \alpha_P)f_2(\nu)], \quad (8a)$$

für den Fall b) ist  $\frac{h}{2}\gamma_F$  zu dem Festwerte  $\lambda_F$  zusammenzuziehen und es berechnet sich

$$\epsilon'_{pl} = ks\lambda_F z_F \eta_F [(1 + \alpha_P)f_1(\nu) + (\alpha_F - \alpha_P)f_2(\nu)]. \quad (8b)$$

Die Größen  $k$ ,  $s$ ,  $\gamma_F$ ,  $\lambda_F$  und  $z_F$  sind im Einzelnen nicht bekannt und können nur durch genormte Biegeversuche ermittelt werden. Wenn es sich nur um die Berechnung von  $\epsilon'_{pl}$  handelt, erscheint es am zweckmäßigsten, die plastische Winkeländerung  $\gamma_{pl,F}$  oder die plastische Randfaserdehnung  $\epsilon'_{pl,F} = \frac{h}{2}\gamma_{pl,F}$  in dem Augenblicke zu messen, in dem die Spitzenspannung des

<sup>4)</sup> Es ist dort bereits ausgeführt worden, daß es mit Rücksicht auf Versuchsergebnisse notwendig werden kann, das Verteilungsgesetz  $z(\sigma')$  einer Verbesserung zu unterziehen. Versuche mit I-Stählen lassen den Schluß zu, für das Auftreten von Schichten geringerer Festigkeit noch kleinere Wahrscheinlichkeiten anzunehmen, als der elliptische Zusammenhang zum Ausdrucke bringt, und die Linie noch besser in den von der  $\sigma'$ -Achse und der Geraden  $\sigma' = \sigma'_F$  gebildeten Winkel hineinzuschmiegen. Allerdings sind darin dann auch andere Abweichungen enthalten, wie z. B. die vom Ebenbleiben der Querschnitte, was mit wachsender Plastizierung immer weniger zutrifft.

elastischen Feldes den Größtwert  $\sigma'_F$  erreicht hat (Fig. 3); dafür ist  $\eta = \eta_F$  und es ist nach (8 a)

$$\epsilon'_{pl, F} = \frac{h}{2} k_s \gamma_F z_F \eta_F \left[ \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) (1 + \zeta_P) + \frac{1}{6} (\zeta_F - \zeta_P) \right]. \quad (9a)$$

Bezeichnet man die für einen Versuchsbalken rechteckiger Querschnittsform und geringer Balkenhöhe  $h$  gemessenen Größen mit  $\bar{\zeta}_P$ ,  $\bar{\zeta}_F$  und  $\bar{\epsilon}'_{pl, F}$ , dann ist im Falle a)

$$K_1 = k_s \gamma_F z_F = 4,660 \bar{\epsilon}'_{pl, F} \frac{2}{h \eta_F} \cdot \frac{1}{(1 + \bar{\zeta}_P) + 0,777 (\bar{\zeta}_F - \bar{\zeta}_P)}; \quad (10a)$$

wenn der betrachtete Balken aus dem gleichen Werkstoff besteht und die Höhe  $h$  hat, dann ist schließlich

$$\epsilon'_{pl} = 4,660 \bar{\epsilon}'_{pl, F} \frac{h}{\bar{h}} \frac{(1 + \zeta_P) f_1(\nu) + (\zeta_F - \zeta_P) f_2(\nu)}{(1 + \bar{\zeta}_P) + 0,777 (\bar{\zeta}_F - \bar{\zeta}_P)}. \quad (11a)$$

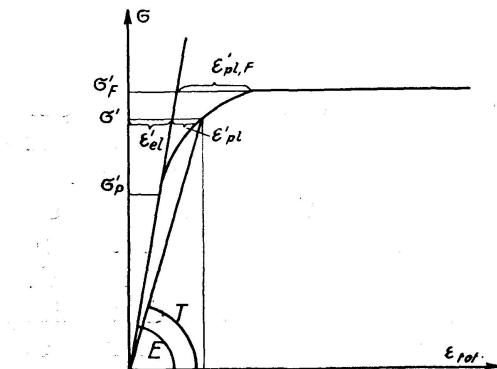


Fig. 3

Das Formänderungsgesetz des Baustahles bei der Biegung — La loi de déformation de l'acier de construction pour la flexion — Law of change of shape of the structural steel when bending.

Für den Fall b) lauten nach (8 b) die diesbezüglichen Gleichungen

$$\epsilon'_{pl, F} = k_s \lambda_F z_F \left[ \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) (1 + \zeta_P) + \frac{1}{6} (\zeta_F - \zeta_P) \right], \quad (9b)$$

$$K_2 = k_s \lambda_F z_F = 4,660 \bar{\epsilon}'_{pl, F} \frac{1}{\eta_F} \frac{1}{(1 + \bar{\zeta}_P) + 0,777 (\bar{\zeta}_F - \bar{\zeta}_P)} \quad \text{und} \quad (10b)$$

$$\epsilon'_{pl} = 4,660 \bar{\epsilon}'_{pl, F} \frac{1 + \zeta_P) f_1(\nu) + (\zeta_F - \zeta_P) f_2(\nu)}{(1 + \bar{\zeta}_P) + 0,777 (\bar{\zeta}_F - \bar{\zeta}_P)}. \quad (11b)$$

Die in den Gleichungen (10 b) und (11 b) auftretenden, durch Messung zu bestimmenden Größen wurden zweimal überstrichen, um zum Ausdruck zu bringen, daß sie sich auf einen anderen als den im Falle a) gekennzeichneten Versuchsbalken beziehen können.

Die Gleichungen (11 a) und (11 b) sind auf der Voraussetzung aufgebaut, daß das Fließen plötzlich und ruckartig die ganze Balkenhöhe durchsetzt und der Querschnitt dabei eben bleibt. Zunächst trifft dies aber nur für niedrige und massive Querschnittsformen zu, nicht aber für hohe, dünnwandige Querschnitte, wie sie im Stahlbau üblich sind. Aus den Versuchen erkennt man, daß ein schmaler Steg nicht mehr durch die ganze Höhe des

Balkens durchschießende Fließschichten erzwingen kann, sondern daß es vielfach vorher zu einem selbständigen Fließen der Flanschen kommt. Da die Ungleichmäßigkeit des zum Flansch gehörigen Spannungszustandes nur sehr gering ist, wird dies kein Biegefließen mehr sein, sondern lediglich ein Abrutschen von Stabteilen aneinander durch Gleitvorgänge in dünnen Schichten. Dabei muß dann angenommen werden, daß dies um den Betrag  $\lambda_F$  erfolgt, der als Fließlänge der Spannungsdehnungslinie des Zugversuches zu entnehmen ist; in solchen Fällen werden daher die Voraussetzungen des Falles b) gegeben sein. Der Querschnitt bleibt dabei allerdings nicht mehr eben; die plastizierten Teile eilen den nur elastisch verformten voraus. Das selbständige Fließen der Flanschen wird aber sofort verwickelte Spannungsänderungen im Steg bedingen, und die dabei auftretenden recht scharfen Spannungsspitzen werden sehr rasch ein Eindringen von Fließschichten in den Steg bewirken. Wenn daher auch der zeitliche Ablauf der Ereignisse mit den getroffenen Annahmen nicht ganz übereinstimmt, so wird sich doch im Endergebnis ein Zustand einstellen, der durch die Rechnung recht gut wiedergegeben wird.

Wie die Überprüfung von gemessenen Linien  $\epsilon'_{pl}$  zeigt, ist das Fließen des Flansches in der Regel darin nicht deutlich ausgeprägt; die Linien zeigen einen stetig gekrümmten Verlauf bis zum Erschöpfen der Tragfähigkeit bei  $\sigma'_F$ .

Die Erfahrung zeigt<sup>5)</sup>, daß die Abhängigkeit  $\alpha(\eta)$  nur sehr geringfügig sein kann und es muß daher in Hinblick auf sonstige Näherungen zulässig sein, diese Abhängigkeit zu vernachlässigen; dann entfällt das Glied mit  $\alpha_F - \alpha_p$  und man erhält die für die weiteren Untersuchungen ausreichende „gekürzte“ Lösung mit

$$\epsilon'_{pl} = 4,660 \bar{\epsilon}'_{pl, F} \frac{h}{\bar{h}} \frac{1 + \alpha}{1 + \bar{\alpha}} f_1(\nu) \quad \text{bzw.} \quad (12a)$$

$$\epsilon'_{pl} = 4,660 \bar{\epsilon}'_{pl, F} \frac{1 + \alpha}{1 + \bar{\alpha}} f_1(\nu) \quad (12b)$$

In einer früheren Arbeit<sup>3)</sup> habe ich der Berechnung von  $\epsilon'_{pl}$  auch eine Annahme zugrunde gelegt, die sich an die von KÖSTER<sup>6)</sup> angegebenen Vorstellungen über das Fließen von Baustahl anlehnt. Damit ergab sich

$$\epsilon'_{pl} = 4,660 \bar{\epsilon}'_{pl, F} \frac{1 + \alpha}{1 + \bar{\alpha}} \nu^2 f_1(\nu). \quad (12c)$$

Die Untersuchung gemessener Linien  $\epsilon'_{pl}$  bei I-Querschnitten läßt erkennen, daß (12c) an die Versuche besser herankommende Ergebnisse liefert. Dies kann natürlich nicht nur in der Weise ausgedeutet werden, daß man es als Beweis für die Richtigkeit der KÖSTER'schen Vorstellungen heranziehen darf; das schärfere Anwachsen der plastischen Verformungen gegen die Tragfähigkeit zu kann vielmehr auch mit den rechnungsmäßig nicht mehr zu verfolgenden, stufenweisen Fließvorgängen, wie sie besonders bei I-Stählen auftreten, und dem damit in Verbindung stehenden Nichtmehrbleiben der Querschnitte zusammenhängen. Doch erscheint es zweckmäßig, auch mit diesem Gesetze, ohne eine scharfe Begründung für seinen rechnerischen Auf-

<sup>5)</sup> F. RINAGL, Über die Fließgrenzen bei Zug- und Biegebeanspruchung. Der Bauingenieur, 1936, Heft 41/42.

<sup>6)</sup> W. KÖSTER, H. v. KÖCKRITZ und E. H. SCHULZ, Zur Kenntnis der Form der Spannungs-Dehnungskurven auf Grund der Messung des zeitlichen Verlaufes der Alterung weichen Stahles. Archiv für das Eisenhüttenwesen, 1932/33.

bau angeben zu können, die Erscheinungen durchzurechnen, um unter Umständen zu einer besseren Übereinstimmung zwischen Rechnung und Erfahrung zu kommen.

## A. Statisch bestimmte Stützung.

### 1. Biegung eines einfachen Balkens durch gleiche Endmomente.

Nach Festlegung des Verformungsgesetzes bis  $\sigma'_F$  kann der Modul der gesamten Verformung  $T = \frac{\sigma'}{\varepsilon'_{gesamt}}$  ermittelt werden (Fig. 3), der dann die Berechnung der verformten Stabachse ermöglicht. Es ist

$$\frac{1}{T} = \frac{\varepsilon'_{el} + \varepsilon'_{pl}}{\sigma'} = \frac{1}{E} + \frac{\varepsilon'_{pl}}{\sigma'}, \quad (13)$$

und da nach den Voraussetzungen der neueren Plastizitätslehre ein plastischer Abbau der Spannungen nicht erfolgt, und auch nach dem Fließen die Randspannung gleich der Nennspannung  $\sigma_N = \frac{M}{W}$  bleibt, ist daher auch

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{E} + \frac{W}{M} \cdot \varepsilon'_{pl}. \quad (14)$$

Die gesamte Winkeländerung  $\gamma_{gesamt}$  beträgt bei Ebenbleiben der Querschnitte

$$\gamma_{gesamt} = \frac{2}{h} \frac{\sigma'}{T} = \frac{M}{EJ} + \frac{2}{h} \varepsilon'_{pl};$$

die Differentialgleichung für die Durchbiegung  $y$  der Stabachse lautet nun bei üblicher Vernachlässigung der Steigung  $y'$

$$y'' = - \left( \frac{M}{EJ} + \frac{2}{h} \varepsilon'_{pl} \right), \quad (15)$$

aus der durch zweimalige Integration  $y$  berechnet werden kann. Da in diesem Falle  $M$  und  $\varepsilon'_{pl}$  nicht von  $x$  abhängig sind, ergibt sich

$$y = - \left( \frac{M}{EJ} + \frac{2}{h} \varepsilon'_{pl} \right) \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

und nach Bestimmung der Festwerte  $C_1$  und  $C_2$  aus den Randbedingungen der Aufgabe

$$y = \frac{1}{2} x(l-x) \left( \frac{M}{EJ} + \frac{2}{h} \varepsilon'_{pl} \right). \quad (16)$$

Eine derartig parabolisch verformte Stabachse setzt natürlich gleichmäßigen Werkstoff in der ganzen Stablänge voraus; d.h. das angenommene Verteilungsgesetz (4) der verschiedenen Festigkeiten muß in jedem beliebig klein gewählten Stück des Balkens erfüllt sein. Streng genommen ist dies natürlich nicht möglich, da sich das Gesetz von selbst ausschließt, wenn man mit der Größenordnung des betrachteten Stückes an die Schichtdicke herankommt. Da diese Schichtdicke aber sehr gering ist und mit etwa  $10^{-5}$  bis  $10^{-4}$  cm geschätzt werden kann, darf wohl für die übliche makroskopische Betrachtungsweise trotzdem mit einem gleichmäßigen (quasi-isotropen)

Werkstoff gerechnet werden. Solche offensichtlich örtliche Häufung von Schichten niedriger Festigkeit, wie sie RINAGL<sup>5)</sup> unter seinen Versuchen beobachtete, und die nach der Entlastung einen fast polygonal geformten Balken ergaben, gehören wohl doch zu den Seltenheiten.

