

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 5 (1937-1938)

**Artikel:** Der Querstoss auf einen Balken  
**Autor:** Krebitz, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-6160>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# DER QUERSTOSS AUF EINEN BALKEN.

INFLUENCE DES CHARGES DYNAMIQUES SUR UNE POUTRE.

THE EFFECT OF IMPACT ON A BEAM.

Dr. techn. J. KREBITZ, Graz.

Von den Ursachen, die bei Tragwerken dann zusätzliche Beanspruchungen hervorrufen, wenn die aufgebrachten Lasten nicht ruhend, sondern bewegt sind, ist die überwiegende Mehrzahl schon rechnerisch erfaßt. Auf Grund der bezüglichlichen theoretischen Untersuchungen können z. B. der Einfluß des Rollens der Last, die Wirkung gleich gerichteter Schwingungen usw. zum mindesten in guter Annäherung ziffermäßig ermittelt werden<sup>1)</sup>. Praktisch werden diese Einflüsse zusammengefaßt dadurch berücksichtigt, daß die bewegten Lasten für die Ermittlung der Beanspruchungen mit einem Beiwert, der sogenannten Stoßziffer, versehen werden, deren Ausmaß zumeist wesentlich über jenem liegt, das durch die vorliegenden theoretischen Ergebnisse begründet wäre. Es wird mit dieser Stoßziffer, wie schon der Name sagt, auch die Wirkung tatsächlich auftretender mechanischer Stöße mit in Rechnung gezogen. Ebenso verwenden theoretische Untersuchungen über den Einfluß von Stößen gleichfalls Stoßziffern, mit welchen Durchbiegung und innere Kräfte vervielfältigt werden<sup>2)</sup>. In Wirklichkeit werden durch stoßende Lasten wesentlich andere innere Kräfte geweckt als durch ruhende oder langsam aufgebrachte, sodaß eine gleichmäßige Vergrößerung der Spannungen mit Hilfe einer Stoßziffer zu günstig, unter Umständen aber auch zu ungünstig sein kann. Nach K. HOHENEMSER und W. PRAGER ist die Berechnung der Beanspruchung infolge eines Stoßes nicht möglich, solange die Art des Stoßvorganges unbekannt bleibt<sup>3)</sup>. Nachstehende Untersuchung zeigt, wie man zur Kenntnis des Stoßvorganges bei einem vollwandigen Träger von gleichbleibendem Querschnitt gelangt. Bei sonst zutreffenden Voraussetzungen und bei Kenntnis der grundlegenden Werte können, wie Vergleichsberechnungen für andere dynamische Einflüsse zeigen<sup>4)</sup>, die Ergebnisse dieser Untersuchung zweifellos bei allen Balkenträgern angewendet und so die ziffermäßige Größe der unter Stoßlasten auftretenden inneren Kräfte mit hinreichender Schärfe erfaßt und bei der Bemessung der einzelnen Tragwerksteile berücksichtigt werden.

## Differentialgleichung der dynamischen Biegelinie.

Bedeutet:  $p$  das Gewicht des Trägers für die Längeneinheit,  $g$  die Beschleunigung der Schwere,  $y$  die Durchbiegung,  $J$  das Trägheitsmoment des Trägerquerschnittes,  $E$  die Dehnungsziffer des Baustoffes und  $q$  die Auflast

---

<sup>1)</sup> Vergl. BLEICH, Theorie und Berechnung eiserner Brücken, Seite 41 ff.

<sup>2)</sup> HAWRANEK, Einfluß fallender Lasten auf durchlaufende Träger, Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, I. Band, 1932.

<sup>3)</sup> K. HOHENEMSER und W. PRAGER, Dynamik der Stabwerke, Seite 303.

<sup>4)</sup> BLEICH, a. a. O. Seite 50.

für die Längeneinheit,  $x$  die waagrechte Entfernung von einem auf der unverbogenen Trägerachse gelegenen Anfangspunkte und endlich  $t$  die Zeit, so lautet die Differentialgleichung des schwingenden Balkens:

$$1) \quad \frac{p}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + q. \quad ^5)$$

Hiebei ist vorausgesetzt, daß der ganze Träger in gleichartiger Bewegung ist, bezw. daß eine Anregung zur Bewegung, die von irgend einer Stelle des Trägers ausgeht, sich plötzlich über den ganzen Träger verbreitet. In Wirklichkeit erfordert die Fortpflanzung einer an irgend einer Stelle des Trägers angeregten Bewegung Zeit, sie erfolgt nicht plötzlich mit unendlich großer Geschwindigkeit, sondern mit endlicher, die den Wert  $c$  haben möge. Soll nun:

$$2) \quad y = f(xt)$$

jene Funktion sein, die die Form der verbogenen Trägerachse bei zeitlicher Fortpflanzung der Bewegung, bezogen auf ein durch den noch ruhenden Angriffspunkt  $C$  der Stoßlast  $S$  gelegtes Achsenkreuz  $XY$  für den in  $A$  und  $B$  aufliegenden Träger (Fig. 1) zur Zeit  $t$  wiedergibt, so müßte die aus dieser Funktion abgeleitete Änderung  $\frac{\partial y}{\partial x}$  auch jenen Anteil der Verbiegung enthalten, der dadurch entsteht, daß die Fortpflanzung der Bewegung Zeit braucht. Da sich  $y$  nach der Zeit um  $\frac{\partial y}{\partial t} dt$  ändert und die Zeit, welche die Bewegung braucht, um die Länge  $dx$  zu durchlaufen,  $\frac{dx}{c}$  ist, so muß bei plötzlicher Fortpflanzung der Bewegung rechts der Stoßstelle die Änderung von  $y$  um  $\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{dx}{c}$  größer sein als bei zeitlicher.

