

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 5 (1937-1938)

Artikel: Le voile mince du "Fronton Recoletos" à Madrid

Autor: Torroja, E.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-6167>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LE VOILE MINCE DU „FRONTON RECOLETOS“ A MADRID.

DER SCHALENBAU DES «FRONTON RECOLETOS» IN MADRID.

THE SHELL CONSTRUCTION OF THE «FRONTON RECOLETOS»
IN MADRID.

E. TORROJA, Fuenterrabía [Espagne].

Les méthodes de calcul des voiles minces diffèrent selon le type de surface adopté et même, dans le calcul des voiles cylindriques, on rencontre parfois des difficultés qui obligent à changer de méthode si l'on veut arriver à une solution satisfaisante du point de vue du travail de bureau.

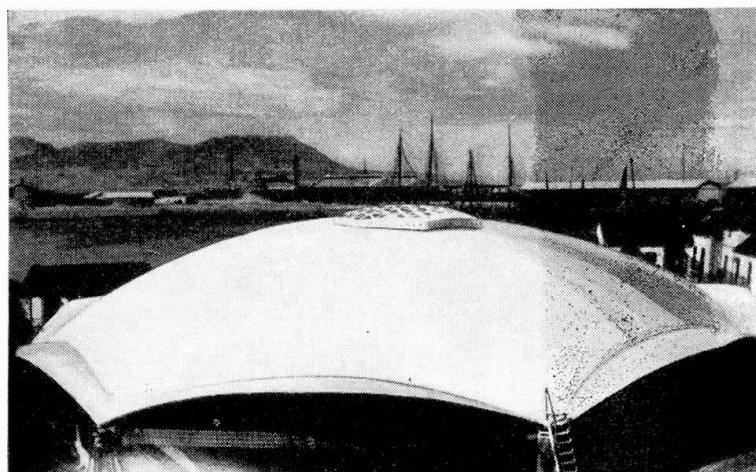


Fig. 1.

Ansicht der Kuppel von Algeciras. Stützweite 48 m, Dicke 9 cm.
Vue du voile mince d'Algesiras. Portée 48 m, Epaisseur 9 cm.
View of the thin cupola at Algeciras, span 48 m., thickness 9 cm.

Nous avons récemment construit en Espagne différents voiles de types divers: coupoles minces ainsi que surfaces minces cylindriques et gauches. Parmi les premiers nous citerons la toiture du Marché d'Algeciras formée d'une calotte sphérique de 48 m de diamètre et 9 cm d'épaisseur supportée seulement par 8 piliers; le rayon de courbure de cette coupole est de 44,10 m. Nous avons construit de même la couverture en porte-à-faux des tribunes du Nouvel Hippodrome de Madrid qui est formée d'hyperboloides à une nappe, d'axe horizontal, de 13 m de porte-à-faux à partir des appuis, avec une épaisseur variable de 5 à 15 cm.

Nous avons construit des voûtes cylindriques de différents types, mais dans ce mémoire nous ne parlerons que de celle du „Fronton Recoletos“ qui surpassé toutes les autres par ses dimensions et son importance.

C'est un voile cylindrique dans lequel la directrice est formée par deux arcs de cercle qui se coupent orthogonalement. Vu l'importance des dimen-

sions de ce voile et pour des raisons d'économie on s'est fixé la condition d'obtenir une tension unitaire maximum, fixée d'avance, dans la forte armature longitudinale qu'on est obligé de mettre dans l'arête d'intersection et qui représente une partie fort importante de l'armature générale.

Cette condition entraîne de grandes complications de calcul dont nous allons donner la solution; nous parlerons également de la construction de ce voile et des moyens qui nous ont permis de contrôler l'exactitude des calculs; ce contrôle peut être intéressant pour le développement futur des constructions de ce genre.

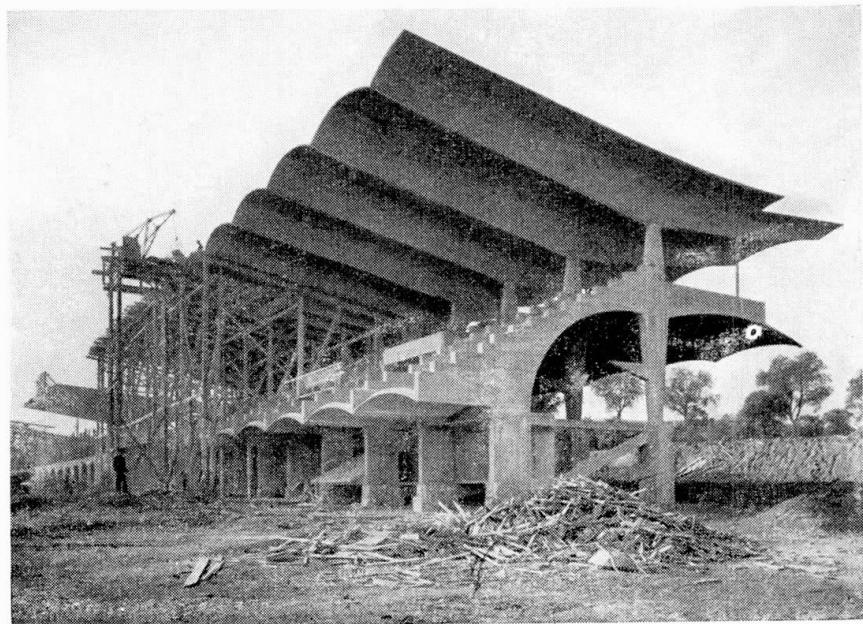


Fig. 2.
Tribünen. Schalenstärke zwischen 5 und 15 cm.
Tribunes. Epaisseur comprise entre 5 et 15 cm.
Grand stand, thickness varying between 5 and 15 cm.

Description de l'ouvrage.

Nous ne présentons ici qu'un bref rapport général bien que nous ayons en préparation une monographie détaillée de ce voile et des études analytiques et expérimentales y relatives; nous la mettrons volontiers à la disposition de tous ceux qui s'y intéressent.

Cet ouvrage est destiné à couvrir une surface rectangulaire de 55 m de longueur selon les génératrices de la surface cylindrique et de 32,5 m de largeur.

Le voile a une épaisseur de 8 cm; il travaille comme voile seulement, sans l'aide de fermes ou de nervures.

La directrice est formée de deux arcs de cercle l'un de 12,20 m et l'autre de 6,40 m de diamètre qui partent des murs avec des tangentes verticales et vont se rencontrer orthogonalement en formant une arête tournée vers l'intérieur de la salle, en forme de mouette, sans aucun appui ni poutre de retombée en dessous de cette génératrice d'intersection.

Cette section transversale n'a pas été choisie au hasard mais en vue de ménager deux lanterneaux, un situé sur le côté pour éclairer les gradins de la salle et un autre situé plus au centre pour éclairer la place de jeu. Les

deux lanterneaux devaient être orientés vers le nord pour ne laisser passer que la lumière froide sans livrer passage aux rayons du soleil.

Ces conditions ont imposé le choix du profil transversal et de la structure adoptés. Il ne faut surtout pas oublier que pour des raisons d'esthétique il était impossible de placer à l'intérieur de la salle des tirants ou des fermes car il fallait que l'ensemble donne l'impression de volume et d'amplitude qu'exige ce type de salle.

