

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 5 (1937-1938)

**Artikel:** Die klassische Erddrucktheorie mit besonderer Rücksicht auf die Stützwandbewegung  
**Autor:** Jáky, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-6159>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# DIE KLASSISCHE ERDDRUCKTHEORIE MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE STÜTZWANDBEWEGUNG.

LA THÉORIE CLASSIQUE DE LA POUSSÉE DES TERRES, COMPTE TENU DU DÉPLACEMENT DE LA PAROI DE SOUTÈNEMENT.

THE CLASSICAL THEORY OF EARTH PRESSURES WITH SPECIAL REFERENCE TO THE MOVEMENTS OF RETAINING WALLS.

Prof. Dr. Ing. J. JÁKY, Budapest.

## Einleitung.

### a) Geschichtlicher Rückblick.

Das Problem des gestützten Erdkörpers und der mit diesem Problem eng verbundene Begriff der Stützwand reicht in die Urzeit des Menschen zurück. Die Stützwand war — wie wir es aus der Bibel wissen — schon den Völkern des Altertums, so besonders den Chaldäern, diesen berühmten Meistern der Naturwissenschaften, bekannt. In den hängenden Gärten Babylonien standen viele dieser Bauwerke, was auch durch die Ausgrabungen bestätigt wird.

Diese Mauern wurden aller Wahrscheinlichkeit nach nicht nach Plänen und Berechnungen, sondern lediglich auf Grund empirischer Erfahrungen erbaut, was auch für die Stützwände der altertümlichen Festigungsbauteile gilt.

Dies ändert aber nichts an der Tatsache, daß diese Festungsmauern sehr standsicher ausgeführt waren und eben deshalb nach dem Sturz des römischen Kaisertums von den Festungsbaumeistern des Mittelalters zum Vorbild genommen wurden.

Die älteste Vorschrift für Mauerbemessungen stammt von dem berühmten französischen Festungstechniker General VAUBAN (1687), der etwa 3 Millionen m<sup>3</sup> Stütz- und Futtermauern verschiedener Abmessungen nach festen Regeln erbaut hat. VAUBAN gibt die Stärkeabmessungen der Mauern als lineare Funktionen der Wandhöhe ( $h$ ) an (1). Die Stichhaltigkeit und Vollkommenheit dieser empirischen Regeln ist derart auffallend, daß PONCELET in einem seiner Werke die Vermutung ausspricht, daß es sich bei diesen Regeln um die Ergebnisse irgendeiner uns unbekannt gebliebenen Erddrucktheorie handeln müsse (2).

Die nahe Beziehung, in welcher das Problem der Stützmauern zufolge ihrer hauptsächlichen Verwendung für militärische Bauten zu den Kriegswissenschaften stand, hat das Problem des Erddruckes bis zur Mitte des XIX. Jahrhunderts zu einem Problem der Militäringenieure gemacht, die die Lösung in verschiedener Weise gesucht haben. Von den bekannten Forschern sollen hier nur die Namen BÉLIDOR, COULOMB, FRANÇAIS, MAYNIEL, AUDOY und PONCELET genannt werden.

Aus dieser Reihe hebt sich besonders der weltberühmte französische Physiker CHARLES COULOMB hervor, der mit seiner im Jahre 1773 veröffentlichten Studie die Grundlagen der klassischen Erddrucktheorie niedergelegt hat (3). Die zweite Hälfte des XVIII. Jahrhunderts war eine Periode der klassischen Mechanik. Aus dieser Wissenschaft heraus haben sich die technischen Bauwissenschaften entwickelt, so unter anderem auch die Theorie des Erddruckes, die im XVIII. und XIX. Jahrhundert zu den meistbehandelten Problemen gehört hat.

Die klassische Erddrucktheorie behandelt die Frage des Erddruckes als ein statisch bestimmtes Problem, etwaige im Erdkörper auftretende Deformationen finden daher keine Berücksichtigung. Als Ausgangspunkt der Theorie dient ein Erdprisma, das sich im Moment der Gleichgewichtsstörung los löst und an der sog. Gleitfläche ins Rutschen geraten, seitlichen Druck auf die Stützwand ausübt. Dieser Druck wird Erddruck genannt.

### b) Die COULOMB'sche Theorie des maximalen Druckes.

COULOMB stellt sich folgendes Problem: Wenn die Wand  $A - B$  nach Fig. 1 um ihren Fußpunkt  $A$  sich etwas nach vorne neigt, so wird sich erfahrungsgemäß das bisher gestützte Erdprisma  $ABC$  längs einer ebenen Bruchfläche von dem Erdkörper lostrennen und an der Fläche  $AC$  abgleiten. Im Sinne der COULOMB'schen Reibungstheorie kann aber ein Abgleiten an einer beliebigen Fläche  $AC$  nur eintreten, wenn die Schubkomponente ( $T$ ) der resultierenden Kraft  $R$  größer ist als das Produkt der Normalkomponente ( $N$ ) und  $f = \operatorname{tg} \varphi$ , wo  $\varphi$  den inneren Reibungswinkel des gestützten Erdkörpers bedeutet. Hieraus ergibt sich als Voraussetzung des Gleitens:

$$T \geq N \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

Gemäß der wichtigsten Voraussetzung COULOMBS wird von den unendlich vielen Ebenen, die durch  $A$  gelegt werden können, jene die gefährliche sein, für welche der Erddruck  $E$  zum Maximum wird, weil die Wand auch dem größten Erddruck widerstehen muß.

Auf analytischem Weg läßt sich beweisen, daß das Maximum des Erddruckes eintritt, wenn

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \quad 1)$$

ist, und daß dann der maximale Erddruck beträgt:

$$E_{\max} = \frac{h^2 \gamma}{2} \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad 2)$$

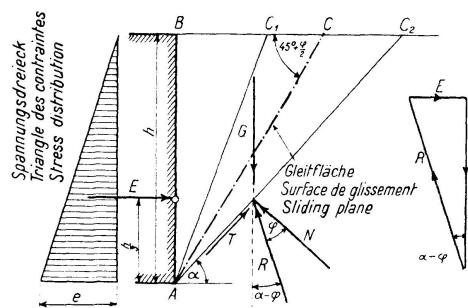


Fig. 1.

Coulomb'sche Problemstellung.

Le problème de Coulomb.

Coulomb's statement of the problem.

Der Angriffspunkt des Erddruckes liegt an der Rückseite der Stützmauer an ihrem unteren Drittpunkt, denn die Differentiation nach  $h$  der Gleichung 2) führt zu einer dreieckförmigen Spannungsfürfigur ( $e$ ), deren Schwerpunktlinie durch den besagten Punkt geht.

Nochmals zusammengefaßt, bedient sich die COULOMB'sche Theorie nachstehender Voraussetzungen:

1. Die Gleitflächen sind Ebenen,
2. bei beginnendem Gleiten ist an der Gleitfläche  $T = N \cdot \operatorname{tg} \varphi$ ,
3. von den unzähligen Erddräcken wird der seinem Werte nach größte der maßgebende sein.

Von diesen Voraussetzungen scheint nur die zweite der Wirklichkeit zu entsprechen, wogegen sich die erste und dritte Voraussetzung durch keinerlei physikalische Beweisführung unterstützen läßt. Letztere dienen lediglich dazu, die Lösung des Problems zu vereinfachen und zu erleichtern.

Die Annahme, daß die Trennfläche eine Ebene ist, wird von COULOMB nicht bewiesen, und was den maximalen Erddruck anbelangt, kann dieser nicht als Voraussetzung gelten, er tritt vielmehr als Folge ein, was bereits durch WINKLER (4) betont wurde, und was auch aus den folgenden Ausführungen erhellen wird.

Zu Gunsten der COULOMB'schen Theorie sei noch erwähnt, daß sie sich auch mit jenem der Wirklichkeit unzweifelhaft näherliegenden Fall befaßt hat, in welchem im Erdkörper außer der inneren Reibung auch Kohäsion zur Geltung kommt. In diesem allgemeineren Fall erscheint auch das Druckproblem der bindigen Böden (Tonböden) inbegriffen zu sein, wogegen die späteren Forscher lediglich die Reibung berücksichtigen, weshalb ihre Theorien nur für trockenen Sand Gültigkeit besitzen können. Ein Außerachtlassen der Kohäsion führt unvermeidlich zu überdimensionierten Mauern, und wenn sich dabei auch einfachere theoretische Ergebnisse erzielen lassen, so entfernt man sich doch zu weit von der Wirklichkeit.

Die nach COULOMB folgenden französischen Forscher wie: FRANÇAIS, AUDOY, PONCELET und andere haben sich mit Stützwänden beliebiger Form, sowie mit durch geneigte Oberfläche begrenzte Erdkörper befaßt. Sie haben jenen allgemeineren Fall des Erddruckes untersucht, in welchem der Druck nicht mehr horizontal, sondern innerhalb des Reibungskegels ( $\delta \leq \varphi$ ) unter beliebigem Winkel  $\delta$  wirkt (Fig. 2).

Von PONCELET stammt die auch heutzutage gebräuchliche einfache geometrische Konstruktion des Erddruckes, die auf der mit Zirkel und Lineal durchführbaren zeichnerischen Ermittlung der mittleren Proportionale beruht.

CULMANN (5), der Vater der Statik, hat den Beweis erbracht, daß die dem Erddruck proportionalen Längen  $e$  für verschiedene Gleitflächen sich als Ordinaten einer Hyperbel ändern, und daß diese an der Gleitfläche ( $AC$ ) ihr Maximum erreichen.

REBHANN (6) hat bewiesen, daß die Gleitfläche das Viereck, gebildet durch die Wandfläche, die Terrainoberfläche, die natürliche Böschungslinie ( $\angle \varphi$ ), sowie durch die Stellungslinie ( $CD$ ) in zwei gleiche Teile zerlegt, d. h. daß

$$\text{area } ABC_A \cong \text{area } ACD_A$$

ist und daß die Größe des Erddruckes gleich ist dem Flächeninhalt des schraffierten Dreieckes, d. h.

$$E = \frac{pq}{2} \gamma \quad 4)$$

Neben der Kenntnis der Größe ist aber auch die Kenntnis der Richtung des Erddruckes von höchster Wichtigkeit. Über die Richtung des Druckes wußten die auf der Annahme ebener Gleitflächen beruhenden Theorien nichts auszusagen. Betreffend den Winkel  $\delta$  stehen uns nur aus

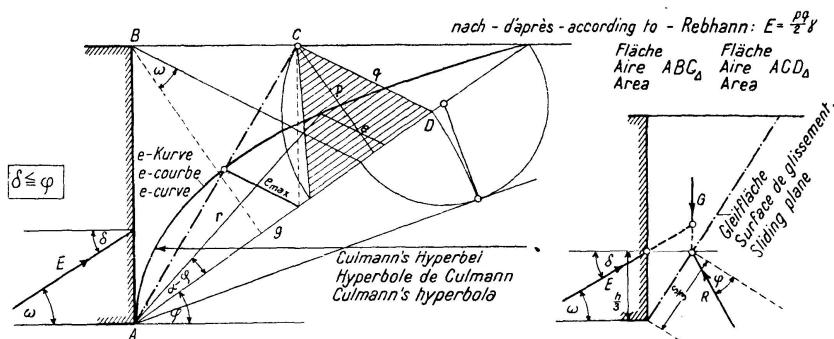


Fig. 2.

Die Ponceletsche Konstruktion und die Culmannsche Hyperbel — L'épure de Poncelet et l'hyperbole de Culmann — Poncelet's construction and Culmann's hyperbola.

Erddruckrichtung beliebig bei: Poncelet, Scheffler, Culman, Rebhann (XIX. Jahrhundert) — Direction quelconque de la poussée des terres d'après: Poncelet, Scheffler, Culman, Rebhann (XIX<sup>e</sup> siècle) — Free direction of earth pressure according to: Poncelet, Scheffler, Culman, Rebhann (XIXth century).

Versuchen gewonnene Erfahrungen zur Verfügung. Eines der ältesten Ergebnisse auf diesem Gebiet stammt von Prof. MÖLLER, der den Neigungswinkel des Erddruckes zwischen den Grenzen

$$\frac{1}{3}\varphi < \delta < \frac{2}{3}\varphi \quad 5)$$

anzunehmen empfiehlt (7).

Spätere Forschungen haben für den Neigungswinkel größere Werte ergeben, als von MÖLLER ermittelt; so haben z. B. äußerst genaue Messungen von MÜLLER-BRESLAU (1906) bei unbelastetem Boden

$$\delta = \frac{3}{4}\varphi \quad 6)$$

bezw. bei belasteter Hinterfüllung den verminderten Wert von  $\delta = \frac{1}{2}\varphi$  ergeben (8).