In Gleichung (1) stellt das erste Glied rechts des Gleichheitszeichens die auf die Längeneinheit bezogene Änderung der Querkraft vor, die der durch die Funktion  $y$  umschriebenen Formänderung entspricht. Verwendet man den Operator  $\frac{\partial y}{c \partial t}$  statt  $\frac{\partial y}{\partial x}$ , so erhält man jene Querkraftsänderung, die der durch plötzliche Fortpflanzung der Bewegung entstehenden Vermehrung der Formänderung entspricht. Addiert man diese Querkraftsänderung zu der durch Anwendung des Operators  $\frac{\partial y}{\partial x}$  entstehenden, so entspricht diese Summe der ganzen, bei plötzlicher Fortpflanzung der Bewegung sich ergebenden Änderung der Querkraft, ausgedrückt durch die Funktion, welche die Biegelinie bei zeitlicher Fortpflanzung der Bewegung darstellt. Setzt man diese Summe an Stelle des ersten Gliedes rechts in Gleichung (1), so bleibt deren Gültigkeit erhalten. Da die einzige abhängige Veränderliche der so entstehenden Gleichung die Funktion  $y$  der Biegelinie für zeitliche Fortpflanzung der Bewegung ist, gelangt man in einfacher Weise zur Differentialgleichung der dynamischen Biegelinie. Sie lautet, wenn  $q = 0$  gesetzt und  $E$  und  $J$  für den ganzen Träger konstant angenommen werden:

$$3) \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 y}{c^4 \cdot \partial t^4} + \frac{p}{EJg} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Die tatsächlich auftretenden inneren Kräfte, d. s. das Biegemoment  $M$  und

<sup>5)</sup> K. HOHENEMSER und W. PRAGER, a. a. O., Seite 80, Gleichung 60.

die Querkraft  $Q$ , folgen aus der Differentialgleichung genügenden Funktion  $y$  mit:

$$4) \quad M = -EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad Q = -EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

Betrachtet man einen links der Stoßstelle liegenden Trägerquerschnitt, so wechselt das Vorzeichen des Operators. Durch die je zweimalige Verwendung desselben für die Bestimmung der Querkraftsänderung bleibt deren Vorzeichen gleich wie beim rechten Trägerteil, sodaß die Differentialgleichung (3) für den ganzen Träger gilt.

Wie später gezeigt wird, lassen sich hinreichend partikuläre Lösungen der Gleichung (3) angeben, um die Randbedingungen in jedem Falle erfüllen zu können.

### Zusammenhang zwischen Stoßlast, Stoßgeschwindigkeit und Formänderung.

Kennt man die Form der Biegelinie als Funktion des Ortes und der Zeit, so ergeben sich die an den Schnittflächen des an der Stoßstelle durchtrennt gedachten Trägers wirksamen Querkräfte:  $Q_l$  und  $Q_r$  nach (4) und aus diesen die Stoßkraft  $S$ :

$$5) \quad S = Q_l - Q_r \quad (\text{Vergl. Fig. 2})$$

Stößt eine Last  $G$  mit der Geschwindigkeit  $v_0$  gegen eine an der Stoßstelle angebracht gedachte Feder, die sich unter der Stoßkraft 1 um  $\varphi$  Längeneinheiten durchbiegt, so wirkt die Kraft  $S$  dem Gewichte  $G$  entgegen. Auf die Stoßlast wirkt daher eine nach abwärts gerichtete Gesamtkraft von der Größe  $G - S$  ein.

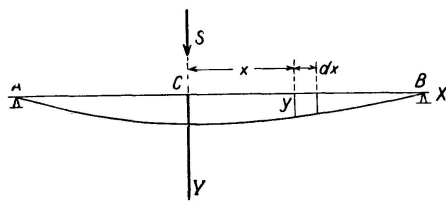


Fig. 1.

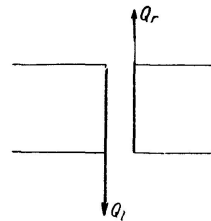


Fig. 2.

einheiten durchbiegt, so wirkt die Kraft  $S$  dem Gewichte  $G$  entgegen. Auf die Stoßlast wirkt daher eine nach abwärts gerichtete Gesamtkraft von der Größe  $G - S$  ein.

Multipliziert man die Gleichung:

$$6) \quad dv = \gamma \cdot dt,$$

in der  $\gamma$  die Beschleunigung der stoßenden Masse und  $v$  deren Geschwindigkeit bedeuten, mit der Masse, so erhält man die Beziehung:

$$7) \quad \frac{G}{g} dv = (G - S) dt.$$

Zählt man die Zeit vom Beginne des Stoßes, d. i. von dem Augenblicke, in welchem die Stoßlast die mit dem Träger verbunden gedachte Feder berührt, so dauert die erste Stoßzeit  $T$  bis zu jenem Augenblicke, in welchem die Geschwindigkeit der Stoßlast Null geworden ist. Integriert man (7) über die erste Stoßzeit, so ergibt sich:

$$\frac{G}{g} (0 - v_0) = G T - \int_0^T S dt \quad \text{oder}$$



$$8) \quad G\left(\frac{v_0}{g} + T\right) = \int_0^T S \, dt.$$

Die Bedingung, daß die Geschwindigkeit der stoßenden Masse Null wird, liefert die Gleichung für die Bestimmung der ersten Stoßzeit. Der Weg der stoßenden Masse zur Zeit  $t$ :  $s$  ist gegeben durch:

$$s = y_s + \varphi \cdot S,$$

worin  $y_s$  die Durchbiegung des Trägers an der Stoßstelle bedeutet. Differenziert man den Weg nach der Zeit, so folgt für die Geschwindigkeit der stoßenden Masse:

$$9) \quad v = \frac{\partial y_s}{\partial t} + \varphi \frac{\partial S}{\partial t}$$

und daraus die Bestimmungsgleichung für  $T$ :

$$10) \quad \left(\frac{\partial y_s}{\partial t} + \varphi \frac{\partial S}{\partial t}\right)_{t=T} = \Phi.$$

Endlich muß, wenn sich der Stoß ohne Unstetigkeit vollziehen soll, die Anfangsgeschwindigkeit der stoßenden Masse  $v_0$  der Beziehung:

$$11) \quad v_0 = \left(\frac{\partial y_s}{\partial t} + \varphi \frac{\partial S}{\partial t}\right)_{t=0}$$

entsprechen.