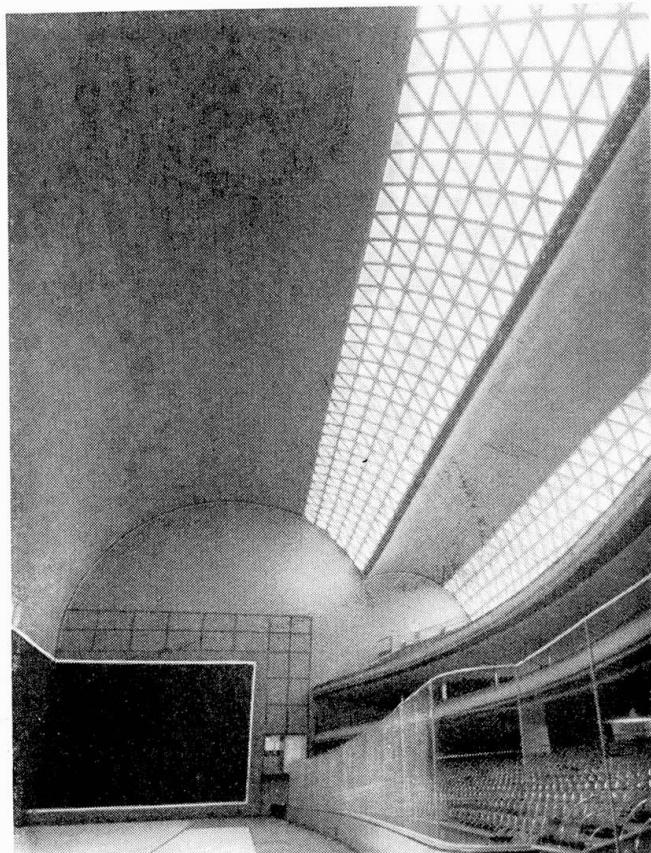


Fig. 3.

Innenansicht des „Fronton Recoletos“. Schalenkonstruktion von $55 \times 32,5$ m und 8 cm Dicke.

Vue intérieure du „Fronton Recoletos“. Voile mince de $55 \times 32,5$ m et de 8 cm d'épaisseur

Inside view of the “Fronton Recoletos”. Thin shell construction measuring 55×32.5 m. with a thickness of 8 cm.

Les deux lanterneaux dont nous venons de parler occupent la longueur entière de la salle et pour les réaliser on a substitué au voile un treillis triangulaire pourvue de double vitrage. Les barres du treillis ont une longueur de 1,40 m et une section de 15×30 cm. Afin de permettre les grandes dilatations du voile dans le sens des génératrices de 55 m de longueur on a fixé aux murs les génératrices extérieures à l'aide d'armatures dans une zone centrale de 5 m de longueur seulement; sur tout le reste de leur longueur on les a appuyées sur des bielles formées de montants minces en béton armé; ces montants permettent la dilatation longitudinale par leur propre flexion mais s'opposent par contre aux mouvements transversaux et verticaux.

A ses bouts le voile repose sur des fermes formées de piliers verticaux et de tirants horizontaux qui retiennent les directrices extrêmes en sept points,

empêchant ainsi toute déformation; les piliers ainsi que les tirants sont cependant flexibles pour permettre le déplacement de ces directrices extrêmes sous l'effet de la dilatation longitudinale des génératrices. Ces fermes d'extrémité se trouvent dans des caissons préparés dans les murs pour leur donner la liberté de mouvement nécessaire.

Calcul.

Dans le calcul on a admis une épaisseur de 8 cm pour toute la surface, y compris pour la zone des lanterneaux où cependant le poids et le moment d'inertie sont un peu plus grands. On a négligé les moments et les efforts tranchants de torsion sur le voile ainsi que les moments et les efforts tranchants de flexion longitudinale; on n'a considéré que les cinq forces $M N Q S T$ avec lesquelles on a étudié de la façon usuelle l'équilibre de l'élément différentiel d'épaisseur complète du voile.

On a considéré les charges de la façon suivante: Pour le poids propre, une charge uniformément répartie sur la surface entière, y compris les lanterneaux (nous insisterons plus loin sur l'importance de ce point); pour la neige, une charge proportionnelle au cosinus de l'angle que forme la tangente avec l'horizontale et pour le vent on a fait deux hypothèses, dans la première on a admis que la pression centripète est proportionnelle au cosinus carré de l'angle de la tangente, et dans la seconde on a ajouté à cette charge une force centrifuge proportionnelle au cosinus du même angle afin de tenir compte des succions verticales du vent.

Cette seconde hypothèse a fourni généralement des efforts moindres que la première. Il en résulte que dans le calcul que nous exposons plus loin nous ne tiendrons compte que de la première hypothèse de la pression centripète.

Nous ne nous étendrons aucunement sur la partie déjà connue du calcul de ce voile.

La signification des symboles est donnée au tableau qui se trouve à la fin de ce rapport.

Le poids mort et les surcharges se décomposent en série de FOURIER.

$$h = + \frac{4}{\pi} \cos \frac{\pi \infty}{l} - \frac{4}{3\pi} \cos \frac{3\pi \infty}{l} + \dots = h' + h'' + \dots \quad (1)$$

Nous poserons pour simplifier:

$$u = + \pi - 3\pi + \dots = u' + u'' + \dots$$

$$s = + \frac{4l}{\pi^2} \sin \frac{\pi \infty}{l} - \frac{4l}{9\pi^2} \sin \frac{3\pi \infty}{l} + \dots = s' + s'' + \dots$$

$$q = + \frac{4l^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi \infty}{l} - \frac{4l^2}{27\pi^3} \cos \frac{3\pi \infty}{l} + \dots = q' + q'' + \dots \quad (2)$$

$$u = + \frac{4l^3}{\pi^4} \sin \frac{\pi \infty}{l} - \frac{4l^3}{81\pi^4} \sin \frac{3\pi \infty}{l} + \dots = u' + u'' + \dots$$

$$r = + \frac{4l^4}{\pi^5} \cos \frac{\pi \infty}{l} - \frac{4l^4}{243\pi^5} \cos \frac{3\pi \infty}{l} + \dots = r' + r'' + \dots$$

L'équilibre de l'élément différentiel donne les neuf équations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} R \frac{dT}{d\varphi} + RX + \frac{dS}{d\varphi} = 0 \\ \frac{dQ}{d\varphi} + R \frac{dS}{d\varphi} - N + RY = 0 \\ \frac{dN}{d\varphi} + Q + RZ = 0 \\ \frac{dM}{d\varphi} - RN = 0 \\ \frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{T}{Eg} \\ \frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{\zeta}{R} \\ \theta = \frac{\zeta}{Rd\varphi} + \frac{\eta}{R} \\ \chi = \frac{1}{R^2} \left(\zeta + \frac{d^2\zeta}{d^2\varphi} \right) = - \frac{12}{Eg^3} M \end{array} \right\} \quad (3)$$

En introduisant dans ces équations les expressions suivantes des forces extérieures du poids propre, du vent et de la neige :

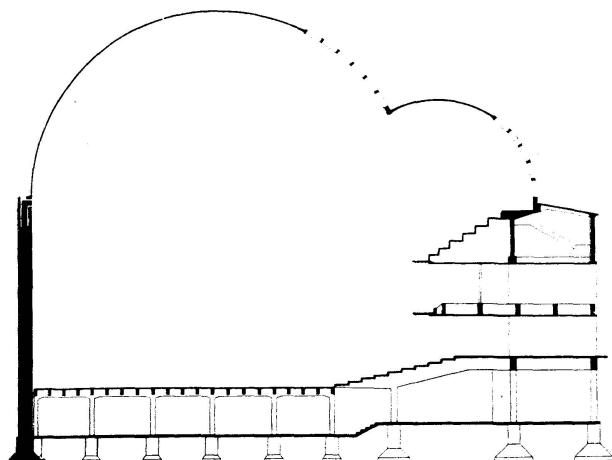


Fig. 4.

$$\begin{aligned} X_p &= 0 \\ Y_p &= ph \sin \varphi \\ Z_p &= ph \cos \varphi \\ X_v &= 0 \\ Y_v &= 0 \\ Z_v &= vh \sin^2 \varphi \\ X_n &= 0 \\ Y_n &= nh \sin \varphi \cos \varphi \\ Z_n &= nh \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (4)$$

nous arrivons aux expressions des efforts et des déplacements pour les cas d'un voile sans flexion, c'est-à-dire sans moment d'inertie et sans coupure le long des génératrices comme s'il s'agissait d'un tuyau fermé.

