

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 5 (1937-1938)

Artikel: Application de la méthode des moindres carrés au calcul des arcs
Autor: Wierzbicki, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-6168>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS AU CALCUL DES ARCS.

ANWENDUNG DER METHODE DER KLEINSTEN QUADRATEN
BEI DER BERECHNUNG DER BOGEN.

APPLICATION OF THE METHOD OF LEAST SQUARES TO
THE DESIGN OF ARCHES.

Prof. Dr. W. WIERZBICKI, Varsovie.

Les méthodes statistiques, qui jouent un rôle si important dans la Physique moderne, ne peuvent rester sans influence sur l'étude des problèmes de la Statique des Constructions.

Ce grand domaine de la Mécanique ne peut renoncer à un instrument de recherches aussi parfait que les méthodes basées sur le calcul des probabilités.

Je vais exposer ici une méthode d'application au calcul des arcs élastiques de la méthode des moindres carrés qui est une des méthodes des plus répandues du calcul des probabilités.

Dans les arcs de grande portée, la surcharge est habituellement très petite en comparaison avec le poids propre de l'arc; c'est pourquoi le choix d'un arc dont l'axe correspond au funiculaire des forces est justifié.

Au contraire, quand il s'agit d'arcs d'un poids plus petit, ce sont surtout des raisons d'ordre esthétique et statique qui décident du choix de la forme de l'arc.

Les raisons d'ordre statique se manifestent surtout dans une tendance à tracer l'axe d'un arc suivant une courbe qui faciliterait l'intégration des équations différentielles relatives aux déformations de l'arc.

A ce point de vue, la forme la plus commode à donner à un arc est la parabole du 2^e ou du 3^e degré.

Dans les calculs qui suivent nous supposons

- 1^o que nous avons à faire avec des arcs de faible courbure et que, par conséquent, nous pouvons supprimer le rayon de courbure dans la formule des tensions normales et dans toutes les formules qui en dérivent;
- 2^o que la grandeur $\cos^2 \varphi$ est très proche de l'unité (fig. 1);
- 3^o que nous pouvons négliger l'influence des forces longitudinales et des efforts tranchants sur la valeur des grandeurs hyperstatiques. La supposition 3^o n'a pas une grande importance pour le calcul et nous pourrions prendre en considération les forces longitudinales et les efforts tranchants sans créer des difficultés insurmontables, mais cela compliquerait inutilement le calcul. Pour les arcs en béton et en béton armé, la supposition 3^o est entièrement justifiée si le rapport ζ entre la flèche de l'arc et sa portée dépasse $\zeta = 0,100^1$.

¹) W. WIERZBICKI: Możliwe uproszczenia w obliczaniu statycznym łuku. (Les simplifications possibles dans le calcul statique d'un arc.) Warszawa, 1934.

Les hypothèses ci-dessus simplifient les équations d'un arc et nous amènent aux formules suivantes:

Pour un arc encastré à ses deux extrémités (fig. 1):

$$(1) \quad H = - \frac{\int_0^s \frac{\mathfrak{M} y' \cdot ds}{J}}{\int_0^s \frac{y'^2 \cdot ds}{J}} \quad (2) \quad R_A = \frac{\int_0^s \frac{\mathfrak{M} x' \cdot ds}{J}}{\int_0^s \frac{x'^2 \cdot ds}{J}}$$

$$(3) \quad M_{A^0} = \frac{\int_0^s \frac{\mathfrak{M} ds}{J}}{\int_0^s \frac{ds}{J}} \quad (4) \quad y_0 = \frac{\int_0^s \frac{y \cdot ds}{J}}{\int_0^s \frac{ds}{J}}$$

$$(5) \quad M_{A^0} = M_A + R_A \frac{l}{2} - H y_0$$

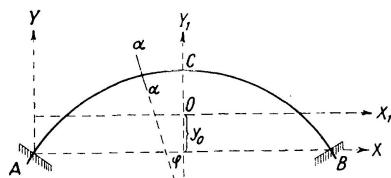


Fig. 1.

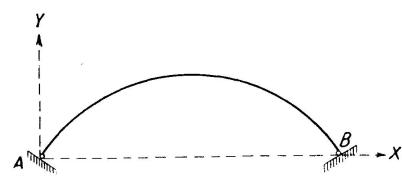


Fig. 2.