Aus (8), (10) und (11) ermitteln sich: die Größe der ersten Stoßzeit und zwei Konstante der dynamischen Biegelinie, die demnach im Falle der richtigen Lösung in der Funktion  $y$  nach Erfüllung der Randbedingungen noch enthalten sein müssen, und zwar dient (11) der Bestimmung einer dieser Konstanten, während man die zweite in geeigneter Weise annimmt und für die gemachte Annahme nach (8) mit dem aus (10) bestimmten  $T$  die zugehörige Stoßlast rechnet.

### Partikuläre Lösungen der dynamischen Differentialgleichung.

Wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugen kann, sind die Funktionen:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \frac{\mu}{l} x \\ \cos \frac{\mu}{l} x \\ \sin \frac{\mu}{l} x \\ \cos \frac{\mu}{l} x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sin \alpha t \sin \beta t \\ \sin \alpha t \cos \beta t \\ \cos \alpha t \sin \beta t \\ \cos \alpha t \cos \beta t \end{array} \quad \text{und} \quad \left. \begin{array}{l} \sin \frac{\mu}{l} x \sin \frac{\mu}{l} x \\ \sin \frac{\mu}{l} x \cos \frac{\mu}{l} x \\ \cos \frac{\mu}{l} x \sin \frac{\mu}{l} x \\ \cos \frac{\mu}{l} x \cos \frac{\mu}{l} x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sin \gamma t \\ \cos \gamma t \\ \sin \delta t \\ \cos \delta t \end{array}$$

partikuläre Lösungen der Differentialgleichung (3), wobei jeweils jedes Glied links der Klammer mit jedem Glied rechts derselben verbunden werden kann. In den Lösungen ist zu setzen:

$$n = \frac{p c^2 l^2}{2 g E J \mu^2}, \quad \alpha = \frac{\mu}{l} c \sqrt{\frac{1+n}{2}}, \quad \beta = \frac{\mu}{l} c \sqrt{\frac{1-n}{2}},$$

$$\gamma = \frac{\mu}{l} c \sqrt{\sqrt{4+n^2} - n}, \quad \delta = \frac{\mu}{l} c \sqrt{\sqrt{4+n^2} + n}.$$

Für die Zusammenfassung der partikulären Lösungen zu einer allgemeinen können diese noch dadurch beliebig vermehrt werden, daß man  $\mu$  mit einem Beiwerte versieht. Endlich genügen der Differentialgleichung auch Potenzen von  $x$  bis  $x^3$  und  $t$  in der ersten Potenz.

### Anwendung.

Eine allgemeine Lösung, die bei Stoßbeginn und unmittelbar hernach entspricht, kann von vorneherein nur für jenen Bereich gelten, über den sich die Formänderung in der seit Berührung der Stoßstelle durch die Stoßlast verfloßenen kleinen Zeit  $t$  ausgebreitet hat, d. h. sie gilt von  $x = -ct$  bis  $x = +ct$ . Mit Rücksicht auf die Symmetrie genügt die Verfolgung des positiven Astes der Biegelinie.

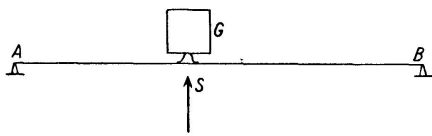


Fig. 3.

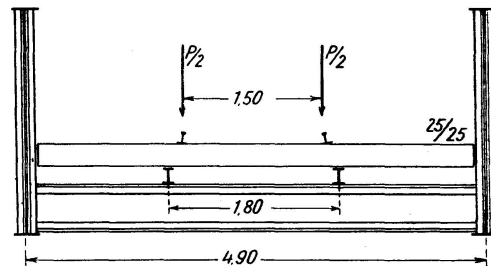


Fig. 4.

Da der Träger im Zeitpunkte, in welchem die Stoßlast die mit ihm verbundene Feder berührt, vollkommen in Ruhe sein muß, haben für  $t = 0$   $y$  und  $\frac{\partial y}{\partial t}$  an der Stoßstelle gleichfalls Null zu sein. Aus dem gleichen Grunde müssen  $y$  und  $\frac{\partial y}{\partial t}$  für jedes  $t$  in  $x = \pm ct$  von höherer Ordnung klein sein als in  $x = 0$ . Damit sich der verbogene Trägerteil flüssig an den noch ruhenden anschließt, muß  $\frac{\partial y}{\partial x}$  in  $x = ct$ , wenn nicht Null, so doch möglichst klein gegenüber der Durchbiegung an der Stoßstelle  $y_s$  sein. Endlich kann die Stoßkraft bei Stoßbeginn keinen endlichen Wert haben, muß also von Null ansteigen.

Fassen wir zunächst nur den Fall ins Auge, daß sich der ganze Stoßvorgang abwickelt, bevor die Bewegung die Auflager erreicht hat, so kommen für die Zusammenfassung zu einer allgemeinen Lösung nur jene partikulären Integrale der Differentialgleichung in Betracht, in welchen die Zeit wenigstens einmal in einer rückkehrenden, also trigonometrischen Funktion enthalten ist.

