

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 5 (1937-1938)

Artikel: Die Berechnung der Dehnungsspannungen von Rotationsschalen mit Hilfe von Spannungsfunktionen
Autor: Pucher, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-6163>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DIE BERECHNUNG DER DEHNUNGSSPANNUNGEN VON ROTATIONSSCHALEN MIT HILFE VON SPANNUNGSFUNKTIONEN.

LE CALCUL DES TENSIONS DE DILATATION DANS LES VOILES
DE ROTATION À L'AIDE DES FONCTIONS DE TENSION.

THE CALCULATION OF EXPANSION STRESSES IN ROTARY SHELLS
BY MEANS OF STRESS FUNCTIONS.

Dr. techn. A. PUCHER, Berlin-Charlottenburg.

I. Einleitung.

Der Membranspannungszustand von Rotationsschalen beliebiger Meridianform ist sehr einfach zu behandeln, solange nur achsensymmetrische Belastung und stetige Stützung längs eines Breitenkreises in Betracht gezogen wird.

Die Untersuchung anderer Belastungszustände, erstmals von REISSNER¹ angestellt, führt auf zwei simultane Differentialgleichungen für die Schnittkräfte, deren gleichzeitige Integration in einigen speziellen Fällen möglich ist. Aus den simultanen Differentialgleichungen lassen sich jedoch wertvolle Schlüsse ziehen über die Wirkungsweise der Rotationsschalen, wenn man vom Gleichgewicht des Flächendifferentials auf das von endlichen Flächen teilen übergeht. Diese von DISCHINGER^{2, 4} gefundene Methode erweist sich als sehr fruchtbar. Insbesondere gestattet sie eine weitgehende Behandlung von Kugelschalen auch unsymmetrischer Form, wobei von der Tatsache Gebrauch gemacht wird, daß jeder Durchmesser der Kugel als Rotationsachse angesehen werden kann. So finden recht kompliziert erscheinende Probleme oft eine verblüffend einfache Lösung.

Die Kugelschale auf Einzelstützen wurde erstmalig von DISCHINGER^{3, 4} behandelt. FLÜGGE⁶ untersucht ebenfalls die Rotationsschalen auf Einzelstützen und zeigt hierbei auch einen Weg, um bei allgemeiner Meridianform mittels Differenzenrechnung zum Ziele zu gelangen. Sein Verfahren erfordert jedoch die Kenntnis von zwei zugeordneten Schnittkräften in einem Punkt des Kämpfers und führt deshalb erst nach einigen Versuchsrechnungen durch Verbesserung von zunächst geschätzten Ausgangswerten zum Ziele.

In der folgenden Arbeit soll gezeigt werden, wie die hier angeschnittenen Probleme durch Einführung der Spannungsfunktion für die Membranschnittkräfte, deren Existenz vom Verfasser^{7, 8} ganz allgemein nachgewiesen wurde, in übersichtlicher Weise behandelt werden können, ohne eine Voraussetzung über die Form des Meridians machen zu müssen. Die Gruppe der simultanen Differentialgleichungen für die Schnittkräfte wird hierbei durch eine einzige Differentialgleichung für die Spannungsfunktion ersetzt, deren Integration in den wichtigsten Fällen möglich ist, gegebenenfalls führt eines der bekannten Verfahren der numerischen Integration zum Ziele.

II. Die Differentialgleichung für die Spannungsfunktion.

Die Rotationsschale sei in dem System der Zylinderkoordinaten r, ϑ, z gegeben durch die Gleichung der Mittelfläche

$$z = z(r).$$

Wir betrachten das Flächenelement begrenzt durch zwei benachbarte Meridiane ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ und die Breitenkreise r und $r + dr$. Die Bogenlängen dieses Elementes sind $\frac{dr}{\cos \varphi}$ und $r d\varphi$ bzw. $(r + dr) d\vartheta$, worin $\varphi = \arctg \frac{dz}{dr}$ den Neigungswinkel der Meridiantangente darstellt. Entgegen der Gewohnheit, die Gleichgewichtsbedingungen auf ein Achsenkreuz zu beziehen, das gebildet wird durch die Flächennormale, die Meridiantangente und die auf diese beiden normale, dritte Richtung, wollen wir das Gleichgewicht in der Richtung des Radiusvektor r , der Tangente an den Breitenkreis und der z -Achse betrachten. Dementsprechend zerlegen wir die auf die Flächeneinheit der Grundrißebene $r d\vartheta$ bezogene Belastung des Elementes in die Komponenten P (Ro), Θ (Theta), Z (Zeta) in Richtung dieser Achsen. Die Schnittkräfte bezeichnen wir mit $N_r, N_\vartheta, N_{r\vartheta}$ bezogen auf die Längeneinheit. Die drei Gleichgewichtsbedingungen in Richtung des Radius, der Tangente und der Z -Achse sind:

$$1a) \quad \frac{\partial}{\partial r}(N_r \cos \varphi) + \frac{1}{r} N_r \cos \varphi - \frac{1}{r} N_\vartheta \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(N_{r\vartheta}) + P = 0,$$

$$1b) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(N_\vartheta \frac{1}{\cos \varphi} \right) + 2 \frac{N_{r\vartheta}}{r} + \frac{\partial}{\partial r} N_{r\vartheta} + \Theta = 0,$$

$$1c) \quad \frac{\partial}{\partial r}(N_r \sin \varphi) + \frac{1}{r} N_r \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(N_{r\vartheta} \operatorname{tg} \vartheta) + Z = 0.$$

Wir nennen

$$\begin{aligned} 2) \quad \mathfrak{N}_r &= N_r \cos \varphi, \\ \mathfrak{N}_\vartheta &= N_\vartheta \frac{1}{\cos \varphi}, \\ \mathfrak{N}_{r\vartheta} &= N_{r\vartheta} \end{aligned}$$

die reduzierten Schnittkräfte, die die Horizontalkomponenten der tatsächlichen Schnittkräfte N_r, N_ϑ und $N_{r\vartheta}$ darstellen. Sie können wie die Schnittkräfte in der ebenen Scheibe von einer Spannungsfunktion abgeleitet werden. Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned} 3) \quad \mathfrak{N}_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + A, \\ \mathfrak{N}_\vartheta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + B, \\ \mathfrak{N}_{r\vartheta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right), \end{aligned}$$

so werden Gl. (1a) und Gl. (1b) identisch erfüllt, sofern die Größen A und B folgenden Differentialgleichungen genügen:

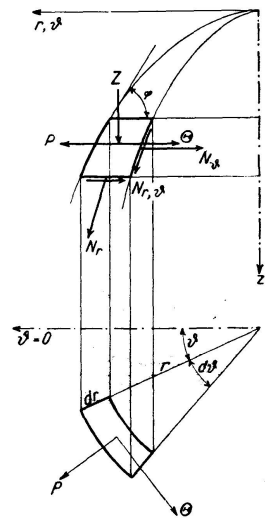


Fig. 1.

$$4) \quad \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} - \frac{B}{r} + P = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \vartheta} + \Theta = 0.$$

Diese Gleichungen enthalten außer A und B nur die als bekannt anzusehenden Belastungsgrößen und sind leicht zu integrieren. Es ist:

$$5) \quad B = - \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \Theta r d\vartheta,$$

$$A = - \frac{1}{r} \int_0^r \left(P + \frac{1}{r} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \Theta r d\vartheta \right) r dr.$$

Führt man die Spannungsfunktion in die Gleichung (1 c) ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$6) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \frac{\partial z}{\partial r} = q.$$

Die Störungsfunktion q wird durch die Belastungsgrößen ausgedrückt:

$$7) \quad q = - \left[Z + \frac{\partial}{\partial r} \left(A \frac{\partial z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} A \frac{\partial z}{\partial r} \right]$$

Die Integration von Gleichung (6) liefert die Spannungsfunktion F , die die inneren Kräfte einer Rotationsschale eindeutig beschreibt. Das partikuläre Integral der inhomogenen Differentialgleichung genügt hierbei den auf die Schale wirkenden Flächenlasten. Mit Hilfe des allgemeinen Integrals der homogenen Differentialgleichung ($q = 0$) können die Randbedingungen, sofern sie mit einem ungestörten Membranspannungszustand verträglich sind, befriedigt werden. Die homogene Differentialgleichung beschreibt die inneren Kräfte einer Rotationsschale, die nur durch am Rande angreifende Kräfte beansprucht wird. Diese Randkräfte müssen allerdings dem Membranzustand entsprechen, d. h. ihre Resultante muß in der Tangentialebene am Rande der Schale liegen.

Die Anwendung der oben skizzierten Methode der Spannungsfunktion bringt keine Vorteile gegenüber den bekannten Verfahren, solange nur die einfachen Belastungsformen (Eigengewicht und Schnee) bei stetiger Stützung längs eines Breitenkreises betrachtet werden. Jedoch schon bei Windbelastungen ist sie von Vorteil, sofern man sich nicht mit dem einfachen Sinus-Windgesetz begnügt. Dieses Problem, das eingehend von DISCHINGER² und neuerdings von NEMENYI⁹ und WIEDEMANN¹⁰ behandelt wurde, läßt sich auf die Integration einer totalen Differentialgleichung zurückführen, die eine übersichtliche Lösung gestattet. Am Schlusse dieser Abhandlung wird darauf noch eingegangen werden.

Das allgemeine Integral ($q = 0$) gibt die Möglichkeit, die verschiedenen nicht rotationssymmetrischen Stützarten ohne Voraussetzung einer besonderen Schalenform zu behandeln.