Pour les effets de flexion produits par la coupure le long des génératrices on peut obtenir l'équation générale

$$\frac{1}{R^2} \left[\frac{d^8 f}{d\omega^8} - (2-2\nu) \frac{d^6 f}{d\omega^6} - (1-4\nu+\nu^2) \frac{d^4 f}{d\omega^4} + (2\nu+\nu^2) \frac{d^2 f}{d\omega^2} - 4\nu^2 \lambda^2 f \right] \cos \frac{u\infty}{l} = 0 \quad (5)$$

par éliminations successives dans les équations différentielles, après avoir introduit une fonction de forme :

$$M = -f \cos \frac{u\infty}{l} \quad (6)$$

En introduisant une fonction de variable complexe dont les huit formes possibles doivent satisfaire à l'équation caractéristique correspondante, et en supprimant les parties imaginaires à l'aide du théorème d'EULER on sait aussi que la solution générale est de la forme :

$$\begin{aligned}
 f = & + A e^{J\omega} \sin K\omega & + C e^{J\omega} \cos K\omega \\
 & + B e^{j\omega} \sin k\omega & + D e^{j\omega} \cos k\omega \\
 & + G e^{J(\Omega-\omega)} \sin K\omega & + L e^{J(\Omega-\omega)} \cos K\omega \\
 & = H e^{j(\Omega-\omega)} \sin k\omega & + O e^{j(\Omega-\omega)} \cos k\omega
 \end{aligned} \tag{7}$$

Cela veut dire que les effets de bordure sont formés par huit ondes amorties le long de la directrice, les quatre premières naissant au bord en question, et les autres quatre au bord comme s'il s'agissait d'ondes réfléchies.

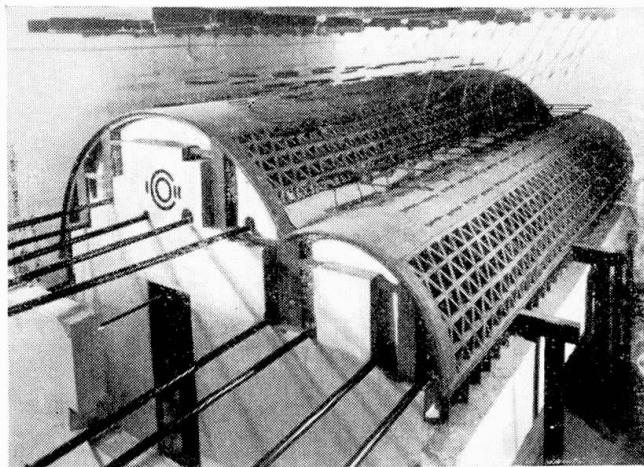


Fig. 5.
Außenansicht der Modell-Einrichtung.
Vue extérieure du module réduit.
Outside view of small scale model.

Dans le cas particulier de notre voile de faible épaisseur et dont l'angle d'ouverture de chaque arc de cercle est supérieur à 90° , on peut négliger ces dernières ondes, et l'expression se réduit alors aux quatre premiers termes.

A, B, C, D sont des constantes à déterminer par les conditions d'appui au bord comme nous le verrons; J, j, K, k se calculent par résolution des équations que l'on obtient en posant égales à zéro les parties réelles et imaginaires de

l'équation caractéristique tout en remplaçant m par l'expression $J + K \sqrt{-1}$; nous ne parlerons pas du procédé du calcul puisqu'il est déjà bien connu.

Les dérivées successives de f sont de la forme:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^n f}{d\omega^n} = & + A (J_n e^{J_1 \omega} \sin K_1 \omega + K_n e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega) + \\
 & + B (J_n e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega - K_n e^{J_1 \omega} \sin K_1 \omega) + \\
 & + C (j_n e^{j_1 \omega} \sin k_1 \omega + k_n e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega) + \\
 & + D (j_n e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega - k_n e^{j_1 \omega} \sin k_1 \omega)
 \end{aligned} \tag{8}$$

En introduisant ces valeurs dans les neuf équations différentielles primitives, on obtient les valeurs qui interviennent dans les expressions d'un effort ou d'un déplacement quelconque, expression qui a la forme générale:

$$\left(\sin \frac{\mu \infty}{l} \text{ ou } \cos \frac{\mu \infty}{l} \right) \left[\begin{array}{l} + A(\alpha e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega + \beta e^{J_1 \omega} \sin K_1 \omega) + \\ + B(\beta e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega - \alpha e^{J_1 \omega} \sin K_1 \omega) + \\ + C(\gamma e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega + \delta e^{j_1 \omega} \sin k_1 \omega) + \\ + D(\delta e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega - \gamma e^{j_1 \omega} \sin k_1 \omega) \end{array} \right] \tag{9}$$

Les valeurs de α correspondant à chaque effort et déformation sont les suivantes:

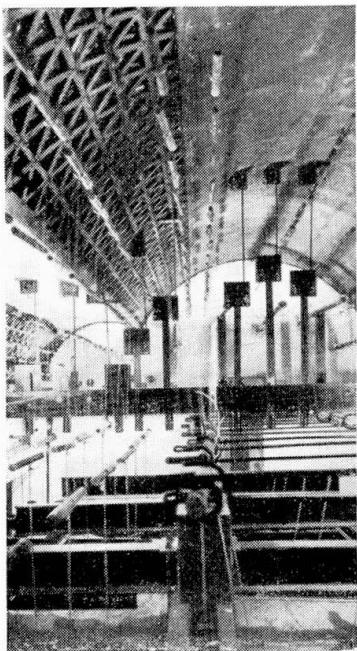


Fig. 6.
Innenansicht des Modelles.
Vue intérieure du modèle
réduit.
Inside view of small scale
model.

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_M &= -1 \\
 \alpha_N &= -\frac{1}{R} K_1 \\
 \alpha_Q &= +\frac{1}{R} K_2 \\
 \alpha_S &= -\frac{1}{R} (K_1 + K_3) \\
 \alpha_T &= -\frac{1}{\nu R} (K_2 + K_4) \\
 \alpha_{\eta} &= +\frac{2}{\nu} (K_1 + K_3) - \frac{1}{\nu^2} (K_3 + K_5) \\
 \alpha_s &= -K_2 + \frac{2}{\nu} (K_2 + K_4) - \frac{1}{\nu^2} (K_4 + K_6) \\
 \alpha_{\theta} &= -K_3 + \frac{2}{\nu} (K_1 + 2K_3 + K_5) \\
 &\quad - \frac{1}{\nu^2} (K_1 + 2K_5 + K_7)
 \end{aligned} \right\} (10)$$

Les valeurs de β , γ et δ s'obtiennent également en remplaçant respectivement K par J , j et k .

Il ne reste plus qu'à déterminer les valeurs de $A B C$ et D .

Puisque nous avons négligé à chaque bord les valeurs des ondes réfléchies, nous pouvons déterminer indépendamment les paramètres des bords extérieurs.

A l'arête commune aux deux arcs de cercle nous trouvons simultanément les paramètres des bords I_d et II_i .

Nous ferons remarquer que le problème ne peut pas être traité indépendamment pour le poids propre, le vent et la neige parce que nous avons posé comme condition que la somme des tensions produites par ces trois sollicitations doit être de 8 kg/mm^2 environ; d'autre part nous ne pouvons fixer arbitrairement quelle part de la tension totale correspond à chacune de ces sollicitations, ni à chacun des deux premiers termes de la série de FOURIER que nous considérons.

La résolution de ce problème nécessite donc un système de 54 équations avec 54 inconnues: Les quatre constantes $A B C$ et D de chacun des deux bords I et II , pour le poids propre, le vent et la neige, et pour les deux termes de la série font 48 inconnues, auxquelles on doit ajouter les six tensions du tirant dues au poids propre, à la neige et au vent, pour les deux termes de la série.