Um Gleichung (16) zahlenmäßig auswerten zu können, ist es nötig, entweder  $M$  mit  $\nu$  oder  $\epsilon'_{pl}$  mit  $M$  zu verknüpfen. Bezeichnet man das Moment der inneren Spannungen, bei dem die Randspannung die gehobene  $P$ -Grenze  $\sigma'_P$  erreicht, mit  $M_P = W \sigma'_P$  und das Tragmoment, von dem ab der Balken unter der Last wegfließt, mit  $M_F = W \sigma'_F$ , so kann man, da beim Fließen das elastische Spannungsfeld aufrecht erhalten bleibt, für einen Zwischenwert

$$M = M_P + \nu(M_F - M_P) \quad \text{bzw.} \quad \nu = \frac{\eta}{\eta_F} = \frac{M - M_P}{M_F - M_P} \quad (17)$$

anschreiben. Damit erhält man als Durchbiegung  $f$  in der Stabmitte

$$f = \frac{l^2}{4h} \left\{ \frac{1}{EW} [M_P + \nu(M_F - M_P)] + \epsilon'_{pl} \right\} = \frac{l^2}{4h} \left( \frac{M}{EW} + \epsilon'_{pl} \right), \quad (18)$$

wobei  $\epsilon'_{pl}$  unmittelbar in Abhängigkeit von  $\nu$  nach (11) oder (12) einzusetzen ist.

## 2. Biegung durch eine Einzellast $P$ in der Stabmitte.

Das Neuartige dieses Belastungsfalles (Fig. 4) ist ein geradliniges Gesetz zwischen  $M$  und  $x$ , denn es ist  $M = \frac{P}{2}x$ ; damit wird auch  $\epsilon'_{pl}$  in derselben Weise von  $x$  abhängig. Einer strengen Berechnung der verformten Stabachse stehen in diesem Falle wegen des Auftretens von Querkräften große theoretische Schwierigkeiten im Wege. Die Hauptschubspannungsfächen sind keine Ebenen mehr, sondern verwickelt gekrümmte Zylinderflächen; außerdem sind die Schalen, in die schmale Schichten bei der Verformung übergehen, nicht mehr kongruent und es würde sich dann nicht nur darum handeln, Spannungsintegrale längs der Hauptschubspannungsfächen zu bilden, sondern vor allem jene herauszusuchen, bei denen diese Integrale einen Größtwert erreichen. Das sind Aufgaben, die zu ihrer Lösung einen großen mathematischen Aufwand erfordern würden, wenn es überhaupt gelingt, alle dabei auftretenden Schwierigkeiten zu überwinden. Wenn man daher an den NAVIER'schen Voraussetzungen festhält, darf man nicht übersehen, daß man damit eine Reihe von Näherungen gemacht hat, deren Einfluß auf das errechnete Ergebnis nicht mit voller Sicherheit abgeschätzt werden kann. Die Feinheiten der Erscheinungen, vor allem der Ort des ersten Auftretens von Fließlinien, sind unter diesen Umständen natürlich nicht erfassbar.

Für  $M_P < M < M_F$  besteht die verformte Stabachse aus einem lediglich elastisch verformten Stück von der Länge

$$x_P = \frac{2W\sigma'_P}{P} = \frac{2M_P}{P} \quad (19)$$

und einem elastisch-plastisch verbogenem Stücke innerhalb der Grenzen  $x_P < x < \frac{l}{2}$ . Die Differentialgleichung für die verformte Stabachse lautet

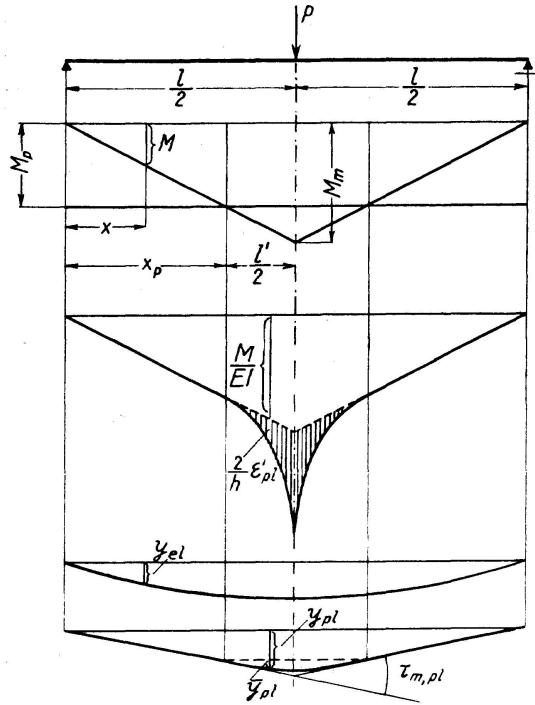


Fig. 4

bis  $x_p$  aus einer geneigten Geraden, an die sich dann erst die eigentliche plastische Verbiegung anschließt. Es ist daher

$$y_{pl} = \bar{y}_{pl} + A_{pl} x_p, \quad (22)$$

wobei  $A_{pl}$  nichts anderes vorstellt als den Auflagerdruck eines einfachen Balkens von der Spannweite  $l'$ , der mit  $\frac{2}{h} \varepsilon'_{pl}$  belastet ist. Es berechnet sich daher

$$A_{pl} = \frac{2}{h} \int_{x_p}^{l'} \varepsilon'_{pl} dx.$$

Benützt man für diese an sich langwierigen Rechnungen die gekürzte Lösung (12 b) für  $\varepsilon'_{pl}$ , die den Einfluß einer Veränderlichkeit von  $x$  vernachlässt, so erhält man mit den Abkürzungen

$$\left\{ \begin{array}{l} B = 9,320 \bar{\varepsilon}'_{pl, F} \frac{1 + z}{h(1 + \bar{z})}, \\ a = \frac{P}{2(M_F - M_P)} \\ b = -\frac{M_P}{M_F - M_P} = -\frac{\sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \end{array} \right. \quad (23)$$

die Größe

$$\frac{2}{h} \varepsilon'_{pl} = B \left[ (ax + b) - \frac{1}{2} (ax + b) \sqrt{[1 - (ax + b)^2]} - \frac{1}{2} \arcsin(ax + b) \right].$$

Damit berechnet sich nun mit  $\xi = ax + b$

$$A_{pl} = \frac{B}{2a} \left[ \xi^2 - \frac{1}{3} (2 + \xi^2) \sqrt{1 - \xi^2} - \xi \arcsin \xi \right]_{x_p}^{l'}. \quad (24)$$

die sich in den beiden Bereichen nur dadurch unterscheidet, daß im elastischen an die Stelle von  $T$  die Elastizitätsziffer  $E$  tritt. Berücksichtigt man Gl. (14), so erhält man

$$y'' = \frac{Px}{2EJ} - \frac{2}{h} \varepsilon'_{pl}. \quad (25)$$

Aus der Form dieser Gleichung ist zu erkennen, daß man die Durchbiegung  $y$  statt in zwei Stücken, die dann durch passende Wahl der Integrationsfrei-werte stetig zusammenzufügen sind, auch durch Zusammensetzen des elastischen und des elastisch-plastischen Anteiles der Verformung bilden kann:  $y = y_{el} + y_{pl}$ ;  $y_{el}$  ist die bekannte elastische Lösung der Aufgabe,  $y_{pl}$  besteht

Berücksichtigt man, daß nach (17)

$$\xi\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\frac{Pl}{4} - M_P}{M_F - M_P} = \nu$$

und

$$\xi(x_p) = ax_p + b = 0$$

ist, so ergibt sich endlich

$$A_{pl} = \frac{B}{6a} \left[ 3\nu^2 - (2 + \nu^2) \sqrt{1 - \nu^2} - 3\nu \arcsin \nu + 2 \right]. \quad (24)$$

Für  $\nu = 0$  muß man natürlich  $A_{pl}(0) = 0$  bekommen.

Die Differentialgleichung für  $\bar{y}_{pl}$  lautet nun

$$\bar{y}''_{pl} = -\frac{B}{2a^2} \left[ 2\xi - \xi \sqrt{1 - \xi^2} \arcsin \xi \right], \quad (25)$$

aus der man durch Integration

$$\bar{y}'_{pl} = -\frac{B}{6a^2} \varphi_1(\xi) + C_1 \quad (26)$$

und

$$\bar{y}_{pl} = -\frac{B}{96a^2} \varphi_2(\xi) + C_1\xi + C_2 \quad (27)$$

erhält, worin

$$\varphi_1(\xi) = 3\xi^2 - (2 + \xi^2) \sqrt{1 - \xi^2} - 3\xi \arcsin \xi \quad (28)$$

$$\varphi_2(\xi) = 16\xi^3 - 2\xi(13 + 2\xi^2) \sqrt{1 - \xi^2} - (4 + 24\xi^2) \arcsin \xi - \arcsin(2\xi^2 - 1) \quad (29)$$

bedeutet.

Die beiden Integrationsfestwerte  $C_1$  und  $C_2$  sind aus bekannten Randwerten der Aufgabe zu bestimmen. Es muß zunächst  $\bar{y}'_{pl}\left(\frac{l}{2}\right) = 0$  sein; daraus bekommt man mit  $\xi\left(\frac{l}{2}\right) = \nu$

$$C_1 = \frac{B}{6a^2} \varphi_1(\nu). \quad (30)$$

Als zweiten Randwert benützt man am zweckmäßigsten die Beziehung  $\bar{y}_{pl}(x_p) = 0$  und damit berechnet sich mit  $\xi(x_p) = 0$

$$\frac{B}{96a^2} \arcsin(-1) + C_2 = 0$$

und daraus mit  $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$$C_2 = \frac{\pi}{2} \frac{B}{96a^2}. \quad (31)$$

Nun bekommt man in dem Bereich  $x_p < x < \frac{l}{2}$

$$\bar{y}_{pl} = \frac{B}{96a^2} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_2(\xi) + 16\xi \varphi_1(\nu) \right] \quad (32)$$

$$\text{und } y_{pl} = \frac{B}{6a^2} \left\{ ax_P [\varphi_1(\nu) + 2] + \xi \varphi_1(\nu) - \frac{1}{16} \varphi_2(\xi) + \frac{\pi}{32} \right\}. \quad (33)$$

Den plastischen Anteil der Durchbiegung in der Balkenmitte, dem die hauptsächlichste Bedeutung zukommt, erhält man daraus mit  $a x_P = \frac{\sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P}$

$$f_{pl} = \frac{B}{6a^2} \left\{ \frac{\sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} [\varphi_1(\nu) + 2] + \nu \varphi_1(\nu) - \frac{1}{16} \varphi_2(\nu) + \frac{\pi}{32} \right\}. \quad (34)$$

Der Klammerausdruck ist dimensionslos,  $\frac{B}{6a^2}$  hat die Dimension einer Länge und berechnet sich nach (23) mit

$$\frac{B}{6a^2} = \frac{Bl^2}{24} \cdot \frac{1}{\left( \nu + \frac{\sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right)^2}.$$

Unter Zugrundelegung der Gl. (12 a), die bei vollen Querschnitten geringer Höhe Bedeutung gewinnt, ist die Berechnung die gleiche, nur ist  $B$  durch

$$B_1 = 9,320 \bar{\varepsilon}'_{pl,F} \frac{1 + \bar{\varepsilon}}{\bar{h}(1 + \bar{\varepsilon})} \quad (35)$$

zu ersetzen. Eine Berechnung von  $\varepsilon'_{pl}$  nach (12 c) ist mit Rücksicht auf große rechnerische Schwierigkeiten schwer durchführbar; dafür wird später eine Näherungsrechnung angegeben werden.

Die größte Durchbiegung, bei der dann bei der geringsten Laststeigerung der Balken unter der Last wegfließt, entsteht, wenn  $P$  die sogenannte Traglast

$$P_T = P_F = \frac{4M_F}{l} \quad (36)$$

erreicht hat; dafür wird  $\nu = 1$  und man erhält

$$f_{pl,F} = \frac{B}{6a^2} \left[ \left( 5 - \frac{3\pi}{2} \right) ax_P + \left( 2 - \frac{9\pi}{16} \right) \right]. \quad (37)$$

Nach Einsetzen aller bereits ermittelten Größen ist schließlich

$$f_{pl,F} = 1,5533 \frac{l^2}{4h} \left( \frac{\sigma_F - \sigma_P}{\sigma_F} \right)^2 \bar{\varepsilon}'_{pl,F} \frac{1 + \bar{\varepsilon}}{1 + \bar{\varepsilon}} \left( 0,2876 \frac{\sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} + 0,2329 \right). \quad (38)$$

Dazu kommt noch der elastische Anteil  $f_{el} = \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}$ ; für  $P_T$  ergibt sich damit

$$f_{el,F} = \frac{l^2}{6h} \frac{\sigma'_F}{E}. \quad (39)$$

Für den elastisch-idealplastischen Körper verschwindet  $f_{pl,F}$  und der Balken fließt plötzlich bei erreichten  $f_{el,F}$  unter der Last weg.