Die Versuche, die zur Klärung dieser Frage bisher unternommen wurden, sind aber so gering an der Zahl, daß aus ihnen keine feste Regel betreffend die Richtung des Erddruckes abgeleitet werden kann und deshalb wird die Frage des Erddruckes auch heute noch für ein ungelöstes Problem gehalten.

Die Bestimmung des durch belastete Erdkörper verursachten Druckes unter Zugrundelegung ebener Gleitflächen ist ein Verdienst der ungarischen Forschungsarbeit.

Prof. Dr. K. v. SZILY (Budapest) gab, gestützt auf die COULOMB'sche Theorie, im Jahre 1912 die graphische Lösung des Druckproblems von unter

der Einwirkung von Einzellasten und von gleichmäßig verteilten Kräften befindlichen Erdkörpern (9) und im Jahre 1928 eine gleiche Lösung für haftende Bodenkörper (10).

*c) Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte.*

Die Bedingungen des Gleichgewichtes der Kräfte  $E$ ,  $G$  und  $R$  waren in der COULOMB'schen Theorie durch die Annahme eines senkrecht auf die Wand wirkenden Druckes restlos erfüllt. Durch das Einführen der Wandreibung durch spätere Forscher konnte der Druck unter beliebigem Winkel  $\delta$  wirkend angenommen werden, was aber zu Gegensätzen zu den Gesetzen der Mechanik geführt hat.

Die Kräfte  $E$  und  $R$  greifen nämlich durch die Dreieckform ihrer Spannungsverteilungsfigur bedingt im unteren Drittpunkt an; demgemäß treffen sich die Kräfte  $G$  und  $R$  an der Gleitfläche (Fig. 1 und 2) und folglich muß auch der Erddruck  $E$  durch diesen Punkt verlaufen, woraus sich eine zur Bodenoberfläche parallele Druckrichtung ergibt, d. h. die Möglichkeit eines unter beliebigem Winkel  $\delta$  auftretenden Druckes entfällt. Die Annahme des parallel zur Oberfläche wirkenden Erddruckes erscheint demnach als ein Schönheitsfehler der ganzen Erddrucktheorie, welcher der Annahme ebener Gleitflächen entspringt. Durch die Voraussetzung gekrümmter Gleitflächen kann dieser Fehler ausgeschaltet werden.

*d) Die RANKINE'sche Erddrucktheorie.*

In der Theorie COULOMBS und seiner Anhänger hat es sich bei der Untersuchung des Gleichgewichtszustandes um die Gleichgewichtsverhältnisse von Kräften gehandelt, die auf räumlich begrenzte Körper wirken. RANKINE (1857) hat das Problem auf Grund der Spannungen für unendliche Erdkörper gelöst, und zwar in theoretisch völlig einwandfreier Weise (11).

Der Gedankengang RANKINES lässt sich kurz wie folgt schildern: Angenommen sei im Erdinnern — das seiner waagerechten und lotrechten Ausdehnung nach als unbegrenzt angesehen werden kann — ein unendlich kleiner Erdkeil (Fig. 3), an dessen Seiten die Spannungen  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  und  $\tau$  wirken, die Funktionen der die Lage des Punktes  $P$  bestimmenden Koordinaten  $x$  und  $y$  sind. Die an der unter beliebigem Winkel  $\alpha$  geneigten Hypotenuse auftretenden Spannungen  $t$  und  $n$  sind nicht nur Funktionen der Koordinaten  $x$  und  $y$ , sondern auch des Winkels  $\alpha$ .

Die Voraussetzungen des Gleichgewichtes lauten nach CAUCHY für den Fall nach Fig. 3 wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= \gamma\end{aligned}$$

Aus der Erwägung heraus, daß im unbegrenzten Erdkörper die Spannungen nur Funktionen der Tiefe  $y$  sein können, d. h.  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$  und  $\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$  sind, kann abgeleitet werden, daß die Gleitflächenneigung  $\alpha_0$  bei unter  $\angle \varepsilon$

geneigter Terrainoberfläche durch das Gesetz

$$\cos(2\alpha_0 - \epsilon - \varphi) = \frac{\sin \epsilon}{\sin \varphi} \quad 7)$$

bestimmt ist. Bei horizontaler Oberfläche, wenn also

$$\epsilon = 0$$

ist, beträgt der Neigungswinkel der Gleitfläche gleich der COULOMB'schen Theorie

$$\alpha_0 = 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \quad 8)$$

In der RANKINE'schen Theorie wird außer dem Reibungsgesetz ( $t = n \tan \varphi$ ) nur die Annahme einer unendlichen Ausdehnung in waagerechter Richtung gemacht. Die Theorie beruht daher auf der Annahme, daß es für die im Erdinnern herrschenden Spannungsverhältnisse

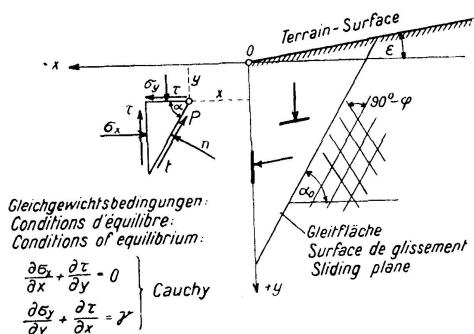


Fig. 3.  
Rankine'sche Theorie  
La théorie de Rankine  
Rankine's theory.

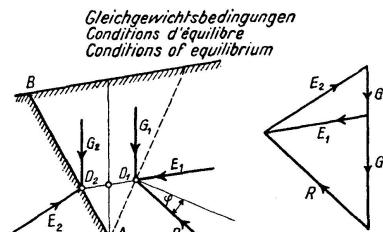


Fig. 4.

völlig belanglos ist, wenn man sich an Stelle der Hinterfüllung eine Wand, eine Ersatzwand denkt. Gegen diese Auffassung können allerdings Einwendungen erhoben werden, doch muß zugegeben werden, daß unter dieser Voraussetzung die Theorie absolut einwandfrei ist, weil sie den drei Bedingungen des Gleichgewichtes gerecht wird und die Gleitflächen nicht nur hypothetisch, sondern bewiesenermaßen Ebenen sind.

In dem RANKINE'schen Kontinuum handelt es sich um ebene Gleitflächen, die parallel zueinander verlaufen, bzw. sich in jedem Fall unter dem gleichen Winkel ( $90^\circ - \varphi$ ) schneiden.

Das beachtlichste Ergebnis der RANKINE'schen Theorie liegt im Erkennen des Umstandes, daß die Oberflächenneigung und die lotrechte Richtung einander konjugierte sind. Die Theorie liefert nämlich den Beweis, daß der Druck wirkend auf das zur Oberfläche parallel liegende Element lotrecht auftritt, bzw. daß am lotrechten Element eine zur Oberfläche gleichgerichtete Spannung auftritt.

Aus dieser Regel ergibt sich für den RANKINE'schen Fall als Gesetz, daß der Erddruck auf eine senkrechte Mauerrückwand mit

der Oberfläche gleichgerichtet ist und daß der an einer Mauer mit beliebiger Rückwandfläche  $AB$  auftretende Erddruck  $E_2$  sich durch Zusammensetzung der Kräfte  $E_1$  auf die lotrechte Wand in  $A$  und  $G_2$  ermitteln läßt (Fig. 4).

Nach der RANKINE'schen Theorie ist, — im Gegensatz zu der COULOMB-, PONCELET-REBHANN'schen Theorie, — eine willkürliche Annahme des Neigungswinkels des Erddruckes weder notwendig noch zulässig, weil die Richtung des auf eine senkrechte Wand wirkenden Erddruckes mathematisch parallel zur Erdoberfläche liegend festgelegt ist. Der auf geneigte Wandflächen gerichtete Erddruck läßt sich durch Vereinigung der Einzelkräfte bestimmen, wie aus Fig. 4 ersichtlich ist.

Aus alle dem müßte der Schluß gezogen werden, daß wir in der RANKINE'schen Theorie eine endgültige und einwandfreie Lösung des Erddruckproblems besitzen, denn sie scheint einseitl. den Grundgesetzen der Mechanik zu entsprechen, und andererseits gestattet sie eine eindeutige Bestimmung des Erddruckes nach seiner Richtung und Größe, wie auch die Bestimmung des Angriffspunktes (im unteren Drittelpunkt der Wand). Der wunde Punkt dieser vom mathematischen Standpunkt durchaus einwandfreien Theorie liegt lediglich in der Einführung des durch eine Wand getrennten halben Kontinuums und damit in der Annahme ebener Gleitflächen.

Es fragt sich nun, wie es sich mit den Versuchen verhält. Von den zahlreichen Versuchen auf diesem Gebiet aus dem Anfang des XX. Jahrhunderts verdienen insbesondere die mit peinlichster Genauigkeit durchgeföhrten Versuche von MÜLLER-BRESLAU (8) hervorgehoben zu werden, durch welche die RANKINE'sche Theorie, namentlich ihre Ergebnisse betreffend die Richtung des Erddruckes im ganzen widerlegt worden sind. Diese Versuche haben vielmehr bewiesen, daß ganz bedeutende Änderungen der Oberflächeneigung von keiner nennenswerten Richtungsänderung des Erddruckes begleitet sind, d. h. daß die Druckrichtung nicht dem RANKINE'schen Gesetz unterworfen ist, nach welchem der Erddruck stets mit der Terrainoberfläche gleichgerichtet auftreten müßte. Auch hat MÜLLER-BRESLAU größere Druckwerte (um 10—15 % größere) gemessen, als man sie auf Grund der RANKINE-COULOMB'schen Theorie auf dem Wege der Rechnung erhalten hätte.

Die Versuchsergebnisse von MÜLLER-BRESLAU haben durch die späteren Versuche von J. FELD (12), H. KREY (13) und K. v. TERZAGHI (14) völlige Bestätigung gefunden, so daß als feststehend angenommen werden muß, daß

1. der Erddruck nicht parallel zur Oberfläche auftritt und
2. daß er seiner Größe nach die Rechnungsergebnisse nach der COULOMB-RANKINE'schen Theorie überschreitet.

Dies muß zur Überzeugung führen, daß die Fehlerquelle einzige und allein in der Annahme der ebenen Gleitfläche liegt, bezw. in der willkürlichen Einführung einer Ersatzwand an Stelle des Kontinuums, woraus sich die ersterwähnte Annahme ergeben hat.

Schon MÜLLER-BRESLAU hat an Hand zahlreicher Beispiele dargelegt, daß gekrümmte, z. B. kreisförmige Gleitflächen tatsächlich höhere Erddruckwerte ergeben und daß der Druck in diesem Falle unter beliebigem Winkel auftreten kann. Aus praktischen Erfahrungen heraus, wie auch auf Grund der Lichtbilder über die Versuche sind die Forscher zu der gleichlautenden Feststellung gelangt, daß die Gleitfläche — zumindest in ihrem unteren Teil — irgendwelches anft gebogene Fläche ist, keinesfalls aber in ihrer ganzen Länge eben sein kann.

Abgesehen von ein bis zwei Studien aus dem vorigen Jahrhundert wirkte besonders das dem Weltkriege folgende letzte Jahrzehnt sehr befriedigend auf die Bereinigung dieser Fragen. In der neuesten Zeit haben die besonderen Plastizitätsuntersuchungen von Prof. PRANDTL (15) die Aufmerksamkeit der Forscher auf die gekrümmte Gleitfläche gelenkt. Die folgenden Untersuchungen von HENCKY, KÁRMÁN und NÁDAI konnten dann auf eine Anzahl von Problemen hinweisen, die auch ohne Kenntnis der Deformation, auf rein statischer Grundlage, gelöst werden können. Zu diesen Problemen gehört auch die Theorie des Erddruckes.

Im folgenden soll die andere Richtung der Erddruckerforschung behandelt werden, namentlich die Theorie der gekrümmten Gleitflächen.

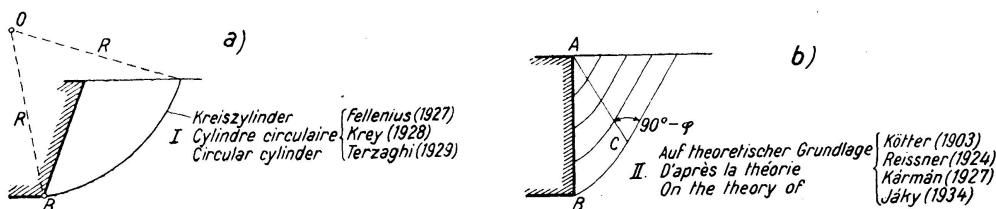


Fig. 5.  
Gekrümmte Gleitflächen — Surfaces de cession incurvées — Curved slip surfaces.

### Erddruck bei Voraussetzung gekrümmter Gleitflächen.

#### a) Allgemeines.

In den letzten zehn Jahren sind auf dem Gebiet der Erddruckerforschung gewaltige Fortschritte gemacht worden. Die hierbei vorgenommenen Versuche lassen sich ihrer Natur und ihrer Methoden nach in zwei Gruppen einteilen.