III. Die Integration der homogenen Differentialgleichung.

Die homogene partielle Differentialgleichung

$$8) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

läßt sich zurückführen auf eine totale Differentialgleichung mit der unabhängig Veränderlichen r , wenn man die Spannungsfunktion als das Produkt zweier Funktionen ansetzt, die nur von r bzw. von ϑ abhängig sind:

$$F = f(r) \cdot g(\vartheta)$$

Wenn die Funktion $g(\vartheta)$ der Differentialgleichung

$$9) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} = \pm k^2 g$$

entspricht, so fällt sie aus Gl. (8) als Faktor heraus und es ergibt sich eine totale Differentialgleichung für $f(r)$:

$$10) \quad f'' + \frac{z''}{z'} f' \mp \frac{k^2}{r} \cdot \frac{z''}{z'} f = 0$$

Dem negativen Vorzeichen in Gl. (9) entspricht bekanntlich $g = \sin k \vartheta$ bzw. $g = \cos k \vartheta$, dem positiven jedoch $g = \operatorname{Sin} k \vartheta$ bzw. $g = \operatorname{Cos} k \vartheta$. Die beiden letzten Möglichkeiten wollen wir aus der Betrachtung ausschließen und uns somit auf den Ansatz beschränken:

$$F(r, \vartheta) = f(r) \sin k \vartheta,$$

bzw.

$$F(r, \vartheta) = f(r) \cos k \vartheta.$$

Jede Linearkombination dieser beiden Grundfunktionen genügt ebenfalls der Differentialgl. (8). Da über k als Parameter frei verfügt werden kann, so entspricht das allgemeine Integral dem Ausdruck

$$11) \quad F(r, \vartheta) = \sum_k f_k (b_k \sin k \vartheta + c_k \cos k \vartheta).$$

Der Index k in $f_k(r)$ zeigt an, daß diese Funktion einem bestimmten Wert von k gemäß der Diff.-Gl. (10) zugeordnet ist.

Die reduzierten Schnittkräfte sind nunmehr durch f_k und deren Ableitungen darstellbar:

$$12a) \quad \mathfrak{N}_r = \sum_k \left(\frac{1}{r} f_k' - \frac{k^2}{r^2} f_k \right) (b_k \sin k \vartheta + c_k \cos k \vartheta)$$

$$12b) \quad \mathfrak{N}_\vartheta = \sum_k f_k'' (b_k \sin k \vartheta + c_k \cos k \vartheta)$$

$$12c) \quad \mathfrak{N}_{r\vartheta} = \sum_k k \left(\frac{1}{r} f_k' - \frac{1}{r^2} f_k \right) (b_k \cos k \vartheta - c_k \sin k \vartheta)$$

In Gl. (11) bzw. Gl. (12) ist k als Parameter und b_k und c_k als Integrationskonstanten frei wählbar. Diese Freiwerte sind aus den Randbedingungen, also aus dem Verlauf der am Rande der Schale angreifenden Kräfte, zu bestimmen.

Die Aufgabe ist somit auf die Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt, die nun für die wichtigsten Schalenformen durchgeführt wird.

a) Die Rotationsparaboloide.

Wir betrachten zunächst Rotationsschalen von der Form:

$$z = \alpha r^n, \quad n > 2$$

Es ist

$$z' = \alpha n r^{n-1}, \quad z'' = \alpha n(n-1) r^{n-2}$$

und die Diff.-Gl. (10) hat die spezielle Form

$$r^2 f_k'' + (n-1) r f_k' - k^2 (n-1) f_k = 0$$

Wir setzen

$$f_k(r) = r^\nu$$

Für ν ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$\nu(\nu-1) + (n-1)\nu - k^2(n-1) = 0$$

Daraus folgt:

$$\nu = -\frac{n-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + k^2(n-1)}$$

Die nachstehende Tabelle gibt die Werte von ν für verschiedene n und k an:

n	$k =$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7	± 8	± 9	± 10
3	+1,000 -2,000	+2,372 -3,372	+3,772 -4,772	+5,179 -6,179	+6,589 -7,589	+8,000 -9,000	+9,412 -10,412	+10,823 -11,823	+12,237 -13,237	+13,651 -14,651
4	+1,000 -3,000	+2,606 -4,606	+4,292 -6,292	+6,000 -8,000	+7,718 -9,718	+9,440 -11,440	+11,561 -13,561	+12,892 -14,892	+14,621 -16,621	+16,349 -18,349

Das partikuläre Integral wird durch Potenzen von r dargestellt. Für jeden Wert von k gibt es zwei Exponenten ν , einen positiven und einen negativen. Der letztere bedingt Singularität im Scheitel ($r=0$). Bei geschlossenen Schalen sind daher die negativen Werte von ν auszuschließen. Die Spannungsfunktion klingt vom Rande gegen den Scheitel zu monoton ab. Bei Schalen mit Öffnungen im Scheitel (Lanterne) erhalten die negativen ν jedoch Bedeutung und entsprechen Randkräften, die am oberen Rande angreifen und die Schnittkräfte bedingen, die mit wachsendem r abklingen.

Damit aber die Schnittkräfte im Scheitel geschlossener Schalen endlich bleiben, genügt es nicht, wenn f_k für $r=0$ verschwindet. Wie aus den Gl. (12) hervorgeht, muß vielmehr $\nu > 2$ sein. Aus der Zahlentafel geht hervor, daß dieser Forderung immer bei $k=2$ genügt wird, bei $k=1$ ist jedoch für jedes n der positive Wert von ν gleich der Einheit. Es wird sich später zeigen, daß bei allen Schalenformen der Wert $k=1$ eine Sonderstellung einnimmt. Deshalb wird im nächsten Abschnitt allgemein darauf eingegangen.

β) Der gerade Kegel.

Die Gleichung der Kegelfläche in Zylinderkoordinaten ist

$$z = ar;$$

da $z' = a$, $z'' = 0$ ist, so entartet die Differentialgleichung (10) zu

$$f'' = 0,$$

deren Integral

$$f = pr + q$$

eine lineare Funktion, unabhängig von k , ist.

Die Spannungsfunktion wird damit:

$$F = \sum_k r(b_k \sin k \vartheta + c_k \cos k \vartheta) + \sum_k (b'_k \sin k \vartheta + c'_k \cos k \vartheta),$$

da man die Integrationskonstanten p und q in die Freiwerte b_k und c_k , bzw. b'_k und c'_k einbeziehen kann.

Da die Spannungsfunktion von niedererem als zweitem Grade in r ist, so werden nach Gleichung (12 a, c) die Schnittkräfte \mathfrak{N}_r und $\mathfrak{N}_{r\vartheta}$ im Scheitel unendlich, während nach Gl. (12 b) eine Schnittkraft \mathfrak{N}_ϑ überhaupt nicht auftritt. Das Kräftespiel in einer Kegelschale ist, wenn Membranzustand bestehen soll, sehr wenig mannigfaltig. Die Kegelschale wird bei nicht stetiger Unterstützung des Randes mit Biegemomenten arbeiten müssen und ist daher für viele Aufgaben des Kuppelbaues ungeeignet. Die Ursache hierfür ist, daß der Kegel keine doppelte, sondern nur einfache Krümmung hat. Es liegen ähnliche Verhältnisse vor wie beim Zylinder, der, ebenfalls nur einfach gekrümmt, nur in beschränktem Maße ohne nennenswerte Biegemomente zu bestehen vermag.

γ) Die Kugel und das Ellipsoid.

Beide Flächen führen, da zwischen ihnen Affinität besteht, auf dieselbe Differentialgleichung. Die Gleichung des Meridianes ist

$$z = h \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{d} \right)^2} \right];$$

für die Kugel wird $h = d$.

Wir setzen $\frac{r}{d} = q$ und beachten, daß $\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{1}{d}$.

Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= z' = + \frac{h}{d} \frac{q}{(1 - q^2)^{1/2}} \\ \frac{\partial z^2}{\partial r^2} &= z'' = + \frac{h}{d^2} \frac{1}{(1 - q^2)^{3/2}} \\ \frac{z''}{z'} &= \frac{1}{d q (1 - q^2)} \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung (10) wird zu

$$f_k'' + \frac{1}{d q (1 - q^2)} f_k' - \frac{k^2}{d^2} \frac{1}{q^2 (1 - q^2)} f_k = 0$$

oder, von den Brüchen befreit:

$$d^2 q^2 (1 - q^2) f_k'' + d q f_k' - k^2 f_k = 0$$

In dieser Gleichung erscheint das Verhältnis $\frac{h}{d}$ überhaupt nicht mehr. Die Lösungen gelten daher sowohl für jedes Rotationsellipsoid als auch für die Kugel. Der Einfluß des Pfeilverhältnisses macht sich erst beim Übergang von den reduzierten auf die tatsächlichen Schnittkräfte bemerkbar.

Zur Integration bedienen wir uns der Methode der unbestimmten Koeffizienten und setzen das Integral als Potenzreihe an:

$$f_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu q^\nu$$

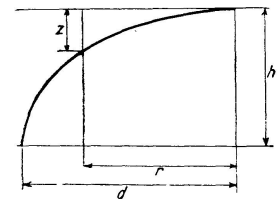


Fig. 2.

Die Ableitungen von f_k nach r sind:

$$f_k' = \frac{1}{d} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \cdot a_{\nu} \varrho^{\nu-1}$$

$$f_k'' = \frac{1}{d^2} \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1) a_{\nu} \varrho^{\nu-2}$$

Wir führen diese Reihen in die Differentialgleichung ein und ordnen nach Potenzen von ϱ . Die Gleichung kann nur dann für jedes ϱ identisch verschwinden, wenn die Koeffizienten jeder Potenz von ϱ zu Null werden. Daraus ergeben sich die Bedingungsgleichungen, aus denen die Koeffizienten bestimmt werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ (1 - k^2) a_1 &= 0 \\ (4 - k^2) a_2 &= 0 \\ (9 - k^2) a_3 &= 0 \\ (16 - k^2) a_4 - 2 a_2 &= 0 \\ (25 - k^2) a_5 - 6 a_3 &= 0 \\ (36 - k^2) a_6 - 12 a_4 &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ (\nu^2 - k^2) a_{\nu} - (\nu-2)(\nu-3) a_{\nu-2} &= 0 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß in der Reihenentwicklung von f_k alle Koeffizienten mit der Ordnungsziffer $\nu < k$ verschwinden, die Reihe daher mit ϱ^k als niederster Potenz beginnt. Ferner verschwinden alle Koeffizienten mit der Ordnungsziffer $\nu = k + 2n - 1$ ($n = 1, 2, 3$ usw.), so daß die Reihe mit ϱ^2 fortschreitet. Die Koeffizienten, die nicht verschwinden, sind mittels der Rekursionsformel

$$a_{\nu} = \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{\nu^2 - k^2} \cdot a_{\nu-2}$$

aus dem vorhergehenden $a_{\nu-2}$ einfach zu berechnen. Der erste Koeffizient $a_{\nu=k}$ ist Freiwert.