Pour un arc à deux rotules (fig. 2):

$$(6) \quad H = \frac{\int_0^s \frac{M y \cdot ds}{J}}{\int_0^s \frac{y^2 \cdot ds}{J}}$$

où

H désigne la poussée horizontale (agissant dans la direction AB).

R_A » la composante verticale de la réaction en A (fig. 1).

M_A » le moment d'encastrement en A .

M » le moment de flexion dans une certaine section de l'arc.

\mathfrak{M} » le moment des forces extérieures agissant sur l'arc à gauche d'une certaine section aa par rapport au centre de gravité de cette section.

y » l'ordonnée d'un certain point de l'axe de la voûte dans un système de coordonnées $X A Y$.

y_0 » l'ordonnée de l'origine O du système de coordonnées $X_1 O Y_1$.

x' et y' désignent les coordonnées d'un certain point de l'axe de la voûte dans le système $X_1 O Y_1$.

s désigne la longueur de l'axe de la voûte.

ds » la longueur d'un segment infiniment petit de la voûte.

J » le moment d'inertie d'une certaine section transversale de la voûte.

Plus loin nous désignerons:

par l la portée de l'arc,

» f la flèche de l'arc,

» ξ le rapport $\frac{x}{l}$,

» ζ le rapport $\frac{f}{l}$.

Dans les formules (1)–(4) et (6) nous poserons $J = \text{const}$, ce qui ne diminue en rien la généralité du raisonnement.

Le moment \mathfrak{M} représente pour les charges isolées une fonction linéaire et pour la charge continue une fonction du deuxième degré de x ; nous avons donc:

$$\mathfrak{M} = \sum a x^i = \sum a_1 \xi^i \quad (7)$$

où les coefficients a et a_1 sont indépendants de x ou de ξ . Lorsque nous avons à faire à des arcs paraboliques, l'équation de l'axe prend dans le système de coordonnées XAY les formes suivantes:

pour la parabole du 2^{ème} degré:

$$y = \xi(1 - \xi) \cdot 4 \cdot f \quad (8)$$

pour la parabole du 3^{ème} degré:

pour la partie AC de l'arc

$$y = (3\xi - 6\xi^2 + 4\xi^3) \cdot 2f \quad (9)$$

et pour la partie CB

$$y = (1 - 3\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3) \cdot 2f \quad (10)$$

Les intégrales définies dans les formules (1)–(4) et (6) prennent la forme:

$$S = \int_0^s (\sum a \cdot \xi^k) \cdot ds \quad (11)$$

Quand la grandeur ξ est petite, nous pouvons admettre que $ds = dx$, ce qui facilite beaucoup l'intégration de l'expression (11). Dans le cas contraire, le calcul des intégrales (11) présente de grandes difficultés et c'est pour surmonter ces difficultés que nous allons utiliser la méthode des moindres carrés. Nous tâcherons notamment de représenter la différentielle ds sous la forme d'une fonction algébrique de x et les intégrales définies dans les formules (1)–(4) et (6) sous la forme:

$$S = \int_0^1 \sum a \xi^k \cdot d\xi \quad (12)$$

k étant un nombre entier, constant et positif.

Nous avons pour la différentielle ds une formule connue:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (13)$$

En vertu de la formule (8) et de la formule ci-dessus nous obtiendrons pour la parabole du 2^{ème} degré les expressions suivantes:

$$dy = (1 - 2\xi) \cdot 4f \cdot d\xi \quad (14)$$

$$ds = dx \cdot \sqrt{1 + 16\xi^2(1 - 2\xi)^2} \quad (15)$$

ou

$$\eta = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + 16\xi^2(1 - 2\xi)^2} = F(\xi) \quad (16)$$

Pour la parabole du 3^{ème} degré nous trouverons d'une manière analogue:

$$\eta = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + 36\xi^2(1 - 4\xi + 4\xi^2)^2} = F(\xi) \quad (16')$$

Pour que les intégrales (1)–(4) et (6) prennent la forme (12) il est nécessaire de représenter la fonction (16) sous la forme de la somme suivante:

$$\eta = \sum a \xi^k \quad (17)$$

Nous allons examiner ici la fonction $F(\xi)$.