I. Zur ersten Gruppe gehören jene Untersuchungen, die auf möglichst einfache Art praktisch brauchbare Ergebnisse zu geben wünschen, ohne auf eine mathematisch einwandfreie Lösung des Problems Gewicht zu legen. Sie liefern Näherungswerte, denen es zwar an der theoretischen Unterlage fehlt, die jedoch mit der Wirklichkeit gute Übereinstimmung zeigen. Begründer dieser Schule war Prof. W. FELLENIUS (Stockholm) (17), der den Vorschlägen SVEN HULTINS und PETTERSONS folgend, kreisförmige Gleitfläche annimmt. Jahrzehntelanges Arbeiten und Beobachtungen der Kommission für Bodenmechanik in Schweden haben zur Erkenntnis geführt, daß die Gleitflächen bei Rutschungen von Eisenbahndämmen, bei Kaimauereinstürzen usw. nahezu kreisförmige Form besitzen.

Diesen Spuren folgen Prof. KREY (13) und Prof. TERZAGHI (17), die die Gleitfläche in ihrer vollen Länge für eine Kreislinie halten. Die graphischen

Verfahren dieser Forscher behandeln das Problem in sehr übersichtlicher Weise, nur sind diese Verfahren gegenüber den analytischen Methoden äußerst schwerfällig und langwierig. Die Untersuchung einzelner Probleme erfordert zuweilen zeichnerische Konstruktionsarbeit von mehreren Tagen. Vom theoretischen Standpunkt aus sind diese Methoden — wie gesagt — nicht einwandfrei, weil sie den Gleichgewichtsbedingungen nur teilweise und nicht restlos entsprechen.

II. Die zweite Richtung, die durchaus wissenschaftlich ist und auf rein theoretischer Grundlage steht, paßt sich den Gesetzen der Mechanik genauest an und nimmt die Form der Gleitfläche deshalb nicht als bekannt an, sondern sucht sie auf mathematischem Weg zu bestimmen.

An der Spitze dieser Schule steht der deutsche Mathematiker FR. KÖTTER (18), der schon im Jahre 1903 die Differentialgleichung für die auf beliebiger Gleitfläche entstehende resultierende Spannung abgeleitet hat.

Nach KÖTTER ist

$$\boxed{\frac{dq}{ds} - 2q \cdot \operatorname{tg} \varphi \frac{d\alpha}{ds} = \gamma \sin(\alpha - \varphi)} \quad 9)$$

In dieser Gleichung bedeuten  $q$  die resultierende Spannung,  $\varphi$  den Reibungswinkel der körnigen Erdmasse,  $\gamma t/m^3$  ihr Raumgewicht,  $ds$  den unendlich kleinen Bogenteil der gekrümmten Gleitfläche und  $\alpha$  den Winkel zwischen der Bogenlinie und der Waagerechten (Fig. 6). Die KÖTTER'sche Gleichung gibt aber noch keine Lösung des Problems, nachdem sie eigentlich zwei Unbekannte, nämlich  $\frac{d\alpha}{ds}$  und  $q$ , enthält. Einer dieser Werte muß

angenommen werden, um den anderen berechnen zu können. Wäre z. B. die Form der krummen Gleitfläche bekannt, so könnte die auf derselben entstehende Spannung  $q$  berechnet werden. Dies ist aber nicht der Fall und ihre Form kann ohne Verletzung des Gleichgewichtsgesetzes auch nicht angenommen werden. Alle Hypothesen, welche die krumme Gleitfläche, z. B. als einen Kreisbogen (FELLENIUS, KREY, TERZAGHI), oder als eine logarithmische Spirale (PIHERA) annehmen, führen nur zu Näherungsergebnissen, geben aber keine restlosen Lösungen, weil sie den Bedingungen des Gleichgewichtes nicht Rechnung tragen. Die KÖTTER'sche Gleichung gehört zur Lösung der Frage, ohne eine vollkommene Lösung geben zu können.

Prof. M. RITTER (1910) gibt eine sehr elegante und einfache Ableitung der KÖTTER'schen Gleichung und hat in seinem neuerlich (1936) erschienenen Werk (19) in analoger Weise die Trajektions-Differentialgleichung der Hauptspannung abgeleitet. Damit wurden neue Wege erschlossen und es darf angenommen werden, daß für die Hauptspannungsflächen geschlossene Formeln gefunden werden.

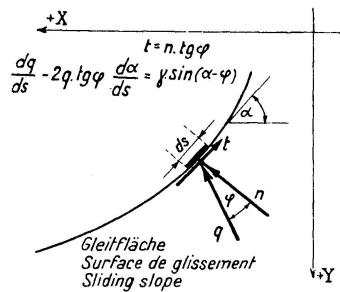


Fig. 6.  
Die Kötter'sche Gleichung.  
L'équation de Kötter.  
Kötter's equation.

In den vor kurzer Zeit erschienenen Studien von H. REISSNER (20) und TH. v. KÁRMÁN (21) wurde auf die Tatsache hingewiesen, daß die Gleitflächen keine fortlaufenden Krümmungsflächen sind, sondern sich aus den RANKINE'schen Ebenen und aus krummen Flächen zusammensetzen, wie dies der Fig. 5 zu entnehmen ist.

Von Prof. REISSNER (1924) wurde nachgewiesen, daß die Gleitflächen kohäsionsloser schwerer Erdmassen Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung der AIRY'schen Spannungsfunktion sind und da die Differentialgleichung zweiter Ordnung hyperbolischen Charakter aufweist, lassen sich die Gleitflächen aus mehreren Integralflächen zusammensetzen.

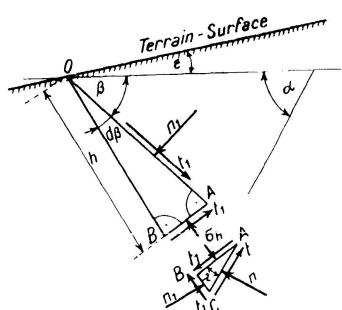


Fig. 7.  
Gleichgewichtsbedingungen.  
Conditions d'équilibre.  
Conditions of equilibrium.

Die Rankine'schen Gleitflächen sind dementsprechend nur bis zur Geraden AC Ebenen und setzen sich von da ab in gekrümmten Flächen fort. Lage und Form der gekrümmten Gleitflächen innerhalb des Prismas ABC sowie der herrschende Spannungszustand werden bestimmt 1. durch die Gleichgewichtsbedingungen, 2. durch die Reibungsverhältnisse an der Wand und 3. durch den glatten Übergang der ebenen Gleitflächen in die gekrümmte Fortsetzung.

REISSNER rückt der Lösung des Problems von Schritt zu Schritt näher, Prof. KÁRMÁN (1927) gibt eine Lösung für den Sonderfall, daß die Mauerrückwand ebenfalls zur Gleitfläche wird und beweist, daß der — unter Voraussetzung einer gekrümmten Gleitfläche — ermittelte Erddruck nicht um vieles von dem COULOMB'schen Wert abweicht.

Eine kurzgefaßte Darstellung und die allgemeine Lösung des Problems, wie auch die Differentialgleichung der Gleitflächen hat als erster der Verfasser dieser Studie anlässlich des IV. Internationalen Kongresses für Mathematik und angewandte Mechanik im Jahre 1934 in Cambridge gegeben. Im folgenden wird die ausführliche mathematische Behandlung der Frage gezeigt (22) und (23).

### b) Gleichgewichtsbedingungen.

Stellt man sich einen Erdkörper vor, der durch eine unter dem Winkel  $\varepsilon$  geneigte unbela stete Fläche begrenzt ist (Fig. 7), so kann man nach BOUSSINESQ (24) annehmen, daß sämtliche Spannungen ( $t_1$ ,  $n_1$  und  $\sigma_h$ ) in linearem Verhältnis zu der vom Punkte O gemessenen Entfernung  $h$  stehen und nur Funktionen des Polwinkels  $\beta$  sind, d. h.

$$\boxed{\begin{aligned} n_1 &= h f_1(\beta) \\ t_1 &= h f_2(\beta) \\ \sigma_h &= h f_3(\beta) \end{aligned}}$$

10)

Die Gleichgewichtsbedingungen des unendlich kleinen Kreissektors  $OAB$  sind in den wohlbekannten partiellen Differentialgleichungen nach CAUCHY ausgedrückt, nach welchen

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\sigma_h - n_1}{h} + \frac{\partial \sigma_h}{\partial h} + \frac{1}{h} \frac{\partial t_1}{\partial \beta} &= \gamma \sin \beta \\ \frac{2t_1}{h} + \frac{\partial t_1}{\partial h} + \frac{1}{h} \frac{\partial n_1}{\partial \beta} &= \gamma \cos \beta\end{aligned}} \quad 11)$$

Nach Einführung der Ausdrücke unter 10), wo z. B.

$$\frac{\partial t_1}{\partial \beta} = h \frac{d}{d \beta} f_2(\beta) = h \frac{d}{d \beta} \left( \frac{t_1}{h} \right)$$

ist, kommt man zu den Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{2\sigma_h - n_1}{h} + \frac{d}{d \beta} \left( \frac{t_1}{h} \right) &= \gamma \sin \beta \\ \frac{3t_1}{h} + \frac{d}{d \beta} \left( \frac{n_1}{h} \right) &= \gamma \cos \beta\end{aligned}} \quad 12)$$

Wenn nun das unendlich kleine Dreieck  $ABC$  nach Fig. 7, dessen Hypotenuse  $AC$  ein Differentialbogenelement  $ds$  der durch den Punkt  $A$  gehenden Gleitfläche ist, in welchem ferner die Spannungen  $t$  und  $n$  Komponenten der an der Gleitfläche wirkenden Spannung sind, an die Fläche  $AB$  gelegt wird, so lassen sich aus dem Gleichgewicht der an den Seiten des Dreieckes  $ABC$  wirkenden Kräfte folgende Gleichungen aufschreiben:

$$\boxed{\begin{aligned}t &= \frac{\sigma_h - n_1}{2} \sin 2\lambda + t_1 \cos 2\lambda \\ n &= \frac{\sigma_h + n_1}{2} + \frac{\sigma_h - n_1}{2} \cos 2\lambda - t_1 \sin 2\lambda\end{aligned}} \quad 13)$$

Nachdem für das Gleiten dasjenige Bogenelement in Betracht kommt, für welches die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{t}{n} \right) = 0 \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial t}{\partial \lambda} = \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial n}{\partial \lambda}$$

erfüllt erscheint, wird aus der Gleichung 13) die Gleitspannung sein:

$$\boxed{t_1 = \frac{\sigma_h - n_1}{2} \operatorname{cotg} (2\lambda - \varphi)} \quad 14)$$

Andererseits ist im Sinne des COULOMB'schen Gleitgesetzes  $t = n \cdot \operatorname{tg} \varphi$ , so daß sich nach Zusammenziehen der Gleichungen 13) und 14) die Spannungen  $\sigma_h$ ,  $n_1$  und  $t_1$  als Funktionen der Veränderlichen  $t$  und  $\lambda$  ausdrücken lassen, woraus

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_h &= t \frac{1 + \sin \varphi \sin (2\lambda - \varphi)}{\sin \varphi \cos \varphi} \\ n_1 &= t \frac{1 - \sin \varphi \sin (2\lambda - \varphi)}{\sin \varphi \cos \varphi} \\ t_1 &= t \frac{\cos (2\lambda - \varphi)}{\cos \varphi}\end{aligned}} \quad 15)$$

Der in diesen Gleichungen vorkommende Winkel  $\lambda$  läßt sich mit dem Neigungswinkel  $\alpha$  der Gleitfläche ausdrücken (Fig. 7), d. h.

$$\boxed{\lambda = \alpha + \beta - 90^\circ} \quad 16)$$

Fig. 7 läßt weiters leicht erkennen, daß der in der Differentialgleichung 12) enthaltene Ausdruck

$$\boxed{\frac{dh}{d\beta} = -h \cotg(\alpha + \beta)} \quad 17)$$

ist.