Der Grenzwert des Quotienten zweier aufeinander folgender Koeffizienten konvergiert gegen die Einheit

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{a_{\nu}}{a_{\nu-2}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{\nu^2 - k^2} = 1$$

Die Reihe konvergiert daher für alle Werte von $\varrho < 1$, bzw. $r < d$.

Eine Sonderstellung nimmt auch hier $k = 1$ ein, da in diesem Falle alle Koeffizienten, ausgenommen a_1 , zu Null werden. Es wird darauf im nächsten Abschnitt näher eingegangen werden.

Im nachfolgenden sind die Reihen für die Werte $k = 2$ bis $k = 6$ angegeben.

$k = 2$, a_2 ist Freiwert

$$\begin{aligned} f_2 &= a_2 \varrho^2 \left[1 + \frac{1}{6} \varrho^2 + \frac{1}{16} \varrho^4 + \frac{1}{32} \varrho^6 + \frac{7}{384} \varrho^8 + \frac{3}{256} \varrho^{10} + \dots \right] \\ &= a_2 \varrho^2 [1 + 0,1667 \varrho^2 + 0,0625 \varrho^4 + 0,0313 \varrho^6 + 0,0182 \varrho^8 + 0,0118 \varrho^{10} + \dots] \end{aligned}$$

$k = 3$, a_3 ist Freiwert

$$\begin{aligned} f_3 &= a_3 \varrho^3 \left[1 + \frac{3}{8} \varrho^2 + \frac{3}{16} \varrho^4 + \frac{7}{64} \varrho^6 + \frac{9}{128} \varrho^8 + \frac{99}{2084} \varrho^{10} + \dots \right] \\ &= a_3 \varrho^3 [1 + 0,375 \varrho^2 + 0,1875 \varrho^4 + 0,1096 \varrho^6 + 0,0704 \varrho^8 + 0,0479 \varrho^{10} + \dots] \end{aligned}$$

$k = 4$, a_4 ist Freiwert

$$\begin{aligned} f_4 &= a_4 \varrho^4 \left[1 + \frac{3}{5} \varrho^2 + \frac{3}{8} \varrho^4 + \frac{1}{4} \varrho^6 + \frac{45}{256} \varrho^8 + \frac{33}{256} \varrho^{10} + \dots \right] \\ &= a_4 \varrho^4 [1 + 0,6000 \varrho^2 + 0,3750 \varrho^4 + 0,2500 \varrho^6 + 0,1758 \varrho^8 + 0,1288 \varrho^{10} + \dots] \end{aligned}$$

$k = 5$, a_5 ist Freiwert

$$\begin{aligned} f_5 &= a_5 \varrho^5 \left[1 + \frac{5}{6} \varrho^2 + \frac{5}{8} \varrho^4 + \frac{15}{32} \varrho^6 + \frac{275}{768} \varrho^8 + \frac{143}{512} \varrho^{10} + \dots \right] \\ &= a_5 \varrho^5 [1 + 0,8333 \varrho^2 + 0,6250 \varrho^4 + 0,4568 \varrho^6 + 0,3580 \varrho^8 + 0,2794 \varrho^{10} + \dots] \end{aligned}$$

$k = 6$, a_6 ist Freiwert

$$\begin{aligned} f_6 &= a_6 \varrho^6 \left[1 + \frac{15}{14} \varrho^2 + \frac{15}{16} \varrho^4 + \frac{25}{32} \varrho^6 + \frac{165}{256} \varrho^8 + \frac{273}{512} \varrho^{10} + \dots \right] \\ &= a_6 \varrho^6 [1 + 1,0715 \varrho^2 + 0,9378 \varrho^4 + 0,7815 \varrho^6 + 0,6445 \varrho^8 + 0,5336 \varrho^{10} + \dots] \end{aligned}$$

Die hier angegebenen Reihen stellen noch nicht das allgemeine Integral der homogenen Differentialgleichung dar. Der Funktion f_k entsprechen Randbelastungen längs eines Breitenkreises, die gegen den Scheitel zu abklingen. Da die Differentialgleichung von zweiter Ordnung ist, existiert noch ein zweites, von f_k nicht linear abhängiges Integral, das einem vom Scheitel gegen den Rand der Schale abklingenden Spannungszustand entspricht, analog den mit negativen Exponenten behafteten Potenzen $r^{-\nu}$ bei den Paraboloiden. Rein formal läßt sich dieses zweite Integral \bar{f}_k durch Quadraturen aus f_k berechnen, die jedoch nicht ohne weiteres durchführbar sind, da Singularitäten auftreten. Im nächsten Abschnitt wird darauf zurückgekommen.

δ) Am Kämpfer stark überkrümmte Rotationsschalen.

Bei flachen Rotationsschalen ist es von Wichtigkeit, zur Verminderung der Randstörungen die Meridiankurve in der Nähe des Kämpfers stark zu krümmen. DISCHINGER² hat die Einschaltung eines Übergangsbogens bzw. gegen den Kämpfer stetig zunehmende Krümmung vorgeschlagen. Man kann diesen Effekt erreichen, wenn man den Meridian nach Kurven formt, die der Gleichung

$$z = h \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{d^2} \right)^n \right], \quad n = \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \text{ usw.}$$

entsprechen. Je kleiner n gewählt wird, desto stärker ist die Überkrümmung.

$$\text{Es wird: } z' = 2n \frac{h}{d} \varrho (1 - \varrho^2)^{n-1}, \quad \varrho = \frac{r}{d}$$

$$z'' = 2n \frac{h}{d^2} (1 - \varrho^2)^{n-2} [1 + \varrho^2 (1 - 2n)]$$

$$\frac{z''}{z'} = \frac{1 + \varrho^2 (1 - 2n)}{d \cdot \varrho (1 - \varrho^2)}$$

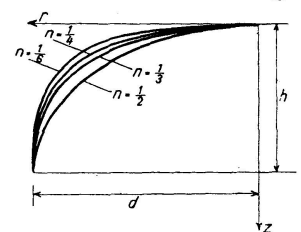


Fig. 3.

Damit lautet die Differentialgleichung (10):

$$f'' + \frac{1 + \varrho^2(1 - 2n)}{d \cdot \varrho(1 - \varrho^2)} \cdot f' - \frac{k^2}{d^2} \frac{1 + \varrho^2(1 - 2n)}{\varrho^2(1 - \varrho^2)} \cdot f = 0$$

oder, von den Brüchen befreit:

$$d^2 \varrho^2 (1 - \varrho^2) f'' + d \cdot \varrho [1 + \varrho^2(1 - 2n)] f' - k^2 [1 + \varrho^2(1 - 2n)] \cdot f = 0$$

Das Integral setzen wir wieder als Potenzreihe

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \varrho^{\nu}$$

an und bestimmen die Koeffizienten nach der gleichen Methode wie im vorhergehenden Abschnitt.

Wir erhalten folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ (1 - k^2) a_1 &= 0 \\ (4 - k^2) a_2 &= 0 \\ (9 - k^2) a_3 + (1 - k^2)(1 - 2n) a_1 &= 0 \\ (16 - k^2) a_4 + [(2 - k^2)(1 - 2n) - 2] a_2 &= 0 \\ (25 - k^2) a_5 + [(3 - k^2)(1 - 2n) - 6] a_3 &= 0 \\ (36 - k^2) a_6 + [(4 - k^2)(1 - 2n) - 12] a_4 &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

allgemein:

$$(\nu^2 - k^2) a_{\nu} + [(\nu - 2 - k^2)(1 - 2n) - (\nu - 2)(\nu - 3)] a_{\nu-2} = 0$$

Die Reihen sind ganz ähnlich gebaut wie die für die Kugel maßgebenden. Für $n = \frac{1}{2}$ gehen sie in diese über. Ebenso ist der Konvergenzbereich der gleiche ($\varrho < 1$, $r < d$). Auch bei dieser Schalenform ergibt sich bei $k = 1$ für f_k keine Reihe, sondern der Ausdruck $f_1 = a_1 \cdot r$, ebenso wie bei allen bisher behandelten Formen.

Die Integration der Differentialgleichung (10) ist mithin für die wichtigsten Rotationsschalen durchgeführt. Sollen andere Formen untersucht werden, so führt, wenn die vorhin angewendeten Methoden versagen, eines der bekannten Verfahren zur numerischen oder graphischen Integration von linearen Differentialgleichungen zum Ziele. Wir haben aus den obigen Darlegungen gesehen, daß die von Singularitäten freien Integrale f_k , und das sind die für die Aufgaben des Schalenbaues wichtigen, am Ursprung gleichzeitig mit ihrer ersten Ableitung verschwinden (für $r = 0$ ist $f_k = 0$ und $f_k' = 0$). Da somit die Anfangsbedingungen bekannt sind, steht der Anwendung eines Approximationsverfahrens nichts im Wege, da hierdurch zahlenmäßige Ergebnisse von genügender Genauigkeit erhalten werden.

IV. Die Singularitäten des Membranzustandes.

Den im Abschnitt III untersuchten Spannungszuständen liegt eine in der Ringrichtung kreisperiodisch verlaufende Spannungsfunktion zu Grunde. Es zeigt sich, daß die zwei partikulären Integrale der homogenen Differentialgleichung (10) verschiedene Bedeutung haben. Das erste (f_k) verläuft regulär und beschreibt Spannungszustände, die gegen den Scheitel der Schale zu abklingen. Das zweite, in der Folge \bar{f}_k bezeichnet und das nur am Para-

boloid ermittelt wurde, wird im Scheitel singulär und entspricht Spannungszuständen, die vom Scheitel, in dem die Spannungen unendlich groß werden, nach außen hin abklingen. Diese zweite Gruppe hat nur Bedeutung für offene Kuppeln (Laterne), wo der Ort der Singularität außerhalb des Bereiches liegt. Es sei hier erwähnt, daß in den Fällen, wo die Integration nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten zum Ziele führt, dieses zweite, singuläre Integral der Differentialgleichung (12) nach dem Frobenius'schen Verfahren ermittelt werden kann, indem man

$$f = \varrho^\kappa \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varrho^\nu$$

setzt. In bekannter Weise wird κ (Kappa) aus der determinierenden Fundamentalgleichung und die Koeffizientenreihe a_ν aus einem System linearer Gleichungen gefunden. Wegen der geringen Bedeutung für die Probleme des Schalenbaues wird hier nicht näher darauf eingegangen.