Dans ce but nous traçons pour les valeurs particulières du rapport ζ des graphiques de la fonction $\eta = F(\xi)$. La figure 3 nous représente cette fonction comme une courbe-type *abc* par rapport au système d'axes $\xi \omega \eta$.

Puisque la courbe *abc* est symétrique par rapport au point *b*, il nous suffit de construire sa partie *ab*. Pour tracer cette partie du graphique nous attribuons successivement à la variable ξ les valeurs 0,05, 0,10, 0,15, ..., 0,45, 0,50.

Les valeurs de la variable indépendante $\xi = 0,00$ et $\xi = 1,00$ correspondent aux extrémités de l'arc et la valeur $\xi = 0,50$ correspond à son milieu, où la valeur de la fonction $F(\xi)$ est $\eta = 1$ pour toutes les valeurs de ζ . Les 21 points de la courbe *abc* nous définissent parfaitement sa forme; il est d'ailleurs en général impossible de représenter cette courbe par une équation analytique. Cependant, pour que le calcul des intégrales dans les formules (1)–(4) et (6) soit possible, une pareille représentation est indispensable. Nous tâcherons donc de remplacer la fonction $F(\xi)$ par une autre fonction $\Phi(\xi)$ dont l'équation analytique est connue.

La fonction $\Phi(\xi)$ doit remplacer la fonction $F(\xi)$ avec une précision suffisante pour le calcul des arcs élastiques. Ceci posé, nous allons chercher la fonction $\Phi(\xi)$ d'après le procédé suivant.

1^o Dans le système des coordonnées $\xi_1 b \eta_1$ nous donnons successivement à la fonction $\Phi(\xi)$ la forme:

$$\eta_1 = \sum a \xi^2 \quad \eta_1 = \sum a \xi^3 \dots \dots \eta_1 = \sum a \xi^k \quad (18)$$

nous comparons ensuite les ordonnées de ces courbes (*a' b c'*) avec les ordonnées de la fonction $F(\xi)$ et nous cherchons une somme $\sum a \xi^k$ dont les ordonnées diffèrent le moins possible des ordonnées de la courbe *abc*.

2^o Nous calculons les coefficients des équations:

$$\eta = \Phi(\xi) = \sum a \xi^k \quad (19)$$

d'après la méthode des moindres carrés.

3^o Nous examinons d'après la théorie des erreurs si, en remplaçant la fonction $F(\xi)$ par la fonction $\Phi(\xi)$, nous n'avons pas introduit dans le résultat final du calcul de l'arc des erreurs dont la grandeur dépasse les erreurs admissibles.

Après avoir fait une série d'essais avec les courbes (18), pour les différentes valeurs de k et de a , nous concluons que la forme la plus commode de la fonction $\Phi(\xi)$ sera la courbe:

$$\eta_1 = g \cdot \xi_1^2 \quad (20)$$

lorsque l'axe de la voûte est une parabole du 2^{ème} degré et

$$\eta_1 = g \cdot \xi_1^3 \quad (21)$$

lorsque l'axe de la voûte est une parabole du 3^{ème} degré.

Entre les coordonnées du système $\xi \omega \eta$ et celles du système $\xi_1 b \eta_1$ existent les relations suivantes:

$$\xi + \xi_1 = 1 \quad \eta - \eta_1 = 1 \quad (22)$$

Nous désignerons plus loin par η'_1 les ordonnées de la courbe $a b c$ (la fonction F) par rapport à l'axe $b \xi_1$. Pour déterminer le paramètre g nous devons imposer certaines conditions à la différence $\eta'_1 - \eta_1$.

Examinons la somme:

$$D_1 = \Sigma(\eta'_1 - \eta_1) \quad (23)$$

où le nombre des différences particulières est égal au nombre des points de la courbe $a b c$ dont les ordonnées ont été calculées d'après la formule (16) resp. d'après la formule (16').

Si nous avons à faire à un arc à axe en forme de la parabole du 2^{ème} degré, l'expression (23) prend la forme:

$$D_1 = \Sigma(\eta'_1 - g \xi_1^2) \quad (24)$$

Les conditions mathématiques auxquelles nous devons soumettre les ordonnées de la courbe $a' b' c'$ doivent être de nature à garantir les meilleurs résultats du calcul de l'arc et en même temps à ne pas rendre ce calcul trop difficile.