Allen vorangeführten Bedingungen entspricht der Ansatz:

$$\begin{aligned}
 12) \quad y = & K \left\{ 2 \cos \frac{\mu}{l} x \cos \frac{\mu}{l} x \cos \gamma t - \left( \cos \frac{\mu}{l} x + \cos \frac{\mu}{l} x \right) \cos \alpha t \cos \beta t \right. \\
 & + \sqrt{\frac{4+n^2}{1-n^2}} \left( \cos \frac{\mu}{l} x + \cos \frac{\mu}{l} x \right) \sin \alpha t \sin \beta t \\
 & + \frac{13995 + 4032 n \sqrt{4+n^2} + 3101 n^2}{3780 (\sqrt{4+n^2} + n)} \sin \frac{\mu}{l} x \sin \frac{\mu}{l} x \cos \gamma t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{19620 + 6972 n \sqrt{4 + n^2} + 10 \cdot 696 n^2}{3780 (\sqrt{4 + n^2} + n)} \left( \mathfrak{Cof} \frac{\mu}{l} x - \cos \frac{\mu}{l} x \right) \cos \alpha t \mathfrak{Cof} \beta t \\
& + \frac{1395 \sqrt{4 + n^2} - 2097 n + 161 n^2 \sqrt{4 + n^2} - 3563 n^3}{3780 (\sqrt{4 + n^2} + n) \sqrt{1 - n^2}} \left( \mathfrak{Cof} \frac{\mu}{l} x - \cos \frac{\mu}{l} x \right) \\
& + \frac{1125 + 588 n \sqrt{4 + n^2} + 1519 n^2}{756 (\sqrt{4 + n^2} + n)} \cdot \frac{\mu^2 x^2}{l^2} \cdot \sin \alpha t \mathfrak{Sin} \beta t \\
& + \frac{19845 + 2772 n \sqrt{4 + n^2} + 1771 n^2}{7560 \sqrt{\sqrt{4 + n^2} + n}} \left( \sin \frac{\mu}{l} x \mathfrak{Cof} \frac{\mu}{l} x - \cos \frac{\mu}{l} x \cdot \mathfrak{Sin} \frac{\mu}{l} x \right) \sin \gamma t \\
& - \frac{6615 \sqrt{4 + n^2} + 4137 n + 1001 n^2 \sqrt{4 + n^2} - 1001 n^3}{7560} \left( \mathfrak{Sin} \frac{\mu}{l} x - \sin \frac{\mu}{l} x \right) \cdot \\
& \quad \left( \sqrt{\frac{2}{1 + n}} \sin \alpha t \mathfrak{Cof} \beta t - \sqrt{\frac{2}{1 - n}} \cos \alpha t \mathfrak{Sin} \beta t \right) \\
& - \frac{945 + 2772 n \sqrt{4 + n^2} + 1771 n^2}{7560} \left( \mathfrak{Sin} \frac{\mu}{l} x - \sin \frac{\mu}{l} x \right) \cdot \\
& \quad \left( \sqrt{\frac{2}{1 + n}} \sin \alpha t \mathfrak{Cof} \beta t + \sqrt{\frac{2}{1 - n}} \cos \alpha t \mathfrak{Sin} \beta t \right) \}
\end{aligned}$$

Entwickelt man die Ausdrücke von  $y$  in Potenzreihen, so enthält das erste nicht verschwindende Glied von  $y_s$  den Faktor  $\frac{\mu^4 c^4 t^4}{l^4}$ . Für  $y$  in  $x = ct$  verschwinden alle Glieder bis zu jenem mit dem Faktor  $\frac{\mu^{10} c^{10} t^{10}}{l^{10}}$ , für  $\frac{\partial y}{\partial x}$  und  $\frac{\partial y}{\partial t}$  in  $x = ct$  bis zu jenem mit dem Faktor  $\frac{\mu^{10} c^9 t^9}{l^{10}}$ , bzw.  $\frac{\mu^{10} c^{10} t^9}{l^{10}}$ . Automatisch wird auch die Querkraft an der Stoßstelle klein von niedrigerer Ordnung als am Ende des Formänderungsbereiches. In Potenzreihen entwickelt, hängt sie an der Stoßstelle von der Zeit in der ersten Potenz ab, in  $x = ct$  von der dritten, woraus hervorgeht, daß durch die zeitliche Fortpflanzung der Bewegung auch die Weiterleitung der Kraftwirkung beeinflußt wird.

Aus (12) erhält man nach (10) die Bestimmungsgleichung für die erste Stoßzeit, und zwar:

$$\begin{aligned}
13) \quad & \frac{19845 + 2772 n \sqrt{4 + n^2} + 1771 n^2}{3780} \cos \gamma T \\
& - \frac{945 + 2772 n \sqrt{4 + n^2} + 1771 n^2}{3780} \cos \alpha T \mathfrak{Cof} \beta T \\
& - \frac{6615 \sqrt{4 + n^2} + 3192 n - 1771 n^2 \sqrt{4 + n^2} - 2772 n^3}{3780 \sqrt{1 - n^2}} \sin \alpha T \mathfrak{Sin} \beta T \\
& - \frac{l^3}{2 E J \varphi \mu^3} \left[ \sqrt{\sqrt{4 + n^2} + n} \sin \gamma T - \left( \sqrt{\frac{4 + n^2}{2(1 + n)}} + \sqrt{\frac{1 + n}{2}} \right) \sin \alpha T \mathfrak{Cof} \beta T \right. \\
& \quad \left. - \left( \sqrt{\frac{4 + n^2}{2(1 - n)}} - \sqrt{\frac{1 - n}{2}} \right) \cos \alpha T \mathfrak{Sin} \beta T \right] = \Phi.
\end{aligned}$$

Die Stoßlast  $G$  ergibt sich aus:

$$14) \quad 5\varphi \frac{\mu^2 c^2}{l^2} \left( \frac{1}{g} + \frac{T}{v_0} \right) G = \frac{19845 + 2772 n \sqrt{4+n^2} + 1771 n^2}{3780 (\sqrt{4+n^2} + n)} (1 - \cos \gamma T) \\ - \frac{6615 \sqrt{4+n^2} + 4137 n + 1001 n^2 \sqrt{4+n^2} - 1001 n^3}{3780} (1 - \cos \alpha T \cos \beta T) \\ - \frac{945 - 3843 n \sqrt{4+n^2} - 2366 n^2 - 1001 n^3 \sqrt{4+n^2} + 1001 n^4}{3780 \sqrt{1-n^2}} \sin \alpha T \sin \beta T.$$