Will man die ein wenig umständliche genaue Berechnung des plastischen Anteiles der Durchbiegung vermeiden, so empfiehlt es sich, den Aus-

druck für die Krümmung der verformten Balkenaxe in eine Reihe zu entwickeln. Es ist

$$\sqrt{1 - \xi^2} = 1 - \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{8} \xi^4 - \frac{3}{48} \xi^6 - \frac{15}{384} \xi^8 - \frac{105}{3840} \xi^{10} - \dots$$

$$\arcsin \xi = \xi + \frac{1}{6} \xi^3 + \frac{3}{40} \xi^5 + \frac{15}{336} \xi^7 + \frac{105}{3456} \xi^9 + \frac{945}{42240} \xi^{11} + \dots$$

Damit berechnet sich

$$2\xi - \xi \sqrt{1 - \xi^2} - \arcsin \xi = \frac{1}{3} \xi^3 + \frac{1}{20} \xi^5 + \frac{1}{56} \xi^7 + \frac{10}{1152} \xi^9 + \frac{7}{1408} \xi^{11} + \dots,$$

und man bekommt die nun näherungsweise gültige Differentialgleichung für den plastischen Anteil der Durchbiegung mit

$$y''_{pl,2} = -\frac{B}{6a^2} \left( \xi^3 + \frac{3}{20} \xi^5 + \frac{3}{56} \xi^7 + \frac{30}{1152} \xi^9 + \frac{21}{1408} \xi^{11} + \dots \right). \quad (40)$$

Durch Integration ergibt sich nun

$$\begin{aligned} y'_{pl,2} &= -\frac{B}{6a^2} \left( \frac{1}{4} \xi^4 + \frac{1}{40} \xi^6 + \frac{3}{448} \xi^8 + \frac{3}{1152} \xi^{10} + \frac{7}{5632} \xi^{12} + \dots \right) \\ &\quad + C_1 = -\frac{B}{6a^2} \psi_1(\xi) + C_1 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} y_{pl,2} &= -\frac{B}{6a^2} \left( \frac{1}{20} \xi^5 + \frac{1}{280} \xi^7 + \frac{1}{1344} \xi^9 + \frac{3}{12672} \xi^{11} + \frac{7}{73216} \xi^{13} + \dots \right) \\ &\quad + C_1 \xi + C_2 = -\frac{B}{6a^2} \psi_2(\xi) + C_1 \xi + C_2 \end{aligned} \quad (42)$$

Die plastisch verformte Stabaxe setzt sich aus einem geraden Stück innerhalb  $0 < x < x_P$  mit der Gleichung  $y_{pl,1} = C_3 x$  und aus einem krummen Stück innerhalb des Bereiches  $x_P < x < \frac{l}{2}$  zusammen, dessen Form durch (42) wiedergegeben wird. Zur Berechnung der drei Festwerte  $C$  stehen drei Randbedingungen zur Verfügung: es muß  $y'_{pl,2} \left( \frac{l}{2} \right) = 0$  sein; daher ist

$$C_1 = \frac{B}{6a^2} \psi_1(\nu).$$

Aus  $y'_{pl,1}(x_P) = y'_{pl,2}(x_P)$  folgt  $\frac{1}{a} C_3 = C_1$  oder  $C_3 = a C_1$ ; aus  $y_{pl,1}(x_P)$

$= y_{pl,2}(x_P)$  erhält man schließlich  $C_3 x_P = C_2$  und damit wird

$$y_{pl} = \frac{B}{6a^2} [(ax_P + \xi) \psi_1(\nu) - \psi_2(\xi)]. \quad (43)$$

Für  $\xi = \nu$  erhält man wieder

$$f_{pl} = \frac{B}{6a^2} [(ax_P + \nu) \psi_1(\nu) - \psi_2(\nu)], \quad (44)$$

und schließlich ergibt sich für  $P = P_T$  und  $\nu = 1$

$$f_{pl,F} = \frac{B}{6a^2} \left( 0,2856 \frac{\sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} + 0,2311 \right), \quad (45)$$

eine Gleichung, die unmittelbar mit (38) die erreichte Genauigkeit abzuschätzen gestattet; in der Form (38) angeschrieben liefert sie bei Berücksichtigung von vier Gliedern der entsprechenden Reihen

$$f_{pl,F} = 1,5533 \frac{l^2}{4h} \left( \frac{\sigma_F - \sigma_P}{\sigma_F} \right)^2 \frac{1 + \chi}{1 + \bar{\chi}} \bar{\varepsilon}'_{pl,F} \left( 0,2856 \frac{\sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} + 0,2311 \right);$$

der Fehler der Näherungsrechnung ist daher praktisch ohne Belang.

Die Berechnung von  $y_{pl}$  auf Grund der Gleichung (12 c) ist ohne Benützung elliptischer Funktionen nicht mehr durchführbar; man wird sich aber in der Regel mit einer Näherungsrechnung durch Reihenentwicklung begnügen können, wobei man es ja durch die Berücksichtigung beliebig vieler Glieder in der Hand hat, die Genauigkeit beliebig zu steigern. Man erhält nun aus (21) und (12 c), wenn man die gleichen Näherungen wie früher macht:

$$y''_{pl,2} = - \frac{B}{2a^2} \xi^2 [2\xi - \xi \sqrt{1 - \xi^2} - \arcsin \xi]$$

und nach erfolgter Reihenentwicklung ergibt sich

$$y''_{pl,2} = - \frac{B}{6a^2} \left( \xi^5 + \frac{3}{20} \xi^7 + \frac{3}{56} \xi^9 + \frac{30}{1152} \xi^{11} + \frac{21}{1408} \xi^{13} + \dots \right), \quad (40a)$$

woraus sich nach Integration

$$\begin{aligned} y'_{pl,2} &= - \frac{B}{6a^2} \left( \frac{1}{6} \xi^6 + \frac{3}{160} \xi^8 + \frac{3}{560} \xi^{10} + \frac{10}{4608} \xi^{12} + \frac{3}{2816} \xi^{14} + \dots \right) + C_1 \\ &= - \frac{B}{6a^2} \chi_1(\xi) + C_1, \end{aligned} \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} y_{pl,2} &= - \frac{B}{6a^2} \left( \frac{1}{42} \xi^7 + \frac{1}{480} \xi^9 + \frac{3}{6160} \xi^{11} + \frac{10}{59904} \xi^{13} + \frac{1}{14080} \xi^{15} + \dots \right) + C_1 \xi + C_2 \\ &= - \frac{B}{6a^2} \chi_2(\xi) + C_1 \xi + C_2 \end{aligned} \quad (42a)$$

berechnet, während  $y_{pl,1} = C_3 x$  unverändert bleibt. Die Freiwerte  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  sind genau so wie früher zu ermitteln. Es ist aus  $y'_{pl,2}(\nu) = 0$  die Größe  $C_1 = \frac{B}{6a^2} \chi_1(\nu)$ . Aus  $y'_{pl,1}(o) = y'_{pl,2}(o)$  berechnet sich wieder  $C_3 = aC_1$  und schließlich folgt aus der letzten Randbedingung  $y_{pl,1}(o) = y_{pl,2}(o)$  der Wert

$$C_2 = x_P \left[ C_3 - \frac{B}{6a} \chi_1(\nu) \right].$$

Damit bekommt man

$$y_{pl,2} = \frac{B}{6a^2} \left[ \left( \frac{\sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} + \xi \right) \chi_1(\nu) - \chi_2(\nu) \right]. \quad (43a)$$

Zahlentafel 1.

$\nu$	$f_1(\nu)$	$\nu^2 f_1(\nu)$	$f_2(\nu)$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_1(\nu) + 2$	$\varphi_2(\nu)$	$\frac{1}{16} \varphi_2(\nu)$	$\psi_1(\nu)$	$\psi_2(\nu)$	$\chi_1(\nu)$	$\chi_2(\nu)$
0,0	0,000000	0,000000	0,000000	-2,0000	0,0000	+ 1,5709	+ 0,09818	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,1	0,000171	0,000002	0,000012	-1,9998	0,0002	- 1,6290	- 0,10181	0,000025	0,000001	0,000000	0,000000
0,2	0,001340	0,000054	0,000218	-1,9995	0,0005	- 4,8290	- 0,30181	0,000402	0,000016	0,000011	0,000000
0,3	0,004569	0,000411	0,001034	-1,9982	0,0018	- 8,0387	- 0,50242	0,002043	0,000122	0,000123	0,000005
0,4	0,010936	0,001750	0,003318	-1,9934	0,0066	- 11,2208	- 0,70130	0,006506	0,000518	0,000696	0,000040
0,5	0,021695	0,005424	0,008204	-1,9839	0,0161	- 14,4034	- 0,90021	0,016043	0,001592	0,002683	0,000190
0,6	0,038250	0,013770	0,017348	-1,9663	0,0337	- 17,1813	- 1,07383	0,033691	0,003906	0,008129	0,000689
0,7	0,062351	0,030552	0,033084	-1,9364	0,0636	- 20,6886	- 1,29304	0,063414	0,008733	0,020873	0,002056
0,8	0,096350	0,061664	0,058624	-1,8895	0,1105	- 23,7531	- 1,48457	0,110337	0,017258	0,047608	0,005326
0,9	0,143974	0,116619	0,099238	-1,8183	0,1817	- 26,7232	- 1,67020	0,181104	0,031619	0,099182	0,012404
1,0	0,214600	0,214600	0,166667	-1,7124	0,2876	- 29,5533	- 1,84708	0,284543	0,054648	0,194009	0,026618

Setzt man  $\xi = \nu$ , so erhält man aus (43 a) die Durchbiegung in der Balkenmitte

$$f_{pl} = \frac{B}{6a^2} \left[ \left( \frac{\sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} + \nu \right) \chi_1(\nu) - \chi_2(\nu) \right] \quad (44 \text{ a})$$

und dessen Größtwert mit  $\nu = 1$

$$f_{pl, F} = \frac{B}{6a^2} \left( 0,1940 \frac{\sigma_F}{\sigma_F - \sigma_P} - 0,0266 \right), \quad (45 \text{ a})$$

wobei zu berücksichtigen ist, daß wieder

$$\frac{B}{6a^2} = \frac{Bl^2}{24} \frac{1}{\left( \frac{\sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} + \nu \right)^2}$$

ist.

Zur Vereinfachung der Ziffernrechnung sind in Zahlentafel 1 die Funktionen  $f_1(\nu)$ ,  $f_2(\nu)$ ,  $\varphi_1(\nu)$ ,  $\varphi_2(\nu)$ ,  $\psi_1(\nu)$ ,  $\psi_2(\nu)$ ,  $\chi_1(\nu)$  und  $\chi_2(\nu)$  für die Zehntelpunkte ihres Bereiches angegeben worden.

Wenn bei verwickelteren Belastungsfällen diese Rechnung zu zeitraubend und zu unübersichtlich wird, wird man sich mit Vorteil baustatischer Verfahren bedienen, die im wesentlichen auf die Ersetzung der Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung herauskommen; dies führt in bekannter Weise auf das Stabzugverfahren.

## B. Statisch unbestimmte Stützung.

Die für den elastischen Verformungsbereich durchgebildeten Berechnungsverfahren zur Ermittlung der inneren Spannungen und Verformungen sind auf den bildsamen Bereich nicht übertragbar, da sie in der Regel die Gültigkeit des Superpositionsgegesetzes zur Voraussetzung haben. Da nun das Verformungsgesetz von der Größe der Längskräfte und Momente nicht mehr unabhängig ist, erscheint es naturgemäß nicht mehr zulässig, den Spannungszustand des statisch unbestimmten Tragwerkes durch Überlagerung der Spannungen an einem statisch bestimmten Grundsystem und dazugehöriger Selbstspannungszustände so zu bestimmen, daß die Verformungen des Grundsystems durch den Zwang der Elastizitätsbedingungen mit denen des gegebenen statisch unbestimmten Tragwerkes zur Übereinstimmung gebracht werden können. Bei der Berücksichtigung plastischer Verformungen steht lediglich die Differentialgleichung der verformten Stabachse sowohl im elastischen als auch im plastischen Bereich zur Verfügung, aus der durch überzählige Randbedingungen die statisch unbestimmten Größen berechnet werden müssen. In der Elastizitätslehre wird dieser Weg nur selten benutzt, da er in der Regel zu recht zeitraubenden Berechnungen führt und die die Rechenarbeit sparenden Überlegungen der Baustatik in ihn nicht so leicht eingebaut werden können.

Mit den hier entwickelten Grundlagen über das Formänderungsgesetz im plastischen Bereich soll nun ein durchlaufender Träger über vier Stützen berechnet werden (Fig. 5), dessen Momentenverteilung bei symmetrischer Ausbildung und Belastung in der Mitte des inneren Feldes durch eine einzige überzählige Größe, das Stützmoment  $X$ , gekennzeichnet ist. Ein ähnliches

Tragwerk habe ich mit den Voraussetzungen der älteren Plastizitätslehre bereits früher durchgerechnet<sup>7)</sup>; ein Vergleich der beiden Berechnungsverfahren zeigt deutlich die grundlegenden Unterschiede in den Auffassungen über die Ursachen des Fließvorganges und die Entwicklung, die die Theorie

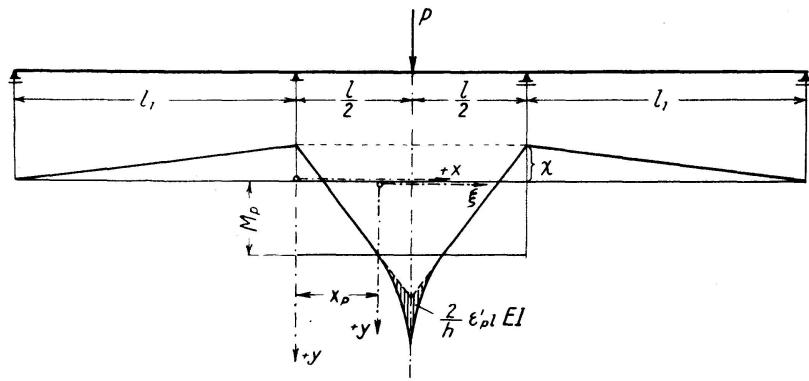


Fig. 5

seither durchgemacht hat. Das Trägheitsmoment  $J$  des Balkens soll unveränderlich angenommen werden; grundsätzlich ist die Berechnung auch bei gestuftem Trägheitsmoment möglich, wobei an die Stelle von  $M$  einfach die verzerrte Momentenfläche  $M' = M \frac{J_v}{J}$  tritt, doch wird damit die Berechnung

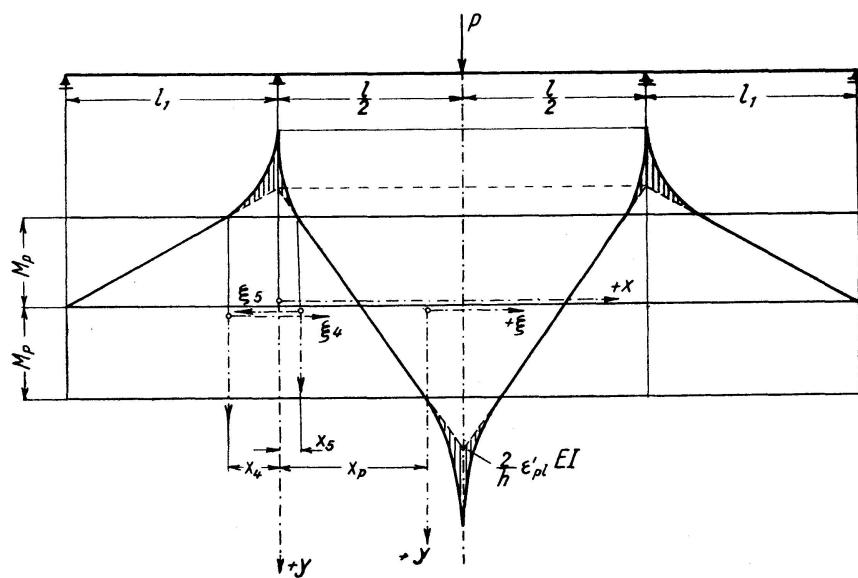


Fig. 6

bereits außerordentlich mühsam. Im Hinblick auf den Eintritt des Fließens sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1. es kommt am Orte des Lastangriffes zu völligem Fließen, ohne daß über der Stütze die gehobene  $P$ -Grenze erreicht wird (Fig. 5); 2. bevor die Balkenmitte völlig fließt (Erreichung der gehobenen  $F$ -Grenze), treten auch bereits über der Stütze Fließerscheinungen auf (Fig. 6). Die beiden Fälle 1 und 2 erfordern eine rechnungsmäßig ganz verschiedene Behandlung.