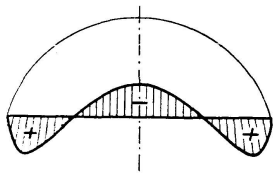


Fig. 4.

Alle diese Belastungszustände entsprechen Randbelastungen entweder am untern, oder bei offenen Schalen am oberen Rande, die in sich ein Gleichgewichtssystem bilden. (Fig. 4).

Es gibt aber noch eine zweite Gruppe von Singularitäten, die von Randbelastungen stammen, die an sich kein Gleichgewichtssystem bilden; diese Gruppe wird in diesem Abschnitt behandelt.

Da nun nach Gl. (12a) die am Breitenkreis eines Schalenabschnittes auftretende Meridianschnittkraft N_r den gleichen periodischen Verlauf hat wie die Spannungsfunktion, so entspricht dem Falle $k = 1$ eine Randbelastung, die von einem positiven Maximum auf der einen Seite in ein negatives Maximum auf der anderen Seite übergeht. Die Schnittkräfte stehen nicht im Gleichgewicht, sondern bilden ein resultierendes Moment (Fig. 5). Ist jedoch $k > 1$, so steht die Randbelastung in sich im Gleichgewicht. Wir wollen nun den Singularitäten der Belastung in der Differentialgleichung nachgehen.

a) Die Einzellast im Scheitel ($r=0$).

Wir müssen hier auf die partielle Differentialgleichung

$$8) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \frac{\partial z}{\partial r} = q$$

zurückgreifen. Da q nur von den stetig verteilten Flächenlasten abhängt, wird es bei dem Fehlen solcher zu Null. Wegen der Symmetrie der Belastung muß die Spannungsfunktion unabhängig von ϑ sein.

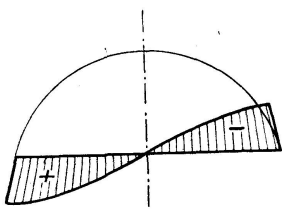


Fig. 5.

$$F = F(r)$$

Es wird somit $\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} = 0$ und ebenso $q = 0$. Differentialgleichung (8) wird zu

$$F'' + \frac{z''}{z'} F' = 0$$

Man kann durch Trennung der beiden Funktionen integrieren und erhält:

$$F' = \frac{c}{z'}$$

Nach Gleichungen (3 a) wird die reduzierte Meridianschnittkraft

$$\mathfrak{N}_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{c}{rz'}$$

Das Integral der Vertikalkomponenten der Meridianschnittkräfte wird, da

$$N_r^v = \mathfrak{N}_r \operatorname{tg} \varphi = \frac{c}{r}, \quad (\operatorname{tg} \varphi = z'),$$

$$P = \int_0^{2\pi} N_r^v \cdot r d\vartheta = 2\pi \cdot c$$

Das Integral ist von r unabhängig. Der Einzellast im Scheitel entspricht die Spannungsfunktion

$$\frac{\partial F}{\partial r} = F' = \frac{P}{2\pi z'}$$

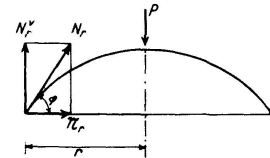


Fig. 6.

und die reduzierten Schnittkräfte

$$\mathfrak{N}_r = \frac{P}{2r\pi z'}$$

$$\mathfrak{N}_\vartheta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = -\frac{P}{2\pi} \cdot \frac{z''}{z'^2}$$

$$\mathfrak{N}_{r\vartheta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) = 0$$

Selbstverständlich gelten in der Nähe des Scheitels diese Gleichungen nicht, da ein Membranzustand in der Nähe von Einzellasten nicht möglich ist. Aber in einiger Entfernung vom Scheitel nach Abklingen der Biegewelle sind sie maßgebend.

β) Das um die Rotationsachse drehende Torsionsmoment.

Wir setzen die Spannungsfunktion als nur von ϑ abhängig an.

$$F = C \cdot g(\vartheta)$$

Es ist dann $\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0$, daher wird die Differentialgleichung (8) zu

$$C \frac{z''}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} = 0$$

woraus $\frac{\partial g}{\partial \vartheta} = c$ folgt.

Die reduzierten Schnittkräfte sind:

$$\mathfrak{N}_r = \mathfrak{N}_\vartheta = 0$$

$$\mathfrak{N}_{r\vartheta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{c}{r} \right) = -\frac{c}{r^2}$$

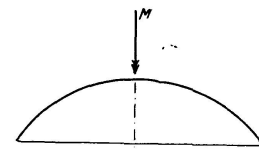


Fig. 7.

Wir bilden das Moment der Schnittkräfte eines Breitenkreises um die Ro-

tationsachse:

$$M = \int_0^{2\pi} \Re_{r\vartheta} r^2 d\vartheta = -2\pi c.$$

Dem Moment M entsprechen die Spannungsfunktion

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = -\frac{M}{2\pi}$$

und die Schnittkräfte

$$N_r = N_\vartheta = 0, \quad N_{r\vartheta} = -\frac{M}{2r^2\pi}.$$

$\gamma)$ Das um eine Achse normal zur Rotationsachse drehende Moment.

Diese Belastung ist identisch mit dem Falle $k = 1$ aus Abschnitt III. Wir setzen dort die Spannungsfunktion an zu

$$F = f(r) \cdot \cos \vartheta,$$

Der Ansatz $F = f(r) \sin \vartheta$ bedeutet nur eine Drehung gegenüber der Richtung $\vartheta = 0$ um $\frac{\pi}{2}$.

Mit $k = 1$ wird die charakteristische Differentialgleichung (10) zu

$$f'' + \frac{z''}{z'} f' - \frac{1}{r} \frac{z''}{z'} f = 0,$$

die durch $f = cr$ befriedigt wird. Die Spannungsfunktion $F = cr \cos \vartheta$ stellt jedoch eine geneigte Ebene dar, der spannungsloser Zustand in der Schale entspricht. Da aber $f = cr$ nur ein partikuläres Integral von (10) ist, so existiert noch ein zweites von f linear unabhängiges Integral \bar{f} , das, wie sich zeigen wird, tatsächlich dem Biegemoment im Scheitel entspricht.

Ist von einer Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) y = 0$$

ein partikuläres Integral y_1 bekannt, so kann ein zweites, davon nicht linear abhängiges y_2 durch Quadraturen aus der Differentialgleichung erster Ordnung

$$y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1' = C \cdot \exp\left(-\int p_1(x) dx\right)$$

abgeleitet werden.

In unserem Falle entspricht p_1 der Ausdruck $\frac{z''}{z'}$, so daß wir \bar{f} aus der Differentialgleichung

$$f \cdot \bar{f}' - f' \cdot \bar{f} = C \exp\left(-\int \frac{z''}{z'} dr\right)$$

gewinnen.

Da $\int \frac{z''}{z'} dr = \ln z'$ ist, so wird

$$f \cdot \bar{f}' - f' \cdot \bar{f} = \frac{C}{z'}.$$

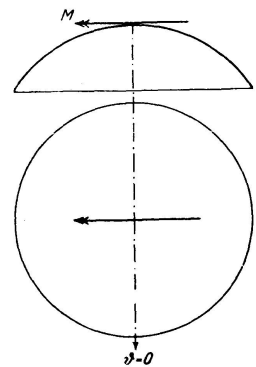


Fig. 8.

Diese Differentialgleichung läßt sich integrieren. Es ist

$$\bar{f} = f \left[C_1 + C_2 \int \frac{1}{z' f^2} dr \right]$$

Wir führen nun für $f = c \cdot r$ ein und erhalten, da C_1 unwesentlich ist, das gesuchte partikuläre Integral:

$$F = \bar{f} \cdot \cos \vartheta = C \cdot r \int \frac{dr}{z' r^2} \cdot \cos \vartheta.$$

Die Schnittkräfte können angegeben werden, ohne die Integration ausführen zu müssen. Es wird

$$\mathfrak{N}_r = \left(\frac{1}{r} \bar{f}' - \frac{1}{r^2} \bar{f} \right) \cdot \cos \vartheta = \frac{C}{z' r^2} \cdot \cos \vartheta$$

Die Größe des Momentes um die Achse $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$ wird wieder durch Integration über einen Breitenkreis erhalten. Es ist

$$N_{r'} = \mathfrak{N}_r \cdot z' = \frac{C}{r^2} \cdot \cos \vartheta$$

$$M = \int_0^{2\pi} N_{r'} \cdot r^2 \cos \vartheta \cdot d\vartheta = C \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta = 2C\pi;$$

daher ist
$$C = \frac{M}{2\pi}.$$

Die Querkraft, das Integral über die Seitenkomponenten in Richtung $\vartheta = 0$ der Schnittkräfte $N_{r\vartheta}$ und N_r verschwindet. Das steht in Übereinstimmung mit dem Ergebnis, daß das Moment M von r unabhängig ist.

Die Schnittkräfte in der Schale sind somit:

$$\mathfrak{N}_r = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\cos \vartheta}{z' r^2}$$

$$\mathfrak{N}_\vartheta = \bar{f}'' \cos \vartheta = - \frac{M}{2\pi} \frac{z''}{z'^2 r} \cdot \cos \vartheta$$

$$\mathfrak{N}_{r\vartheta} = - \left(\frac{1}{r} \bar{f}' - \frac{1}{r^2} \bar{f} \right) \sin \vartheta = - \frac{M}{2\pi} \frac{\sin \vartheta}{z' r^2}$$

Die hier behandelten Belastungsfälle an Rotationsschalen, Singularitäten der Belastung, sind zum Teil schon lange bekannt. Die Membranschnittkräfte infolge einer Einzellast im Scheitel können auf elementare Weise abgeleitet werden, mit dem Torsionsmoment arbeiten z. B. die Flugzeugbauer und von dem Biegemoment im Scheitel einer Rotationsschale hat DISCHINGER⁴ bei der Berechnung unsymmetrischer Kugelschalen Gebrauch gemacht. Es war aber notwendig, diese Fälle als Singularitäten aus der Differentialgleichung für die Spannungsfunktion herauszuschälen und die Zusammenhänge zu klären, damit bei der Anwendung der Methode nicht unversehens ein solches singuläres Integral in unzulässiger Weise angesetzt wird.