Für die Konstante  $K$  erhält man nach (11):

$$15) \quad K = \frac{v_0 l^4}{20 \mu^4 c E J \varphi}.$$

Kennt man  $K$ , so können aus (12) nach (4) die Momente und die Querkkräfte für jede Stelle innerhalb des Formänderungsbereiches bestimmt werden, im besonderen ergibt sich für die Stoßkraft  $S$ :

$$16) \quad S = \frac{v_0 l}{5 \mu c \varphi} \left\{ \frac{39690 + 5544 n \sqrt{4+n^2} + 3542 n^2}{7560 \sqrt{\sqrt{4+n^2} + n}} \sin \gamma t \right. \\ - \frac{6615 \sqrt{4+n^2} + 4137 n + 1001 n^2 \sqrt{4+n^2} - 1001 n^3}{7560} \cdot \\ \left. \left( \sqrt{\frac{2}{1+n}} \sin \alpha t \cos \beta t - \sqrt{\frac{2}{1-n}} \cos \alpha t \sin \beta t \right) \right. \\ \left. - \frac{945 + 2772 n \sqrt{4+n^2} + 1771 n^2}{7560} \left( \sqrt{\frac{2}{1+n}} \sin \alpha t \cos \beta t + \sqrt{\frac{2}{1-n}} \cos \alpha t \sin \beta t \right) \right\}$$

Wird  $S = 0$ , so ist der Stoß beendet. Hat die Formänderung in der für die Abwicklung des Stoßes erforderlichen Zeit die Auflager noch nicht erreicht, so genügen die Beziehungen (12) bis (15) vollkommen für die Darstellung des Stoßvorganges.

Für die ziffermäßige Anwendung der vorstehenden Ergebnisse ist vor allem die Kenntnis der Geschwindigkeit erforderlich, mit welcher sich die Durchbiegung von der Stoßstelle aus fortsetzt. Sie wird für verschiedene Baustoffe, wahrscheinlich auch für verschiedene Bauformen verschieden sein. Eine genaue Ermittlung ihres Wertes kann bei längeren Tragwerken keine unüberwindlichen Schwierigkeiten bieten. Soweit mit einfachen Mitteln festgestellt werden konnte, liegt  $c$  bei Stahltragwerken wahrscheinlich unter der Schallgeschwindigkeit in der Luft, weshalb im nachstehenden Ziffernbeispiel  $c = 333$  m/sek. angenommen wird.

### Beispiel.

Für eine stählerne Eisenbahnbrücke von der Stützweite  $l = 25$  m gilt:  $p = 2,23$  t/m,  $J = 0,106$  m<sup>4</sup> <sup>6)</sup>. Der Querschnitt der Brücke entspreche der in Fig. 4 gegebenen schematischen Darstellung. Das Trägheitsmoment der Holzschwelle stellt sich auf 0,000 325 5 m<sup>4</sup>, jenes des Querträgers sei 0,001 43 m<sup>4</sup>. Mit den Dehnungsziffern 1,100,000 t/m<sup>2</sup> für Holz und

<sup>6)</sup> Nach BLEICH, a. a. O. Seite 49, Tafel 4.

21,000,000 t/m<sup>2</sup> für Stahl erhält man für die Senkung der auf beide Schienen verteilten, gerade über den Querträgern liegenden Gesamtlast  $P$  bei unverrückten Auflagern des Querträgers:

$$\frac{P}{6} \left[ \frac{0,15^2 (3 \cdot 1,8 - 4 \cdot 0,15)}{1\,100\,000 \cdot 0,000\,325\,5} + \frac{1,55^2 (3 \cdot 4,9 - 4 \cdot 1,55)}{21\,000\,000 \cdot 0,001\,43} \right] = 0,000\,1636\,P$$

Schwelle und Querträger wirken also als Feder mit einem  $\varphi = 0,000\,1636$  m/t. Mit diesem  $\varphi$  und mit  $c = 333$  m/sek., weiters für  $\mu = 5$  ergibt sich die Bestimmungsgleichung für  $T$  in der Form:

$$5,467\,512 \cos \gamma T - 0,467\,5126 \cos \alpha T \mathfrak{C} \cos \beta T - 3,645\,592 \sin \alpha T \mathfrak{S} \sin \beta T - 0,251\,446 \sin \gamma T + 0,357\,393 \sin \alpha T \cdot \mathfrak{C} \cos \beta T + 0,150\,174 \cos \alpha T \mathfrak{S} \sin \beta T = 0.$$

Die näherungsweise Lösung liefert:  $T = 0,012\,9316$  sek.