<sup>7)</sup> J. FRITSCHE, Arbeitsgesetze bei elastisch-plastischer Balkenbiegung. Ztschr. für angew. Math. und Mechanik, 1931, Heft 13.

**1. Die Balkenmitte fließt ohne gleichzeitiges Fließen über den Stützen.**

a) *Die elastische Lösung.*

Mit dem Stützmoment  $X$  ist das Moment in der Seitenöffnung  $M_1 = -X \left(1 + \frac{x}{l_1}\right)$  und in der Mittelöffnung  $M_2 = \frac{P}{2}x - X$ , worin sich die Abszisse  $x$  auf den linken Stützenquerschnitt bezieht. Bezeichnet man die Durchbiegung in der Seitenöffnung mit  $y_1$ , in der Mittelöffnung mit  $y_2$ , so ist bekanntlich

$$\begin{aligned} y_1'' &= \frac{X}{EJ} + \frac{X}{EJl_1} x & y_2'' &= -\frac{P}{2EJ} x + \frac{X}{EJ} \\ y_1' &= \frac{X}{EJ} x + \frac{X}{EJl_1} \frac{x^2}{2} + C_1 & y_2' &= -\frac{P}{2EJ} \frac{x^2}{2} + \frac{X}{EJ} x + C_3 \\ y_1 &= \frac{X}{EJ} \frac{x^2}{2} + \frac{X}{EJl_1} \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 & y_2 &= -\frac{P}{2EJ} \frac{x^3}{6} + \frac{X}{EJ} \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \end{aligned} \quad \left. \right\} (46)$$

Die Freiwerte  $C$  und  $X$  berechnen sich nun aus den Randbedingungen der Formänderungsaufgabe. Es muß 1. ...  $y_1(o) = 0$  sein; daraus folgt  $C_2 = 0$ . 2. muß  $y_1(-l_1) = 0$  sein; daraus berechnet sich  $C_1 = \frac{l_1}{3} \frac{X}{EJ}$ . 3. ist  $y_2'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$  und damit  $C_3 = \frac{l}{2EJ} \left(\frac{Pl}{8} - X\right)$ . Schließlich berechnet sich  $X$  aus der Übergangsbedingung  $y_1'(o) = y_2'(o)$ , aus der  $C_1 = C_3$  und damit

$$X = \frac{3}{8} \frac{Pl}{3 + 2 \frac{l_1}{l}} = \frac{3}{8} \frac{Pl}{9} \text{ und } M_m = \frac{Pl}{4} - X = \frac{Pl}{8} (29 - 3) \quad (47)$$

folgt. Die 5. Randbedingung  $y_2(o) = 0$  braucht nur dann ausgewertet zu werden, wenn auch die Durchbiegung bestimmt werden soll; sie liefert  $C_4 = 0$  und damit die Durchbiegung in der Balkenmitte

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ} \left(1 - \frac{9}{49}\right). \quad (48)$$

In gleicher Weise erhält man die üblichen Lösungen der Baustatik bei quellenmäßiger Darstellung der Differentialgleichung der elastischen Linie. Die elastische Lösung bleibt solange in Gültigkeit, als die Nennspannung in der Balkenmitte kleiner als  $\sigma_P$  ist; der Grenzwert  $P_P$  berechnet sich aus  $M_m = M_P$  mit

$$P_P = \frac{89 M_P}{(29 - 3) l}; \quad (49)$$

der zugehörige Wert des Stützmomentes ist  $X_P = \frac{3 M_P}{29 - 3}$  und es muß daher, wenn die Voraussetzung 1 erfüllt sein soll,  $\vartheta$  recht groß sein; sie gilt folglich für eine im Verhältnis zur Mittelöffnung weitgespannte Seitenöffnung.

b) *Die plastische Lösung im Bereich  $P_P < P < P_F$ .*

Bei Überschreitung von  $P_P$  beginnen die schwächsten Schichten zu fließen, ein Vorgang, der mit wachsender Last auch die Schichten höherer Festigkeit erfaßt, bis schließlich beim Erreichen von  $P_F$  die innere Wider-

standsmöglichkeit des Mittelquerschnittes erschöpft und dort ein Plastizitätsgelenk entstanden ist, das bei einer Überschreitung von  $P_F$  der Verformung keinen Widerstand mehr entgegensetzen kann. Zum Unterschied gegenüber der älteren Plastizitätslehre bleibt jedoch das elastische Spannungsfeld der Biegung erhalten, ein allmählicher plastischer Abbau der Spannungsspitzen findet nach der neueren Auffassung nicht statt.

Die verformte Stabachse zerfällt nun in drei voneinander getrennt zu berechnende Stücke, in das Stück  $y_1$  in der Seitenöffnung, das elastische Stück  $y_2$  und das elastisch-plastische Stück  $y_3$  in der Mittelöffnung.  $y_1$  und  $y_2$  sind durch die Gleichungen (46) bestimmt,  $y_3$  berechnet sich aus

$$y_3'' = -\frac{P}{2EJ}x + \frac{X}{EJ} - \frac{B}{2} \left[ 2\xi - \xi \sqrt{1 - \xi^2} - \arcsin \xi \right], \quad (50)$$

worin  $\xi = ax + b$  und die beiden Zahlen  $a$  und  $b$  durch

$$a = \frac{P}{2(M_F - M_P)} \quad \text{und} \quad b = -\frac{X + M_P}{M_F - M_P} \quad (51)$$

festgelegt sind. Durch Integration erhält man

$$\left. \begin{aligned} y_3' &= -\frac{P}{2EJ} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{X}{EJ}x - \frac{B}{6a} \varphi_1(\xi) + C_5 \\ y_3 &= -\frac{P}{2EJ} \frac{x^3}{6} + \frac{X}{EJ} \frac{x^2}{2} - \frac{B}{96a^2} \varphi_2(\xi) + C_5x + C_6 \end{aligned} \right\}; \quad (52)$$

$\varphi_1(\xi)$  und  $\varphi_2(\xi)$  sind durch (28) und (29) bestimmt.

Die Berechnung der sieben Festwerte ist mit Hilfe von sieben Randbedingungen ohne weiteres möglich; 1. folgt aus  $y_1(0) = 0$  der Festwert  $C_2 = 0$ ; 2. berechnet sich aus  $y_1(-l_1) = 0$   $C_1 = \frac{l}{3} \frac{X}{EJ}$ . Mit 3.  $y'_1(0) = y'_2(0)$  ergibt sich  $C_1 = C_3$  und 4. erhält man aus  $y'_3\left(\frac{l}{2}\right) = 0$  eine Beziehung zur Ermittlung von  $C_5$ . Mit der Bezeichnung

$$\xi\left(\frac{l}{2}\right) = \nu = \frac{1}{M_F - M_P} \left( \frac{Pl}{4} - X - M_P \right) \quad (53)$$

ergibt sich daraus

$$C_5 = \frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{Xl}{2EJ} + \frac{B}{6a} \varphi_1(\nu)$$

Die statisch unbestimmte Größe  $X$  bekommt man nun aus der Übergangsbedingung  $y'_3(x_p) = y'_2(x_p)$ ; mit  $x_p = \frac{2}{P}(X + M_P)$  und  $\xi(x_p) = 0$  bekommt man sie zunächst in der Form

$$C_3 = C_5 + \frac{B}{3a},$$

aus der sich nach Einsetzen von  $C_5$  und  $C_3$  die Gleichung

$$\frac{Pl^2}{16EJ} \left( 1 - \frac{89}{3} \frac{X}{Pl} \right) + \frac{B}{6a} [2 + \varphi_1(\nu)] = 0 \quad (54)$$

berechnet. Daraus ergibt sich nun

$$X = \frac{3}{8} \frac{Pl}{g} + [2 + \varphi_1(\nu)] \frac{BEJ}{gal} = \frac{3}{8} \frac{Pl}{g} + [2 + \varphi_1(\nu)] \frac{2BEJ(M_F - M_P)}{P g l}. \quad (55)$$

Es erscheint zweckmäßig,  $X$  in seinen elastischen und seinen plastischen Teil zu trennen und  $X = X_{el} + \Delta X$  anzuschreiben. Damit berechnet sich nun

$$\Delta X = \frac{2BEJ(M_F - M_P)}{P g l} [2 + \varphi_1(\nu)] \quad (56)$$

und

$$M_m = \frac{Pl}{8g} (2g - 3) - \Delta X. \quad (57)$$

Die Ermittlung von  $\Delta X$  ist jedoch aus dieser Gleichung nicht ohne weiteres möglich, da auch  $\nu$  von  $X$  abhängig ist und man muß sich zur Auswertung von (56) eines teilweise auch zeichnerischen Verfahrens bedienen. Verhältnismäßig leicht gewinnt man zunächst die Grenzlast  $P_F$  dieses Bereiches, da für  $M_m = M_F$  die Zahl  $\nu = 1$  wird. Damit ist  $\varphi_1(1) = 3 \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $2 + \varphi_1(1) = 0,2876$  und

$$\Delta X_F = 0,5752 \frac{BEJ(M_F - M_P)}{P_F g l}. \quad (58)$$

Nun ist beim Erreichen der  $F$ -Grenze in der Balkenmitte

$$M_m = M_F = \frac{P_F l}{8g} (2g - 3) - \Delta X_F;$$

nach Einsetzen von  $\Delta X_F$  nach (58) erhält man die quadratische Gleichung

$$P_F^2 - \frac{8g M_F}{(2g - 3)l} P_F - 4,6019 \frac{BEJ(M_F - M_P)}{(2g - 3)l^2} = 0, \quad (59)$$

aus der sich nun  $P_F$  und damit auch  $\Delta X_F$  ohne besondere Mühe ermitteln lässt.

Für einen Zwischenwert  $P_P < P < P_F$  erscheint es am geeignetsten, einen beliebigen Wert  $\nu$  zwischen Null und 1 anzunehmen; man kennt dann auch  $\varphi_1(\nu) + 2$  und hat den zugehörigen Wert  $P$  aus der quadratischen Gleichung

$$\frac{g Pl}{2BEJ(M_F - M_P)} \left[ \frac{2g - 3}{8g} Pl - M_P(1 - \nu) - \nu M_F \right] = 2 + \varphi_1(\nu) \quad (60)$$

zu berechnen.

Nach Ermittlung der Momentenverteilung ist noch die Durchbiegung in der Balkenmitte zu berechnen. Die 6. Randbedingung lautet  $y_3(x_P) = y_2(x_P)$ , aus welcher sich die Beziehung

$$-\frac{\pi}{2} \frac{B}{96a^2} + (C_5 - C_3)x_P + (C_6 - C_4) = 0$$

ergibt. Aus der 7. Randbedingung  $y_2(0) = 0$  folgt  $C_4 = 0$  und mit den früher bereits ermittelten Freiwerten ergibt sich nun

$$C_6 = \frac{B}{6a^2} \left( \frac{\pi}{32} + 2ax_P \right).$$

Damit bekommt man nun

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ} \left(1 - \frac{9}{49}\right) + \frac{B}{6a^2} \left\{ \frac{1}{16} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_2(\nu) \right] + 2a \left[ x_P + \frac{l}{4} \varphi_1(\nu) \right] \right\} \quad (61)$$

Der plastische Anteil von (61) ergibt sich nach Einsetzen von  $a$  nach (51) und  $x_P$  mit

$$f_{pl} = \frac{B}{3} \frac{M_F - M_P}{P} \left\{ \frac{1}{8} \frac{M_F - M_P}{P} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_2(\nu) \right] + \frac{4}{P} (X + M_P) + \frac{l}{2} \varphi_1(\nu) \right\} \quad (61 \text{ a})$$

Um den Grenzwert dieses Bereiches zu bekommen, hat man  $\nu = 1$  zu setzen und erhält  $\frac{\pi}{2} - \varphi_2(1) = 15\pi - 16 = 31,1238$  und  $\varphi_1(1) = 3 \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = -1,7124$ ; für  $P$  ist der durch (59) bestimmte Wert  $P_F$  einzusetzen und es ist dann

$$f_{pl, F} = \frac{B}{3} \frac{M_F - M_P}{P_F} \left\{ \frac{1}{P_F} [3,8905(M_F - M_P) + 4(X + M_P)] - 0,8562l \right\} \quad (61 \text{ b})$$

### c) Die Berechnung der Traglast $P_T$ des durchlaufenden Trägers.

Nach Einschaltung des Fließgelenkes in der Balkenmitte ist für jede Laststeigerung über  $P_F$  hinaus das Tragwerk statisch bestimmt geworden und besteht aus zwei nebeneinander liegenden, einfachen Balken mit Kragarmen von der Länge  $\frac{l}{2}$ . Das Stützmoment ist nun

$$X = X_F + \frac{l}{4} (P - P_F), \quad (62)$$

während das Moment in der Balkenmitte die Größe  $M_F$  unverändert beibehält; allerdings muß dabei eine neuerliche Verfestigung des Werkstoffes ausgeschlossen werden. Die Traglast ist erreicht, wenn auch  $X = M_F$  geworden ist; dann ist

$$M_F = X_F + \frac{l}{4} (P_T - P_F) \quad \text{und} \quad P_T = P_F + \frac{4}{l} (M_F - X_F), \quad (63)$$

während sich bei einem elastisch-idealplastischen Körper

$$P_T = \frac{8M_F}{l} \quad (63 \text{ a})$$

ergeben hat.

Beim Ablaufe des Fließens in der Balkenmitte muß diese Stelle trotzdem imstande sein, die Steigerung der Querkraft aufzunehmen. Wenn auch gerade an der Lastangriffsstelle die Spannungsverteilung auf Grund der technischen Biegungslehre nur einen ungefähren Anhaltspunkt für die wirklichen Verhältnisse liefert, so ist doch nur schwer verständlich, wie der Querschnitt eine weitere Steigerung der Querkraft verarbeiten kann, wenn nach den Vorstellungen der älteren Plastizitätslehre die Spannungsverteilung durch zwei Rechtecke beschrieben wird. Nach den Gleichgewichtsbedingungen am Körperelement hätte dann die Querkraftsteigerung in einem engen Bereich um die Stabachse herum abgegeben werden müssen. Dieser

wunde Punkt der älteren Vorstellungen entfällt nun, da die neuere Theorie die viel wahrscheinlichere Annahme machen muß, daß das Fließen bei Aufrechterhaltung des elastischen Spannungsfeldes erfolgt.