V. Rotationsschalen bei nicht stetiger Stützung längs eines Breitenkreises.

Die bisherigen Untersuchungen haben das allgemeine Integral der homogenen Differentialgleichung zum Gegenstande gehabt. Es soll nun gezeigt werden, wie mit dessen Hilfe Rotationsschalen der verschiedensten Stützungsarten behandelt werden können. Wir beschränken hierbei die Betrachtungen auf den Fall des Eigengewichtes, da dieser der weitaus wichtigste ist und daran das Charakteristische der Methode genügend klar gezeigt wird.

a) Die Kuppel auf Einzelstützen.

Wir betrachten eine Kuppel mit m Einzelstützen. Der Zentriwinkel eines Sektors zwischen zwei Stützen ist dann $\frac{2\pi}{m}$. Wir nehmen die Meridianschnittkräfte aus Eigengewicht N_r^g bzw. deren Horizontalkomponenten \mathfrak{N}_r^g als bekannt an, da deren Bestimmung eine elementare Aufgabe darstellt. Im endgültigen Zustand treten am Kämpfer nur innerhalb der Stützenbreite ε von Null verschiedene Meridianschnittkräfte \mathfrak{N}_r auf, dazwischen sollen sie verschwinden. Wir fügen zu dem Zustand \mathfrak{N}_r^g eine Randbelastung \mathfrak{N}_r^o hinzu, die an jeder Stelle des Randes $r = R_0$ der Bedingung genügt:

$$\mathfrak{N}_r^g + \mathfrak{N}_r^o = \mathfrak{N}_r, \text{ bzw. } \mathfrak{N}_r^g + \mathfrak{N}_r^o = 0.$$

Der Zustand \mathfrak{N}_r^o wird durch das allgemeine Integral $F^0 = \sum_k c_k f_k \cos k \vartheta$ dargestellt, worin f_k das reguläre Integral der Differentialgleichung (10) bedeutet. Es ist nach Gleichung (12a):

$$\mathfrak{N}_r^o = \sum_k c_k \left(\frac{1}{r} f_k' - \frac{k^2}{r^2} f_k \right) \cos k \vartheta.$$

Längs des Kämpfers ist $r = R_0 = \text{const.}$, daher auch der Ausdruck

$$\left(\frac{1}{r} f_k' - \frac{k^2}{r^2} f_k \right) = \text{const.},$$

hat aber für jedes k einen anderen Wert. Am Rande ist also \mathfrak{N}_r^o nur von ϑ abhängig und mittels der harmonischen Analyse können die Freiwerte c_k so bestimmt werden, daß \mathfrak{N}_r^o den gewünschten Verlauf nimmt.

Da die Stützkkräfte bei m Stützen ebenso viele Perioden bei einer Umrundung des Randes durchlaufen, treten in der Reihenentwicklung der Spannungsfunktion nur die Indizes $m \cdot k$ ($k = 1, 2, 3 \dots$) auf. Die Spannungsfunktion lautet also:

$$F^0 = \sum_k c_k f_{mk} \cos mk \vartheta, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

Die Koeffizienten c_k werden, wie schon gesagt, durch harmonische Analyse gewonnen. Die Schnittkräfte infolge der zusätzlichen Randbelastung werden durch Differenzieren der Spannungsfunktion gefunden und sind:

$$\mathfrak{N}_r^o = \sum_k c_k \left(\frac{1}{r} f_{mk}' - \frac{m^2 k^2}{r^2} f_{mk} \right) \cos mk \vartheta$$

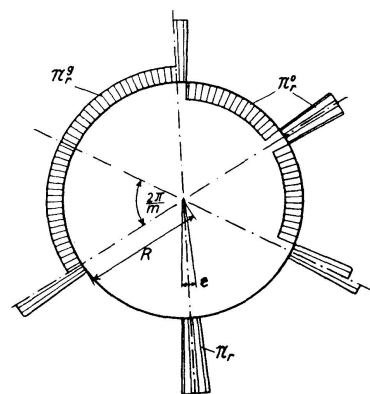


Fig. 9.

$$\mathfrak{N}_\vartheta^0 = \sum_k c_k f_{mk}'' \cos mk\vartheta \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

$$\mathfrak{N}_{r\vartheta}^0 = - \sum_k c_k \cdot mk \left(\frac{1}{r} f_{mk}' - \frac{1}{r^2} f_{mk} \right) \sin mk\vartheta$$

Zu diesen Schnittkräften sind die aus Eigengewicht \mathfrak{N}_r^g und \mathfrak{N}_ϑ^g hinzuzufügen, um den Spannungszustand der Kuppel auf Einzelstützen zu erhalten.

An den nicht unterstützten Strecken des Kämpfers sind jetzt wohl die Meridian-Schnittkräfte verschwunden, es treten aber Schubkräfte auf, die durch ein in der horizontalen Ebene biegungssteifes Randglied aufgenommen werden müssen.

β) Die Halbkuppel (Apside).

Bei der vollen Kuppel treten unter Eigengewicht Schnittkräfte in der Ringrichtung N_ϑ^g auf, die nur von r abhängen. Wird eine solche Kuppel aufgeschnitten, so können diese Ringspannungen nicht mehr ungestört auftreten. Da die Randaussteifung nicht im Stande ist, die Kräfte aufzunehmen, so müssen im endgültigen Zustand die N_ϑ längs des Randes $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ verschwinden. Wir haben also an diesen Rändern Randkräfte anzubringen, die in jedem Randpunkt der Bedingung

$$\mathfrak{N}_\vartheta^g + \mathfrak{N}_\vartheta^0 = 0$$

genügen.

Nach Gleichung (3) war jedoch

$$\mathfrak{N}_\vartheta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + B.$$

Da sowohl für Eigengewicht, als auch im Zustand \mathfrak{N}_ϑ^0 die Größe B verschwindet, so können wir die vorige Bedingung auch schreiben: am Rande $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ ist

$$\frac{\partial^2 F^g}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F^0}{\partial r^2} = 0.$$

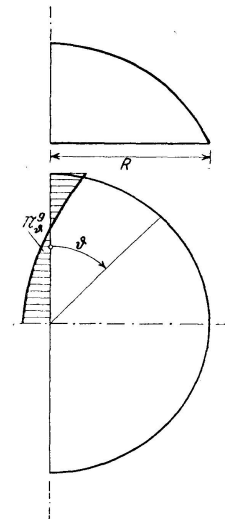


Fig. 10.

Das ist aber nichts anderes als die Bedingung, daß die den Endzustand beschreibende Spannungsfunktion $F = F^g + F^0$ längs der Ränder $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ nach einer Geraden verläuft. Aus Symmetriegründen kann man die gleichwertige Aussage machen, daß F längs des Randes den Wert Null annehmen muß.

Die Kenntnis der Spannungsfunktion für Eigengewicht F^g ist jedoch zur Durchführung dieser Aufgabe nicht notwendig, sondern lediglich die der auf bekannte Weise zu ermittelnden Ringspannungen.

Wir setzen das allgemeine Integral wieder als Summe an:

$$F^0 = \sum_k c_k f_k \cos k\vartheta, \quad k = 2, 4, 6 \dots$$

$k = 1$ ist wegen der daraus folgenden Singularität auszuschließen und für die Lösung der Aufgabe nicht notwendig. Wegen der Symmetrie zur Richtung $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ können weiters die Koeffizienten c_k mit ungeraden Indizes $k = 3, 5, 7 \dots$ von Haus aus zu Null angenommen werden.

Die dieser Spannungsfunktion entsprechenden Ring-Schnittkräfte sind

$$\mathfrak{N}_\vartheta^0 = \frac{\partial^2 F^0}{\partial r^2} = \sum_k c_k f_k'' \cos k\vartheta.$$

Die Funktionen f_k und deren zweite Ableitung f_k'' sind als Integral der Differentialgleichung (10) als bekannt anzusehen. Es sind hier die Freiwerte c_k so zu bestimmen, daß am Rande $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$

$$\int_0^R (\mathfrak{N}_\vartheta^g - \mathfrak{N}_\vartheta^0)^2 dr$$

zum Minimum wird. Da $k = 2, 4, 6 \dots$ ist, so wird am Rande $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ immer $\cos k\vartheta = +1$. Wir erhalten daher

$$J = \int_0^R (\mathfrak{N}_\vartheta^g - \sum_k c_k f_k'')^2 dr \rightarrow \min$$

Diese Minimalbedingung tritt hier an die Stelle der harmonischen Analyse. Damit sie befriedigt wird, muß für jedes k $\frac{\partial J}{\partial c_k} = 0$ werden, da nur über die Freiwerte c_k noch nicht verfügt ist. Es wird:

$$\frac{\partial J}{\partial c_i} = -2 \int_0^R (\mathfrak{N}_\vartheta^g - \sum_{k=2,4,6\dots} c_k f_k'') f_i'' \cdot dr = 0, \quad i = 2, 4, 6 \dots$$

Man erhält ein lineares Gleichungssystem zwischen den Koeffizienten c_k :

$$\sum_{k=2,4,6\dots} c_k \int_0^R f_i'' f_k'' dr = \int_0^R \mathfrak{N}_\vartheta^g \cdot f_i'' \cdot dr, \quad i = 2, 4, 6 \dots$$

Es ist hier nicht ohne weiteres möglich, die Spannungsfunktion F^0 als Reihe mit beliebig vielen Gliedern ($k = 2, 4, 6 \dots$) anzusetzen, da dann eine unbestimmte Anzahl von Unbekannten aus linearen Gleichungen ermittelt werden müßten. Es wird jedoch genügen, sich auf eine kleinere Anzahl von Reihengliedern, etwa 4 ($k = 2, 4, 6, 8$), zu beschränken. Von der Genauigkeit der Lösung kann man sich jederzeit überzeugen, indem man am Rande die verbleibenden Ringspannungen $\mathfrak{N}_\vartheta^g + \mathfrak{N}_\vartheta^0$ berechnet und prüft, ob sie genügend klein geworden sind, um vernachlässigt zu werden.