La somme (24) est une fonction linéaire de g , aussi ne pouvons nous pas poser la condition la plus simple, notamment que D soit minimum.

Nous pouvons cependant faire la somme D_1 égale à 0:

$$\Sigma(\eta'_1 - g \xi_1^2) = 0$$

d'où

$$g = \frac{\Sigma \eta'_1}{\Sigma \xi_1^2} \quad (25)$$

Nous verrons plus loin (tableau I) que si le paramètre g était calculé d'après la formule (25), la différence $\eta'_1 - \eta_1$ pourrait atteindre la grandeur de 2,9 %.

Si, au lieu d'adopter la condition que D_1 soit minimum, nous supposons que la fonction

$$D_3 = \Sigma(\eta'_1 - g \xi_1^2)^3 \quad (26)$$

est minimum, nous allons nous heurter à de grandes difficultés de calcul. Il en sera de même si dans l'expression (26) nous remplaçons l'exposant 3 par un nombre supérieur.

Examinons enfin la fonction

$$D_2 = \Sigma(\eta'_1 - g \xi_1^2)^2 \quad (27)$$

exprimant la somme des deuxièmes puissances de la différence $\eta'_1 - \eta_1$. Autrement dit, la fonction D_2 représente la somme des carrés des erreurs, puisque les courbes $a b c$ et $a' b' c'$ ne sont pas identiques.

Donc, le postulat que la fonction D_2 soit minimum nous conduit à la méthode des moindres carrés.

Pour que l'application de la méthode des moindres carrés soit justifiée dans le cas considéré et que le calcul basé sur cette méthode soit commode, nous donnons à l'expression (27) la forme suivante:

$$D_2 = \Sigma \xi_1^4 \left(\frac{\eta'_1}{\xi_1^2} - g \right)^2 = \Sigma p_i (g_i - g)^2 \quad (28)$$

Au point de vue de la méthode des moindres carrés nous allons considérer:

g comme la valeur exacte de la grandeur inconnue du paramètre de l'équation (20),

$g_i = \frac{\eta_1'}{\xi_1^2}$ comme une des valeurs rapprochées connues du même paramètre,

$g_1 - g$ comme une erreur fortuite d'une mesure particulière,
 $p_i = \xi_1^4$ comme le poids d'une mesure particulière.

Si les courbes abc et $a'b'c'$ étaient identiques, nous aurions $\eta_1' = \eta_1$ et l'erreur $g_1 - g$ serait égale à 0. L'accroissement des poids $p_i = \xi_1^4$ correspond ici à l'accroissement des ordonnées η_1 .

Comme le postulat de la moyenne arithmétique peut être déduit du principe des moindres carrés, nous trouvons que

$$g = \frac{\sum p_i g_i}{\sum p_i} = \frac{\sum \xi_1^4 \cdot \frac{\eta_1'}{\xi_1^2}}{\sum \xi_1^4} = \frac{\sum \eta_1' \xi_1^2}{\sum \xi_1^4} \quad (29)$$

Le même résultat peut être obtenu d'ailleurs directement d'après la condition du minimum:

$$\frac{\partial D_2}{\partial g} = 0 \quad (30)$$

Le tableau I contient les valeurs particulières du paramètre g calculées pour les différentes valeurs de ζ d'après la formule (29). La troisième colonne du même tableau nous donne les différences $\eta_1' - g \xi_1^2$ (les erreurs $\varepsilon_2 \%$) les plus grandes pour les valeurs particulières de ζ suivant la formule (29), la quatrième colonne les mêmes différences (les erreurs $\varepsilon_1 \%$) suivant la formule (25). La cinquième colonne nous donne la valeur intermédiaire $\vartheta \%$ des valeurs absolues des différences $\eta_1' - g \xi_1^2$.

Tableau I.