Was den Durchbiegungszuwachs anbetrifft, so ist dieser nun am statisch bestimmten, einfachen Träger mit Kragarm bei Belastung des Kragarmendes mit  $\frac{1}{2}(P - P_F)$  zu berechnen. Solange  $X < M_P$ , ist die Verformung elastisch; bei  $X \geq M_P$  ist mit Hilfe des angegebenen Verformungsgesetzes ähnlich wie in A 2 vorzugehen.

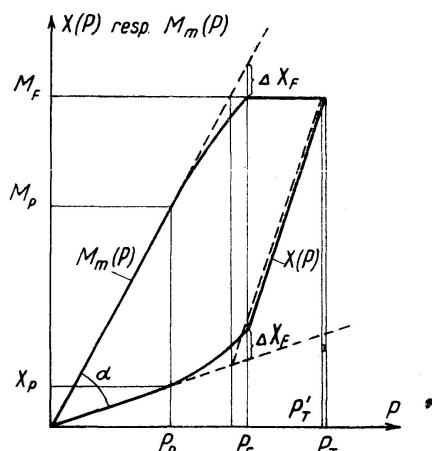


Fig. 7.

Der Momentenausgleich eines Durchlaufträgers im Falle B1 —  
L'égalisation des moments d'une poutre continue dans le cas B1 —  
Equilisation of moments of a continuous beam in case B1.

In Fig. 7 ist der Verlauf von  $X(P)$  und von  $M_m(P)$  dargestellt, wie er sich auf Grund der vorstehenden Rechnung ergibt. Man erkennt deutlich das Bestreben zum Momentenausgleich, der allerdings, wie bereits STÜSSI<sup>8)</sup> bemerkt hat, umso schwieriger ist und umso eher von der Verfestigung des Werkstoffes gestört werden kann, je größer der Neigungsunterschied  $\alpha$  der beiden Geraden  $X(P)$  und  $M_m(P)$  im elastischen Bereich ist, je größere innere Kraftverlagerungen durch das Fließen vor sich gehen müssen. Wie man aus Fig. 7 weiter erkennt, muß die bei der Berechnung des Momentenausgleiches gewöhnlich getroffene Voraussetzung des Werkstoffes als elastisch-idealplastischen Körper zu einer etwas zu geringen Traglast  $P_r$  führen.

## 2. Die Balkenmitte fließt erst nach Überschreiten von $M_P$ über der Stütze.

Bei kleineren Werten von  $\vartheta$  wird der Betrag von  $X$  nur wenig kleiner sein als der von  $M_m$  und es müssen daher Fließerscheinungen über der Stütze auftreten, bevor  $M_m = M_F$  geworden ist. Der Bereich rein elastischer Verformung ist wieder bei  $P_p$  abgeschlossen, das nach (49) zu berechnen ist. Nun beginnen plastische Vorgänge die Spannungsverteilung zu beeinflussen; die Berechnung erfolgt zunächst genau so wie unter A, doch ist dieser Weg nurmehr solange richtig, solange  $X < M_P$  ist. Ist  $X \geq M_P$  und  $P > P_1$ , muß die Berechnung in anderer Weise geführt werden.

### a) Berechnung von $P_1$ .

Auf Grund der bereits geschilderten Bedeutung von  $P_1$  ist

$$\Delta X_1 = M_P - \frac{3}{8} \frac{P_1 l}{\vartheta}$$

<sup>8)</sup> F. STÜSSI und C. F. KOLBRUNNER, Beitrag zum Traglastverfahren. Bautechnik 1935, Heft 21.

und

$$\nu_1 = \frac{2\vartheta - 3}{8\vartheta} \frac{P_1 l}{M_F - M_P} - \frac{\Delta X_1 + M_P}{M_F - M_P} = \frac{\frac{P_1 l}{4} - 2M_P}{M_F - M_P}.$$

Damit erhält man

$$P_1 l = 4 [\nu_1 (M_F - M_P) + 2M_P]; \quad (64)$$

setzt man diesen Ausdruck in (60) ein, so erhält man zur Bestimmung von  $\nu_1$

$$\frac{1}{BEJ} \left( \nu_1 + 2 \frac{M_P}{M_F - M_P} \right) \left[ 2M_P(\vartheta - 3) - 3\nu_1(M_F - M_P) \right] = 2 + \varphi_1(\nu_1). \quad (65)$$

Die Lösung der Gleichung (65) geschieht am zweckmäßigsten auf zeichnerischem Wege; man trägt die linke und die rechte Seite der Gleichung punktweise auf und sucht den Schnittpunkt dieser beiden Linien. Mit  $\nu_1$  lässt sich dann leicht  $P_1$  und  $\Delta X_1$  berechnen.

b) Die Berechnung von  $P_F$ , wenn  $M_m = M_F$  und  $M_P < X < M_F$ .

In diesem Falle tritt ein bildsam verformtes Gebiet zu beiden Seiten der Mittelstütze zu den früheren Stücken der verformten Stabachse hinzu, wodurch sich die Rechnung wesentlich verwickelter und zeitraubender gestaltet. Bezeichnet man die Durchbiegung dieser beiden neuen Bereiche mit  $y_4$  und  $y_5$ , so hat man

$$\left. \begin{aligned} y_4'' &= \frac{X}{EJ} + \frac{X}{EJl_1} x + \frac{B}{2} [2\xi_4 - \xi_4 \sqrt{(1-\xi_4)^2} - \arcsin \xi_4] \\ y_4' &= \frac{X}{EJ} x + \frac{X}{EJl_1} \frac{x^2}{2} + \frac{B}{6a_4} \varphi_1(\xi_4) + C_7 \\ y_4 &= \frac{X}{EJ} \frac{x^2}{2} + \frac{X}{EJl_1} \frac{x^3}{6} + \frac{B}{96a_4^2} \varphi_2(\xi_4) + C_7 x + C_8 \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

und

$$\left. \begin{aligned} y_5'' &= -\frac{P}{2EJ} x + \frac{X}{EJ} + \frac{B}{2} [2\xi_5 - \xi_5 \sqrt{(1-\xi_5)^2} - \arcsin \xi_5] \\ y_5' &= -\frac{P}{2EJ} \frac{x^2}{2} + \frac{X}{EJ} x + \frac{B}{6a_5} \varphi_1(\xi_5) + C_9 \\ y_5 &= -\frac{P}{2EJ} \frac{x^3}{6} + \frac{X}{EJ} \frac{x^2}{2} + \frac{B}{96a_5^2} \varphi_2(\xi_5) + C_9 x + C_{10}. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Darin bedeutet

$$\xi_4 = a_4 x + b_4 = \frac{1}{M_F - M_P} \left[ -X \left( 1 + \frac{x}{l_1} \right) + M_P \right] \text{ bzw.}$$

$$a_4 = -\frac{X}{l_1 (M_F - M_P)} \quad \text{und} \quad b_4 = \frac{M_P - X}{M_F - M_P}; \quad (68)$$

$$y_4 \text{ gilt bis } x_4 = -\frac{b_4}{a_4} = \frac{1}{X} \cdot l_1 (M_P - X).$$

Ebenso ist

$$\xi_5 = a_5 x + b_5 = \frac{1}{M_F - M_P} \left( \frac{P}{2} x - X + M_P \right) \quad \text{bzw.}$$

$$a_5 = \frac{P}{2(M_F - M_P)} \quad \text{und} \quad b_5 = \frac{M_P - X}{M_F - M_P} = b_4; \quad (69)$$

$$y_5 \text{ gilt nun bis } x_5 = -\frac{b_5}{a_5} = -\frac{2(M_P - X)}{P}.$$

Zur Berechnung der Freiwerte  $C_1$  bis  $C_{10}$  und  $X$  stehen nun elf Randbedingungen zur Verfügung: 1. folgt aus  $y_1(-l_1) = 0$  die Gleichung

$$\frac{l^2}{3} \frac{X}{EJ} - C_1 l_1 + C_2 = 0.$$

Die erste Übergangsbedingung lautet  $y'_1(x_4) = y'_4(x_4)$ , woraus sich mit  $\varphi_1(o) = -2$  die Beziehung

$$C_1 = C_7 + \frac{B}{6a_4} \varphi_1(o) \quad \text{oder} \quad C_1 - C_7 = -\frac{B}{3a_4} \text{ ergibt.}$$

3. ist  $y'_4(o) = y'_5(o)$ ; daraus folgt

$$C_7 - C_9 = \frac{B}{6} \left[ \frac{1}{a_5} \varphi_1(b_5) - \frac{1}{a_4} \varphi_1(b_4) \right].$$

Weiter ist 4.  $y'_5(x_5) = y'_2(x_5)$ , und man bekommt daraus  $C_9 - C_3 = \frac{B}{3a_5}$ .

Nun erhält man 5. aus  $y'_2(x_P) = y'_3(x_P)$  die Beziehung  $C_3 - C_5 = \frac{B}{3a}$ .

Aus der 6. Randbedingung  $y'_3 \left( \frac{l}{2} \right) = 0$  bekommt man die bereits früher angegebene Gleichung

$$C_5 = \frac{l}{2EJ} \left( \frac{Pl}{8} - X \right) + \frac{B}{6a} \varphi_1(v).$$

Durch Zusammenfügen der Gleichungen aus den Bedingungen 6, 5, 4, 3 und 2 erhält man schließlich

$$C_1 = \frac{l}{2EJ} \left( \frac{Pl}{8} - X \right) + \frac{B}{6a} \left[ 2 + \varphi_1(v) \right] + \frac{B}{6} \left( \frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_4} \right) \left[ 2 + \varphi_1(b_4) \right].$$

Damit berechnet sich aus der Randbedingung 1

$$C_2 = l_1 \left\{ \frac{l}{6EJ} \left( \frac{3}{8} Pl - X \right) + \frac{B}{6} \left[ \frac{1}{a} [2 + \varphi_1(v)] + \left( \frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_4} \right) [2 + \varphi_1(b_4)] \right] \right\}.$$

Zur Ermittlung einer Gleichung, in der nur  $X$  als Unbekannte vorkommt, sind nun noch die zwei weiteren Randbedingungen 7 und 8 zu benutzen; sie lauten  $y_1(x_4) = y_4(x_4)$  und  $y_4(o) = 0$ . Man erhält aus der letzteren

$$C_8 = -\frac{B}{96a_4^2} \varphi_2(b_4)$$

und aus der 7. schließlich

$$\frac{l}{6EJ} \left( \frac{3}{8} Pl - gX \right) + \frac{B}{6} \left[ \frac{1}{a} [2 + \varphi_1(\nu)] + \left( \frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_4} \right) [2 + \varphi_1(b_4)] \right] \\ - \frac{B}{3a_4} \frac{x_4}{l_1} = \frac{B}{96a_4^2 l_1} [\varphi_2(o) - \varphi_2(b_4)]. \quad (70)$$

Um zu dem Grenzwerte  $P_F$  zu kommen, hat man zunächst in dieser Gleichung  $\nu = 1$  zu setzen; damit wird  $2 + \varphi_1(1) = 0,2876$  und man erhält

$$\frac{l \cdot x^2}{BEJ} \left( \frac{3}{8} Pl - Xg \right) + 0,5752 \frac{X^2}{P} (M_F - M_p) + [2 + \varphi_1(b_4)] \frac{X}{P} (2X + Pl_1) (M_F - M_p) \\ + 2l_1 b_4 (M_F - M_p)^2 - \frac{1}{16} l_1 (M_F - M_p)^2 [\varphi_2(o) - \varphi_2(b_4)] = 0. \quad (71)$$

Da

$$\nu = \frac{1}{M_F - M_p} \left( \frac{Pl}{4} - X - M_p \right)$$

war, berechnet sich mit  $\nu = 1$  daraus

$$P_F = \frac{4}{l} (X_F + M_F); \quad \text{aus} \quad b_4 = \frac{M_p - X}{M_F - M_p}$$

lässt sich der zugehörige Wert  $X_F$  in der Form  $X_F = M_p - b_F(M_F - M_p)$  anschreiben. Damit wird nun

$$P_F = \frac{4}{l} (M_F + M_p) - b_F(M_F - M_p), \quad (72)$$

worin  $b_F$  jenen besonderen Wert  $b_4$  vorstellt, der gerade  $P_F$  bzw.  $X_F$  bestimmt; nun kann die Gleichung (71) in einer Form dargestellt werden, in der nur  $b_F$  als Unbekannte vorkommt. Sie lautet:

$$\frac{3l}{2} \frac{1}{BEJ} [(M_F + M_p) - b_F(M_F - M_p)] [M_p - b_F(M_F - M_p)]^2 - \frac{9l}{BEJ} [M_p - b_F(M_F - M_p)]^3 \\ + 0,5752 l \frac{(M_F - M_p) [M_p - b_F(M_F - M_p)]^2}{4 [(M_F + M_p) - b_F(M_F - M_p)]} \\ + \frac{l}{2} \frac{[M_p - b_F(M_F - M_p)] (M_F - M_p) \left[ M_F + 2 \frac{l_1}{l} (M_F + M_p) - b_F \left( 1 + 2 \frac{l_1}{l} \right) (M_F - M_p) \right]}{(M_F + M_p) - b_F(M_F - M_p)} [2 + \varphi_1(b_F)] \\ + 2l_1 b_F (M_F - M_p)^2 - \frac{l_1}{16} (M_F - M_p)^2 [\varphi_2(o) - \varphi_2(b_F)] = 0. \quad (73)$$

Diese Gleichung löst man am besten versuchsweise auf; man wählt  $b_F = \frac{\nu}{10}$ , wobei  $\nu$  jeden ganzzahligen Wert zwischen 0 und 10 annehmen kann. Dann berechnet man  $P_F(\nu)$  und  $X_F(\nu)$ , entnimmt der Zahlentafel 1  $\varphi_1\left(\frac{\nu}{10}\right)$  und  $\varphi_2\left(\frac{\nu}{10}\right)$  und ermittelt damit den Wert der Gl. (73), den man nun in Abhängigkeit von  $\nu$  in einem Axenkreuz aufträgt. Im Schnitt dieser

Linie mit der Bezugsaxe findet man den gesuchten Wert  $b_F$ , mit dem sich dann  $P_F$  und  $X_F$  leicht berechnen läßt.