Les 54 équations sont déterminées par les conditions suivantes:

- a) Les déplacements radiaux d'un cylindre doivent être identiques aux déplacements de l'autre, et vice-versa; cela doit se vérifier pour les six cas

de poids propre, de vent et de neige, et pour les deux termes, ce que conduit aux douze équations :

$$\begin{array}{lll} \zeta_{dp}^I = -\eta_{ip}^{II'} & \zeta_{dv}^I = -\eta_{iv}^{II'} & \zeta_{dn}^I = -\eta_{in}^{II'} \\ \zeta_{dp}^{II'} = -\eta_{ip}^I & \zeta_{dv}^{II'} = -\eta_{iv}^I & \zeta_{dn}^{II'} = -\eta_{in}^I \\ \zeta_{dp}^{I'} = -\eta_{ip}^{II''} & \zeta_{dv}^{I'} = -\eta_{iv}^{II''} & \zeta_{dn}^{I'} = -\eta_{in}^{II''} \\ \zeta_{dp}^{II''} = -\eta_{ip}^{I''} & \zeta_{dv}^{II''} = -\eta_{iv}^{I''} & \zeta_{dn}^{II''} = -\eta_{in}^{I''} \end{array} \quad (11)$$

b) Nous admettons que le poids du tirant se décompose selon deux forces tangentielles au deux cylindres ; il s'en suit donc que l'équilibre entre ce poids et les forces tangentielles Q et radiales N , en projetant sur les normales aux deux arcs de cercle de la mouette, conduit aux douze équations :

$$\begin{array}{lll} Q_{dp}^I - P \sin q_d^I = N_{ip}^{II'} & Q_{dv}^I = N_{iv}^{II'} & Q_{dn}^I = N_{in}^{II'} \\ Q_{dp}^{II'} - P \sin q_d^{II'} = N_{ip}^I & Q_{dv}^{II'} = N_{iv}^{II'} & Q_{dn}^{II'} = N_{in}^{II'} \\ Q_{ip}^{II''} - P \sin q_i^{II''} = N_{dp}^I & Q_{iv}^{II''} = N_{dv}^I & Q_{in}^{II''} = N_{dn}^I \\ Q_{ip}^{II''} - P \sin q_i^{II''} = N_{dp}^I & Q_{iv}^{II''} = N_{dv}^I & Q_{in}^{II''} = N_{dn}^I \end{array} \quad (12)$$

L'égalité des moments sur la génératrice d'intersection donne les six équations :

$$\begin{array}{lll} M_{dp}^I = -M_{ip}^{II'} & M_{dv}^I = -M_{iv}^{II'} & M_{dn}^I = -M_{in}^{II'} \\ M_{dp}^{II'} = -M_{ip}^I & M_{dv}^{II'} = -M_{iv}^I & M_{dn}^{II'} = -M_{in}^I \end{array} \quad (13)$$

L'égalité des rotations donne les six autres

$$\begin{array}{lll} \theta_{dp}^I = \theta_{ip}^{II'} & \theta_{dv}^I = \theta_{iv}^{II'} & \theta_{dn}^I = \theta_{in}^{II'} \\ \theta_{dp}^{II'} = \theta_{ip}^{II''} & \theta_{dv}^{II'} = \theta_{iv}^{II''} & \theta_{dn}^{II'} = \theta_{in}^{II''} \end{array} \quad (14)$$

L'égalité de la tension unitaire du tirant et des tensions aux bords de deux cylindres donne les douze équations :

$$\begin{array}{lll} T_{dp}^I = t_p' g & T_{dv}^I = t_v' g & T_{dn}^I = t_n' g \\ T_{ip}^{II'} = t_p' g & T_{iv}^{II'} = t_v' g & T_{in}^{II'} = t_n' g \\ T_{dp}^{I'} = t_p'' g & T_{dv}^{I'} = t_v'' g & T_{dn}^{I'} = t_n'' g \\ T_{ip}^{II''} = t_g'' g & T_{iv}^{II''} = t_v'' g & T_{in}^{II''} = t_n'' g \end{array} \quad (15)$$

Les différentes parties de la tension unitaire du tirant, correspondant aux différentes charges et aux différents termes de la série doivent satisfaire aux cinq conditions :

$$\frac{t_p'}{t_v'} = \frac{\frac{dS_{dp}^I}{d\infty} + \frac{dS_{ip}^{II'}}{d\infty}}{\frac{dS_{dv}^I}{d\infty} + \frac{dS_{iv}^{II'}}{d\infty}} \quad \frac{t_p'}{t_n'} = \frac{\frac{dS_{dp}^I}{d\infty} + \frac{dS_{ip}^{II'}}{g\infty}}{\frac{dS_{dn}^I}{d\infty} + \frac{dS_{in}^{II'}}{d\infty}} \quad (16)$$

$$\frac{t_p''}{t_v''} = \frac{\frac{dS_{dp}^{I''}}{d\infty} + \frac{dS_{ip}^{II''}}{d\infty}}{\frac{dS_{dv}^{I''}}{d\infty} + \frac{dS_{iv}^{II''}}{d\infty}} \quad \frac{t_p''}{t_n''} = \frac{\frac{dS_{dp}^{I''}}{d\infty} + \frac{dS_{ip}^{II''}}{d\infty}}{\frac{dS_{dn}^{I''}}{d\infty} + \frac{dS_{in}^{II''}}{d\infty}} \quad (16)$$

$$\frac{t_p'}{t_p''} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\frac{dS_{dp}^I}{d\infty} + \frac{dS_{ip}^{II'}}{d\infty}}{\frac{dS_{dp}^{I''}}{d\infty} + \frac{dS_{ip}^{II''}}{d\infty}}$$

Finalement on doit avoir

$$t_p' + t_v' + t_n' + t_p'' + t_v'' + t_n'' = t \quad (17)$$

t étant une donnée du problème.

Nous avons donc les 54 équations.

Il est impossible de résoudre ce système d'équations par le procédé courant de l'algèbre; pour y réussir nous avons adopté un système d'approximation successive.

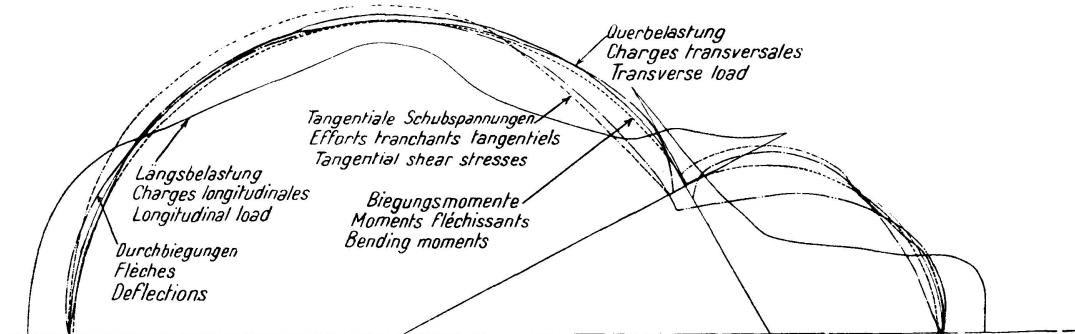


Fig. 7.

mations successives avec lequel on peut satisfaire parfaitement aux mécanismes des équations.

Dans un système d'équations si nombreuses on ne peut pas se contenter des solutions qui satisfont aux équations avec de légères erreurs car de telles solutions peuvent différer totalement des vraies solutions.

On doit s'assurer que le groupe de valeurs approchées ainsi obtenues tend vers la vraie solution de façon que les opérations ou approximations successives se rapprochent de plus en plus de la solution réelle; il faut également s'assurer que l'on peut connaître à chaque moment le degré d'approximation obtenu par la comparaison de chaque résultat avec celui de l'approximation précédente.