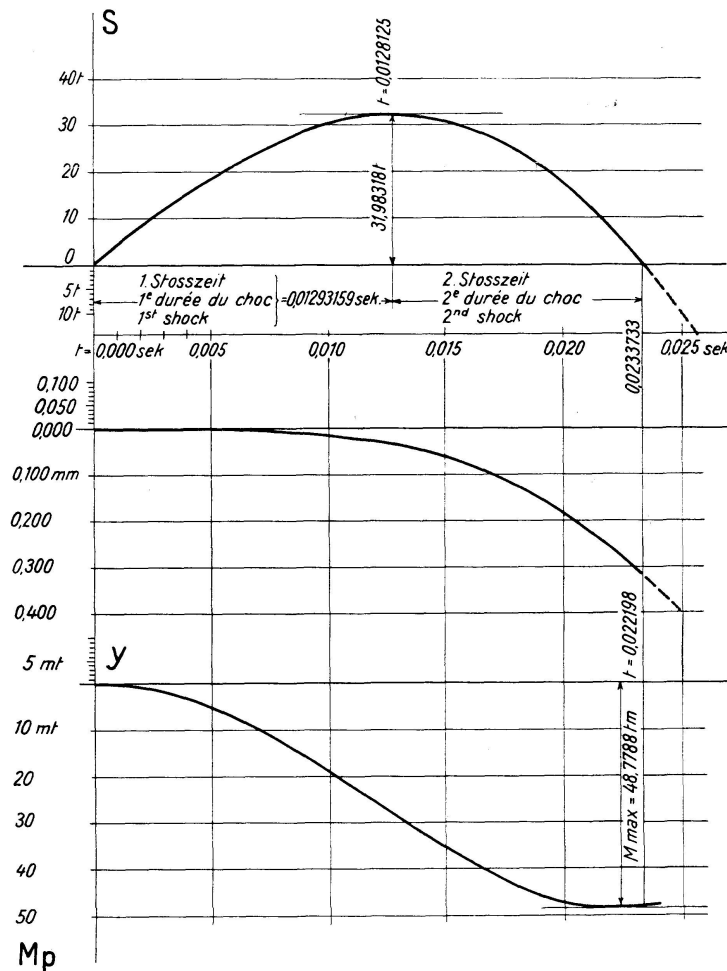


Fig. 5.

Nimmt man an, daß die gesuchte Last aus einer Höhe von 2 cm auf die Schienen fällt, so folgt die Stoßgeschwindigkeit  $v_0$  mit:

$$v_0 = \sqrt{2g \cdot 0,02} = 0,6264 \text{ m/sek.}$$

Mit diesem  $v_0$  rechnet sich nach (14):  $G = 3,420\,29$  t, eine Last, die ungefähr dem ungefederten Anteil des Achsgewichtes eines Bahnwagens entspricht. Für die Stoßkraft erhält man:

$$S = 11,498\,05 (3,731\,792 \sin \gamma t - 2,741\,618 \sin \alpha t \mathfrak{C} \cos \beta t + 2,447\,939 \cos \alpha t \mathfrak{S} \sin \beta t)$$

Das Biegemoment an der Stoßstelle ergibt sich zu:

$$M_s = 28,745\,120 (2,688\,329 \cos \alpha t \cos \beta t - 1,873\,491 \cos \gamma t - 0,310\,810 \sin \alpha t \sin \beta t - 1,629\,676).$$

Der Verlauf von  $S$  und  $M_s$  ist in Abhängigkeit von der Zeit in Fig. 5 eingetragen, ebenso jener der Durchbiegung an der Stoßstelle.

Der größte Wert von  $S$  tritt mehr oder weniger genau am Ende der ersten Stoßzeit auf. Der ganze Stoßvorgang benötigt eine Zeit von 0,023 372 sek.

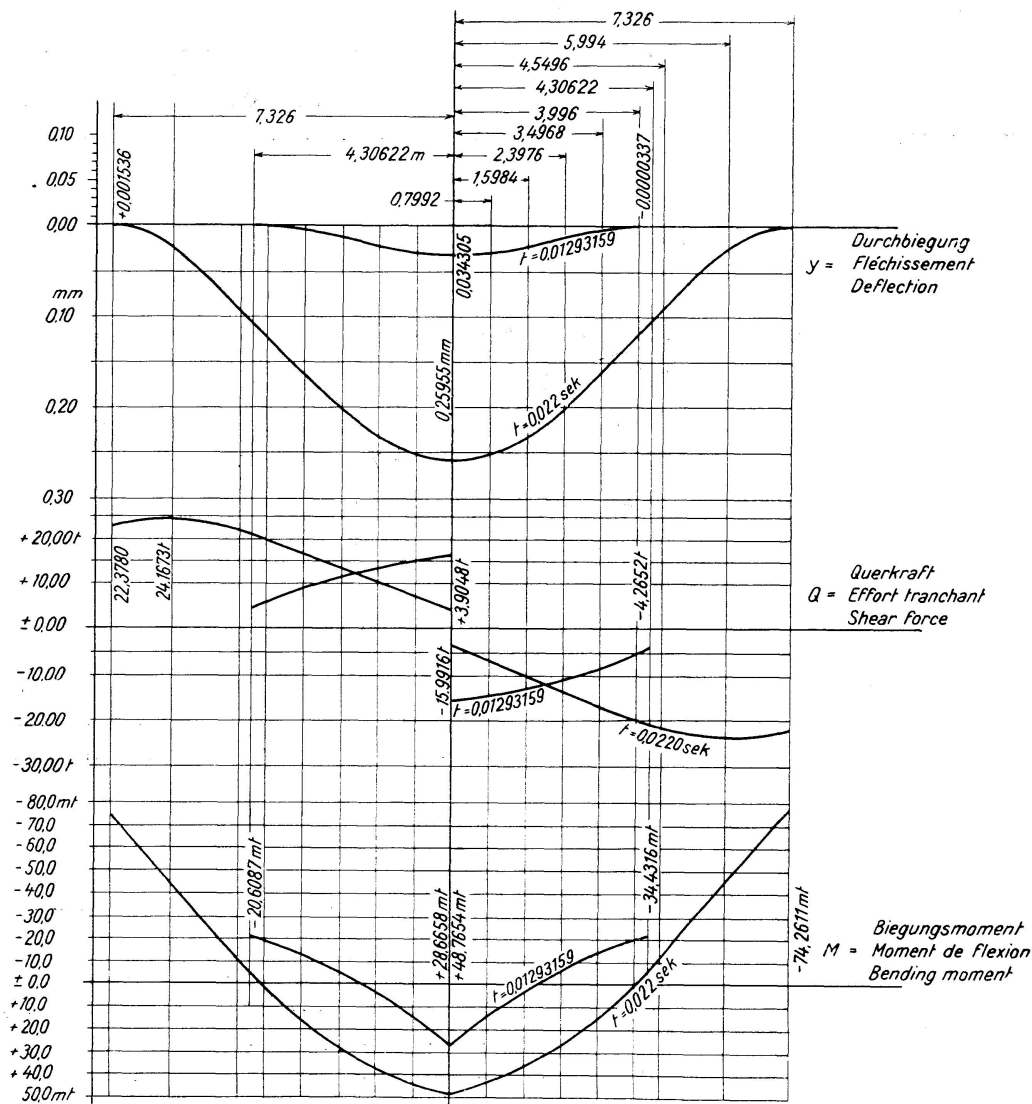


Fig. 6.