Durch Einführung in die Gleichungen 12) der unter 15) gegebenen Formeln mit zwei Veränderlichen gelangt man nach längeren Zwischenrechnungen bei gleichzeitiger Berücksichtigung der unter 16) und 17) enthaltenen Vereinfachungen zu nachstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} t & \left[ \frac{\cos \varphi \sin (\alpha + \beta - \varphi)}{\sin (\alpha + \beta)} + 2 \frac{d\alpha}{d\beta} \sin \varphi \sin (2\alpha + 2\beta - \varphi) \right] \\ & - \frac{dt}{d\beta} \sin \varphi \cos (2\alpha + 2\beta - \varphi) = h \gamma \sin \beta \sin \varphi \cos \varphi \\ t & \left[ \frac{\cos \varphi \cos (\alpha + \beta - \varphi)}{\sin (\alpha + \beta)} + 2 \frac{d\alpha}{d\beta} \sin \varphi \cos (2\alpha + 2\beta - \varphi) \right] \\ & + \frac{dt}{d\beta} [1 + \sin \varphi \sin (2\alpha + 2\beta - \varphi)] = h \gamma \cos \beta \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

aus welchen sich für  $t$  und  $\frac{dt}{d\beta}$  folgende Auflösungen ergeben:

$$\boxed{t = h \gamma \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\sin \beta + \sin \varphi \cos (2\alpha + \beta - \varphi)}{4 \sin \varphi \sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha + \beta - \varphi) \frac{d\alpha}{d\beta} + \cos^2 \varphi}} \quad 18)$$

$$\boxed{\frac{dt}{d\beta} = h \gamma \sin \varphi \cos \varphi - \frac{2 \sin \varphi \sin (2\alpha + \beta - \varphi) \frac{d\alpha}{d\beta} + \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\sin (\alpha + \beta)} \cos \varphi}{4 \sin \varphi \sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha + \beta - \varphi) \frac{d\alpha}{d\beta} + \cos^2 \varphi}} \quad 19)$$

Die in einem beliebigen Punkt des Erdkörpers herrschende Spannung läßt sich in Kenntnis der Koordinaten  $h$  und des Winkels  $\beta$  aus der obigen Gleichung 18) bestimmen, vorausgesetzt, daß der Zusammenhang zwischen den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  geklärt ist. Zur Aufklärung dieses Zusammenhangs wird die Differentialgleichung der Gleitfläche Handhabe bieten.

Durch zweckmäßige Behandlung der Gleichungen 18) und 19) läßt sich ein äußerst einfacher Funktionszusammenhang herstellen. Man bildet den Ausdruck

$$\left( \frac{dt}{d\beta} - 2t \operatorname{tg} \varphi \frac{d\alpha}{d\beta} \right)$$

woraus sich nach entsprechenden Substitutionen und Zusammenziehungen die Formel

$$\frac{dt}{d\beta} - 2t \operatorname{tg} \varphi \frac{d\alpha}{d\beta} = h\gamma \sin \varphi \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad 20)$$

ergibt, die eigentlich mit der unter 9) bereits angeführten KÖTTER'schen Gleichung identisch ist, wenn man bedenkt, daß

$$t = \frac{q}{\sin \varphi} \quad \text{und} \quad \frac{ds}{d\beta} = \frac{h}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ist,}$$

woraus sich nach Einführung in die Gleichung 20) tatsächlich die Gleichung

$$\frac{dq}{ds} - 2q \operatorname{tg} \varphi \frac{d\alpha}{ds} = \gamma \sin(\alpha - \varphi)$$

d. h. die KÖTTER'sche Originalgleichung ergibt. Damit erscheint also bewiesen, daß die KÖTTER'sche Gleichung lediglich eine Folge der Gleichungen 18) und 19) darstellt und darum ihrem Inhalten nach wesentlich beschränkter ist als obige Gleichungen. Während nämlich in der KÖTTER'schen Gleichung das Krümmungsmaß der Gleitfläche  $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$  unbekannt ist, sind durch die Gleichungen 18) und 19) außer dem Letzteren auch die Gleitspannung  $t$  und die Form der Gleitfläche bestimmt, es ist somit eine vollkommene und restlose Lösung gegeben. Durch entsprechende Behandlung der Zusammenhänge 18) und 19) läßt sich auch noch eine andere, der KÖTTER'schen Gleichung ähnliche, von ihr aber völlig unabhängige Gleichung ableiten, nämlich

$$\frac{dt}{d\beta} [\sin(2\alpha + 2\beta - \varphi) + \sin \varphi] + t \cos \varphi = h\gamma \sin \varphi \cos \varphi \sin(2\alpha + \beta - \varphi) \quad 20a)$$

welche zufolge ihrer Eignung zur Bestimmung der Gleitspannung ( $t$ ) der KÖTTER'schen Gleichung an Bedeutung nicht zurücksteht.

Ein anderer wichtiger Umstand, der nicht unerwähnt bleiben darf, ist darin zu erblicken, daß die ursprüngliche KÖTTER'sche Ableitung nicht aus den unter 10) angeführten BOUSSINESQ'schen Voraussetzungen hervorgeht, sondern auf ganz eigenen Wegen zur Gleichung 9) gelangte. Dadurch aber, daß die BOUSSINESQ'schen Annahmen letzten Endes in der KÖTTER'schen Gleichung auslaufen, erscheint ihre Richtigkeit völlig bewiesen zu sein.

Die anfangs unserer Ableitung gemachten Annahmen haben nun aufgehört, Hypothesen zu sein, sie haben sich vielmehr als Folgen der KÖTTER'schen Gleichungen und mithin als durch die allgemeine Natur des Problems bedingte Gegebenheiten enthüllt.

Nach diesen Ausführungen können wir nun dem Gesetze der bisher unbekannten Gleitfläche näher treten.

### c) Differentialgleichung der gekrümmten Gleitfläche.

Die obigen Ableitungen haben uns zu den Gleichungen der Gleitspannung  $t$  und zu ihrem Differentialquotienten nach  $\beta$  geführt. Differentiiieren wir nun die Gleichung 18) nach  $\beta$  und bringen wir sie mit jener unter 19) in Verbindung, so läßt sich angesichts des Zusammenhangs

$$\frac{dh}{d\beta} = -h \cotg(\alpha + \beta)$$

der Wert  $h$  ausschalten und wir gelangen zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, in welcher nurmehr  $\alpha$  und  $\beta$  erscheinen. Sie lautet nach entsprechenden Vereinfachungen:

$$A(\alpha, \beta) \frac{d^2 \alpha}{d\beta^2} + B(\alpha, \beta) \left( \frac{d\alpha}{d\beta} \right)^2 + C(\alpha, \beta) \frac{d\alpha}{d\beta} = 0 \quad (21)$$

wo

$$A(\alpha, \beta) = \{[\sin \beta + \sin \varphi \cos(2\alpha + \beta - \varphi)] \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta - \varphi)\}$$

$$B(\alpha, \beta) = \{4 \sin \varphi \cos(\alpha + \beta - \varphi) \sin(\alpha + \beta) \sin(2\alpha + \beta - \varphi) \\ + \cos(2\alpha + \beta - \varphi) [\sin \beta + \sin \varphi \cos(2\alpha + \beta - \varphi)]\}$$

$$C(\alpha, \beta) = \{\sin(2\alpha + \beta - \varphi) \cos^2 \varphi + \cos(2\alpha + 2\beta - \varphi) [\sin \beta + \sin \varphi \cos(2\alpha + \beta - \varphi)]\} \quad (21a)$$

Funktionszusammenhänge  $f(\alpha, \beta)$  sind.

Durch die Gleichung 21) erscheint die Gleitflächenform vollkommen festgelegt zu sein, sowie die Möglichkeit geboten, die zum Aufschreiben des totalen Integrals der Differentialgleichung zweiter Ordnung erforderlichen z w e i R a n d b e d i n g u n g e n anzugeben.

Das Integral selbst konnte ich in keine geschlossene Form bringen und es scheint auch wenig Aussicht zu bestehen, daß dies jemals möglich sein wird, sind doch die Versuche einer geschlossenen Lösung viel einfacherer Differentialgleichungen zweiter Ordnung bis jetzt erfolglos geblieben. Dies bedeutet aber kein Hindernis für die restlose Lösung des Problems, wie es später noch dargetan wird. Fast gleichzeitig mit dem Verfasser trat Prof. A. CAQUOT (25) mit einer Studie vor die Öffentlichkeit, in welcher er die Differentialgleichung der Gleitfläche auf völlig anderer Grundlage nach eigenen Methoden aufgestellt hat und in einer recht geistreichen Weise der Näherungslösung heranrückt.

### 1. Die ebene Gleitfläche.

Zurückgekehrt zur Gleichung 21), läßt sich diese unzweifelhaft zu

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = 0 \quad (22)$$

auflösen, woraus sich  $\alpha$  als Konstante ergibt, d. h. die Möglichkeit ebener Gleitflächen bewiesen erscheint.

Suchen wir nun die an der ebenen Gleitfläche auftretende Spannung  $t$ . Setzt man zu diesem Zwecke den Ausdruck  $\frac{d\alpha}{d\beta} = 0$  in die Gleichung 18), so erhält man als gesuchte Funktion der Spannung

$$t = h \gamma \operatorname{tg} \varphi [\sin \beta + \sin \varphi \cos(2\alpha + \beta - \varphi)] \quad (23)$$

Nachdem dieser Zusammenhang für jeden einzelnen Punkt der ebenen Gleitfläche zu Recht besteht, muß er auch für den Punkt  $P_1$  der Oberfläche zutreffen (Fig. 8), woraus sich unter Berücksich-

tigung, daß bei unbelasteter Bodenoberfläche  $\varepsilon = -\beta$  durch  $t = 0$  ersetzt werden kann, die Gleichung

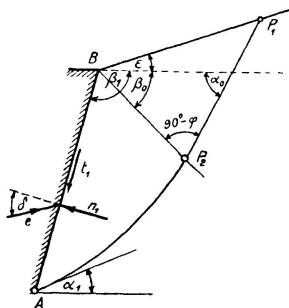


Fig. 8.  
Zusammengesetzte Gleitfläche.  
Surface de cession composée.  
Combined slip surfaces.

$$\sin \varphi \cos (2\alpha_0 - \varepsilon - \varphi) = \sin \varepsilon \quad 24)$$

ergibt, in der wir die Gleichung der RANKINE'schen ebenen Gleitfläche erkennen.

Wenn  $\varepsilon = 0$ , so ist  $\alpha_0 = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$  die Neigung der COULOMB'schen ebenen Gleitfläche.

Dadurch erscheint einerseits bewiesen, daß die Gleitflächen auch Ebenen sein können, andererseits, daß diese Ebenen tatsächlich mit jenen des RANKINE'schen Kontinuums übereinstimmen.

## 2. Gekrümmte Gleitflächen.

Sind die Gleitflächen keine Ebenen, dann ist  $\frac{d\alpha}{d\beta} \neq 0$ , folglich ist  $\alpha$  ein veränderlicher Wert.

Nachdem die ebenen Gleitflächen an irgendeinem Punkt  $P_2$  tangential, d. h. ohne Bruch in die Krümmungsfläche übergehen, gehören die Winkel  $\beta_0$  und  $\alpha_0$  auch der gekrümmten Gleitfläche an, es muß sogar die Spannung  $t$  die gleiche sein, gleichviel ob sie zur ebenen oder zur gekrümmten Gleitfläche gehörend betrachtet wird. Die unter 18) für die Spannung  $t$  angeführte allgemeine Gleichung kann aber nur in dem Falle mit der Gleichung 23) gleichwertig sein, wenn irgendein Multiplikator des Ausdrückes  $\frac{d\alpha}{d\beta}$  zu Null wird. Nachdem jedoch  $\sin(\alpha + \beta) \neq 0$ , bleibt als einzige Möglichkeit

$$\cos(\alpha_0 + \beta_0 - \varphi) = 0, \text{ mithin}$$

$$\alpha_0 + \beta_0 = 90^\circ + \varphi \quad 25)$$

d. h. die Gerade  $BP_2$  ist im Punkte  $P_2$ , wo die ebenen Gleitflächen ihr Ende haben, ebenfalls eine Gleitfläche und für den Raum  $BP_1P_2$  gilt die RANKINE'sche Lösung als maßgebend.

Damit wäre eine Randbedingung der Differentialgleichung zweiter Ordnung sichergestellt, und zwar für den Punkt  $P_2$  der Gleitfläche

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 \\ \beta &= \beta_0 \end{aligned} \quad 26)$$

wo noch

$$\alpha_0 + \beta_0 = 90^\circ + \varphi \text{ ist.}$$

Mit Hilfe der Gleichung 24) läßt sich die Lage der unter  $\alpha$  geneigten Gleitebene bestimmen. Im Sinne der Gleichung ist Winkel  $\alpha_0$  eine Funktion der Oberflächenneigung  $\varepsilon$ . Für den praktischen Gebrauch empfiehlt es sich, die mit den verschiedenen Reibungswinkeln  $\varphi$  bzw. Oberflächenneigungen  $\varepsilon$  korrespondierenden  $\alpha_0$ -Werte zu berechnen und tabellarisch zusammenzufassen. Diesem praktischen Zwecke dient die mitgeteilte Tabelle I,

in welcher die ausgerechneten Werte  $\alpha_0$  für Größen der Winkel  $\varepsilon$  und  $\varphi$ , die von 5 zu 5 Gradenten wechseln, enthalten sind.  $\beta_0$  läßt sich hingegen aus dem unter 26) angeführten Zusammenhang  $\alpha_0 + \beta_0 = 90^\circ + \varphi$  berechnen.