La méthode appliquée nécessite une opération préliminaire:

Considérons les expressions:

$$\left. \begin{array}{l} Aa_s + Bb_s + Cc_s + Dd_s = \text{expression des déformations } Eg_s \\ Aa_Q + Bb_Q + Cc_Q + Dd_Q = \text{id forces } Q \\ Aa_M + Bb_M + Cc_M + Dd_M = \text{id moments } M \\ Aa_T + Bb_T + Cc_T + Dd_T = \text{id forces } T \end{array} \right\} \quad (18)$$

Si on avait au bord d'un cylindre simultanément les charges Q_{10} et T_{10} , un moment M_{10} et une déformation $Eg_{\zeta_{10}}$, en égalisant ces expressions re-

spectivement à $Eg\zeta_{10}$, Q_{10} , M_{10} et T_{10} on aurait un système d'équations suffisant pour la détermination de $ABCD$.

Pour obtenir donc une autre valeur quelconque, par exemple la déformation $Eg\eta$ il suffit de former l'expression

$$Aa_\eta + Bb_\eta + Cc_\eta + Dd_\eta + Eg\eta_{10} \quad (19)$$

en utilisant pour A , B , C et D les valeurs obtenues du système d'équations précédent; η_{10} serait la déformation η due aux forces $Eg\zeta_{10}$, Q_{10} , M_{10} , T_{10} .

Pour chaque cylindre, pour chaque terme de la série, et pour le poids propre, le vent et la neige nous pouvons donc résoudre successivement les quatre systèmes suivants:

$$\left. \begin{array}{l} Aa_s + Bb_s + Cc_s + Dd_s = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ Aa_Q + Bb_Q + Cc_Q + Dd_Q = 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\ Aa_M + Bb_M + Cc_M + Dd_M = 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ Aa_T + Bb_T + Cc_T + Dd_T = 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array} \right\} \quad (20)$$

On voit que les solutions de ces systèmes sont les valeurs des coefficients qui forment les expressions de différentes grandeurs (forces ou déformations). Lorsque les forces uniques qui interviennent forment la déformation $Eg\zeta = 1$, une charge $Q = 1$, un moment $M = 1$ ou une charge $T = 1$.

Si on désire maintenant connaître les valeurs de différentes grandeurs lorsqu'on a simultanément des forces telles que $Eg\eta_{10}$, Q_{10} , M_{10} , T_{10} il suffit de former les nouveaux paramètres A , B , C et D par les expressions:

$$\left. \begin{array}{l} A = A_\eta Eg\eta_{10} + A_Q \cdot Q_{10} + A_M \cdot M_{10} + A_T \cdot T_{10} \\ B = B_\eta Eg\eta_{10} + B_Q \cdot Q_{10} + B_M \cdot M_{10} + B_T \cdot T_{10} \\ C = C_\eta Eg\eta_{10} + C_Q \cdot Q_{10} + C_M \cdot M_{10} + C_T \cdot T_{10} \\ D = D_\eta Eg\eta_{10} + D_Q \cdot Q_{10} + D_M \cdot M_{10} + D_T \cdot T_{10} \end{array} \right\} \quad (21)$$

Les différents groupes d'équations du système de 54 équations doivent s'écrire comme suit:

Groupe d'équations	Expressions générales
(11) $[Aa_s + Bb_s + Cc_s + Dd_s]^I = -Eg\zeta_m^I - \eta^I$	
(11) $[Aa_s + Bb_s + Cc_s + Dd_s]^II = -Eg\zeta_n^II - \eta^I$	
(12) $[Aa_Q + Bb_Q + Cc_Q + Dd_Q]^I = -Q_m^I + P \sin \varphi_d^I + N^I$	
(12) $[Aa_Q + Bb_Q + Cc_Q + Dd_Q]^II = -Q_m^II + P \sin \varphi_i^II + N^I$	
(13) $[Aa_M + Bb_M + Cc_M + Dd_M]^I = -M^I$	
(13) $[Aa_M + Bb_M + Cc_M + Dd_M]^II = -M^I$	
(15) $[Aa_T + Bb_T + Cc_T + Dd_T]^I = -T_m^I + tg$	
(15) $[Aa_T + Bb_T + Cc_T + Dd_T]^II = -T_m^I + tg$	

Il manque les groupes 16 et 17 que nous retrouverons plus loin.

Si on connaît les valeurs des deuxièmes termes on pourrait former les valeurs des inconnues ($ABCD$) par le procédé indiqué (20 et 21); mais puisqu'on ne les connaît pas „a priori“ nous pouvons admettre dans une première approximation que ces valeurs sont nulles; on obtient alors ces valeurs pour une seconde approximation en utilisant les coefficients $ABCD$

obtenus de la première et en les introduisant dans les expressions (21) pour η , ζ , Q , N , M , T et ainsi de suite.

Les valeurs θ^I et θ^{II} ainsi obtenues ne seront pas égales mais on peut les faire se rapprocher de plus en plus, par la modification successive de $M^I = M^{II}$ dans les différentes approximations car c'est celui-ci qui a l'influence principale sur θ .

De même, avant de passer d'une fausse position à la suivante, on doit contrôler les conditions qu'imposent les groupes d'équations (16 et 17). Pour

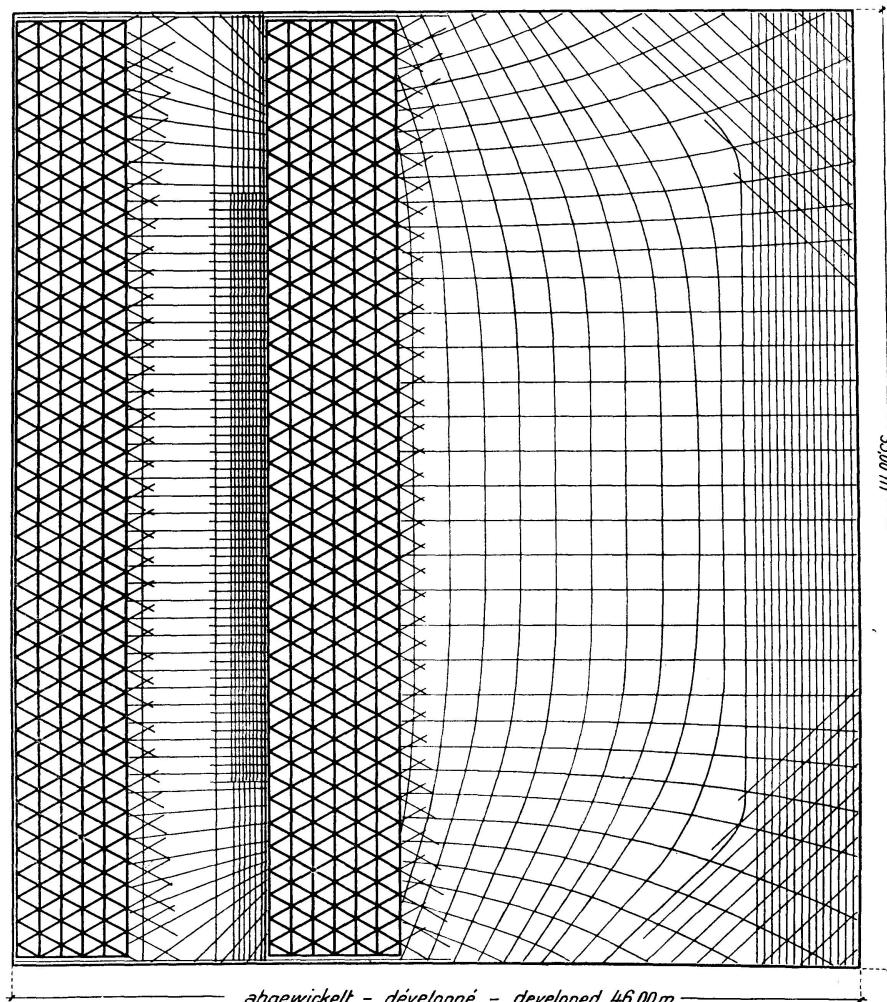


Fig. 8.

la première approximation on prend une valeur arbitraire de t_p' et les valeurs de $t_v', t_n', t_p'', t_v'', t_n''$ déduites des équations (16) et lorsqu'on a calculé cette première approximation on constate l'erreur commise dans l'équation (17); on corrige proportionnellement la valeur de t_p' et on l'introduit ainsi corrigée dans la seconde approximation.