In dieser Zeit setzt sich die Bewegung von der Stoßstelle nach links und rechts auf eine Länge von 7,783 m fort. Liegt die Stoßstelle nicht mehr als  $25/2 - 7,783 = 4,717$  m außer der Feldmitte, so erreicht die Formänderung nach Ablauf des Stoßvorganges höchstens eines der Auflager. Für Stöße in einer Zone von  $2 \cdot 4,717 = 9,434$  m nächst der Trägermitte gelten daher gleiche Verhältnisse. In allen diesen Fällen ruft eine aus 2 cm Höhe fallende Last von 3,420 29 t eine größte Stoßkraft von 31,983 18 t, d. i. die 9,351-fache Wirkung hervor. Das Biegemoment an der Stoßstelle erreicht seinen

größten Wert knapp vor dem Ende der zweiten Stoßzeit und stellt sich dann auf 48,7788 mt. Das statische Moment der Stoßlast rechnet sich in Trägermitte mit 21,3768 mt; das größte dynamische Biegemoment wird also 2,28185 mal so groß. Die Durchbiegung an der Stoßstelle nimmt auch nach dem Ende des Stoßvorganges noch zu und erreicht seinen Größtwert im allgemeinen erst, wenn die Bewegung bis zu den Auflagern vorgedrungen ist.

Fig. 6 zeigt den Verlauf der Biegelinie, der Querkraft und des Biegemomentes zur Zeit  $t = 0,01293159$  sek., d. i. am Ende der ersten Stoßzeit und für  $t = 0,022$  sek., d. i. knapp vor dem Ende der zweiten Stoßzeit.

Im zweitgenannten Falle ergibt sich in  $x = ct: y = 0,001536$  und  $\frac{\partial y}{\partial x} = 0,0000006737$  gegen  $y_s = 0,25955$  mm. Die Randbedingungen sind demnach auch am Ende des Stoßvorganges noch praktisch genau erfüllt.

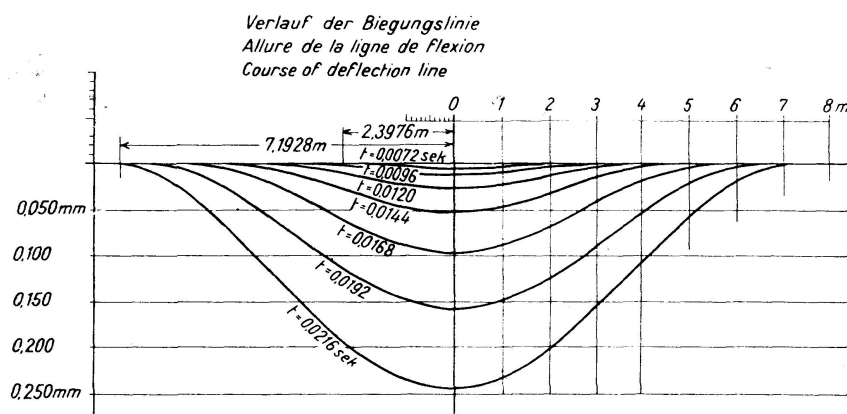


Fig. 7.

Fig. 7 gibt schließlich noch die Entwicklung der Biegelinie während des Stoßvorganges wieder. Die eingetragenen Biegelinien entsprechen, mit  $t = 0,0072$  sek. beginnend, aufeinander folgenden Zeitabständen von 0,0024 sek.

Es wäre übereilt, aus den vorstehenden allgemeinen und besonderen Ergebnissen schon weittragende Schlüsse zu ziehen, bevor eine genaue Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  vorliegt. Dann soll auch erst die Wiedergabe weiterer allgemeiner Lösungen der dynamischen Differentialgleichung erfolgen. Jedenfalls aber kann festgestellt werden, daß mit Stoßziffern, die Kraftwirkung und Formänderung gleichartig vergrößern, der tatsächlichen Einwirkung eines Stoßes auf das Tragwerk nicht beizukommen ist, ebensowenig wie etwa bloße Durchbiegungsmessungen zum Ziele führen können. Infolge der Raschheit des Stoßvorganges dürfte auch eine unmittelbare Messung der Kraftwirkungen kaum tunlich sein, sodaß nur von der Rechnung genauer Einblick in das Geschehen beim Stoße zu erwarten ist.

Als feststehend kann auch gelten, daß der schwach gefederte Stoß die Stoßkraft wesentlich stärker erhöht als das Biegemoment. Je größer man im Ziffernbeispiele  $\mu$  wählt, desto kleiner wird  $G$  und umso stärker vermehrt sich die Stoßkraft gegenüber dem Biegemoment. So erklärt sich in einfacher Weise die Durchschlagung eines Trägers infolge Überwindung des Scherwiderstandes, wenn eine kleine Masse aus größerer Höhe, also mit einem großen  $v_0$  auf ihn fällt.

### **Zusammenfassung.**

Der Vorgang beim Stoß einer schweren Masse auf einen elastischen Balken wird auf Grund der Erkenntnis theoretisch verfolgt, daß die durch die Stoßlast an der Stoßstelle hervorgerufene Querbewegung des elastischen Balkens sich nicht plötzlich auf den ganzen Träger fortsetzt, sondern hiezu Zeit braucht. Unter der Annahme, daß die Fortpflanzung dieser Querbewegung in Richtung der Trägerachse mit einer für verschiedene Baustoffe und Bauformen erst experimentell genau festzustellenden Geschwindigkeit erfolgt, kann die Differentialgleichung der dynamischen Biegelinie, d. h. der Form der verbogenen Trägerachse bei zeitlicher Fortpflanzung der Querbewegung erstellt werden. Die leicht gefundenen partikulären Lösungen der Differentialgleichung genügen, um zu allgemeinen Lösungen zusammengefaßt zu werden, die alle Randbedingungen in hinreichender Weise erfüllen. Den Zusammenhang zwischen dem, aus der dynamischen Biegelinie folgenden Widerstand, den der Träger der Verformung an der Stoßstelle entgegengesetzt einerseits, und der stoßenden Masse und ihrer Geschwindigkeit andererseits gewinnt man durch Verfolgung der Bewegung der stoßenden Masse.