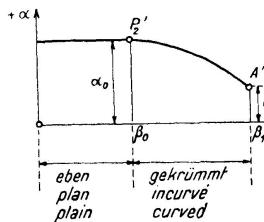


Fig. 9.

Zeichnerisches Bild der Funktion  $\alpha = f(\beta)$  --- Représen-tation graphique de la fonction  $\alpha = f(\beta)$  --- Graphical re-presentation of the function  $\alpha = f(\beta)$ .

Bei der Ermittlung der anderen Konstante für die Integration muß zunächst in Betracht gezogen werden, daß der gegen die Stützwand gerichtete Erddruck unter einem bestimmten Winkel  $\delta$  auftritt, und daß dieser Richtungswinkel  $\delta$  eine Funktion der Wandneigung ( $\beta_1$ ) sowie der Endtangente  $\alpha_1$  der Gleitfläche ist. Der Richtungswinkel  $\delta$  ist an jedem einzelnen Punkte der Mauer der gleiche, denn (siehe Fig. 8)

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{t_1}{n_1}$$

steht nur mit  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  in funktionalem Zusammenhang; folglich wird nach Einführung der Gleichungen 15) die Richtung des Erddruckes sein:

$$\operatorname{tg} \delta = - \frac{\sin \varphi \cos (2\alpha_1 + 2\beta_1 - \varphi)}{1 + \sin \varphi \sin (2\alpha_1 + 2\beta_1 - \varphi)} \quad 27)$$

Bedient man sich des Richtungswinkels  $\delta$  des Erddruckes entsprechend einer Annahme, wie sie für Konstruktionen des Erddruckes im Falle ebener Gleitflächen bisher schon gemacht wurde, so läßt sich der Neigungswinkel  $\alpha_1$  der Gleitfläche für eine unter gegebenem Winkel  $\beta_1$  geneigten Mauerrückwand als Neigungswinkel der Endtangente berechnen. In diesem Fall wird die zweite Konstante für die Integration durch das dem Punkte  $A$  angehörende, zusammengehörige Wertepaar  $\begin{cases} \alpha = \alpha_1 \\ \beta = \beta_1 \end{cases}$  bestimmt und auf diese Weise die  $\alpha = f(\beta)$ -Kurve durch die Punkte  $P_2'$  und  $A'$  vollständig festgelegt (siehe Fig. 9).

Vom rein mathematischen Standpunkt aus betrachtet erscheint das Problem im Sinne des Vorgetragenen völlig gelöst zu sein, die praktischen Gesichtspunkte machen aber noch eingehendere Untersuchungen erwünscht.

So ist als wichtige Frage in erster Linie zu untersuchen, innerhalb welcher Grenzen sich der Winkel  $\delta$  bewegt. Nachdem im Sinne der Gleichung 27)  $\delta$  im wesentlichen eine Funktion vom Winkel  $(\alpha + \beta)$  ist, betrachten wir zunächst diese Funktion. Ihre zeichnerische Darstellung ergibt eine Wellenlinie nach Fig. 10, laut welcher der Winkel  $\delta$  nur zwischen den Werten  $(+\varphi) - (-\varphi)$  schwankt, d. h. der Erddruck bleibt seiner Richtung nach innerhalb des mit dem Reibungswinkel des Bodens gezeichneten Reibungskegels und ist unabhängig von den Reibungsverhältnissen an der Wand.

Tabelle I — Tableau I — Table I.

Neigungswerte ( $\alpha_0$ -Werte) der Rankine'schen Ebene — Valeur de l'inclinaison (valeur  $\alpha_0$ ) du plan de Rankine  
 Values of deflection ( $\alpha_0$ -values) for the Rankine-plane

Reibungswinkel Angle de frottement Friction angles	Neigungswinkel der Oberfläche ( $\angle \varepsilon$ ) — Pente de la surface ( $\angle \varepsilon$ )										Deflection angles of the surface ( $\angle \varepsilon$ )					
	$\varepsilon = 45^\circ$	$40^\circ$	$35^\circ$	$30^\circ$	$25^\circ$	$20^\circ$	$15^\circ$	$10^\circ$	$5^\circ$	$0^\circ$	$-5^\circ$	$-10^\circ$	$-15^\circ$	$-20^\circ$	$-25^\circ$	$-30^\circ$
$\varphi = 0^\circ$																
$5^\circ$																
$10^\circ$																
$15^\circ$																
$20^\circ$																
$25^\circ$																
$30^\circ$																
$35^\circ$																
$40^\circ$																
$45^\circ$																

Mathematischer Zusammenhang — Relation mathématique — Mathematical relation:

$$\cos(2\alpha_0 - \varepsilon - \varphi) = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi}$$

Aus der Kurve ist unmittelbar ersichtlich, daß

1.  $\delta = 0$  wird, wenn  $\alpha + \beta = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$  oder  $135^\circ + \frac{\varphi}{2}$
2.  $\delta = +\varphi$  „ „ „  $\alpha + \beta = 90^\circ + \varphi$
3.  $\delta = -\varphi$  „ „ „  $\alpha + \beta = 0$  oder  $180^\circ$

Diese Werte bilden die Grenzwerte der Erddruckrichtung. Diese Feststellung der Grenzwerte läßt aber noch die Frage offen, ob sie in der Natur auch wirklich auftreten. Die Tatsache, daß Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  zufolge der Diffe-

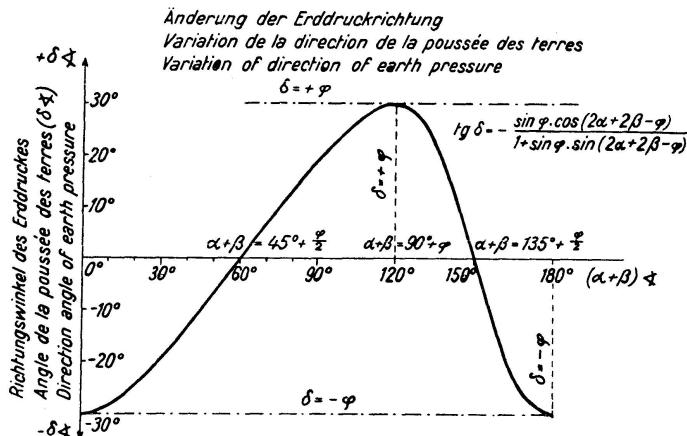


Fig. 10.

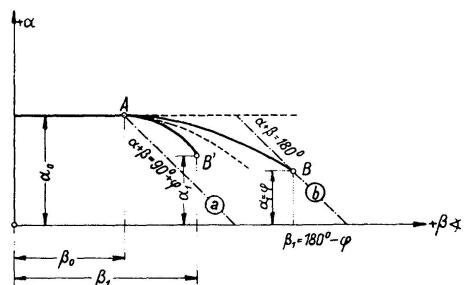


Fig. 11.

Die partikulären Lösungen der Differentialgleichung (21) – Les solutions particulières de l'équation différentielle (21) – The Particular solutions to the differential equation (21).

rentialgleichung zweiter Ordnung voneinander als Funktionen abhängen, läßt es notwendig und erwünscht erscheinen, eine ausführliche Analyse der Differentialgleichung zweiter Ordnung (21) vorzunehmen.

Die zeichnerische Darstellung der Differentialgleichung (21) im Koordinatensystem ( $\alpha \beta$ ) erfolgt in der Fig. 11. Im Rahmen der vorliegenden Studie werden nur die durch unbela stete Oberfläche begrenzten Erdkörper behandelt, d. h. es wird nur jener Fall besprochen, für welchen sich die Gleitfläche aus einer bis zur Oberfläche reichenden Ebene und einer an dieselbe anschließenden Krümmungsfläche zusammensetzt. Zu den Lösungen der Differentialgleichung gehören auch jene Fälle, für welche der von der Oberfläche ausgehende Teil der Gleitfläche gekrümmmt ist und sich dann in einer Ebene fortsetzt, oder in ihrer ganzen Länge eine Krümmungsfläche bildet. Diese Fälle – die bei belasteten Erdkörpern vorkommen – sollen in einem anderen Aufsatz behandelt werden.

Die Koordinaten des Pols (Punkt A) der Kurvenschar nach Fig. 11 sind  $\alpha = \alpha_0$  und  $\beta = \beta_0$  und es kann bewiesen werden, daß in diesem Punkte die Koeffizienten der Differentialgleichung (21)

$A(\alpha, \beta)_0 = 0$ ,  $C(\alpha, \beta)_0 = 0$  und  $B(\alpha, \beta) = -\cos^2 \varphi \sin(\beta_0 - \varphi)$   
sind, folglich ergibt sich aus der Differentialgleichung (21)

$$\left( \frac{d\alpha}{d\beta} \right)_A = 0$$

d. h. daß sämtliche Kurven im Punkte A waagerechte Tangenten besitzen.

Tabelle II — Table II.  
 Erdruckrichtung — Direction de la poussée des terres — Direction of earth pressure:  
 $(\operatorname{tg} \delta \swarrow)$

Reibungswinkel Angle de frottement Friction angle	$(\alpha + \beta \swarrow)$																		
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
$\varphi = 0^\circ$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
5°	-0,087	-0,082	-0,068	-0,047	-0,021	+0,007	+0,034	+0,058	+0,076	+0,086	+0,075	+0,054	+0,025	-0,008	-0,040	-0,066	-0,082	-0,087	
10°	-0,177	-0,166	-0,139	-0,099	-0,051	0,000	+0,051	+0,099	+0,139	+0,166	+0,177	+0,165	+0,129	+0,071	0,000	-0,071	-0,129	-0,165	-0,177
15°	-0,265	-0,252	-0,211	-0,155	-0,088	-0,018	+0,055	+0,123	+0,184	+0,235	+0,264	+0,263	+0,224	+0,143	+0,030	-0,090	-0,189	-0,249	-0,269
20°	-0,365	-0,342	-0,288	-0,215	-0,132	-0,044	+0,044	+0,132	+0,215	+0,288	+0,342	+0,365	+0,336	+0,243	+0,090	-0,089	-0,243	-0,336	-0,365
25°	-0,467	-0,437	-0,369	-0,279	-0,180	-0,078	+0,026	+0,129	+0,230	+0,326	+0,406	+0,460	+0,458	+0,372	+0,185	-0,064	-0,290	-0,426	-0,467
30°	-0,577	-0,540	-0,453	-0,347	-0,233	-0,116	0,000	+0,116	+0,233	+0,347	+0,453	+0,543	+0,577	+0,520	+0,323	0,000	-0,323	-0,520	-0,577
35°	-0,700	-0,652	-0,545	-0,418	-0,289	-0,162	-0,032	+0,096	+0,224	+0,354	+0,483	+0,602	+0,687	+0,686	+0,506	+0,117	-0,335	-0,623	-0,700
40°	-0,840	-0,774	-0,643	-0,495	-0,348	-0,206	-0,068	+0,068	+0,206	+0,348	+0,495	+0,643	+0,774	+0,840	+0,726	+0,307	-0,307	-0,726	-0,840
45°	-1,000	-0,913	-0,751	-0,576	-0,412	-0,257	-0,108	+0,036	+0,182	+0,333	+0,492	+0,662	+0,836	+0,972	+0,959	+0,576	-0,207	-0,831	-1,000
Vorzeichen signe - sign	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
															+				

Mathematischer Zusammenhang — Relation mathématique — Mathematical relation:

$$\operatorname{tg} \delta = - \frac{\sin \varphi \cos (2\alpha + 2\beta - \varphi)}{1 + \sin \varphi \sin (2\alpha + 2\beta - \varphi)}$$

Es lässt sich ohne Schwierigkeit beweisen, daß im Falle der sog. natürlichen Böschung, d. h. wenn die Erdmasse ihren Ruhezustand auch ohne irgendwelche Stützung bewahrt, wenn also

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \varphi \\ \beta_1 &= 180^\circ - \varphi\end{aligned}$$

die Werte  $A(\alpha, \beta)_B = 0$ ,  $B(\alpha, \beta)_B = 0$  und  $C(\alpha, \beta)_B = 0$  sind, und daß demgemäß der die natürliche Böschung kennzeichnende Punkt  $B$  (Fig. 11) eine Lösung der Differentialgleichung bildet. Nachdem ferner in diesem Falle jeder beliebige Wert der Tangentensteigung  $\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)$  die Differentialgleichung erfüllt, ist  $B$  ein singulärer Punkt.

Es bedurfte besonderer und sehr eingehender mathematischer Untersuchungen, wollte man Näheres über den Charakter der Kurvenschar in diesem Punkte erfahren. Eines ist aber auch ohne diese Untersuchungen feststehend, daß es nämlich Lösungen gibt, die über Punkt  $B$  führen, und andere, die nicht über diesen Punkt verlaufen.