Es gibt jedoch einen Weg, um mit beliebig vielen Reihengliedern zu rechnen. Die i -te Reihe des Gleichungssystems der Koeffizienten c_k ist ausführlich geschrieben:

$$c_1 \int_0^R f_1'' \cdot f_i'' dr + c_2 \int_0^R f_2'' \cdot f_i'' dr + \dots + c_i \int_0^R f_i''^2 dr + \dots + c_k \int_0^R f_i'' f_k'' dr = \int_0^R f_i'' \mathfrak{N}_\vartheta^g dr.$$

Bildet man aus der Gruppe der Funktionen f_k'' eine Gruppe von zueinander orthogonalen Funktionen Φ_k als Linearkombinationen von f_k'' , was allerdings eine mühselige Arbeit ist, so verschwinden bedingungsgemäß die Integrale

$$\int_0^R \Phi_i \Phi_k dr \quad \text{und nur} \quad \int_0^R \Phi_i^2 dr \quad \text{ist von Null verschieden.}$$

Die Bedingungsgleichungen, die nun mit den Funktionen Φ_k und den Koeffizienten b_k angesetzt werden, enthalten auf der linken Seite der i -ten Zeile nur mehr ein Glied mit

$$b_i \int_0^R \Phi_i^2 dr = \int_0^R \mathfrak{N}_\vartheta^g \Phi_i dr$$

Es ist jeder Koeffizient aus einer einzigen Gleichung zu ermitteln. Vor allem sind aber jetzt die b_k von der Anzahl der angesetzten Reihenglieder unabhängig und jede Hinzufügung eines weiteren Gliedes verbessert das Ergebnis. Es ist zu beachten, daß die Funktionen Φ_k als Linearkombination von f_k nicht direkt in die Spannungsfunktion eingeführt werden können, da der Ansatz $\frac{\partial^2 F^0}{\partial r^2} = \sum_k b_k \Phi_k \cos k \vartheta$ falsch ist. Es müssen vielmehr aus den b_k die den Funktionen f_k'' entsprechenden Koeffizienten c_k ermittelt werden. Man wird die Orthogonalisierung nur zu Hilfe nehmen, wenn eine kleine Anzahl von Reihengliedern nicht im Stande sind, befriedigende Ergebnisse zu liefern.

Aus den Darlegungen des Abschnittes III und IV über die Funktionen f_k geht hervor, daß in dem Reihenansatz für F^0 bei der Halbkuppel nur die regulären Integrale von Differentialgleichung (10) berücksichtigt werden. Deren Charakter als Potenzen von r (Paraboloid) oder als Potenzreihen macht die Berechnung der Integrale $\int_0^R f_i'' f_k'' dr$ nicht allzu schwierig, gegebenenfalls ist sogar deren Auswertung nach der Simpson'schen Regel ausreichend.

Nach der Bestimmung der Freiwerte c_k ist die Spannungsfunktion F^0 bestimmt.

$$F^0 = \sum_k c_k f_k \cos k \vartheta, \quad k = 2, 4, 6 \dots$$

Die Spannungen in der Apse infolge $\mathfrak{N}_{\vartheta^0}$ können an jeder Stelle berechnet werden.

$$\mathfrak{N}_r^0 = \sum_k c_k \left(\frac{1}{r} f_k' - \frac{k^2}{r^2} f_k \right) \cos k \vartheta$$

$$\mathfrak{N}_{\vartheta}^0 = \sum_k c_k f_k'' \cos k \vartheta$$

$$\mathfrak{N}_{r\vartheta}^0 = - \sum_k c_k k \left(\frac{1}{r} f_k' - \frac{1}{r^2} f_k \right) \sin k \vartheta$$

Da wegen $k = 2, 4, 6 \dots$ an den Rändern $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ immer $\sin k \vartheta = 0$ ist, bleibt infolge der zusätzlichen Randbelastung $\mathfrak{N}_{\vartheta^0}$ der Rand frei von Schubspannungen. Da auch das Eigengewicht in der Vollkuppel keine Schubspannung erzeugt ($\mathfrak{N}_{r\vartheta}^g \equiv 0$), so hat die Halbkuppel unter Eigengewicht tatsächlich einen spannungsfreien Rand. Dieses Ergebnis hat schon DISCHINGER⁴ für die Kugelschale nachgewiesen; es zeigt sich, daß es allgemein für jede Rotationsschale unter achsensymmetrischer Belastung gilt. Um der Schale genügende Knicksteifigkeit zu geben, wird man trotzdem nicht auf eine Randaussteifung verzichten können. Am Kämpfer treten selbstverständlich Meridian- und Schubkräfte auf, die die Stützung aufzunehmen imstande sein muß.

γ) Die durch Scheiben ausgesteifte Rotationsschale über vieleckigem Grundriß.

Da die aussteifenden Binderscheiben keine Biegesteifigkeit normal zu ihrer Ebene haben, müssen längs des ganzen Randes die normal zum Rande wirkenden Spannungen \mathfrak{N}_n verschwinden. Die Schale wird lediglich von den Rand-Schubkräften \mathfrak{N}_{ns} bzw. deren Vertikalkomponenten getragen.

Wir greifen zurück auf die Bedeutung der Spannungsfunktion. Diese stellt eine doppelt gekrümmte Fläche dar, deren zweite Ableitungen einen

im Gleichgewicht stehenden, ebenen Spannungszustand darstellen und zwar sind ganz allgemein in zwei aufeinander normalen Richtungen n und s des Grundrisses

$$\mathfrak{N}_n = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$$

$$\mathfrak{N}_s = \frac{\partial^2 F}{\partial n^2}$$

$$\mathfrak{N}_{ns} = -\frac{\partial^2 F}{\partial n \partial s}.$$

Auf den im Grundriß geraden Rand angewendet, folgt daraus, daß die zu einem Rand s normalen Spannungen \mathfrak{N}_n dann verschwinden, wenn

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0$$

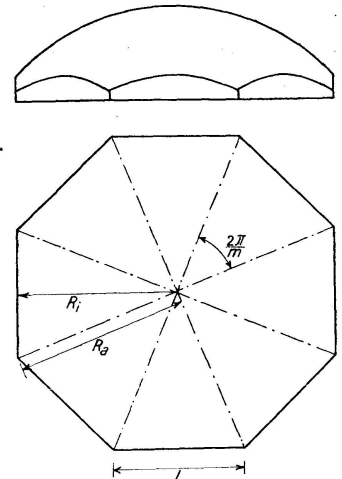


Fig. 11.

wird, d. h. wenn F dort nach einer Geraden verläuft. Diese Tatsache zeigte sich schon bei der Apside. Bei der Kuppel auf Einzelstützen konnte davon kein Gebrauch gemacht werden, da dort der Rand ein Kreis war und infolgedessen die Meridiankonvergenz von Einfluß war. Eine eingehendere Behandlung der Bedeutung der Spannungsfunktion und deren Randbedingungen wurden vom Verfasser in früheren Arbeiten gegeben^{8, 11}.

Wir wollen jetzt von dieser Eigenschaft der Spannungsfunktion Gebrauch machen, da hierdurch die Lösung der Aufgabe sehr übersichtlich wird. Wir haben zu der Spannungsfunktion F^g , die den Schnittkräften der längs des Breitenkreises R_a stetig unterstützten Schale unter der gegebenen Belastung entspricht, ein Integral F^0 der homogenen Differentialgleichung so hinzuzufügen, daß längs des mit Scheiben ausgesteiften vieleckigen Randes $F^g + F^0 = 0$ wird. Zur Lösung dieser Aufgabe ist daher die Kenntnis von F^g notwendig.

Wir setzten zu Beginn des Abschnittes V als Belastung Eigengewicht voraus. Es behalten aber alle Überlegungen für jede achsensymmetrische Belastung Gültigkeit. Wir wollen uns der Einfachheit halber wieder auf Gewichte beschränken ($P = \Theta = 0$), die gegeben seien durch die Belastungsfunktion $Z = Z(r)$. Wegen der Symmetrie der Belastung kann auch die Spannungsfunktion nur von r abhängig sein. Die Differentialgleichung (6) für F^g wird daher zu

$$\frac{\partial^2 F^g}{\partial r^2} + \frac{z''}{z'} \frac{\partial F^g}{\partial r} = -Z \frac{r}{z'}$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung in $\frac{\partial F}{\partial r}$, deren Integral

$$\frac{\partial F^g}{\partial r} = + \frac{1}{z'} \left[C + \int_0^r Z \frac{r^2}{z'} dr \right]$$

ist.

Durch Quadratur kann daraus F^g gefunden werden. Ohne näher darauf einzugehen, wollen wir F^g als bekannt voraussetzen.

Das allgemeine Integral sei wieder

$$F^0 = \sum_k c_k f_k \cos k \theta$$

worin f_k die regulären Integrale der Differentialgleichung (10) sind.

Zunächst müssen die Werte von F^g und F^0 längs des Randes bestimmt werden. Wir bezeichnen alle Randwerte durch einen darübergesetzten Querstrich (\bar{F} , \bar{r} usw.).

Jedem Punkt des Randes, gegeben durch dessen Abstand von Randmitte s , ist eindeutig Winkel ϑ und Radiusvektor \bar{r} zugeordnet. Es ist

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{s}{R_i}, \quad \bar{r} = \frac{R_i}{\cos \vartheta} = \frac{s}{\sin \vartheta}$$

Wir drücken die Randwerte als Funktion von s aus und setzen

$$\bar{F}^g = \bar{F}^g(s), \quad \bar{F}^0 = \bar{F}^0(s) = \sum_k c_k \bar{f}_k$$

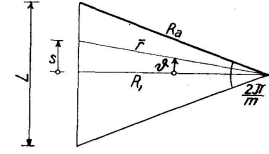


Fig. 12.

In der letzten Gleichung bedeutet $\bar{f}_k = \bar{f}_k(s)$ die Werte, die $f_k \cos k \vartheta$ am Rande s annimmt. Wir bemerken noch, daß ϑ von 0 bis $\frac{\pi}{m}$ läuft, wenn wir uns am Rande von $s = 0$ nach $s = \frac{L}{2}$ bewegen.

Da wegen der Symmetrie die Schnittkräfte an jeder Randscheibe gleich sind, brauchen wir nur die Glieder der Reihe F^0 mit den Indizes $m \cdot k$ zu berücksichtigen. Wir setzen daher:

$$F^0 = \sum_k c_k f_{mk} \cdot \cos mk \vartheta, \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

und

$$\bar{f}_k = \left[f_{mk}(r) \cdot \cos mk \vartheta \right]_{r = \frac{R_i}{\cos \vartheta}} = \bar{f}_k(s)$$

Jetzt bewegt sich $m \vartheta$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$, also einer vollen Periode, wenn s von $-\frac{L}{2}$ bis $+\frac{L}{2}$ läuft.