Par ce procédé on est arrivé à introduire les 54 conditions et à obtenir pour les 54 inconnues des valeurs de plus en plus rapprochées des valeurs exactes. On peut aussi voir dans la marche du travail le degré d'approximation obtenu et s'arrêter lorsque celui-ci est suffisant parce qu'on peut affirmer alors que les valeurs obtenues ne satisfont pas aux conditions imposées d'une manière arbitraire; au contraire elles font partie des séries des

valeurs convergentes dont la limite est la valeur exacte. Quelquefois nous sommes arrivés au but après cinq pas successifs, d'autres fois nous avons dû pousser nos calculs jusqu'à la neuvième ou la dixième approximation.

Une simplification consiste à laisser subsister sans correction jusqu'à la fin l'erreur introduite dans l'équation (17) parce qu'on n'a pas besoin d'avoir une charge unitaire exacte au tirant; on peut pousser ainsi les approximations successives pour égaliser θ et M sans aucun préjudice pour l'exactitude des autres dimensions.

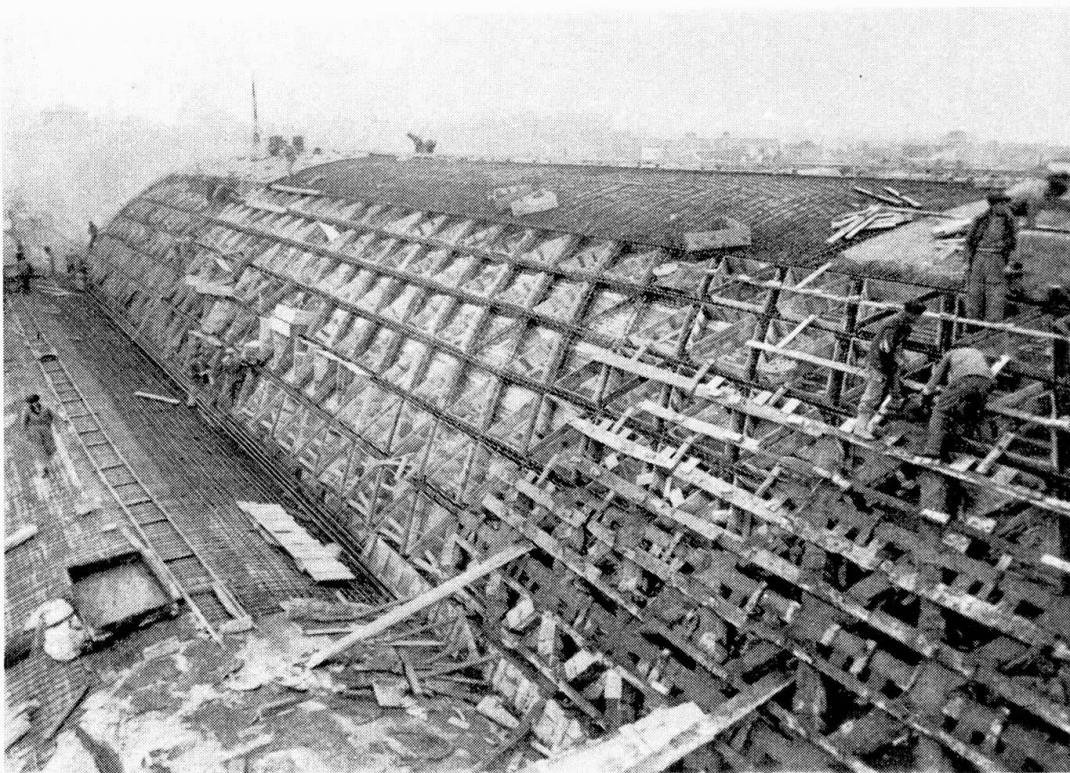


Fig. 9.

Einschalung des Oberlichtes. Détail du coffrage du lanterneau. Shuttering of lantern.

Modèle réduit.

Pour contrôler les résultats du calcul on a construit un modèle réduit à l'échelle 1: 10, c'est-à-dire de 5,5 m sur 3,3 m.

Le modèle est en mortier spécial de ciment; son épaisseur est de 8 mm et la disposition des armatures est la même que dans l'ouvrage réel.

La difficulté principale résidait dans la compensation de la diminution du poids propre par établissement d'une forte surcharge uniformement répartie sur tout le voile et variable à volonté.

Pour cela nous avons ménagé de petits trous, distants de 20 cm, sur toute la surface du voile et aussi dans les noeuds des lanterneaux; nous avons chargé le voile au moyen d'une série de balanciers suspendus en ces points par l'intermédiaire de fil de fer et disposés de telle manière que la rupture d'un fil quelconque entraînait nécessairement le déchargement complet du voile. De cette façon on éliminait complètement toute répartition inégale de

la surcharge représentant le poids propre, répartition qui ne pouvait jamais se présenter en réalité.

Les balanciers étaient chargés au moyen de deux vérins hydrauliques accouplés; ces vérins étaient attachés à une dalle de béton armé qui occupait, en dessous du modèle, tout le rectangle de la salle. Les vérins étaient actionnés jusqu'à ce qu'ils soulèvent la dalle qui pouvait être chargée avec du sable jusqu'à ce que le poids total représente une fois et demie celui du poids propre du voile compte tenu du poids plus élevé des lanterneaux. Les balanciers étaient disposés de façon à reproduire cette différence de poids, on se rapprochait ainsi le plus possible des conditions réelles.



Fig. 10.
Armierungen der Schale. Détails des armatures. Details of reinforcement.

La charge du vent était obtenue par un mécanisme semblable; les succions étaient représentées par des forces transmises par des cables passant sur des poulies fixées au plafond du laboratoire; ces cables étaient mis en tension au moyen de poids d'une tonne de chaque côté; ces charges pouvaient être appliquées totalement ou partiellement au moyen d'un vérin hydraulique. En modifiant les proportions des balanciers on pouvait changer facilement la loi de répartition des forces de succion sur les différentes parties du voile. La charge de neige était réalisée par du sable déposé directement sur le voile.

Pour la détermination des déformations transversales nous avons placé en douze points de la directrice médiane des aiguilles et de pendules disposées de telle sorte qu'on pouvait lire les déplacements verticaux, horizontaux et angulaires de chaque point, à l'aide de longs microscopes sans aller au-dessous du voile chargé.

Les déformations longitudinales ont été mesurées à l'aide d'auscultateurs télémicrométriques ICON placés seulement sur l'arête de la mouette.

Nous avons pu constater que les suctions du vent amélioraient en général le travail du voile, et que les dilatations thermiques n'avaient pas d'influence sensible sur l'ensemble; on détermina l'influence des variations de température en élevant de 25° la température de la salle pendant une heure.

Les tensions dans la mouette étaient sensiblement inférieures à celles qu'indiquaient les calculs.

La fig. 7 montre les résultats obtenus.

Construction et contrôle.

On a construit l'ossature entière du bâtiment en trois mois et demi seulement car il était nécessaire de mettre la salle en service le plus vite possible. On a donc construit le coffrage en plein cintre sur des boîtes à sable et on a bétonné le voile avec du ciment fondu dans l'espace de six jours faisant le décintrement après quarante-huit heures.