Nachdem sich gemäß Winkel  $(\alpha + \beta)$  der untere und obere Grenzwert des Richtungswinkels des Erddruckes nur zwischen  $(90^\circ + \varphi)$  und  $180^\circ$  bewegen kann, bleiben die als Lösungen der Differentialgleichung geltenden Kurven innerhalb des durch die Geraden  $(a)$  und  $(b)$  begrenzten Feldes (Fig. 11).

Da die Tangente im Punkt  $A$  waagerecht liegt, lässt sich eine sehr gute Näherungslösung erzielen, wenn man die Kurve  $AB'$  als eine Parabel zweiter Ordnung annimmt.

Die Gleichung einer solchen Parabel lautet:

$$\alpha = \alpha_0 - (\alpha_0 - \alpha_1) \frac{(\beta - \beta_0)^2}{(\beta_1 - \beta_0)^2} \quad 28)$$

und

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = -2(\alpha_0 - \alpha_1) \frac{(\beta - \beta_0)}{(\beta_1 - \beta_0)^2} \quad 29)$$

Im Sinne des Ausgeföhrten werden sich die Gleitspannung ( $t$ ) aus der Gleichung 18) und die an der Mauerrückwand auftretenden Spannungen  $n_1$  und  $t_1$  mit Hilfe der Gleichung 15) bestimmen lassen.

#### d) Die Größe des Erddruckes.

Die an der Rückseite der Stützmauer wirkende Normalspannung beträgt im Sinne der Gleichung 15)

$$n_1 = t \frac{1 + \sin \varphi \sin(2\alpha_1 + 2\beta_1 - \varphi)}{\sin \varphi \cos \varphi}$$

und nachdem sich die Spannungen mit der Stützmauerhöhe  $h$  linear ändern, wird der Gesamtwert der Normalkraft gleich dem Flächeninhalt des Spannungsdreieckes sein, d. h.

$$N_1 = \frac{h^2 \gamma}{2} \frac{[\sin \beta_1 + \sin \varphi \cos(2\alpha_1 + \beta_1 - \varphi)][1 + \sin \varphi \sin(2\alpha_1 + 2\beta_1 - \varphi)]}{4 \sin \varphi \sin(\alpha_1 + \beta_1) \cos(\alpha_1 + \beta_1 - \varphi) \frac{d\alpha_1}{d\beta_1} + \cos^2 \varphi} \quad 30)$$

und die tangentiale Komponente ist gleich

$$T_1 = N_1 \operatorname{tg} \delta \quad 31)$$

wo Winkel  $\delta$  den angenommenen Richtungswinkel des Erddruckes bedeutet, für welchen die Gleichung 27) sowie die Tabelle II maßgebend sind.

Diese Ausführungen geben die Charakteristik der allgemeinen Lösung des Problems und besagen, daß die Größe des Erddruckes als eine einfache unendliche Menge anzusehen ist, kann doch der Richtungswinkel des Erddruckes innerhalb der Grenzen ( $+\varphi$ ) und ( $-\varphi$ ) unendlich verschieden angenommen werden, wodurch auch  $N_1$  einfache unendlich viele Werte annehmen kann.

Sobald man aber bezüglich des Erddruckes oder einer mit ihm verbundenen Charakteristik gewisse besondere Voraussetzungen macht, so wird die einfach unendliche Zahl der Lösungen auf eine einzige und bestimmte Lösung beschränkt. So z. B. wenn man den größten der unendlich vielen  $N_1$ -Werte oder den Höchstwert von  $E = \sqrt{N_1^2 + T_1^2}$  sucht, oder aber jenen Fall klären will, in welchem die Gleitfläche zur Ebene wird usw.

Wenn die Gleitfläche zur Ebene wird und wenn man zunächst den praktisch bedeutsamen Fall der waagerechten Oberfläche zur Voraussetzung macht ( $\varepsilon = 0$ ), so ist

$$\alpha_1 = 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha_1}{d\beta_1} = 0$$

woraus nach Substitution in die obigen Gleichungen

$$t = h\gamma \operatorname{tg} \varphi (1 - \sin \varphi) \sin \beta$$

$$n_1 = h\gamma \operatorname{tg} \varphi \frac{(1 - \sin \varphi)(1 + \sin \varphi \cos 2\beta)}{\sin \varphi \cos \varphi}$$

somit

$$N_1 = \frac{h^2 \gamma}{2} \frac{\sin \beta}{1 + \sin \varphi} (1 + \sin \varphi \cos 2\beta) \quad 32)$$

sich als Normalkomponente des Erddruckes ergibt.

Der Richtungswinkel des Erddruckes ist

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \varphi \sin 2\beta}{1 + \sin \varphi \cos 2\beta} \quad 32a)$$

Wird der Einfachheit halber der kürzere Ausdruck

$$k_e = \frac{\sin \beta}{1 + \sin \varphi} (1 + \sin \varphi \cos 2\beta) \quad 33)$$

eingeführt, so ist  $N_1 = \frac{h^2 \gamma}{2} k_e$ , wo  $k_e$  das Verhältnis des Erddruckes zu dem auf die gleiche Fläche entfallenden Wasserdruck angibt, weshalb  $k_e$  mit Recht als hydrostatischer Koeffizient bezeichnet werden kann.

Es läßt sich leicht beweisen, daß die Grenzen des  $k_e$ -Wertes 1. bei  $\beta = 90^\circ$

und 2. bei  $\sin \beta = \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{6 \sin \varphi}}$  liegen.

Im ersten Fall handelt es sich um das Minimum, im zweiten um das Maximum, und zwar wird sein

$$\text{im Falle 1. } k_{min} = \tan^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \text{ und im Falle 2. } k_{max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{6 \sin \varphi}}$$

Beispielsweise wird bei  $\varphi = 30^\circ$  (trockener, locker gelagerter Sand)

$$k_{min} = 0,33 \quad \text{und} \quad k_{max} = 0,47 \text{ betragen.}$$

Seine mit  $\varphi$  schwankenden Zwischenwerte sind der Fig. 12 zu entnehmen. Bemerkenswert ist, daß der hydrostatische Koeffizient bei kleinen Reibungswinkeln ( $\varphi < 11,5^\circ$ ) keinen Mindestwert, sondern nur ein Maximum hat und zwar tritt dasselbe auf im Falle einer lotrechten Wand

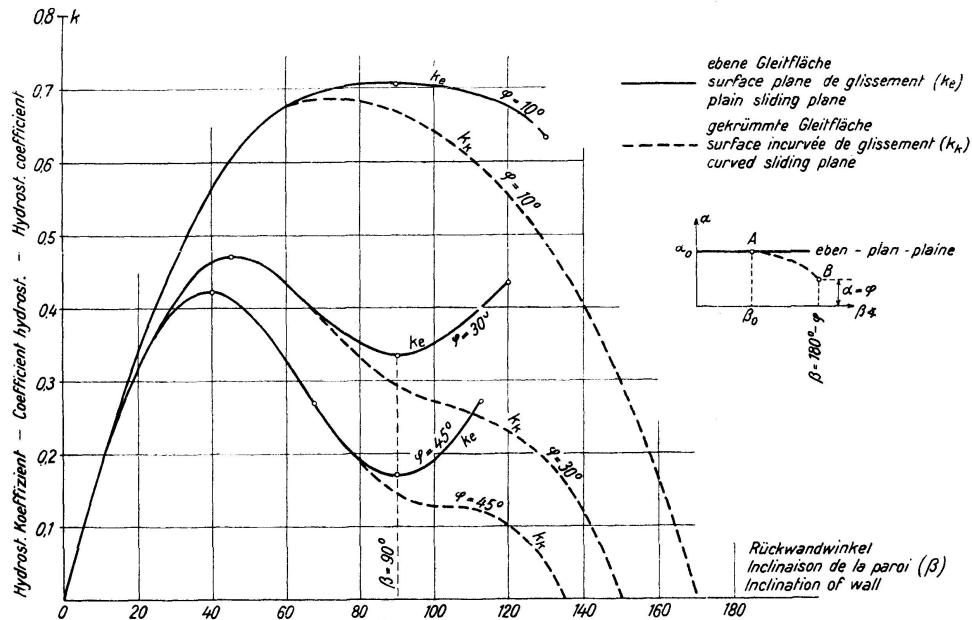


Fig. 12.  
Änderung des hydr. Koeffizienten — Variation des coefficients hydr. —  
Change in the hydraulic coefficient.

( $\beta = 90^\circ$ ). Materialien mit größerem Reibungswinkel (Sand, Getreide, Stein usw.) üben den größten Druck auf Wände mit Neigungen von  $\beta = 40^\circ - 45^\circ$  aus. Beispiele für diesen Fall sind bei den sog. Großraumsilos anzutreffen, für welche aus der Fig. 12 die für die Praxis wichtige Lehre gezogen werden kann, daß großen Behältern bedeutend wirtschaftlichere Form gegeben werden kann, wenn ihre Wandungen mit  $\beta = 60^\circ - 70^\circ$  Neigung ausgebildet werden.

Die in Fig. 12 punktiert eingezeichneten Kurven geben den Wert des hydrostatischen Koeffizienten

$$k_k = \frac{[\sin \beta_1 + \sin \varphi \cos (2\alpha_1 + \beta_1 - \varphi)] [1 + \sin \varphi \sin (2\alpha_1 + 2\beta_1 - \varphi)]}{4 \sin \varphi \sin (\alpha_1 + \beta_1) \cos (\alpha_1 + \beta_1 - \varphi) \frac{d\alpha_1}{d\beta_1} + \cos^2 \varphi} \quad (34)$$

an, bezogen auf eine gekrümmte Gleitfläche für den Fall, daß für die Funktion  $a = f(\beta)$  eine über den Punkt B führende Parabel angenommen würde.

Die Berechnung wurde auf Grund der Formeln 28) und 29) durchgeführt.

Aus dem Vergleich der zusammengehörigen Kurven geht hervor, daß der durch die Kurve  $AB$  dargestellten gekrümmten Gleitfläche ein kleinerer Erddruck entspricht, als einer ebenen Gleitfläche, und man gelangt leicht zur Erkenntnis, daß mit abnehmendem Neigungswinkel  $\alpha_1$  der Endtangente der krummen Gleitfläche eine Zunahme des hydrostatischen Koeffizienten ( $k_k$ ) verbunden ist.

### e) Die Richtung des Erddruckes.

Durch eine Reihe von Versuchen — MÜLLER-BRESLAU (1906), TERZAGHI (1929) und andere — wurde unzweifelhaft bewiesen, daß der gemessene Wert des Erddruckes nur unwesentlich vom COULOMB'schen Wert (ebene Gleitfläche) abweicht, und nur der Richtungswinkel ein anderer war.

Man wird daher mit Berechtigung die Annahme machen können, daß die durch gekrümmte oder ebene Gleitflächen bedingten Erddruckwerte völlig übereinstimmen und sind, in welchem Falle

$$k_e = k_k \text{ ist, d. h.}$$

$$\begin{aligned} & [\sin \beta_1 + \sin \varphi \cos(2\alpha_1 + \beta_1 - \varphi)] [1 + \sin \varphi \sin(2\alpha_1 + 2\beta_1 - \varphi)] \\ & 4 \sin \varphi \sin(\alpha_1 + \beta_1) \cos(\alpha_1 + \beta_1 - \varphi) \frac{d\alpha_1}{d\beta_1} + \cos^2 \varphi \\ & = \frac{\sin \beta_1 (1 + \sin \varphi \cos 2\beta_1)}{1 + \sin \varphi} \end{aligned} \quad (35)$$

Wenn diese Bedingungsgleichung mit der die allgemeine Lösung darstellenden Differentialgleichung zweiter Ordnung (21) verbunden wird, so wird es klar, daß die unendlich große Zahl der Lösungen sich auf eine endliche Zahl, nämlich auf eine, eventuell zwei Lösungen reduziert.

Ein langwieriger Rechnungsvorgang (Substitutionen und Zusammenziehungen), den wir hier übergehen, führt zum Funktionszusammenhang  $\alpha_1 = f(\beta_1)$ , der in dem für die späteren Ausführungen und für die Praxis sehr wichtigen Sonderfall, daß es sich um eine lotrechte Wand handelt, d. h. daß  $\beta_1 = 90^\circ$  ist, in folgende Endform übergeht: 36)

$$\cos(2\alpha_1 - \varphi) \left\{ [1 - \sin \varphi \sin(2\alpha_1 - \varphi)]^2 \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) + 2[1 - \sin \varphi \sin(2\alpha_1 - \varphi)] - 3 \cos^2 \varphi \right\} = 0$$

Diese Gleichung besteht zu Recht, wenn  $1. \underline{2\alpha_1 - \varphi = 90^\circ}$ , d. h. wenn

$$\boxed{\alpha_1 = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}}$$

ist, somit für den Fall der allgemein bekannten COULOMB'schen Lösung für ebene Gleitfläche, und wenn  $2.$

$$\left[ 1 - \sin \varphi \sin(2\alpha_1 - \varphi) \right]^2 \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) + 2[1 - \sin \varphi \sin(2\alpha_1 - \varphi)] - 3 \cos^2 \varphi = 0$$

ist, woraus

$$\boxed{\sin(2\alpha_1 - \varphi) = \frac{2 - (1 - \sin \varphi) \sqrt{1 + 3(1 + \sin \varphi)^2}}{\sin \varphi (1 + \sin \varphi)}} \quad (37)$$

die Bestimmung der Endtangente ( $\angle \alpha_1$ ) der gekrümmten Gleitfläche und in der weiteren Folge die Ermittlung des Richtungswinkels des

Erddruckes gestattet, der im Falle  $\beta_1 = 90^\circ$ , gleich

$$\underline{\underline{\text{tg } \delta_1 = \frac{\sin \varphi \cos (2\alpha_1 - \varphi)}{1 - \sin \varphi \sin (2\alpha_1 - \varphi)}}} \quad 38)$$

ist.