ζ	g	$\max \varepsilon_2 \%$	$\max \varepsilon_1 \%$	$\vartheta \%$
0,100	0,077	0,3	0,3	0,2
0,125	0,112	0,3	0,3	0,2
0,150	0,170	0,3	0,3	0,25
0,175	0,220	0,6	1,0	0,4
0,200	0,290	0,8	1,2	0,4
0,225	0,358	1,0	1,2	0,4
0,250	0,430	1,4	1,8	0,8
0,275	0,518	1,5	2,4	0,8
0,300	0,598	1,7	2,9	1,1

La relation entre le paramètre g et le rapport ζ peut être représentée par un graphique (fig. 4). Ce graphique nous montre que le paramètre g change assez lentement avec l'accroissement de ζ . Il en résulte que pour les valeurs intermédiaires de ζ nous pouvons trouver les valeurs correspondantes de g par une interpolation linéaire.

En tenant compte des relations (22) nous pouvons donner à l'équation (21) la forme

$$\eta = \frac{ds}{dx} = \varPhi(\xi) = 1 + g(1 - 4\xi + 4\xi^2) \quad (31)$$

correspondant au système de coordonnées $\xi \omega \eta$.

Lorsque l'axe d'un arc est tracé suivant une parabole du 3^{ème} degré, la courbe $a'b'c$ de la figure 3 correspond à l'équation (16').

Pour trouver dans ce cas la forme de l'équation de la courbe $a'b'c'$ nous procémons de la même manière que dans le cas d'une parabole du 2^{ème} degré. Nous obtenons ainsi dans le système de coordonnées $\xi_1 b \eta_1$ pour la branche $a'b$ de la dite courbe une équation:

$$\eta_1 = g \xi_1^3 \quad (32)$$

et pour la branche bc' une équation:

$$\eta_1 = -g \xi_1^3 \quad (33)$$

La fonction D_2 prend ici la forme:

$$D_2 = \sum (\eta_1' - g \xi_1^3)^2 \quad (34)$$

où la sommation ne concerne que la moitié de l'arc.

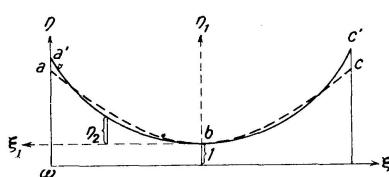


Fig. 3.

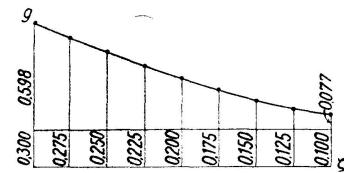


Fig. 4.

Pour calculer le paramètre g de l'équation (34) nous allons utiliser, comme plus haut, la méthode des moindres carrés. Nous mettons donc l'équation (30) sous la forme:

$$\frac{\partial D_2}{\partial g} = -\sum 2(\eta_1' - g \xi_1^3) \cdot \xi_1^3 = 0 \quad (35)$$

On en tire:

$$g = \frac{\sum \eta_1' \xi_1^3}{\sum \xi_1^6} \quad (36)$$

Nous pourrions également parvenir au résultat (36) par des considérations analogues à celles qui ont été exposées plus haut pour les arcs tracés suivant une parabole du 2^{ème} degré.

Le tableau II contient les résultats du calcul du paramètre g d'après la formule (36).

Tableau II.

ξ	g	$\max \varepsilon_2 \%$	$\vartheta \%$
0,100	1,24	1,2	0,5
0,125	1,81	2,0	0,8
0,150	2,68	2,1	0,9
0,175	3,45	2,2	1,0
0,200	4,30	2,4	1,1
0,225	5,20	2,4	1,2
0,250	6,21	2,5	1,2
0,275	7,27	2,6	1,3
0,300	8,30	2,8	1,4

Les mêmes résultats sont représentés par le graphique de la fig. 5. La forme du graphique nous permet de calculer par interpolation linéaire les valeurs du paramètre g correspondant aux valeurs de ζ qui ne se trouvent pas dans le tableau II.

Par rapport au système de coordonnées $\xi \omega \eta$ les équations (32) et (33) prennent la forme suivante:

pour la branche $a' b$ entre $\xi = 0$ et $\xi = \frac{1}{2}$

$$\eta = \frac{ds}{dx} = 1 + g(\frac{1}{2} - \xi)^3 = \Phi_1 \quad (37)$$

pour la branche $b c'$ entre $\xi = \frac{1}{2}$ et $\xi = 1$

$$\eta = \frac{ds}{dx} = 1 - g(\frac{1}{2} - \xi)^3 = \Phi_2 \quad (38)$$

Il serait difficile de calculer avec précision les limites des erreurs résultant du remplacement, dans les formules (1)–(4) et (6) de la différentielle ds , par une expression rapprochée. Il est facile au contraire de trouver l'ordre de ces erreurs²⁾.