Les armatures de l'ensemble du voile sont relativement faibles, mais dans l'arête de la mouette les tensions sont si fortes qu'on a dû y placer une armature longitudinale ou tirant formée de 16 barres carrées de 50 mm. Comme il était impossible d'obtenir de telles barres d'une longueur totale de 56 m, on a dû les mettre en place par morceaux de 10 m, et les souder électriquement bout à bout; on a réussi ainsi à mettre une armature si forte dans un espace minimum ce qui permet de réaliser une grande économie dans le poids du béton.

On a procédé au décintrement en abaissant le coffrage de un ou deux centimètres au moyen des boîtes à sable. Du fait que les charges agissant sur chaque boîte à sable étaient très petites il fallait faire attention à ce qu'une partie correspondante de sable sorte de chacune des boîtes. Pour obtenir une descente absolument uniforme de chaque boîte à sable il fallut souvent provoquer l'écoulement du sable à coups de marteau.

Pour contrôler les déformations de l'ouvrage pendant le décintrement on a jugé bon de placer tous les appareils au-dessus du voile pour ne pas interrompre les travaux et ne pas entraver les mouvements des ouvriers. A cet effet nous avons placé sept fils tendus d'une extrémité à l'autre de l'ouvrage parallèlement aux génératrices et à une distance de quelques 20 cm du voile. Ces fils étaient des fils d'acier inoxydable de cinq dixièmes de mm; ils passaient par des roulements à billes et venaient aboutir à un contrepoids de quelques 30 kg enfermé dans une boîte à huile pour le protéger et pour amortir les vibrations du fil.

Le long de chacun de ces fils on a marqué sur le voile sept points de référence distants de sept mètres environ; en ces points on a enfoncé dans le béton une pièce métallique servant de support aux échelles sur lesquelles on a fait la lecture des mouvements dans le sens radial ainsi que tangentiellement à la directrice.

Comme les mouvements du voile sont relativement grands, on a toléré une erreur maximum d'un millimètre environ dans les lectures, ce qu'on obtient facilement par le procédé choisi. Un opérateur était chargé de faire la lecture de chacun des lobes. Il contrôlait successivement tous les points de référence et communiquait les résultats de ses lectures par téléphone au poste de commande du décintrement; ce poste était installé au-dessous du

voile, à une hauteur de quinze mètres au-dessus du sol, un peu au-dessus du plan où étaient placées les boîtes à sable afin de pouvoir contrôler parfaitement de ce poste toute l'opération. On avait placé en outre des auscultateurs télémicrométriques au moyen desquels on pouvait se rendre compte des taux de travail du béton armé ou des armatures en seize points différents. La lecture de ces appareils se faisait dans un local indépendant en communication téléphonique avec le poste de commande. De cette façon le poste de commande était en tout instant exactement au courant des déformations et des taux de travail en tous les points situés sur les sept directrices auscultées; l'abaissement de l'ouvrage était parfaitement contrôlé puisqu'on remarquait immédiatement le moindre retard d'une partie par rapport à une autre.

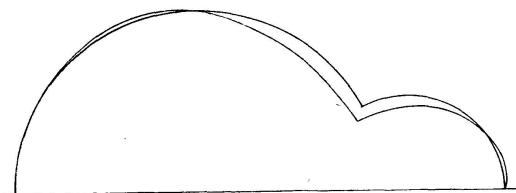


Fig. 11.

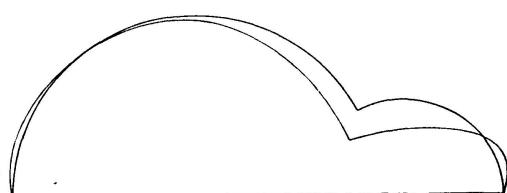


Fig. 12.

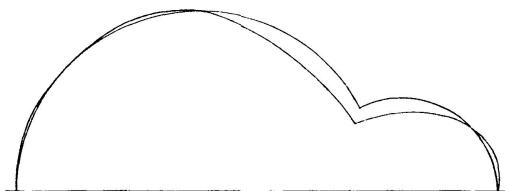


Fig. 13.

La construction terminée, on a placé aux points de repère des téléfleximètres composés de doubles curseurs très légers dont la position peut être contrôlée du local ad hoc qui se trouve en dessous de l'amphithéâtre. La lecture se fait directement au moyen d'un pont de Weaston spécial que l'on met en communication avec chacun des appareils pour obtenir les déplacements de tous les points de repère tangentiellement ainsi que radialement par rapport au fil de repère; les erreurs ne dépassent pas un ou deux millimètres.

On peut voir sur les graphiques les flèches enregistrées à la fin du décintrement dans la directrice médiane et en comparaison les flèches obtenues par calcul et celles mesurées sur le modèle réduit.

L'étroite correspondance de ces courbes entre elles est frappante particulièrement entre la voûte réelle et le modèle réduit. Il nous semble encore plus intéressant de signaler les différences entre la réalité et les résultats du calcul parcequ'elles sont dues au surplus de poids et de rigidité des lanterneaux par rapport au reste du voile. D'une part ce surplus de poids produit une plus grande descente du lanterneau central mais d'autre part l'excès de rigidité fait que l'amortissement des flexions à partir de la mouette est beaucoup moins intense dans cette partie du lanterneau; en conséquence les effets de la flexion se déplacent et se concentrent pour ainsi dire sur la zone du voile comprise entre la clef et le lanterneau. Cet effet était déjà bien marqué dans le modèle réduit où les poids présentaient la même discontinuité.

Certainement on aurait pu tenir compte de ce phénomène en admettant des morceaux de voûte différents mais on aurait dû étudier les effets des bords de ces morceaux aux extrémités des lanterneaux ce qui aurait introduit des complications qui devenaient d'autant plus grandes que les angles au centre des lanterneaux sont petits et que l'amortissement des ondes de bordure n'aurait pas été suffisant pour permettre de négliger les ondes réfléchies.

Un autre effet à considérer est la torsion du voile dans les parties extrêmes les plus rapprochées de la mouette. La grande différence entre les flèches ou les déplacements de cette partie par rapport au reste du voile produit des efforts de torsion qui ont été observés et qui prouvent qu'on ne peut pas dépasser les proportions adoptées sans en tenir compte.

On a calculé également les efforts de flambement du voile mais ces efforts ne sont pas dangereux, d'ailleurs l'ensemble s'est parfaitement comporté pendant les six premiers mois, subissant au printemps une forte dilatation et des mouvements de quelques centimètres dans la section médiane, mouvements dus à la forte variation de la température extérieure.

Notation.

<i>A, B, C, D</i>	Constantes d'intégration de la fonction du bord (ondes naissant au bord considéré).
<i>F</i>	Expression générale d'une fonction.
<i>G, H, L, O</i>	Constantes d'intégration de la fonction du bord (ondes réfléchies).
<i>E</i>	Module d'élasticité.
<i>I</i>	Moment d'inertie.
<i>J</i>	Partie constante réelle de <i>m</i> dans un groupe de solutions de la fonction du bord.
<i>K</i>	Partie constante imaginaire de <i>m</i> dans un groupe de solutions de la fonction du bord.
<i>M</i>	Moment fléchissant autour de la génératrice (par mètre de longueur). Positif pour une diminution de la courbure.
<i>N</i>	Effort tranchant autour de la génératrice par unité de longueur; positif pour une paire dextrogire verticale.
<i>P</i>	Poids du tirant de la mouette par unité de longueur.
<i>Q</i>	Effort tangent à la directrice; positif en traction.
<i>R</i>	Effort tranchant autour de la normale; positif pour une paire de forces parallèles aux tangentes à la directrice, dextrogire vue d'en haut.
<i>T</i>	Effort selon la génératrice par mètre; positif en traction.
<i>X</i>	Projection des forces extérieures sur la génératrice.
<i>Y</i>	Projection des forces extérieures sur la tangente à la directrice; positive en traction.
<i>Z</i>	Projection des forces extérieures sur la normale; positive = centripète.
<i>a, b, c, d</i>	Expressions de la forme $(a e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega + b e^{J_1 \omega} \sin K_1 \omega)$.
<i>f</i>	Solution générale du système d'équations différentielles.
<i>g</i>	Epaisseur.
<i>h</i>	Expression générale d'un terme de la série de Fourier.
<i>j</i>	Partie constante et réelle de <i>m</i> dans un groupe de solutions de la fonction du bord.
<i>k</i>	Partie constante et imaginaire de <i>m</i> dans un groupe de solutions de la fonction du bord.
<i>l</i>	Longueur ou portée théorique selon les génératrices.
<i>m</i>	Expression générale de la partie constante de l'exposant de <i>e</i> de la fonction du bord.
<i>n</i>	Poids de la neige sur une surface horizontale unitaire.
<i>p</i>	Poids mort sur une surface horizontale unitaire.
<i>q</i>	Expression générale des termes de la série intégrale seconde de <i>h</i> .
<i>s</i>	Id intégrale première de <i>h</i> .
<i>t</i>	Tension unitaire virtuelle du tirant de la mouette.
<i>u</i>	Expression générale des termes de la série intégrale troisième de <i>h</i> .
<i>v</i>	Poussée du vent sur une surface verticale unitaire.