So wird sich z. B. im Falle  $\varphi = 30^\circ$  aus den Gleichungen 37) und 38) ergeben:  $\underline{\underline{\alpha_1 = 42^\circ 15'}}$  und  $\underline{\underline{\delta_1 = 26^\circ 30'}}$ .

Dieser Wert des Neigungswinkels ist aber derselbe, den die Versuche stets übereinstimmend ergeben haben. Wie es in den angeführten Werken von MÜLLER-BRESLAU (8), KREY (13) und TERZAGHI (14) zu lesen ist, hat bei Versuchen mit lockarem Sand ( $\varphi = 30^\circ - 34^\circ$ ) der Richtungswinkel des gegen die lotrechte Wand wirkenden Erddruckes in jedem Falle  $\delta = 26^\circ - 27^\circ$  betragen.

Zusammenfassend lassen sich nun folgende grundlegende Sätze der Erddrucktheorie aufstellen: 1. Der Erddruck kann den gleichen Wert erreichen, gleichviel ob die Gleitfläche eine Ebene oder eine gekrümmte Fläche ist. 2. Der an einer senkrechten Wand auftretende Erddruck ist im Falle einer ebenen Gleitfläche waagerecht, wogegen bei gekrümmter Gleitfläche auch Reibung an der Mauerrückwand auftritt, in welchem Falle für die Größe des Richtungswinkels die Gleichungen 37) und 38) maßgebend sind. 3. Gemäß unserer Untersuchungen bezüglich dieses Richtungswinkels trifft bei jedem beliebigen Reibungswinkel ( $\varphi$ ) mit großer Genauigkeit das Verhältnis zu

$$\boxed{\delta = 0,9 \varphi} \quad 38a)$$

woraus die Normalkomponente des an der senkrechten Wand auftretenden Erddruckes

$$\boxed{N_1 = \frac{h^2 \gamma}{2} \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)}$$

seine Tangentialkomponente

$$\boxed{T_1 = N_1 \operatorname{tg} 0,9 \varphi}$$

und der resultierende Erddruck selbst gleich

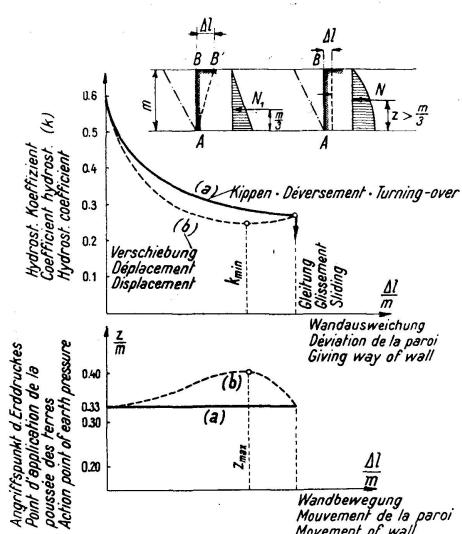
$$\boxed{E = \sqrt{N_1^2 + T_1^2}}$$

ist.

In diesem Falle verteilt sich der Erddruck über die Mauerrückstände hydrostatisch, d. h. der Erddruck greift im unteren Drittelpunkt der Wand an; es kann aber immerhin vorkommen, daß der Abstand des Angriffspunktes  $\frac{h}{3}$  überschreitet, was mit einer speziellen Bewegung der Wand zusammenhängt. Damit sind wir bei der Frage angelangt, welchen Einfluß auf die Größe und Richtung des Erddruckes eine etwaige Bewegung, Kippen oder Verschiebung der Mauer auszuüben vermag.

### III. Beeinflussung des Erddruckes durch eine Bewegung der Wand.

Mit dieser sehr wichtigen Frage des Erddruckproblems hat sich in der letzten Zeit Prof. K. v. TERZAGHI (26) befaßt und ist im Zuge seiner im Mass. Institute of Technology, Cambridge (Mass), im Jahre 1929 geführten Versuche zum Ergebnis gelangt, daß der Erddruck nach Größe, Richtung und Lage seines Angriffspunktes durch Bewegungen der Wand in bedeutendem Maß beeinflußt wird.



Jede starre und unbewegliche Wand wird von einem beträchtlichen ( $k = 0,4 - 0,5$ ), waagerecht wirkenden Erddruck angegriffen, der schon bei ganz geringen Bewegungen der Wand erhebliche Abnahme erfährt ( $k = 0,1 - 0,3$ ), wogegen der Richtungswinkel des Druckes infolge der auftretenden bedeutenden Wandreibung zunimmt.

Fig. 13.

Die idealen Zusammenhänge zwischen Erddruck usw. und Wandbewegung — Les relations parfaites entre la poussée des terres, etc. et le mouvement de la paroi de soutènement — Ideal relationship between earth pressure etc. and wall movement.

In der Wirklichkeit gibt es keine starren Wände, weil einerseits durch den an der Grundfläche der Wand auftretenden Kantendruck, sowie durch das Einsinken der Wand ein Kippen, andererseits durch mangelhafte Reibung zwischen Mauerfundament und Boden eine Verschiebung der Wand in waagerechter Richtung hervorgerufen wird. Dementsprechend werden bezüglich Bewegungen der Wand zwei Grundfälle unterschieden und zwar: a) Kippen der Wand um ihren Fußpunkt, und b) parallele Verschiebung der Wand. Die in der Natur vorkommenden Bewegungen setzen sich alle aus diesen Grundbewegungen zusammen.

Beide Bewegungsarten wurden im Zuge der erwähnten Versuche auf ihre Wirkung untersucht. Die hiebei gefundenen Ergebnisse lassen sich nach Fig. 13 zusammenfassen. Nach der Feststellung Prof. TERZAGHI's kann sich der Erddruck auf zweierlei Arten verteilen, nämlich: 1. hydrostatisch und 2. unhydrostatisch. Im erstenen Falle wird der Erddruck im unteren Drittpunkt dann auftreten, wenn die Wand um ihren Fußpunkt A kippt; die zweite Verteilungsart tritt bei paralleler Verschiebung der Wand ein, die Spannungsverteilung ist nicht linear und der Hebelarm des Erddruckes ist größer als  $\frac{h}{3}$ . In beiden

Fällen der Wandbewegung nimmt die Größe des Erddruckes rasch ab, immerhin tritt diese Abnahme des hydrostatischen Koeffizienten im Falle b) früher ein als im Falle a) und erreicht seinen Kleinstwert dort, wo der Angriffspunkt des Erddruckes am höchsten liegt (siehe Fig. 13).

Den Grund der mit einer parallelen Verschiebung der Wand einhergehenden unhydrostatischen Spannungsverteilung erblickt Prof. TERZAGHI

in der sog. Verspannung durch Silowirkung (26). Diese erklärt sich daraus, daß der senkrechte Druck, der auf den unteren Teil des durch die Wand gestützten Erdkeiles entfällt, infolge der durch die Verschiebung erzeugten Reibung abnimmt, demzufolge im oberen Teil

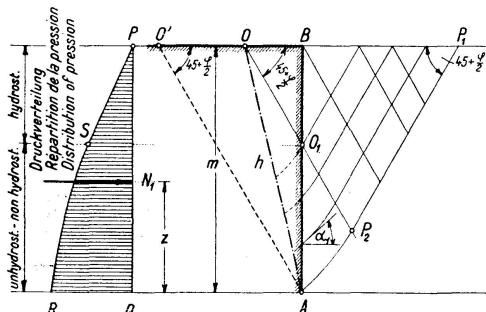


Fig. 14.

Druckverteilung des Erddruckes bei paralleler Wandverschiebung — Répartition de la poussée des terres lors d'un déplacement de la paroi de soutènement — Distribution of earth pressure assuming parallel displacement of the wall.

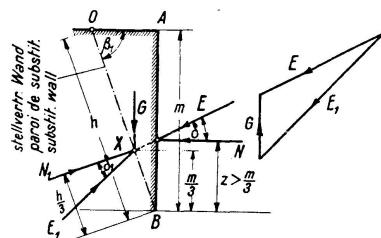


Fig. 15.

Graphische Lösung mittels d. stellvertr. Wand — Solution graphique à l'aide de la paroi de substitution — Graphical solution by means of substituted wal!.

der COULOMB'sche Erddruck, im unteren Teil ein verminderter Erddruck auftritt, der auf die ganze Wandfläche gerichtete Erddruck bleibt unverändert, sein Angriffspunkt hebt sich über den Drittelpunkt.

An Stelle dieser an sich logischen und wahrscheinlichen Erklärung der Verspannung durch Silowirkung, die aber der Berechnung unzugänglich ist, wie auch für ihren Einfluß auf die Höhenlage des Angriffspunktes gibt der Verfasser nachstehend eine wesentlich einfachere und mathematisch belegte Erklärung.

a) Im Sinne der hydrostatischen Spannungsverteilung sind die Spannungen proportional der von der oberen Kante der Wand gemessenen Entfernung  $h$ . Diese Bedingung wurde bereits am Anfang gestellt, als der Pol  $O$  an der oberen Kante der Wand angenommen wurde (siehe Fig. 7) und alle bisher erzielten Ergebnisse haben nur für den Fall Gültigkeit, als der Pol bei  $O$  liegt.

Im Sinne der Bedingungsgleichung 10) sind im Punkt  $O$  sämtliche Spannungen gleich Null. Nachdem dies aber für alle Punkte der unbelasteten Bodenoberfläche zutrifft, kann der Pol  $O$  nicht nur am oberen Ende der Wand, sondern auch vor der Wand an beliebiger Stelle der Oberfläche angenommen werden, d.h. er kann auch exzentrisch sein.

b) Angenommen sei ein Pol  $O$  nach Fig. 14 an der ebenen Oberfläche des durch die Wand  $AB$  gestützten Erdkörpers vor dem Punkt  $B$ , also exzentrisch liegend. Der aus diesem  $O$ -Punkt ausgehende beliebige Radius wird von den Gleitflächen unter den gleichen Winkeln geschnitten, folglich hat man es längs der Linie  $OA$  mit hydrostatischer Spannungsverteilung zu tun. An der Rückwand der Stützmauer  $AB$  findet man indessen nur im Abschnitt  $OB$  hydrostatische Spannungsverteilung — bis hier-

her reichen die ebenen Gleitflächen — wogegen im Abschnitt  $OA$  unhydrostatische Spannungsverteilung herrscht, weil die Gleitflächen unter verschiedenem Winkel ( $\alpha_1$ ) die Mauerrückwand durchqueren und daher die Spannung  $n_1$  nicht mehr proportional der Entfernung  $h$  sein wird, und die Spannungsfigur gekrümmte Form annimmt, womit der Angriffspunkt  $z$  höher als  $\frac{h}{3}$  liegen wird.

Mit der Bewegung des Poles  $O$  ist eine dauernde Änderung der Spannungsfigur und damit auch der Höhe des Angriffspunktes  $z$  verbunden. Verlegt man den Pol nach  $B$  oder  $O'$  (siehe Fig. 14), dann wird  $z = \frac{m}{3}$ , weil im ersten Falle  $BA$  eine Isokline ist — jede Gleitfläche durchschneidet  $AB$  unter dem gleichen Winkel — dagegen sind die Gleitflächen im zweiten Falle nur Ebenen, d. h. es herrscht wieder hydrostatische Spannungsverteilung.

Die Bewegungen des Poles  $O$  sind durch die Wandverschiebungen bedingt. Je stärker die Wandverschiebung, desto weiter entfernt sich der Pol von  $B$ ; falls der Punkt  $O$  mit  $O'$  zusammenfällt, so sinkt der Hebelarm des Erddruckes auf das Minimum.

Der an einer Stützwand mit exzentrischem Pol auftretende Erddruck kann einfach bestimmt werden, indem man zuerst den auf die Ersatzwand  $BO$  entfallenden, unter  $\angle \delta_1$  neigenden hydrostatischen Erddruck  $E_1$  bestimmt, von welchem nachher das Gewicht  $G$  des Prismas  $OAB$  vektorial abgezogen wird. Die Höhe des Angriffspunktes des solcherart erhaltenen resultierenden Erddruckes  $E$  wird  $z > \frac{m}{3}$  sein (siehe Fig. 15).