Wir fordern zur Bestimmung der Freiwerte c_k , entsprechend den Überlegungen, die bei der Halbkugel angestellt wurden, daß

$$J = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} (\bar{F}^g - \bar{F}^0)^2 ds = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} (\bar{F}^g - \sum_k c_k \bar{f}_k)^2 ds$$

zu einem Minimum wird. Wir müssen wieder $\frac{\partial J}{\partial c_k} = 0$ setzen und erhalten ganz entsprechend dem Abschnitt V, β

$$\sum_{k=0,1,2,\dots} c_k \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \bar{f}_i \cdot \bar{f}_k ds = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \bar{F}^g \cdot \bar{f}_i ds, \quad i = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Die Funktionen \bar{f}_k haben einen den Kreisfunktionen ähnlichen Verlauf, da der Winkel ϑ hierin den stärksten Einfluß hat. Die Abweichung wird durch die Änderung des Radiusvektor \bar{r} beim Durchlaufen einer Periode hervorgerufen, da bei $\vartheta = 0$, $\bar{r} = R_i$ und bei $\vartheta = \pm \frac{\pi}{m}$, $r = R_a$ ist.

Die Koeffizienten c_k gewinnen wir aus einem System linearer Gleichungen, dessen Koeffizienten die bestimmten Integrale

$$\delta_{ik} = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \bar{f}_i \cdot \bar{f}_k ds$$

und dessen rechte Seite die Integrale

$$\delta_{0i} = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \bar{F}^g \cdot \bar{f}_i ds$$

sind. Da innerhalb einer Periode \bar{f}_i bzw. \bar{f}_k zwischen positiven und negativen Werten schwankt, so ist bei der Auswertung der Integrale δ_{ik} , falls die Integration nicht streng, sondern numerisch durchgeführt wird, sehr sorgfältig vorzugehen. Lediglich

$$\delta_{ii} = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \bar{f}_i^2 ds$$

wird nur aus positiven Funktionswerten gebildet, wird also bedeutend größer werden als die δ_{ik} . Einerseits erfordert also die Bestimmung der δ_{ik} große Sorgfalt, andererseits sind aber die Koeffizienten δ_{ii} der Hauptdiagonale des Gleichungssystems bedeutend größer als die übrigen, so daß das System gegen Ungenauigkeiten wenig empfindlich ist. Eine Ungenauigkeit in der Berechnung der δ_{ik} wird dadurch weitgehend ausgeglichen, und auf das Endergebnis wenig Einfluß haben.

Mit der Bestimmung der Freiwerte c_k ist die Aufgabe gelöst, da aus der nunmehr bekannten Spannungsfunktion $F = F^g + F^0$ durch Differentiation an jeder Stelle die Spannungen \mathfrak{N}_r , \mathfrak{N}_ϑ und $\mathfrak{N}_{r\vartheta}$ zu berechnen sind. An der Scheibe muß man die Spannungen \mathfrak{N}_s und \mathfrak{N}_{ns} bezogen auf die Richtungen n und s kennen. Diese sind aus einer einfachen Transformation zu ermitteln. Es wird in bekannter Weise:

$$\mathfrak{N}_s = \mathfrak{N}_r \sin^2 \vartheta + \mathfrak{N}_\vartheta \cos^2 \vartheta + \mathfrak{N}_{r\vartheta} \sin 2\vartheta$$

$$\mathfrak{N}_{ns} = \frac{\mathfrak{N}_r - \mathfrak{N}_\vartheta}{2} \sin 2\vartheta + \mathfrak{N}_{r\vartheta} \cos 2\vartheta$$

Schließlich wird

$$\mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_r \cos^2 \vartheta + \mathfrak{N}_\vartheta \sin^2 \vartheta - \mathfrak{N}_{r\vartheta} \sin 2\vartheta.$$

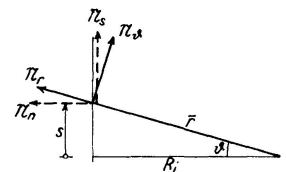


Fig. 13.

Die letzte Gleichung ermöglicht die Nachprüfung, ob die Spannungsfunktion genügend genau berechnet wurde, so daß tatsächlich am Rande \mathfrak{N}_n verschwindet, bzw. von welcher Größenordnung die Ungenauigkeit ist.

VI. Rotationsschalen unter Windbelastung.

Wir setzen voraus, daß das von DISCHINGER² vorgeschlagene Gesetz der Verteilung der Winddrücke

$$w = w_0 \sin^2 \varphi (0,85 \sin \vartheta - 0,15 \sin 3\vartheta)$$

die Belastung der Schale in befriedigender Weise beschreibt. Zur Ermittlung der Spannungsfunktion, die den Schnittkräften der Schale unter der Windbelastung zugeordnet ist, greifen wir auf die Differentialgleichung in ihrer allgemeinen Fassung Gl. (6) und (7) zurück:

$$6) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} \cdot z'' + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} z'' + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} z' = q$$

$$7) \quad q = - \left[Z + \frac{\partial}{\partial r} \left(A \frac{\partial z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} A \frac{\partial z}{\partial r} \right].$$

Hierin ist die Größe A durch Gleichung (5) gegeben:

$$A = -\frac{1}{r} \int_0^r \left(P + \frac{1}{r} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \Theta r d\vartheta \right) r dr.$$

Zunächst sind die auf die Einheit der Grundebene bezogenen Belastungskomponenten P , Θ , Z zu bestimmen. Da der Winddruck w normal auf die Schale angenommen wird (die Reibung ist vernachlässigt), so wird $\Theta = 0$. Weiters ist

$$P dr = -w \sin \varphi ds, \quad Z dr = w \cos \varphi ds.$$

Da

$$ds = \frac{1}{\cos \varphi} dr, \quad \text{wird}$$

$$P = -w \operatorname{tg} \varphi, \quad Z = w, \quad \Theta = 0.$$

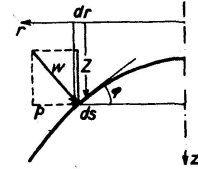


Fig 14.

Führen wir das DISCHINGER'sche Windgesetz ein, so wird

$$P = w_0 \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi} (b_1 \sin \vartheta + b_3 \sin 3 \vartheta) = P_0 (b_1 \sin \vartheta + b_3 \sin 3 \vartheta)$$

$$Z = w_0 \sin^2 \varphi (b_1 \sin \vartheta + b_3 \sin 3 \vartheta) = Z_0 (b_1 \sin \vartheta + b_3 \sin 3 \vartheta)$$

Die Größen P_0 und Z_0 sind nur mehr von r abhängig, b_1 und b_3 ist statt der besonderen Werte gesetzt. Da P und Z demselben Gesetz in ϑ gehorchen, können wir auch

$$A = A_0 (b_1 \sin \vartheta + b_3 \sin 3 \vartheta)$$

$$q = q_0 (b_1 \sin \vartheta + b_3 \sin 3 \vartheta)$$

setzen. Nach Gleichung (5) wird

$$A_0 = -\frac{1}{r} \int_0^r P_0 r dr = \frac{w_0}{r} \int_0^r r \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi} dr$$

und nach Gleichung (7)

$$q_0 = -\left[Z_0 + \frac{\partial}{\partial r} (A_0 z') + \frac{1}{r} A_0 z' \right] = -\left[Z_0 + \left(z'' + \frac{1}{r} z' \right) A_0 + z' \frac{\partial A_0}{\partial r} \right].$$

Wegen des kreisperiodischen Verlaufes der Störungsfunktion kann auch die Spannungsfunktion auf Grund der gleichen Überlegungen wie im Abschnitt III angesetzt werden als

$$F = \sum_{k=1,3} b_k f_k \sin k \vartheta.$$

Wir erhalten für die Funktionen f_k die inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$r z' f_k'' + r z'' f_k' - k^2 z'' f_k = r^2 q_0$$

mit deren Integration die Aufgabe gelöst ist.

Es ist im allgemeinen nicht möglich, die Integrationen zur Berechnung der Größen A_0 und q_0 auszuführen. Ebenso versagt die Integration der inhomogenen Differentialgleichung in geschlossener Form. Es muß daher ein numerisches Verfahren angewendet werden.

Die Belastungsgröße

$$A_0 = \frac{w_0}{r} \int_0^r r \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi} dr$$

kann durch Quadraturen (Simpson'sche Regel) mit beliebiger Genauigkeit an jeder Stelle berechnet werden. Durch die Bestimmung des Grenzwertes überzeugt man sich leicht, daß

$$\lim_{r \rightarrow 0} A_0 = 0$$

wird. Unstetigkeiten sind ausgeschlossen, solange $\varphi < \frac{\pi}{2}$, daher ist die Anwendung eines numerischen Verfahrens ohne weiteres zulässig. Ebenso ist aber auch

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial A_0}{\partial r} = 0$$

so daß auch q_0 keine Unstetigkeiten aufweist. Für $r = 0$ ist $q_0 = 0$.

Es ist zweckmäßig, die numerische Integration der inhomogenen Differentialgleichung mittels der Differenzenrechnung durchzuführen, da diese mindestens ebenso genaue Ergebnisse liefert, wie das zu Grunde gelegte Windgesetz die tatsächliche Belastung der Schale bei Wind wiedergibt.

Wir ersetzen die Differentialquotienten in der Differentialgleichung durch die Differenzenquotienten. Die Funktion f_k habe an drei aufeinander folgenden Punkten $m-1$, m , $m+1$ den Wert η_{m-1} , η_m und η_{m+1} . Wir setzen an der Stelle m statt $f_k \dots \eta_m$,

$$\begin{aligned} \text{statt } f'_k \dots & \frac{\eta_{m+1} - \eta_{m-1}}{2 \Delta r} \\ \text{statt } f''_k \dots & \frac{\eta_{m+1} - 2\eta_m + \eta_{m-1}}{\Delta r^2} \\ \text{statt } r^2 q_{0m} \dots & R_m \end{aligned}$$

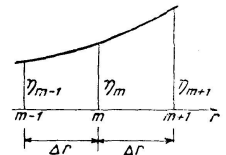


Fig. 15.