- w Constante indéterminée.
 ∞ Abscisse selon la génératrice à partir du centre.
 a Coefficients de la fonction du bord.
 φ Angle de la normale avec la verticale dans le plan de la directrice; positif vers l'extérieur à partir de cette dernière.
 Φ Expression générale d'un effort ou contrainte quelconque au bord et pour $\infty = 0$.
 ξ Déplacement selon la génératrice; positif en allongement.
 ζ Variation du rayon de courbure.
 ζ Déplacement selon la normale, positif vers l'intérieur.
 η Déplacement selon la tangente à la directrice, positif dextrogire à la figure.
 $\lambda = \frac{R^4}{g\sqrt{3}}$
 μ Expressions des termes de la série de Fourier.
 $\nu = \mu^2 \frac{R^2}{l^2}$
 θ Déplacement angulaire; positif = dextrogire.
 ϱ Partie réelle de l'équation caractéristique.
 τ Partie imaginaire de l'équation caractéristique.
 ω Angle de la normale en un point quelconque de la directrice avec la normale au bord, positif dextrogire à partir de celle-ci.
 Ω Valeur total de ω de bord à bord.

Exposants:

- I, II Appartenant respectivement au grand et au petit cylindre.
 $, "$ Appartenant respectivement au premier ou au deuxième terme de la série de Fourier.
 n Ordre de la dérivée.

Indices:

- i, d Appartenant respectivement au bord gauche et au bord droit.
 0 Pour $\infty = 0$.
 m Effet de membrane ou voile sans inertie.
 b Effet du bord.
 i Première approximation.
 Les autres se rapportent à la notation antérieure.

P.S. Le „Fronton Recoletos“ a subi plusieurs bombardements et, en particulier, un obus a ouvert un trou de 2 m dans la grande voûte sans pour autant que l'ouvrage se soit affaissé, preuve de la stabilité de la construction.

Résumé.

Ce mémoire est consacré au voile mince du „Fronton Recoletos“ à Madrid. Ce voile est formé de deux segments de cylindres juxtaposés avec génératrice d'intersection sans poutre de retombée. La suppression de cette poutre améliore de beaucoup l'aspect de la salle et simplifie la construction. La flexion totale doit alors être supportée par le voile et les tensions sont très importantes dans les zones situées près de l'arête d'intersection.

Le système est étudié en posant les conditions d'égalité des déformations longitudinales des deux voiles et du tirant dans l'arête d'intersection. Le taux de travail du tirant sous l'effet du poids mort, de la neige et du vent a été fixé a priori pour en réduire l'armature qui représente une partie importante de l'armature totale.

Le problème ainsi posé peut être résolu par la méthode proposée par DISCHINGER mais on se trouve en présence d'un système de 27 équations avec 27 inconnues car les trois systèmes de 8 équations pour le poids mort, la neige et le vent sont reliés par les trois équations exprimant la condition d'économie du tirant. D'autre part cette condition doit se réaliser pour la somme des

effets des différents termes de la série de FOURIER dont on est obligé de décomposer les surcharges suivant la génératrice et le nombre des équations est doublé bien que l'on ne considère que les deux premiers termes des séries.

Le problème a été résolu par un procédé d'approximations successives fort convergentes dont la théorie est exposée dans ce rapport. Les résultats du calcul ont été contrôlés par des mesures très complètes faites sur un modèle réduit et sur l'ouvrage lui-même.

Zusammenfassung.

Die Schale des „Fronton Recoletos“ in Madrid wird durch zwei parallel liegende Zylinderschalen gebildet, die sich in einer Erzeugenden schneiden. Durch den Verzicht auf einen besonderen Versteifungsträger verbessert sich der Anblick des Saales wesentlich und vereinfacht die Konstruktion. Die Gesamtbiegung muß von der Schale übernommen werden und die Spannungen in der Durchdringungszone der beiden Schalen erreichen beträchtliche Werte.

Die Berechnung des Systems erfolgt durch Gleichsetzung der Längsdeformationen der beiden Schalen und des Zugbandes in der Schnittkante. Die Beanspruchungen im Zugband infolge der ständigen Last, der Schneelast und des Winddruckes wurde im voraus bestimmt, um die Bewehrung, die einen wesentlichen Teil der Gesamtbewehrung bildet, zu vermindern.

Die vorliegende Aufgabe kann mit Hilfe der von DISCHINGER vorgeschlagenen Methode gelöst werden, jedoch ergibt sich ein System von 27 Gleichungen mit 27 Unbekannten, denn die drei Systeme von je acht Gleichungen für die ständige Last, die Schneelast und den Winddruck sind verbunden mit den drei Gleichungen, die die wirtschaftlichen Bedingungen des Zugbandes ausdrücken. Andererseits muß sich diese Bedingung für die Summe der Wirkungen der verschiedenen Glieder der FOURIER'schen Reihe auswirken, in die man die Belastungen längs der Erzeugenden zerlegen muß; die Zahl der Gleichungen wird verdoppelt, obwohl man nur die beiden ersten Glieder der Reihen berücksichtigt.

Die Aufgabe wurde durch ein Verfahren der fortgesetzten Approximation mit starker Konvergenz gelöst, dessen Theorie in dieser Abhandlung entwickelt wird. Die Berechnungen wurden geprüft durch vorgenommene eingehende Messungen an einem Modell und am Bauwerk selbst.

Summary.

The paper relates to the thin shell construction of the “Fronton Recoletos” at Madrid. The shell is formed of two juxtaposed cylindrical segments with intersecting generatrices without buttressing girder. The absence of such a girder greatly improves the appearance of the hall and simplifies the construction, but the whole of the bending moment has, therefore, to be carried by the shell itself, giving rise to very heavy stresses in the portions close to the intersection.

The design is based on equating the longitudinal strains in the two shells with those in the tie bar in the intersection. The load in the tie bar due to dead weight, snow and wind was allowed for in advance so as to reduce the reinforcement by a corresponding amount, representing an important fraction of the total weight of reinforcement.

The resulting problem can be solved by the method proposed by DISCHINGER, but this gives rise to a system of 27 equations with 27 unknowns,

since the three systems of 8 equations each corresponding to the dead load, snow and wind, are connected by the three equations which express the economic design of the tie bar. Moreover this condition must be expressible by taking the sum of the effect of the different terms in a FOURIER series into which the imposed load along the generatrix may be analysed, and the number of equations is doubled, even though only the first two terms of the series are considered.

The problem was in fact solved by a process of successive approximations rapidly converging in accordance with the theory explained in the paper. The results of the calculation were checked by means of very full measurements carried out on a small scale model as well as on the structure itself.

Leere Seite
Blank page
Page vide