Um die Tragfähigkeit  $P_T$  zu erhalten, hat man genau so wie früher nach (63) vorzugehen. In Fig. 8 ist der Momentenausgleich wieder in übersichtlicher Form dargestellt.

Die Durchbiegung  $f$  in der Balkenmitte erhält man erst nach Auswertung der drei noch nicht berücksichtigten Randbedingungen 9, 10 und 11, welche folgendermaßen lauten:  $y_5(o) = 0$ ,  $y_5(x_5) = y_2(x_5)$  und  $y_2(x_P) = y_3(x_P)$ . Man erhält aus 9

$$C_{10} = -\frac{B}{96a_5^2} \varphi_2(b_5), \text{ und aus 10}$$

$$(C_9 - C_3)x_5 + (C_{10} - C_4) = -\frac{B}{96a_5^2} \varphi_2(o);$$

daraus berechnet sich nun

$$C_4 = \frac{B}{96a_5^2} [\varphi_2(o) - \varphi_2(b_5)] + \frac{1}{3} \frac{B}{a_5} x_5.$$

Aus 11 folgt schließlich  $(C_3 - C_5)x_P + (C_4 - C_6) = -\frac{B}{96a^2} \varphi_2(o)$ ,

und daraus ermittelt sich dann

$$C_6 = \frac{B}{96} \left\{ \frac{1}{a^2} \varphi_2(o) + \frac{1}{a_5^2} [\varphi_2(o) - \varphi_2(b_5)] \right\} + \frac{B}{3} x_P \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{a_5} \right).$$

Damit berechnet sich nun mit  $\varphi_2(o) = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} f = & \frac{Pl^3}{48EJ} \left( 1 - \frac{9}{49} \right) + \frac{B}{96a^2} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_2(v) \right] + \frac{B}{96a_5^2} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_2(b_5) \right] + \frac{B}{6a} \left[ 2x_P + \frac{l}{2} \varphi_1(v) \right] \\ & + \frac{1}{3} \frac{B}{a_5} x_5. \end{aligned} \quad (74)$$

Die zahlenmäßige Auswertung dieser Gleichung macht keine besonderen Schwierigkeiten, da  $X$  bereits bekannt ist und daher die Zahlen  $v$  und  $b$  und die Größen  $a$ ,  $a_5$  und  $x_5$  unmittelbar berechnet werden können.

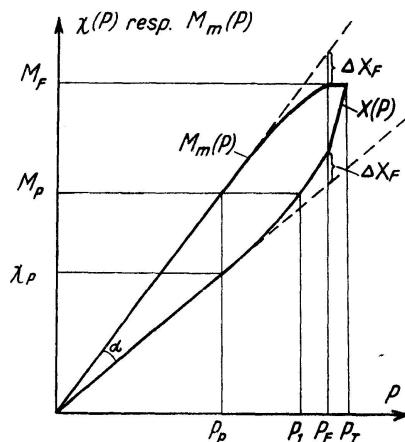
### 3. Einige Bemerkungen zum Momentenausgleich.

Wie man aus dem Vergleich der Fig. 7 und 8 erkennt, geht der Momentenausgleich umso leichter und störungsfreier vor sich, je kleiner der Öffnungswinkel  $\alpha$  zwischen den beiden elastischen Geraden  $X(P)$  und  $M_m(P)$  ist. Beim beiderseits eingespannten Balken ist, abgesehen vom Vorzeichen,  $X$  und  $M_m$  gleich groß, der Öffnungswinkel  $\alpha$  wird gleich Null, der Ausgleich ist daher von vornherein bereits gegeben. Derartige Anordnungen sind mit Rücksicht auf das Erreichen der Tragfähigkeit ohne eigentliches Fließen in einem oder in mehreren Fließgelenken als die baulich am zweckmäßigsten zu bezeichnen, da sie plastizitätstheoretisch die größte Steifigkeit ergeben. Solche Tragwerksformen sind daher anzustreben und es ist ohne weiteres erkennbar, daß der bei der Bemessung der Tragwerke übliche Spannungsmaßstab diese Voraussetzungen schafft. Eine durch Anpassung des Trägheitsmomentes an die Momentenlinie gewonnene Werkstoffverteil-

lung verbürgt daher auch plastizitätstheoretisch höchste Tragfähigkeit und größte Steifigkeit. Der Sicherheitsüberschuß statisch unbestimmter Tragwerke gegenüber statisch bestimmten verschwindet dann, wenn das Tragwerk in allen maßgebenden Querschnitten genau nach der Elastizitätstheorie bemessen worden ist.

Fig. 8.

Der Momentenausgleich eines Durchlaufträgers im Falle B 2 — L'égalisation des moments d'une poutre continue dans le cas B 2 — Equilisation of moments of a continuous beam in case B 2.



#### 4. Die Versuche von Maier-Leibnitz.<sup>9)</sup>

Zur Überprüfung und zum weiteren Verständnis der hier vorgetragenen Zusammenhänge sollen nun die bekannten und in ihrer Art klassischen Versuche von MAIER-LEIBNITZ herangezogen werden, bei denen mit großer Schärfe die hier errechneten Größen durch Messung bestimmt worden sind. Der Querschnitt des Versuchsbalkens ist ein neigungsloser Breitflansch-Stahl IP 10, dessen Widerstandsmoment  $W = 90 \text{ cm}^3$  und dessen Trägheitsmoment  $J = 453 \text{ cm}^4$  beträgt. Unter der Annahme, daß die Fließschichten plötzlich die ganze Höhe des Querschnittes durchsetzen, berechnet sich nach Gl. (7) der unter Fußnote 2 angeführten Arbeit mit  $c = \frac{1}{30} \dots \mu_F = 0,0874$  und daher  $\alpha = 0,212$ . Damit ist  $\sigma'_F = \sigma_F (1 + \alpha) = 1,212 \sigma_F$ .

Bei dem einfachen Balken von der Spannweite  $l = 120 \text{ cm}$  ist nach Fig. 3 des Versuchsberichtes die Tragfähigkeit etwa bei  $P_F = P_T = 9,75 \text{ t}$  völlig erschöpft; beachtet man, daß infolge einer 6 cm breiten Steife an der Stelle des Lastangriffes die ungünstigste Beanspruchung am Steifenrande entstehen muß, so erhält man dort

$$M = \frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} - 3 \right),$$

und wenn dieses Moment gleich  $M_F = \sigma'_F W$  geworden ist, muß der oben erwähnte Grenzzustand eingetreten sein. Daraus ergibt sich

$$\sigma'_F = \frac{P_F}{2W} \left( \frac{l}{2} - 3 \right) = \frac{9,75}{180} \cdot 57 = 3,09 \text{ t/cm}^2.$$

Mit  $\alpha = 0,212$  berechnet sich nun

$$\sigma_F = \frac{3,09}{1,212} = 2,55 \text{ t/cm}^2.$$

<sup>9)</sup> MAIER-LEIBNITZ, Versuche zur weiteren Klärung der Frage der tatsächlichen Tragfähigkeit durchlaufender Träger aus Baustahl. Stahlbau 1936, Heft 20.

Auf Grund von Zugversuchen mit Probestäben aus den Flanschen wurde eine mittlere Fließgrenze des Werkstoffes von  $\sigma_F = 2,46 \text{ t/cm}^2$  bestimmt; die Übereinstimmung ist befriedigend, da die Abweichung im unvermeidlichen Streubereich liegt. Die  $P$ -Grenze ist leider nicht unmittelbar gemessen worden. Schätzt man sie mit  $\sigma_P = 1,90 \text{ t/cm}^2$ , dann ist unter Annahme einer Unabhängigkeit der Feldwirkung von der Festigkeit der Einzelschicht auch

$$\sigma'_P = 1,212 \sigma_P = 2,30 \text{ t/cm}^2.$$

Damit berechnet sich die Last, bei der voraussichtlich die ersten Fließlinien und die ersten bleibenden Dehnungen auftreten müssen, mit

$$P_p = \frac{2 \sigma'_F W}{\frac{l}{2} - 3} = \frac{180 \cdot 2,30}{57} = 7,26 \text{ t.}$$

MAIER-LEIBNITZ gibt an, daß tatsächlich bei  $P = 7,33 \text{ t}$  bleibende Durchbiegungen aufzutreten beginnen.

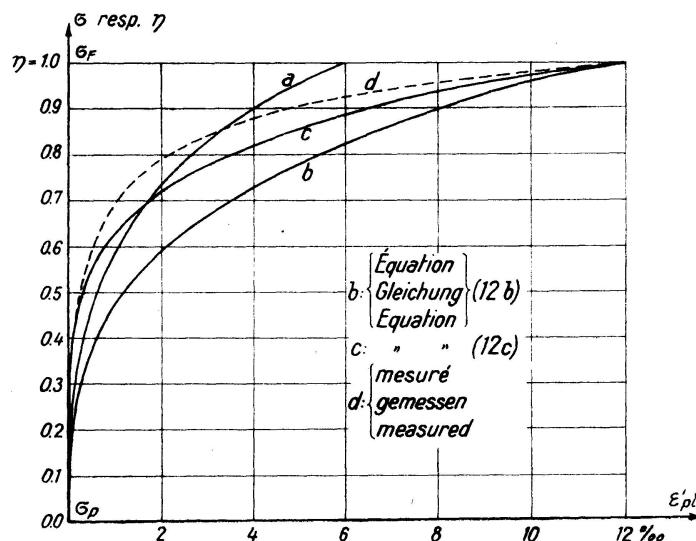


Fig. 9.

Die plastischen Dehnungen in der Balkenmitte des von Maier-Leibnitz geprüften einfachen Balkens — Les allongements plastiques au milieu de la poutre simple auscultée par Maier-Leibnitz — Plastic elongations in the middle of the simple beam tested by Maier-Leibnitz.

In dem Bereich  $\sigma'_P < \sigma' < \sigma'_F$  ist nun, da  $\nu = \bar{\nu}$  ist, nach (12 b)

$$\varepsilon'_{pl} = 4,660 \bar{\varepsilon}'_{pl,F} f_1(\nu);$$

$\bar{\varepsilon}'_{pl,F}$  ist diesen Versuchen mit 0,006 zu entnehmen; damit ist nun  $\varepsilon'_{pl} = 0,005592 f_1(\nu)$  und nach (12 c) erhält man ebenso  $\varepsilon'_{pl} = 0,005592 \nu^2 f_1(\nu)$ . In Fig. 9 sind nun die errechneten und die gemessenen Werte  $\varepsilon'_{pl}$  einander gegenübergestellt worden; mit Rücksicht auf die lange Meßstrecke von 20 cm können jedoch die gemessenen Dehnungen, die einem Mittelwert in der Meßstrecke entsprechen, nicht unmittelbar den in der Balkenmitte errechneten gleichgesetzt werden; Fig. 9 ist daher mit einer geschätzten Größtdehnung gleich dem doppelten Betrage des gemessenen Wertes gezeichnet worden, doch lassen die Umstände keinen halbwegs sicheren Schluß auf den wirklichen Wert zu. Man erkennt, daß die tatsächlichen Dehnungen noch

Zahlentafel 2.

$$\dot{\varepsilon}'_{pl, F} = 0,012, \nu = \bar{\nu}, \sigma_p = 1,90 t/cm^2, \sigma_F = 2,55 t/cm^2, E = 2035 t/cm^2.$$

$\nu$	$\dot{\varepsilon}'_{pl}$ nach Gl. (12b) in v. T.	$\dot{\varepsilon}'_{pl}$ nach Gl. (12c) in v. T.	$\dot{\varepsilon}'_{pl}$ gemessen mit einer Meßstrecke von 20 cm	$\dot{\varepsilon}'_{pl}$ in der Balkenmitte daraus geschätzt	$B$ in $6 a^2$	$f_{pl}$ nach Gl. (34) in cm	$f_{pl}$ nach Gl. (44a) in cm	$f_{pl}$ gemessen in cm	$f_{pl}$ nach (75)	$t_{m, pl} (\nu)$ nach (75)	$t_{m, pl} (\nu)$ nach (75 a)
0,0	0,0000	0,0000	—	—	0,3927	0,0000	0,0000	—	—	0,0000	0,0000
0,1	0,0096	0,0000	—	—	0,3671	0,0002	0,0000	—	—	0,0000	0,0000
0,2	0,0748	0,0032	—	—	0,3440	0,0010	0,0000	—	—	0,0000	0,0000
0,3	0,3556	0,0030	—	—	0,3230	0,0042	0,0002	—	—	0,0002	0,0000
0,4	0,6116	0,0980	—	—	0,3038	0,0130	0,0014	0,012	0,0004	0,0000	0,0000
0,5	1,2132	0,3034	0,12	0,24	0,2863	0,0306	0,0052	0,024	0,0010	0,0002	0,0002
0,6	2,1388	0,7710	0,27	0,54	0,2703	0,0620	0,0150	0,043	0,0020	0,0006	0,0006
0,7	3,4868	1,7086	0,53	1,06	0,2556	0,1132	0,0376	0,079	0,0036	0,0012	0,0012
0,8	5,3880	3,4482	1,10	2,20	0,2421	0,1908	0,0832	0,137	0,0060	0,0028	0,0028
0,9	8,0510	6,5212	2,41	4,82	0,2296	0,3044	0,1684	0,279	0,0096	0,0058	0,0058
1,0	12,0000	12,0000	6,00	12,00	0,2180	0,4678	0,3202	0,684	0,0150	0,0110	0,0110

rascher wachsen, als es der Rechnung entspricht, doch können dabei auch Einflüsse der Querschnittsform eine Rolle spielen. Es ist nun  $B = 0,010184$  und damit

$$\frac{B}{6a^2} = \frac{Bl^2}{24} \cdot \frac{1}{\left(\nu + \frac{\sigma_p}{\sigma_F - \sigma_p}\right)^2} = \frac{6,7104}{(\nu + 2,923)^2}.$$

Der Zahlentafel 2 sind die Werte  $f_{pl}$  nach Gl. (34) zu entnehmen. In Fig. 10 ist wieder Rechnung und Messung gegenübergestellt. Um den Einfluß des

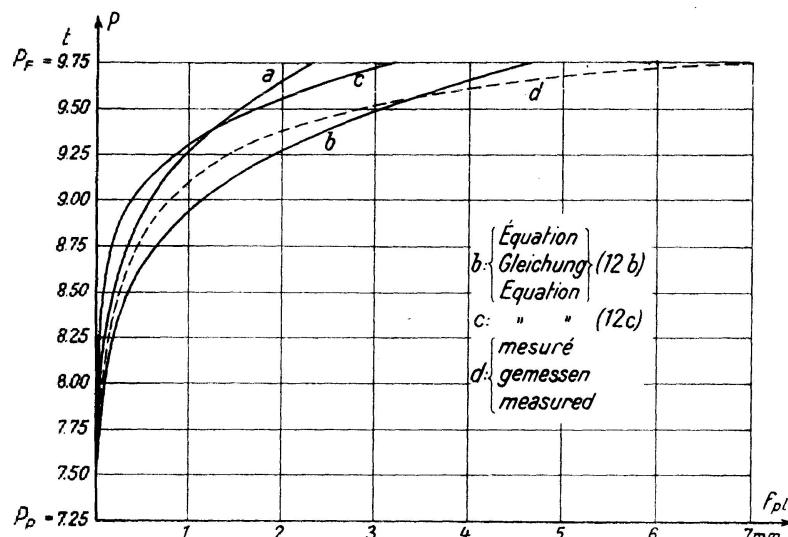


Fig. 10.