Damit geht die inhomogene Differentialgleichung in eine lineare Beziehung zwischen drei aufeinander folgenden Werten η_{m-1} , η_m , η_{m+1} über:

$$\frac{r}{\Delta r} \left(\frac{z'}{\Delta r} + \frac{z''}{2} \right) \cdot \eta_{m+1} - \left(2 \frac{r z'}{\Delta r^2} + k^2 z'' \right) \eta_m + \frac{r}{\Delta r} \left(\frac{z'}{\Delta r} - \frac{z''}{2} \right) \eta_{m-1} = R_m$$

Die Werte η können schrittweise berechnet werden, da aus zwei bekannten Größen η_{m-1} und η_m der nächstfolgende η_{m+1} ermittelt werden kann.

Eine besondere Überlegung erfordert die Bestimmung der Anfangswerte η_0 und η_1 . Im Scheitel der Schale verschwinden die Schnittkräfte N_r , N_θ und $N_{r\theta}$ infolge der Windbelastung. Nach Gleichung (12 a, b, c) muß deshalb für $r = 0$

$$f_k = f'_k = f''_k = 0$$

werden, d.h. die Funktion f_k hat im Scheitel einen Flachpunkt. Bei der Rechnung mit Differenzen kann man dieser Tatsache nicht mehr streng gerecht werden, wir wollen sie aber dazu benutzen, um die Anfangswerte daraus zu gewinnen. Aus $f_k = 0$ bei $r = 0$ folgt, daß $\eta_0 = 0$ sein muß. Nachdem wir als Ausdruck für den ersten Differentialquotienten f'_k den Differentialquotienten $\frac{\eta_{m+1} - \eta_{m-1}}{2 \Delta r}$ setzen, so folgt aus $f'_k = 0$ bei $r = 0$, daß

$\eta_1 = \eta_{-1}$ sein muß. Da aber auch die zweite Ableitung, für die wir $\frac{\eta_{m+1} - 2\eta_m + \eta_{m-1}}{\Delta r^2}$ setzten, im Ursprung verschwindet, so muß $\eta_1 = \eta_{-1} = 0$ werden. Wir wählen nun eine solche Anordnung der Punkte m , daß der erste

($m = 1$) im Abstand $\frac{\Delta r}{2}$ vom Ursprung liegt. Aus der Differenzengleichung, auf den Punkt $m = 1$ angewendet, in der $\eta_{-1} = \eta_1 = 0$ und η_2 enthalten sind, berechnet man η_2 . Bei schrittweisem Fortschreiten sind dann die weiteren Werte in den Punkten 2, 3 usw. jeweils aus einer Gleichung zu ermitteln.

Nachdem die Werte η_m berechnet sind, folgen die Schnittkräfte infolge Wind aus folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{N}_r = \sum_{k=1,3} b_k \left(\frac{1}{r} f'_k - \frac{k^2}{r^2} f_k \right) \sin k \vartheta + A$$

$$\mathfrak{N}_\vartheta = \sum_{k=1,3} b_k f''_k \sin k \vartheta$$

$$\mathfrak{N}_{r\vartheta} = \sum_{k=1,3} k \cdot b_k \left(\frac{1}{r} f'_k - \frac{1}{r^2} f_k \right) \cdot \cos k \vartheta$$

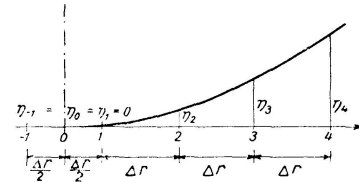


Fig. 16.

Hierin sind sinngemäß statt der Differentialquotienten die Differenzenquotienten zu setzen.

Die Genauigkeit des hier angedeuteten Verfahrens ist von der Spanne Δr im Verhältnis zur Größe der Schale abhängig und kann durch Verkleinerung von Δr gesteigert werden. Es ist jedoch bei der Unsicherheit, die in der Annahme eines Verteilungsgesetzes der Winddrücke liegt, nicht gerechtfertigt, allzu große Anforderungen an die Ergebnisse der Rechnung zu stellen, solange die ihr zu Grunde liegenden Belastungen nicht besser der Wirklichkeit entsprechen, als das hier angenommene Windgesetz.

VII. Schlußbemerkung.

In den vorliegenden Untersuchungen konnte mit Rücksicht auf den Umfang der Arbeit Vieles nur angedeutet werden. Die Absicht, die vielseitige Verwendbarkeit der Methode der Spannungsfunktion darzustellen, gebot eine Beschränkung im Eingehen auf Einzelheiten. So wurde auf eine nähere Behandlung der mit Singularitäten behafteten Gruppe der partikulären Integrale \bar{f}_k verzichtet und die Spannungsfunktion der belasteten Schale nur so weit als notwendig verwendet.

Es ist zu beachten, daß bei allen Untersuchungen vorausgesetzt wurde, daß im Scheitel stetig verlaufende Kuppelformen (Rundkuppeln) vorliegen. Die Ergebnisse haben zum Teil auch Gültigkeit für die Spitzkuppeln; es hätte ebenfalls zu weit geführt, zu zeigen, wann das der Fall ist und wann nicht.

Die Methode der Spannungsfunktion versagt an Schalen mit senkrechten Endtangenten. Die Ursache hiervon ist, daß nicht mit den tatsächlichen Schnittkräften gerechnet wird, sondern mit deren auf die Grundebene bezogenen Horizontalkomponenten. An einem senkrechten Schalenelement wird naturgemäß die eine dieser Komponenten zu Null, die andere unendlich groß. Es ist vielleicht möglich, durch Grenzübergänge auch hier noch zu Ergebnissen zu gelangen, was jedoch noch nicht versucht wurde, da in der Zeit, seitdem die Schalenbauweise den großen Aufschwung erlebt hatte, aus konstruktiven und architektonischen Erwägungen kaum eine bedeutende Kuppel mit senkrechtem Rand gebaut wurde. Es sei jedoch daran erinnert, daß bei Kugelschalen die Wege, die DISCHINGER eingeschlagen hat, hierbei zum Ziele führen, bei anderen Schalenformen ist man auf das Verfahren angewiesen, das FLÜGGE⁶ in diesem Falle angewendet hat.

Abschließend sei festgestellt, daß die Einführung der Spannungsfunktion viele bereits gelöste Probleme in sehr übersichtlicher Form zu berechnen gestattet, darüber hinaus aber von der Schalenform weitgehend unabhängig macht und Aufgaben der Berechnung erschließt, deren Lösung bisher nicht gelang.

Literatur-Verzeichnis.

1. REISSNER: Spannungen in Kugelschalen (Kuppeln), Müller-Breslau-Festschrift S. 181, Leipzig 1912.
2. DISCHINGER, FR.: Schalen und Rippenkuppeln, Handbuch für Eisenbeton, 3. Aufl. Band 12 und 4. Aufl. Band 6, Ernst & Sohn, Berlin.
3. ELLERBECK: Preisausschreiben der Akademie des Bauwesens auf dem Gebiete des Eisenbetonbaues, Zentralbl. d. Bauverw. 1930, Heft 24.
4. DISCHINGER, FR.: Die Rotationsschalen mit unsymmetrischer Form und Belastung, Bauing. 1935, Heft 35—38.
5. DISCHINGER, FR.: Der Spannungszustand in affinen Schalen und Raumfachwerken unter Anwendung des Prinzips des statischen Massenausgleichs, Bauing. 1936, Heft 23—28.
6. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen, Springer Berlin 1934, S. 47.
7. PUCHER, A.: Beitrag zur Theorie tragender Flächen, Dissertation Technische Hochschule Graz 1931.
8. PUCHER, A.: Über den Spannungszustand in doppelt gekrümmten Flächen, Beton und Eisen 1934, Heft 19.
9. NEMENYI, P.: Schalen- und Scheibenkonstruktionen, Byggningsstatiska Meddelelser, utgivet af Dansk Selskab for Byggningsstatik, Hos Gjellerups Boghandel København, 1934.
10. WIEDEMANN, E.: Berechnung nicht biegungsfester Rotationsschalen für Winddruck, Schweiz. Bauzeitung 108, S. 249, 1936.
11. PUCHER, A.: Die Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen mittels Differenzengleichungen, Bauing. 1937, Heft 9—10.

Zusammenfassung.

Durch die Einführung der Spannungsfunktion für die Membranspannungen dünner Schalen ist bei der Berechnung von Schalenkuppeln statt allgemein drei simultaner Differentialgleichungen nur eine einzige zu integrieren.

Die Anwendung auf die Rotationsschalen wird gezeigt. Es wird zunächst die homogene Differentialgleichung der Spannungsfunktion für die wichtigsten Schalenformen integriert und dann mit deren Hilfe die Berechnung von unsymmetrisch gestützten Rotationsschalen (Kuppel auf Einzelstützen, Apside, Rotationsschalen über vieleckigem Grundriß), sowie die Ermittlung der Schnittkräfte unter Windbelastung durchgeführt.

Bei Anwendung der Spannungsfunktion werden bisher ungelöste Probleme der Berechnung zugänglich gemacht und manche schon bekannte Lösung vereinfacht, beziehungsweise der erforderliche Aufwand an Rechenarbeit verringert.

Résumé.

L'introduction de la fonction de tension pour les tensions des voiles minces permet de n'intégrer qu'une seule au lieu de 3 équations différentielles simultanées dans le calcul des coupôles en voiles minces.

L'auteur montre l'application de cette théorie aux surfaces minces de rotation. Il intègre d'abord l'équation différentielle homogène de la fonction de tension puis calcule à l'aide de cette équation des voiles de rotation dont les appuis ne sont pas symétriques (coupôles sur appuis ponctuels, absides,

voiles de rotation à plan rectangulaire). Il détermine ensuite les efforts engendrés dans les sections par la charge du vent.

L'emploi de la fonction de tension permet de calculer des problèmes jusqu'alors insolubles et de simplifier bien des méthodes connues en tant au moins de réduire l'ampleur du calcul.

Summary.

By the introduction of a stress function for membrane stresses in thin shells, the number of simultaneous differential equations that have to be integrated for the design of shell cupolae is reduced from three to one.

The application of this device to shells generated by revolution is explained and the homogeneous differential equation for the span function applicable to the most important shapes of shell is integrated, leading to its application to unsymmetrically supported shells which are surfaces of revolution (a cupola on a single support, an apside, a circular shell on a polygonal plan), and also to the determination of shear stresses caused by wind loading.

By the use of the stress function hitherto unsolved problems in design are rendered calculable and many known solutions are simplified with a consequent reduction in the time required for calculation.

Leere Seite
Blank page
Page vide