Les erreurs contenues dans les formules particulières (1)–(4) et (6) sont définies par les différences:

$$\epsilon = \epsilon' - \epsilon'' \quad (39)$$

où ϵ' désigne l'erreur du numérateur et ϵ'' l'erreur du dénominateur.

Pour trouver les différences (les erreurs) ϵ' et ϵ'' ainsi que les valeurs ϑ nous devons exécuter le calcul des différences $\eta_1' - g \xi_1^2$ pour toutes les coordonnées de la courbe Φ et pour les valeurs particulières de ζ . Un pareil calcul nous montre que l'erreur médiane ϑ_1 calculée pour les différences du signe $+$, est à peu près égale à l'erreur médiane ϑ_2 calculée pour les différences du signe $-$ et qu'elles diffèrent peu toutes les deux de la valeur ϑ .

Ainsi nous pouvons admettre que la différence $\vartheta_1 - \vartheta_2$ est égale en surplus à $\frac{1}{3} \vartheta$.

L'erreur contenue dans les intégrales particulières des formules (3), (4) et (6) est donc plus grande que $\frac{1}{3} \vartheta$ parce qu'ici les fonctions sousintégrales ne sont pas constantes. D'après le calcul exécuté elles sont contenues entre $\frac{1}{3} \vartheta$ et $\frac{2}{3} \vartheta$ et, par conséquent, les erreurs des formules (3), (4) et (6) en tant qu'erreurs des quotients, sont contenues (d'après la formule 39) entre 0 et $\frac{1}{3} \vartheta$.

Les erreurs des dénominateurs des formules (1) et (2) sont près de $\frac{2}{3} \vartheta$, mais leurs numérateurs qui sont aussi à peu près égaux à $\frac{2}{3} \vartheta$ peuvent différer d'eux par leurs signes, puisque les fonctions sousintégrales ont ici des signes variables.

Ainsi, pour les grandes valeurs de ζ les erreurs des formules (1) et (2) peuvent atteindre (suivant la formule 39) la valeur

$$\epsilon = \frac{2}{3} \vartheta - (-\frac{2}{3} \vartheta) = \frac{4}{3} \vartheta \quad (40)$$

Nous allons comparer ici les résultats du calcul d'un arc à deux rotules exécuté d'une part d'après la méthode précise et d'autre part d'après la méthode des moindres carrés. Ainsi, pour un arc tracé suivant une parabole

²⁾ W. WIERZBICKI: Parabola sześcienna jako oś łuku. (Sur l'axe d'un arc en forme de parabole de 3^{ème} degré.) Lwów, 1934.

du 2^{ème} degré et chargé uniformément nous obtenons par la première méthode :

$$\int_0^s \frac{My \, ds}{EJ} = 0,0358 \cdot \frac{2q\zeta l^4}{EJ} \quad (41)$$

et par la seconde :

$$\int_0^s \frac{My \, ds}{EJ} = (0,0333 + 0,0053g) \frac{2q\zeta l^4}{EJ} \quad (42)$$

La différence (erreur) entre les valeurs (41) et (42) est donc égale, pour $\zeta = 0,25$ à $0,56\%$ c'est-à-dire à peu près $\frac{2}{3}\vartheta = \frac{2}{3} \cdot 0,8\%$ (voir le tableau I). Ici, la grandeur H ne contient pas d'erreur puisque le numérateur et le dénominateur de la formule (6) ne différant que par le facteur constant, contiennent la même erreur et, par conséquent, l'erreur du quotient est égale à 0 (d'après la formule 39).

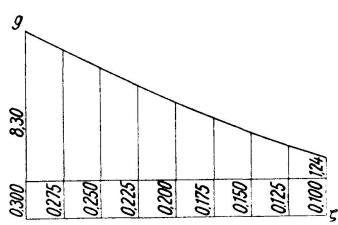


Fig. 5.