Die beim Stoße und unmittelbar nachher gültige allgemeine Lösung, mit welcher der Verlauf eines schwach gefederten Stoßes auf den Balken erfaßt werden kann, ist mit den hieraus folgenden Beziehungen für die Größe der stoßenden Masse, für die Stoßzeit und die Stoßkraft wiedergegeben. Unter Annahme einer mit einfachen Mitteln als wahrscheinlich festgestellten Fortpflanzungsgeschwindigkeit von 333 m/sec (gleich der Schallgeschwindigkeit) wird der Vorgang beim Stoße einer aus 2 cm Höhe auf die Schienen einer stählernen Eisenbahnbrücke von 25 m Stützweite fallenden Masse von 3,24 t ziffermäßig erfaßt. Die gewonnenen Ergebnisse sind in mehreren Abbildungen übersichtlich dargestellt und zeigen, daß der Stoßvorgang sich sehr rasch abwickelt, weiter, daß die hierbei geweckten Kraftwirkungen im Träger ihre Höchstgrenze längst erreicht haben, bezw. schon wieder verschwunden sind, bevor die größte Durchbiegung an der Stoßstelle eintritt. Eine Proportionalität zwischen den Kraftwirkungen besteht weder untereinander noch zur jeweiligen Durchbiegung. Endlich wird durch den Stoß die Querkraft wesentlich stärker gesteigert als das Biegemoment.

### **Résumé.**

L'auteur étudie théoriquement les effets produits par le choc d'une masse pesante sur une poutre élastique en se basant sur le fait que le mouvement transversal produit par le choc en un point de la poutre élastique ne se propage pas instantanément à toute la poutre mais au contraire que cette propagation de ce mouvement transversal dans le sens de l'axe de la poutre se fait à des vitesses qu'il faudra déterminer très exactement à l'aide de l'expérience pour les différents matériaux et les différentes formes de construction, il est possible d'établir l'équation différentielle de la ligne élastique dynamique, c'est-à-dire la déformée de l'axe de la poutre compte tenu de la propagation dans le temps du mouvement transversal. Les solutions particulières, faciles à obtenir, de l'équation différentielle, permettent d'arriver à des solutions générales qui tiennent compte, de manière suffisante, de toutes les conditions aux appuis. L'étude du mouvement de la masse qui produit le choc permet d'établir la relation qui existe entre la résistance, résultant de la ligne élastique dynamique, que la poutre oppose à la déformation au point de choc d'une part et la masse et sa vitesse d'autre part.



La solution générale, valable au moment du choc et immédiatement après, qui permet de représenter l'allure d'un choc légèrement élastique sur la poutre est représentée par les relations qui en résultent pour la grandeur de la masse agissante, pour la durée et la force du choc. En admettant une vitesse de propagation de 333 m/sec, égale à la vitesse du son déterminée d'une façon très vraisemblable à l'aide de moyens très simples, les effets des chocs ont été étudiés numériquement en laissant tomber d'une hauteur de 2 cm une masse 3,24 t sur les rails d'un pont métallique de chemin de fer de 25 m de portée. Les résultats acquis sont représentés sur plusieurs figures et montrent que les effets du choc se développent très rapidement et en outre que les efforts développés dans la poutre ont atteint depuis longtemps leur valeur maxima, et même ont déjà disparus lorsque la flèche devient maxima au point d'action du choc. Il n'existe aucune proportionnalité entre les efforts eux-mêmes ni entre ces efforts et la déformation. Disons pour finir que l'effort tranchant est beaucoup plus fortement influencé par le choc que le moment fléchissant.

### Summary.

The phenomena attending the impact of a heavy mass onto an elastic beam are worked out theoretically from the basis that the transverse movement set up in the beam at the point of impact by the loading is not immediately propagated throughout the whole of the beam, but requires time for its development. Assuming that the propagation of this transverse movement takes place in the direction of the axis of the beam at a velocity dependent on the material and the shape of the member, which can be determined by experiment, it is possible to arrive at the differential equation for the line of dynamic flexure, or in other words the bent shape of the axis of the beam when undergoing transverse movement in time. It is easy to find particular solutions to this differential equation and hence to infer general solutions which adequately satisfy all the marginal conditions. The relationship between the resistance corresponding to the line of dynamic flexure assumed by the beam at the place of impact on the one hand, and the magnitude and velocity of the impinging mass on the other, may be obtained by reference to the movement of the impinging mass itself.

The general solution which holds good at the moment of impact and immediately afterwards, corresponding to what happens when the impact is slightly damped, is stated, as is also the relationship between the magnitude of the impinging mass, the time taken for the impact, and the magnitude of the impact inferable therefrom. Assuming a velocity of propagation of 333 m. per second (equal to the velocity of sound), which may be shown by simple means to be probable, a numerical calculation is given for the impact of a mass of 3.24 tonnes falling from a height of 2 cm. onto the rails of a steel railway bridge of 25 m. span. The results so obtained are indicated in a number of figures and go to show that the impact develops very rapidly; moreover the forces thereby set up in the girder attain their maximum value, and again vanish, before the deflection at the point of impact has reached its maximum. There is no proportionality either between the forces called into play, or between these and the momentary deflection. Finally, the shear force is increased considerably more by the impact than is true of the bending moment.