Die plastischen Durchbiegungen in der Balkenmitte des einfachen Balkens (Versuch von Maier-Leibnitz) — Les fléchissements plastiques au milieu de la poutre simple (Essai de Maier-Leibnitz) — Plastic deflections in the middle of the simple beam (Test by Maier-Leibnitz).

Formänderungsgesetzes zu zeigen, sind auch die Werte  $f_{pl}$  nach Gl. (44 a) eingetragen worden. Man muß daher, wie aus dem Vergleiche ersichtlich ist, wirklich mit sehr großen Werten von  $\bar{\epsilon}'_{pl, F}$  rechnen, wenn man die gemessenen plastischen Durchbiegungen erklären will. Dehnungsmessungen mit sehr kleinen Meßlängen dürften auch tatsächlich viel größere Werte von  $\epsilon'_{pl}$  ergeben, als sie MAIER-LEIBNITZ gefunden hat; sie scheinen demnach die obige Schätzung noch zu übertreffen und bereits nahe an die Verfestigungsgrenze heranzukommen.

In Fig. 18 a bis d des Versuchsberichtes von MAIER-LEIBNITZ ist als eine die plastische Biegung kennzeichnende Größe die gegenseitige Drehung der nach der Entlastung gerade bleibenden Balkenstücke in Abhängigkeit von  $M$  dargestellt worden. Diesem Zusammenhange legt MAIER-LEIBNITZ grundsätzliche Bedeutung bei, da sich damit naturgemäß die Berechnung der plastischen Verformung der Stabachse aufbauen läßt. Sie hat den Vorteil leichter und genauer Meßbarkeit und es ist in dieser Hinsicht nicht ohne Belang, daß sie, wie Gl. (76) erkennen läßt, nur von Werkstoffgrößen abhängig ist, und die Querschnittsform darin nicht in Erscheinung tritt. Aus der Bedeutung von  $\tau_{m, pl}$  folgt, daß  $\tau_{m, pl} = 2 A_{pl}$ , woraus sich mit Hilfe von (24) die Beziehung

$$\tau_{m, pl} = \frac{Bl}{6} \cdot \frac{1}{\frac{\sigma_p}{\sigma_F - \sigma_p} + \nu} \cdot [\varphi_1(\nu) + 2] \quad (75)$$

ergibt. Legt man der Rechnung das Formänderungsgesetz (12 c) zu Grunde, so ist  $\tau_{m, pl} = 2C_3$  und man erhält

$$\tau_{m, pl} = \frac{Bl}{6} \cdot \frac{1}{\frac{\sigma_p}{\sigma_F - \sigma_p} + \nu} \chi_1(\nu). \quad (75a)$$

In Fig. 11 und in Zahlentafel 2 ist diese Linie dargestellt worden; die von MAIER-LEIBNITZ versuchsmäßig ermittelte Abhängigkeit  $\tau_{m, pl}(M)$ , die er der verfeinerten Deutung seiner Versuche zu Grunde gelegt hat, ist hinzugefügt, so daß ein Vergleich der beiden Berechnungsverfahren leicht möglich ist.

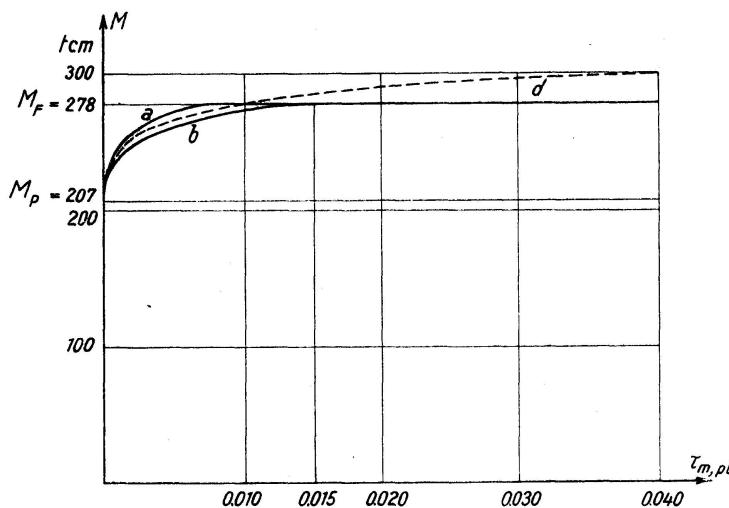


Fig. 11.

Die Linie  $\tau_{m, pl}(M)$ . b bezieht sich auf (12b), d ist von Maier-Leibnitz der Deutung seiner Versuche zu Grunde gelegt worden — La courbe  $\tau_{m, pl}(M)$ . b se rapporte à (12b), Maier-Leibnitz a basé sur d l'interprétation de ses essais — The line  $\tau_{m, pl}(M)$ . b refers to (12b), d was determined by Maier-Leibnitz, based on his tests.

Der Versuch mit dem Durchlaufbalken ist durchgeführt worden, um die von STÜSSI geäußerten Bedenken über die Richtigkeit des Momentenausgleiches zu überprüfen. Es ist  $l_1 = 240$  cm,  $l = 120$  cm und damit treffen dafür zweifellos die Voraussetzungen für den unter B 1 beschriebenen Fall zu. Man erhält zunächst nach (49) mit  $M_p = 90 \cdot 2,30 = 207$  t cm ...  $P_p = 8,78$  t und  $X_p = 56,52$  t cm. Mit dem aus Dehnungsmessungen ermittelten Werte  $E = 2035$  t/cm<sup>2</sup> berechnet sich nach (48)  $f_p = 0,233$  cm.

Zur Ermittlung der Spannungsverteilung im plastischen Bereich ist mit  $B = 0,005592$  die Größe  $BEJ = 0,005592 \cdot 2035 \cdot 453 = 5155,013$  und man erhält nun damit aus (59)  $P_F = 12,65$  t. Aus (58) berechnet sich  $\Delta X_F = 19,856$  t cm und aus (55)  $X_F = 80,402 + 19,856 = 100,258$  t cm. Für einen beliebigen Zwischenwert  $P_p < P < P_F$  nimmt man zweckmäßig einen Wert  $\nu$  zwischen Null und 1 an, kennt dann  $\varphi_1(\nu) + 2$  und erhält damit eine quadratische Gleichung für  $P$ . Für  $\nu = \frac{1}{2}$  ist z. B.  $\varphi_1(\frac{1}{2}) + 2 = 0,0161$  und Gl. (60) lautet damit

$$P \frac{9l}{2BEJ} \frac{\sigma_p}{\sigma_F - \sigma_p} \left[ P \frac{29 - 3}{89} \cdot \frac{l}{M_p} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_F + \sigma_p}{\sigma_p} \right] = 0,0161,$$

aus der man nun den zugehörigen Wert  $P = 10,34$  t bekommt. Dazu gehört  $X = 66,486 + 1,359 = 67,845$  t cm und  $M_m = 243,724 - 1,359 = 245,083$  t cm.

Die Tragfähigkeit  $P_T$  berechnet sich nach (63) mit  $P_T = 12,641 + 5,928 = 18,569$  t. Um den Einfluß des „Erweichungsgrades“ im plastischen Bereiche festzustellen, ist das Tragwerk auch mit dem geschätzten Werte  $\bar{\varepsilon}_{pl,F} = 12$  v. T. durchgerechnet worden. Man erhält nun  $B = 0,010184$ ,  $BEI = 10310,026$  und damit  $P_F = 13,39$  t,  $\Delta X_F = 37,500$  t cm und  $X_F = 86,075 + 37,500 = 123,575$  t cm. Die Tragfähigkeit  $P_T$  ergibt sich nun mit  $P_T = 13,386 + 5,151 = 18,537$  t. In Fig. 12 ist mit diesen beiden Annahmen in der üb-

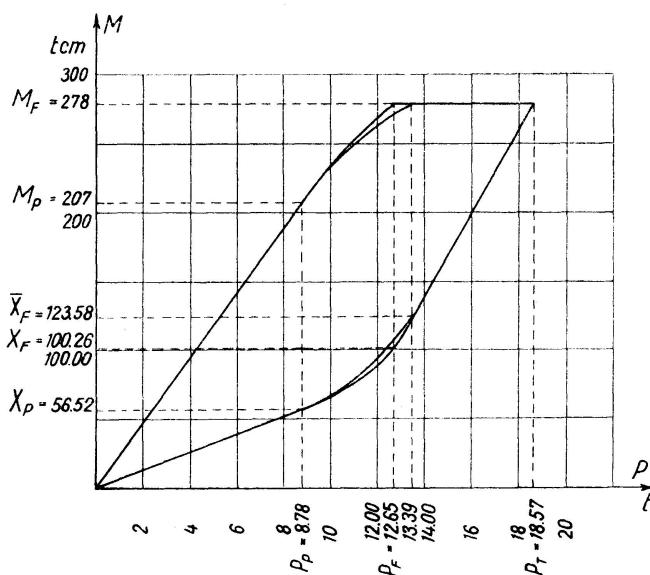


Fig. 12.

Der Momentenausgleich des durchlaufenden Versuchsbalkens von Maier-Leibnitz.  
L'égalisation des moments dans la poutre continue auscultée par Maier-Leibnitz.  
Equilisation of moments of the continuous experimental beam of Maier-Leibnitz.

lichen Art der Momentenausgleich dargestellt. Um zu einem Vergleiche der Rechenergebnisse mit den von MAIER-LEIBNITZ durch Auswertung seiner Messungen ermittelten Linien  $X(P)$  und  $M_m(P)$  zu kommen, ist vor allem zu berücksichtigen, daß sich infolge einer 6 cm breiten Steife am Orte des Lastangriffes eine Verschiebung des Ortes des ersten Fließens von der Balkenmitte weg an den Rand dieser Steife ergeben muß, da sie eine wesentliche Vergrößerung des Trägheitsmomentes bedeutet. Versucht man, diesen Verhältnissen wenigstens an den maßgebenden Stellen Rechnung zu tragen, so ist zunächst das Moment am Orte des ersten Fließens

$$M_R = \frac{Pl}{4} \frac{\frac{l}{2} - 3}{\frac{l}{2}} - X = \frac{Pl}{4} \varrho - X.$$

Der Einfluß der Steife auf das Stützenmoment darf wohl vernachlässigt werden. Damit ist dann

$$P_p = \frac{8.9 M_p}{(2.9 \varrho - 3) l},$$

woraus sich mit  $\varrho = 0,95$  der Wert  $P_p = 9,38$  t ergibt. Dazu gehört  $X_p = 60,30$  t cm. Bei der Berechnung von  $P_F$  ist nun in Gleichung (59) der Wert  $2\vartheta - 3$  durch  $2\vartheta\varrho - 3$  zu ersetzen und man erhält nun mit  $B = 0,005592$   $P_F = 13,45$  t, wozu sich nach (56) ein  $\Delta X_F = 18,67$  t cm und ein  $X_F = 86,44 + 18,67 = 105,11$  t cm berechnet.

Um die Tragfähigkeit  $P_T$  unter Berücksichtigung des Steifeneinflusses zu bestimmen, darf man nicht vergessen, daß der statisch bestimmte Träger nun ein durchlaufender Gelenkträger ist mit einem Schwebeträger von 6 cm Länge in der Mittelöffnung, da sich nun gleichzeitig zwei Fließgelenke an den Steifenrändern ausbilden. Dafür ist das zusätzliche Stützmoment

$$X = X_F + \frac{(P - P_F)l}{4} \cdot \varrho,$$

und es berechnet sich mit  $X = M_F$

$$P_T = P_F + \frac{4(M_F - X_F)}{\varrho l} = 13,45 + 9,76 = 19,52 \text{ t}.$$

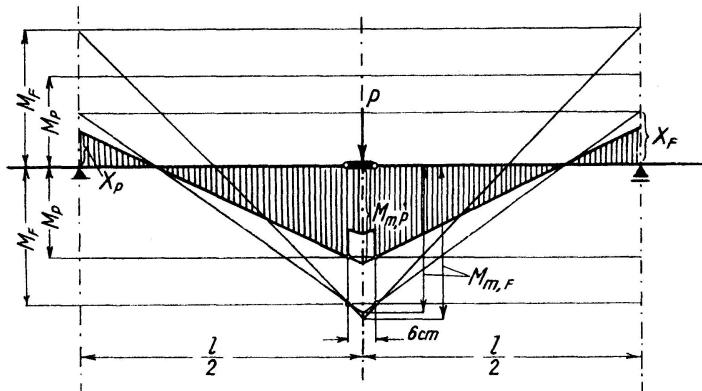


Fig. 13.

Der Einfluß der Steife an der Lastangriffsstelle auf den Momentenausgleich.  
Influence du raidisseur placé au point d'application de la charge sur l'égalisation des moments.  
How the stiffness at the point of application of the load affects the equilisation of the moments.