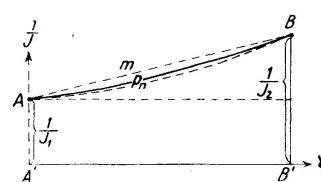


Fig. 6.

Nous avons considéré jusqu'à présent dans les formules (1)–(4) et (6) le moment d'inertie J comme une grandeur constante. Supposons maintenant que J soit variable. Donc, pour que dans le cas de J variable la fonction sousintégrale des formules (1)–(4) et (6) conserve la forme de la somme $\sum a \xi^k$, nous devons exprimer la fonction $\frac{1}{J} = f(\xi)$ sous la forme suivante :

$$\frac{1}{J} = f(\xi) = \sum b \xi^m \quad (43)$$

Puisque les arcs d'acier ont très souvent une section constante, ce qui suit se rapporte principalement aux arcs en pierre, en béton et en béton armé. Nous admettons que la section transversale d'un arc a la forme d'un rectangle de hauteur h et nous supposons que cette hauteur varie suivant une loi linéaire, c'est-à-dire suivant la formule :

$$h = h_2 + \frac{h_1 - h_2}{s} \cdot s_x \quad (44)$$

où

s_x désigne la longueur d'un segment d'axe de la voûte entre une section particulière et la naissance,

s la longueur totale de l'axe,

h_1 la hauteur de la section transversale à la naissance,

h_2 la hauteur de la section transversale à la clef.

Pour donner à la fonction $\frac{1}{J} = F(\xi)$ la forme (43) nous allons procéder plus loin de la même manière que nous avons procédé en cherchant la forme de l'expression analytique de la différentielle ds .

Ainsi nous calculons les moments d'inertie pour les différentes valeurs de ξ et pour les sections transversales varient suivant la formule (44) en prenant les distances entre les sections successives égales à 0,15.

Nous désignons par x_s les projections des centres des sections particulières sur la corde de l'arc et nous traçons un graphique (fig. 6) dont les grandeurs ξ correspondant aux grandeurs x_s sont les abscisses et les grandeurs $\frac{1}{J}$ les ordonnées.

Après avoir tracé les dits graphiques pour les valeurs du quotient $\frac{h_1}{h_2}$ contenues entre 1,25 et 1,75, nous remarquerons que pour $\frac{h_1}{h_2} = 1,25$ les courbes $A p B$ sont très rapprochées des lignes droites $A m B$ et que pour $\frac{h_1}{h_2} = 1,75$ elles sont rapprochées des paraboles $A n B$ (fig. 6).

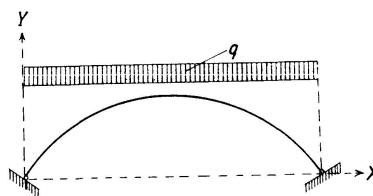


Fig. 7.

Les différences entre les ordonnées des courbes $A p B$ et les droites $A m B$ sont égales à peu près à 3 % et les différences entre les ordonnées des courbes $A p B$ et des paraboles $A n B$ à 4 %.

Dans ces limites des erreurs nous pouvons admettre que les ordonnées des courbes (43) sont les moyennes arithmétiques entre les ordonnées correspondantes des droites $A m B$ et des courbes $A p B$.

D'après ce qui précède nous arrivons aux équations suivantes:

entre $x = 0$ et $x = \frac{l}{2}$

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J_1} + 2 \left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1} \right) [2n\xi^2 + (1-n)\xi] \quad (45)$$

entre $x = \frac{l}{2}$ et $x = l$

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J_1} + 2 \left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1} \right) [2n(1-\xi)^2 + (1-n)(1-\xi)] \quad (46)$$

Les coefficients n peuvent être trouvés par interpolation linéaire entre les valeurs 1 et 0 correspondant aux valeurs 1,75 et 1,25 du quotient $\frac{h_1}{h_2}$.

Nous donnons ci-dessous un exemple d'application de la méthode exposée. Soit un arc à deux rotules tracé suivant deux branches d'une parabole du 3^{ème} degré et chargé uniformément (fig. 7).

Pour le moment M nous avons ici une expression

$$M = \frac{q x}{2} (l - x) = \frac{q l^2}{2} \xi (1 - \xi) \quad (47)$$

En utilisant les formules (9), (10), (37), (38) nous trouvons:

$$\begin{aligned} \int_0^s M y \, ds &= \int_0^l \frac{q l^2}{2} \xi (1 - \xi) \cdot 2f (3\xi - 6\xi^2 + 4\xi^3) \Phi_1 l d\xi \\ &+ \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{q l^2}{2} \xi (1 - \xi) \cdot 2f (1 - 3\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3) \Phi_2 l d\xi \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \int_0^s y^2 \, ds &= \int_0^{\frac{l}{2}} 4f^2 (3\xi - 6\xi^2 + 4\xi^3) \Phi_1 l d\xi \\ &+ \int_{\frac{l}{2}}^l 4f^2 (1 - 3\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3)^2 \Phi_2 l d\xi \end{aligned} \quad (49)$$

D'après la formule (6) nous avons par exemple pour $\xi = 0,175$ (voir le tableau II):

$$H = \frac{0,075677 q l^3 f}{0,670596 f^2 l} = 0,1128 \frac{q l^2}{f}.$$

Résumé.

Le calcul statique des arcs est basé sur les formules (1)–(6). L'intégration précise de ces expressions nous impose de grandes difficultés et c'est pour surmonter ces difficultés que nous tâchons de représenter les intégrales définies dans ces expressions sous la forme (12).

Dans ce but nous posons $ds = \eta \, dx$ et nous établissons des graphiques de la fonction η (courbe-type *abc* sur la fig. 3). Nous remplaçons ensuite cette fonction par une fonction rapprochée $\Phi(\xi)$ dont l'équation analytique est connue et dont les ordonnées ne diffèrent que très peu des ordonnées de la courbe η . Après une série de tatonnements nous arrivons à la conclusion, que la forme la plus commode de la fonction $\Phi(\xi)$ sera la courbe (20) ou (21).

Pour déterminer le paramètre g nous utilisons la méthode des moindres carrés (les formules 23–36).

Après une analyse des erreurs dues au remplacement dans les formules (1)–(6) de la différentielle ds par une expression rapprochée nous concluons que ces erreurs ne dépassent pas la valeur des erreurs admissibles dans les calculs statiques des constructions.

Zusammenfassung.

Die statische Berechnung der Bogen erfolgt an Hand der Formeln (1)–(6). Die genaue Integration dieser Ausdrücke bietet große Schwierigkeiten; um diese Schwierigkeiten umgehen zu können, werden die bestimmten Integrale durch die Ausdrücke (12) ersetzt.

Zu diesem Zweck setzen wir $ds = \eta \, dx$ und stellen die Funktion η (Kurve wie a b c auf Fig. 3) zeichnerisch dar. Hierauf ersetzen wir diese Funktion durch eine angenäherte Funktion $\Phi(\xi)$, von der die analytische Gleichung bekannt ist und bei der die Ordinaten sehr wenig von den Ordinaten der Kurve η abweichen. Nach vielen Versuchen erkennen wir, daß die bequemste Form der Funktion $\Phi(\xi)$ den Kurven (20) oder (21) entspricht.

Zur Bestimmung des Parameters g wenden wir die Methode der kleinsten Quadrate an (Formeln 23—36).

Nach einer Bestimmung der Fehler infolge des Ersatzes des Differentials ds in den Formeln (1)–(6) durch einen angenäherten Ausdruck ergibt sich, daß diese Fehler die zulässigen Werte für statische Berechnungen nicht überschreiten.

Summary.

The statical analysis of arches depends on formulae (1) to (6), and with a view to overcoming the great difficulties to which these give rise an attempt is made to state the definite integrals of these expressions in the form (12).

With this object we write $ds = \eta dx$ and give graphs of the function η which are curves of the type abc in Fig. 3. This function is then replaced by an approximate function $\Phi(\zeta)$ the analytical equation of which is known and the ordinates of which differ only very slightly from those of the curve η . After a series of tests the conclusion is reached that the most convenient form of the function $\Phi(\zeta)$ is the curve (20) or (21).

To determine the parameter g , the method of least squares is used (formulae (23) to (36)).

An analysis of the errors arising from the substitution, in formulae (1) to (6), of the differential dx by an approximate expression, leads to the conclusion that these errors do not exceed the limits that are permissible in the statical calculation of structures.