Um auch die Linie  $M_m(P)$  eintragen zu können, hat man zu beachten, daß an die Stelle von  $M_p$  nun eine Größe  $M_{m,p}$  kommt, die das Moment in der Balkenmitte vorstellt, wenn das Moment  $M_R = M_F$  geworden ist; in ähnlicher Weise bedeutet  $M_{m,F}$  ein Moment  $M_m$ , wenn  $M_R = M_F$  ist.  $M_{m,T}$  entsteht schließlich für  $M_R = M_F$  und  $X = M_F$ . Aus Fig. 13 erkennt man deutlich, wie diese Größen berechnet werden können; man erhält  $M_{m,p} = 221$ ,  $M_{m,F} = 298$  und  $M_{m,T} = 307$  t cm. In Fig. 14 sind nun die errechneten und gemessenen Linien  $X(P)$  und  $M_m(P)$  einander gegenübergestellt worden. Abgesehen von den kleinen Abweichungen im elastischen Gebiete, deren Ursache schwer feststellbar ist, ist die Übereinstimmung gut; völlige Angleichung zwischen Rechnung und Erfahrung wird niemals zu erzielen sein. Wie man aus dem Bilde erkennt, kommt es zu Verfestigung des Werkstoffes, bevor der Momentenausgleich vollkommen zustande gekommen ist; das liegt an der Art der Trägeranordnung, die starke plastische Verformungen in der Balkenmitte verlangt, die aber der Querschnitt ohne Verfestigung nicht leisten kann.

Die Übereinstimmung würde sich noch befriedigender ergeben, wenn man in der Rechnung das die Versuche besser beschreibende Formänderungsgesetz (12 c) angewendet hätte. Da dies rechnerische Schwierigkeiten bereitet, soll es erst dann Berücksichtigung finden, wenn es durch weitere Versuche bestätigt sein wird.

Was die Durchbiegung in dem elastisch-plastischen Bereiche anbetrifft, so ist nach (61 a) für  $\nu = \frac{1}{2}$  die bleibende Durchbiegung in der Balkenmitte

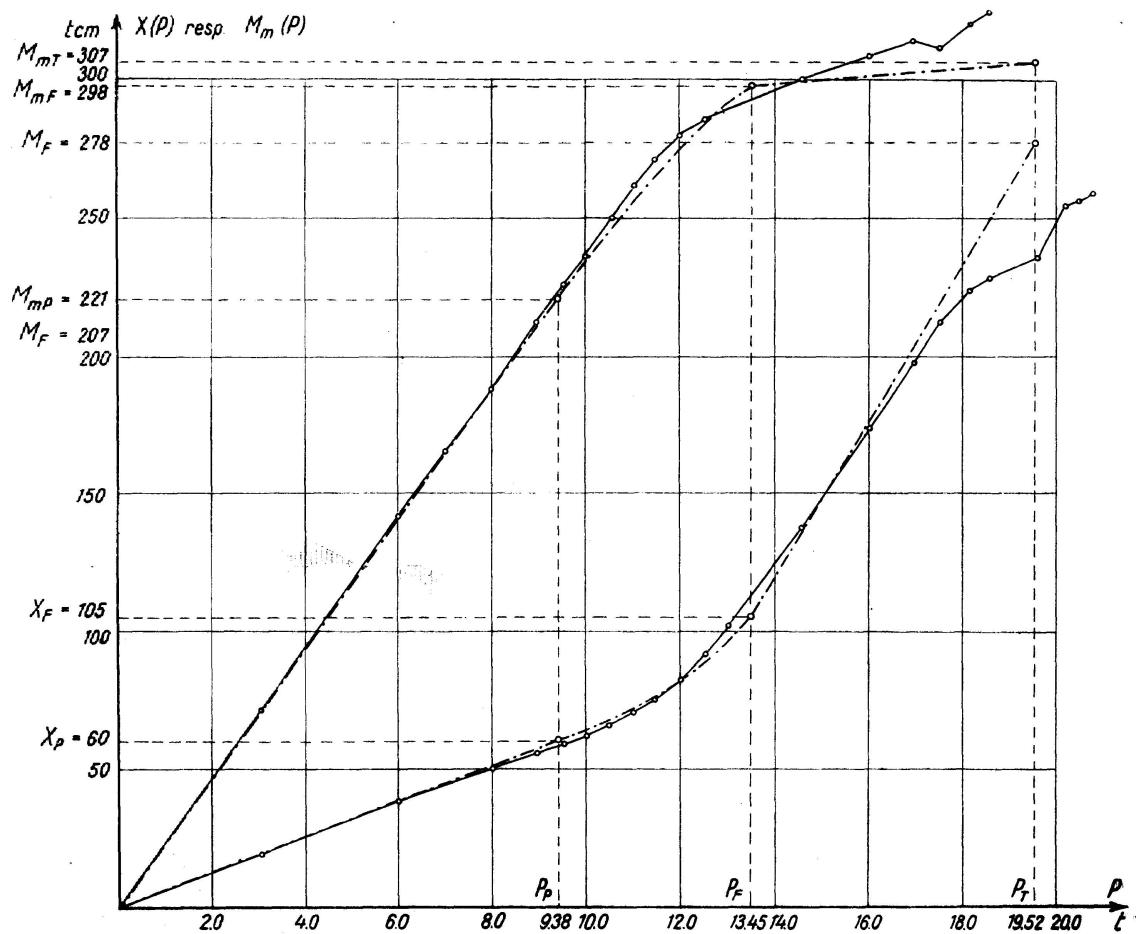


Fig. 14.  
Gegenüberstellung von Versuchsauswertung und Rechnung.

Comparaison entre les essais et le calcul.  
Comparison between test results and calculations.

$f_{pl}(\frac{1}{2}) = 0,01307$ ; ihren Größtwert erreicht sie mit  $\nu = 1$ , der sich aus Gl. (61 b) mit  $f_{pl,F} = 0,17173$  berechnet. Die gesamte Durchbiegung ist dann  $f_{gesamt,F} = 0,33497 + 0,17173 = 0,50607$  cm. Nach Erreichen von  $P_F$  schalten sich an den beiden Steifendrändern Fließgelenke ein, die verbleibenden Kragträger verbiegen sich wieder rein elastisch, bis über der Stütze das Moment  $X = M_P$  geworden ist. Der Belastungszuwachs beträgt bis dahin  $\Delta P = \frac{4(M_P - X_P)}{l} = 3,56$  t und der zugehörige Durchbiegungszuwachs ist  $\Delta f = \frac{\Delta P l^2}{24 E J} (l_1 + \frac{l}{2} - 3) = 0,688$  cm. Daran schließt sich ein Bereich, der durch Fließen über der Stütze entsteht; die dabei auftretenden Durchbiegungen

sind der Berechnung zugänglich, doch ist der Rechenaufwand bereits ein recht beträchtlicher. Eine Übereinstimmung zwischen Rechnung und Erfahrung kann bei so großen plastischen Verformungen, wie Fig. 15 zeigt, nicht mehr in dem früheren Maße erwartet werden, da sich dabei bereits Verfestigungserscheinungen in der Balkenmitte geltend machen müssen, die in der Rechnung nicht berücksichtigt sind. Auch die Steife bringt Unsicherheiten in die Rechnung, die sich im Sinne einer Verminderung der Durchbiegung auswirken müssen. Man darf aber nicht vergessen, daß diese Trägeranordnung als ungewöhnlich zu bezeichnen ist und daß sich bei den im Bauwesen üblichen Verhältnissen zwischen  $l$  und  $l_1$  diese das Fließen störenden Erscheinungen nicht so deutlich zeigen würden.

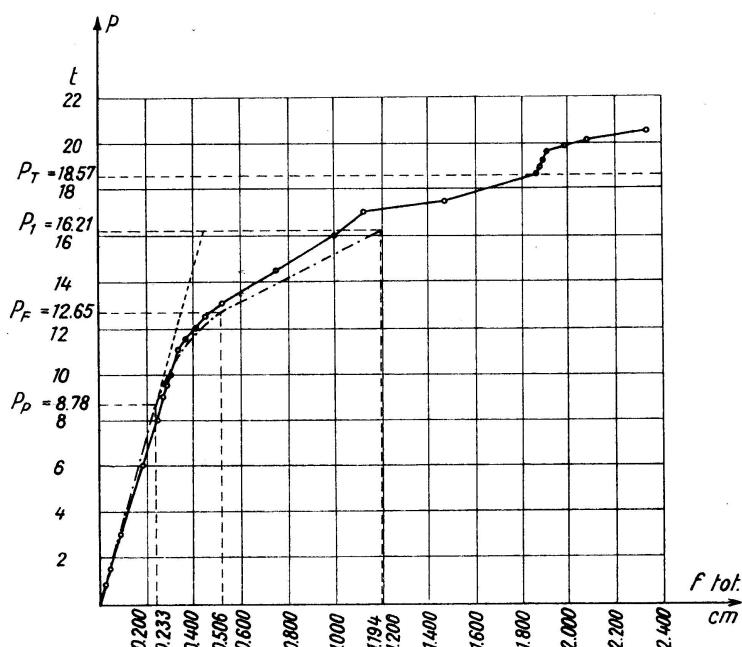


Fig. 15

Die Durchbiegung der Balkenmitte des Durchlaufträgers nach Messung und Rechnung — Le fléchissement au milieu de la poutre continue suivant les essais et le calcul — Deflection at the middle of the continuous beam as determined by measurement and by calculation.

Für den Fall baulich üblicher Werte von  $\vartheta$  stehen derzeit leider keine Versuche zur Verfügung, die eine Überprüfung der unter Ziffer B 2 aufgestellten Beziehungen gestatten würden.

### Zusammenfassung.

Die Statik des Stahlbaues erfordert bei der Überprüfung der Tragfähigkeit und der wirklichen Sicherheit der Bauwerke ein Eingehen auf die plastischen Verformungen, besonders bei statisch unbestimmter Ausbildung. Dabei ist die Frage der Plastizitätsbedingung von großer Wichtigkeit, die aus den beim Fließen zu beobachtenden Erscheinungen zu entwickeln ist. In der vorliegenden Arbeit ist entsprechend der Erfahrung angenommen worden, daß das Fließen nur in Schichten erfolgen kann, die von Oberfläche zu Oberfläche des Körpers reichen, im Gegensatz zu der sogenannten älteren Plastizitätslehre, die von der Möglichkeit eines örtlichen Fließens ausgeht und

zum plastischen Spannungsabbau geführt hat. Außerdem ist berücksichtigt, daß der Baustahl kein homogener Körper im Sinne der Mechanik ist, sondern daß auch Schichten von herabgesetztem Fließwiderstande vorhanden sind, womit sich bei Annahme eines Verteilungsgesetzes dieser geschwächten Schichten die Spannungs-Dehnungs-Linie des Baustahles errechnen läßt. Beim Anlegen eines längs der Hauptschubspannungslinien veränderlichen Spannungsfeldes ist auch die Feldwirkung auf den Fließvorgang zum Ausdruck zu bringen, welche von der Form des Körpers abhängt und durch eine neu eingeführte Werkstoffziffer  $c$  rechnerisch erfaßt werden kann.

Unter diesen Voraussetzungen ist die elastisch-plastische Biegung eines Balkens bei statisch bestimmter und bei statisch unbestimmter Stützung durchgerechnet worden, sowohl beim Angriff von Stabendmomenten als auch von Einzellasten in den Balkenmittsen. Zur Überprüfung der entwickelten Zusammenhänge sind die bekannten Versuche von MAIER - LEIBNITZ herangezogen worden; sie lassen erkennen, daß die versuchsmäßig gemessenen Größen durch die Rechnung überraschend gut wiedergegeben werden. Sie liefern damit den Beweis, daß in dieser Art mit der Nachrechnung plastischer Vorgänge sehr weitgehend an die Wirklichkeit herangekommen werden kann.

### Résumé.

La statique des constructions métalliques exige, lors du contrôle de la résistance et de la sécurité réelle des ouvrages, une étude des déformations plastiques surtout si l'on se trouve en présence d'ouvrages hyperstatiques. La condition de plasticité tirée des phénomènes observés au cours de l'étirement de l'acier est de la plus haute importance. Dans le présent mémoire, l'auteur admet, sur la base de l'expérience, que l'étirement ne peut se faire que par couches qui s'étendent d'une surface à l'autre du corps; cette théorie est en opposition avec l'ancienne théorie basée sur la possibilité d'un étirement local qui conduisait à une réduction plastique des contraintes. L'auteur tient en outre compte du fait que l'acier de construction n'est pas, au sens mécanique, un corps homogène mais, qu'au contraire il possède des couches de plus faible résistance à l'étirement; il en résulte qu'on peut calculer la courbe des tensions-allongements de l'acier de construction si l'on admet une loi de répartition de ces couches de faible résistance. Dans le cas d'un champ de tensions variable le long des lignes de cisaillement principales il faut également exprimer l'action de ce champ sur le processus d'étirement, action qui dépend de la forme du corps et qui peut être exprimée numériquement par une nouvelle caractéristique  $c$  du matériau.

Se basant sur ces hypothèses, l'auteur calcule la flexion élastico-plastique d'une poutre sur appuis statiquement déterminés et hyperstatiques, soumise soit à des moments de flexion agissant à ses extrémités, soit à des charges concentrées appliquées en son milieu. Les essais connus de MAIER-LEIBNITZ ont permis de contrôler les résultats obtenus; les résultats des essais présentent une concordance étonnante avec le calcul. Ils fournissent donc la preuve que le calcul fait de la sorte permet de calculer les phénomènes plastiques d'une façon se rapprochant fortement de la réalité.

### Summary.

The statics of steel construction, when checking the carrying capacity and the actual safety of a structure, requires an investigation of the plastic deformation, particularly in the case of statically indeterminate forms.

Thereby the question of the conditioning of plasticity is of great importance; this is to be deduced from the phenomena observed during the straining. In accordance with experience, it is assumed in the present article that the straining can occur only in layers which extend from one surface of the body to another, in contrast to the so-called older theory of plasticity, which started with the possibility of a local strain and led to the plastic reduction of tension. Besides that, it is to be considered that structural steel is no homogeneous body in the sense understood in mechanics, but that also layers of reduced strain-resistance are present, so that, assuming a law of distribution for these weakened layers, the stress-strain line of the structural steel may be calculated. By applying a tension-field which is variable along the main lines of shearing stress, also the field-effect on the straining is brought to expression; it depends on the shape of the member and can be expressed mathematically by a newly-introduced material-coefficient  $c$ .

Under these assumptions the elastic-plastic bending of a beam is calculated with statically determinate and statically indeterminate supporting, at the point of application of the rod-end moments as well as of loads concentrated at the middle of the beam. For checking the developed connections the known tests of MAIER-LEIBNITZ are made use of; they show that the results obtained by experimental measurements agree surprisingly well with those calculated. They thus furnish the proof that in this way, the calculations made of plastic occurrences may approximate very closely to what actually happens.

**Leere Seite**  
**Blank page**  
**Page vide**