Zur vollkommenen Lösung des Problems gelangt man, wenn man 1. die Normalkomponente von  $E$  ( $N$ ), 2. den Richtungswinkel des Erddruckes ( $\delta$ ) und schließlich 3. den Hebelarm ( $z$ ) des Erddruckes bestimmt.

Aus dem Gleichgewicht der am Prisma  $OAB$  angreifenden Kräfte können die Kräfte  $N$  und  $T$  angeschrieben werden zu

$$N = N_1 \frac{\sin(\beta_1 - \delta_1)}{\cos \delta_1} \quad 39$$

$$T = N_1 \frac{\cos(\beta_1 - \delta_1)}{\cos \delta_1} - G \quad 39\text{a})$$

Der Richtungswinkel des Erddruckes ist gleich

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{T}{N} = \frac{N_1 \cos(\beta_1 - \delta_1) - G \cos \delta_1}{N_1 \sin(\beta_1 - \delta_1)} \quad 40)$$

Die Momentengleichung bezüglich Pol  $X$  ergibt

$$z = \frac{N_1 - G \cos \beta_1}{N \sin \beta_1} \cdot \frac{m}{3} \quad 41)$$

In den angeschriebenen Formeln haben wir es eigentlich mit zwei Unbekannten zu tun, und zwar mit dem Richtungswinkel  $\delta_1$  des

stellvertretenden Erddruckes  $E_1$  sowie mit dem Neigungswinkel  $\beta_1$  der Ersatzwand, die eigentlich für die Exzentrizität des Polpunktes, d.h. für die Stützwandverschiebung kennzeichnend sind.

Das Problem des Erddruckes besitzt — unter dem Einfluß der Wandbewegung — im wesentlichen zweifach unendlich viele Lösungen, es wird daher zu einem zweifach unbestimmten Problem. Wendet man aber die aus den Versuchen gewonnenen Sätze an, so wird die Lösung eine eindeutig bestimmte sein. Nach einem dieser Sätze, den wir bei dem hydrostatischen Druck bereits angewendet haben, ist der Erddruck sowohl bei gekrümmter als auch bei ebener Gleitfläche der gleiche und der Winkel  $\delta_1$  ändert sich beim Kippen der Wand aus der Lage  $AB$  in die Grenzlage  $AO'$  nur zwischen sehr engen Grenzen  $\delta = 0,9 \varphi - \varphi$ , so daß man mit sehr guter Annäherung

$$\boxed{\delta_1 = \varphi} \quad 42)$$

annehmen darf.

Die Normalkomponente des gegen die stellvertretende Wand wirkenden Erddruckes beträgt laut Gl. 32)

$$N_1 = \frac{h^2 \gamma}{2} \frac{\sin \beta_1}{1 + \sin \varphi} [1 + \sin \varphi \cos 2\beta_1]$$

wonach sich die Formeln 39) — 41) zu den einfachen Ausdrücken

$$\boxed{N = \frac{m^2 \gamma}{2} \frac{(1 + \sin \varphi \cos 2\beta_1) \sin (\beta_1 - \varphi)}{\sin \beta_1 \cos \varphi (1 + \sin \varphi)}} \quad 43)$$

$$\boxed{\tg \delta = \cotg (\beta_1 - \varphi) - \frac{\cos \beta_1 \cos \varphi (1 + \sin \varphi)}{(1 + \sin \varphi \cos 2\beta_1) \sin (\beta_1 - \varphi)}} \quad 44)$$

und

$$\boxed{z = \frac{m}{3} \cos \varphi \frac{(1 - \sin \varphi) \sin \beta_1}{\sin (\beta_1 - \varphi) (1 + \sin \varphi \cos 2\beta_1)}} \quad 45)$$

zusammenziehen lassen.

Sehr interessant und deshalb beachtenswert ist auch, daß diese Lösung durch ein gleichbleibendes Drehmoment des Erddruckes gekennzeichnet ist. Schreiben wir das Moment  $Nz$  auf, so wird

$$M = Nz = \frac{m^3 \gamma}{6} \tg^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = \text{konstant} \quad 46)$$

und bedeutet, daß das Drehmoment des Erddruckes an der Wand konstant ist und wenn der Hebelarm  $z$  durch die Verschiebung der Wand eine Zunahme erfährt, so nimmt der Erddruck in gleichem Verhältnis  $a:b$ , das Produkt der beiden Werte  $M = Nz$  bleibt unverändert.

Nicht weniger interessant ist es, daß dieses Moment, obwohl durch die parallele Verschiebung der Wand erzeugt, sich doch nicht von jenem Moment

unterscheidet, das durch ein Kippen der Wand um ihren Fußpunkt hervorgerufen wird, denn es gilt für diesen Fall:

$$N = \frac{m^2 \gamma}{2} \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

und der Angriffspunkt des Erddruckes liegt zufolge der hydrostatischen Verteilung bei  $z = \frac{m}{3}$ , so daß tatsächlich

$$M = \frac{m^3 \gamma}{6} \operatorname{tg}^2 \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right) \text{ ist.}$$

Es wäre verfehlt, aus dieser Verwandtschaft der beiden Fälle darauf zu schließen, daß es sich auch um ähnliche statische Verhältnisse handelt. Hinsichtlich der Stabilität sind die beiden Fälle wirklich gleich, aber schon die in der Wand auftretenden Spannungen sind verschieden, was durch ein späteres Zahlenbeispiel näher erklärt werden wird.

Zurückgekehrt zur Formelgruppe 43)—45), stehen wir noch immer einer einfach unendlichen Zahl der Lösungen gegenüber, da doch Größe, Richtung und Angriffspunkt des Erddruckes in funktionaler Beziehung zur Wandbewegung, oder unserer früheren Formulierung entsprechend zum Winkel  $\beta_1$  steht, welch letzterer für die exzentrische Lage des Poles  $O$  maßgebend ist. Gemäß den Versuchen des M. I. T. (26) tritt der maßgebende Erddruck bei höchster Lage des Angriffspunktes ( $z_{max}$ ) auf, somit wird jener Winkel  $\beta'_1$  entscheidend sein, für welchen

$$\frac{dz}{d\beta_1} = 0 \quad 47)$$

ist.

Aus Gleichung 45) läßt sich nach Durchführung der Rechnung für den gesuchten Winkel  $\beta'_1$  der Zusammenhang

$$\sin 2\beta'_1 \operatorname{tg} \left( 45 - \frac{\varphi}{2} + \beta'_1 \right) = -1 \quad 48)$$

anschreiben, aus welchem hervorgeht, daß jedem einzelnen Reibungswinkel  $\varphi$  ein spezieller Winkel  $\beta'_1$  angehört, deren Werte in folgender Tabelle zusammengestellt sind.

Tabelle III — Table III.

$\varphi^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$
$\beta'_1$	$75^\circ 45'$	$77^\circ 40'$	$79^\circ 40'$	$81^\circ 30'$	$83^\circ 10'$	$85^\circ 0'$

Etwaige Zwischenwerte sind durch lineare Interpolation zu ermitteln. Durch Einführung in die Formeln 43)—45) dieser  $\beta'_1$ -Werte läßt sich der Erddruck nach Größe ( $N$ ), Richtung ( $\delta$ ) und Angriffspunkthöhe ( $z$ ) eindeutig bestimmen.

Eine Versuchsreihe der M. I. T. (14) ergab für dicht gelagerten Sand einen Reibungswinkel  $\varphi = 58^\circ$  und der gemessene Richtungswinkel

des Erddruckes bei paralleler Verschiebung der Wand betrug  $\delta = 35^\circ 40'$ .

Aus der Gleichung 47) ergibt sich für  $\varphi = 58^\circ$ :  $\beta_1' = 84^\circ 30'$  und demgemäß wird laut Gleichung 44)  $\operatorname{tg} \delta = 0,751$ , d. h.  $\delta = 37^\circ 0'$  sein, was mit dem Versuchsergebnis sehr gute Übereinstimmung zeigt und somit die Richtigkeit der theoretischen Folgerungen bestätigt.

In der Fig. 16 wird der Einfluß der parallelen Verschiebung der Wand im Falle  $\varphi = 30^\circ$  veranschaulicht.

Die volle Linie bezeichnet den hydrostatischen Koeffizienten der Normalkomponente  $N$ . Der Tiefpunkt der trogförmigen Kurve bei  $\beta_1' = 80^\circ$  entspricht der höchsten Lage des Angriffspunktes. Der hydrostatische Koeffizient des Erddruckes sinkt vom COULOMB'schen Wert ( $k_c = 0,333$ ) auf  $k_p = 0,318$  herab.

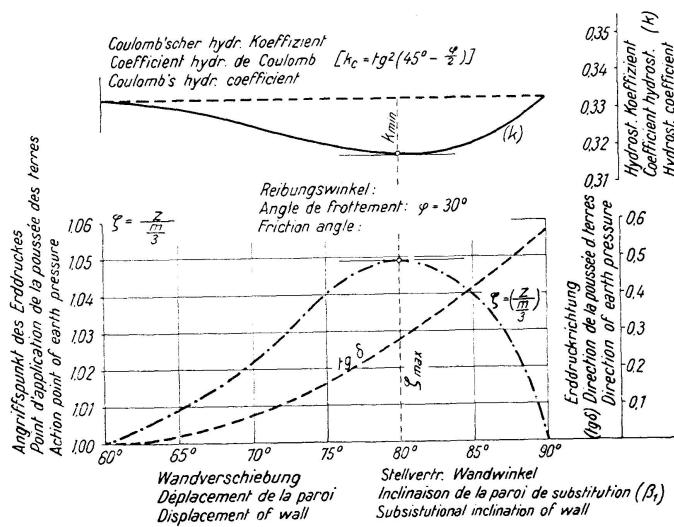
Die strichpunktierte Kurve gibt die Änderungen der Höhe des Angriffspunktes ( $z$ ) an, die gestrichelte Kurve jene des Richtungswinkels  $\delta$

Fig. 16.  
Theoretische Zusammenhänge zwischen Wandverschiebung und Erddruckbeiwerte — Relations théoriques entre le déplacement de la paroi et les coefficients de la poussée des terres — Theoretical relations between wall displacement and earth pressure coefficients.

des Erddruckes. Nach dem größten Ordinatenwert der  $\zeta = \frac{z}{\left(\frac{m}{3}\right)}$ -Kurve ist der Angriffspunkt im Vergleich zu  $\frac{m}{3}$  um 5 % höher gerückt, wo doch diese Lageveränderung nach den Versuchen (14) etwa 15—20 % betragen hat. Dieser Unterschied erklärt sich einfach daraus, daß der Angriffspunkt auf starre, d. h. unbewegliche Wand entfallenden sogenannten natürlichen Erddruckes  $k_0$  überhaupt höher als  $\frac{m}{3}$  liegt. Dies geht auch aus den Versuchen (14) hervor (siehe Figur 489) und wird noch in einem späteren Artikel des Verfassers mathematisch bewiesen. Dies vor Augen haltend, ist die 5 prozentige Zunahme von  $z$  mit dem anfänglichen  $z_0$  zu vergleichen.

Zur Erleichterung der Berechnungen wurden für den praktischen Gebrauch die unter 43)—45) angeführten Formeln nach Substitution der maßgebenden Werte  $\beta_1'$  für die Fälle  $\varphi + 0 — 60^\circ$  ausgerechnet und die erhaltenen Ergebnisse in Fig. 17 graphisch dargestellt. Mit Hilfe dieser Schaubilder läßt sich Größe ( $k_p$ ), Richtung ( $\operatorname{tg} \delta$ ) und Angriffspunkt ( $z$ ) des Erddruckes durch einfache Ablösung des dem fraglichen Winkel  $\varphi$  angehörenden Ordinatenwertes bestimmen.

Als Zusammenfassung und gleichzeitige Erläuterung unserer Ausführungen diene nachstehendes Zahlenbeispiel. Es ist zu bestimmen der an der



10,0 m hohen Wand nach Fig. 18 wirkende Erddruck. Bei der Lösung der Aufgabe müssen zwei voneinander völlig unabhängige Fälle unterschieden werden, nämlich:

a) Falls es sich um nachgiebigen Untergrund handelt und wenn zwischen der Mauersohle und dem Boden eine starke Reibung vorhanden ist, so kann keine parallele Verschiebung der Wand eintreten, sie wird sich hingegen um ihren Fußpunkt (1) nach vorne neigen, nachdem bei Punkt (2) infolge der erheblichen Bodenpressung eine Senkung der Mauer eintritt. In diesem Falle ist bei der Bemessung der Wand auf die hydrostatische Spannungsverteilung Rücksicht zu nehmen.

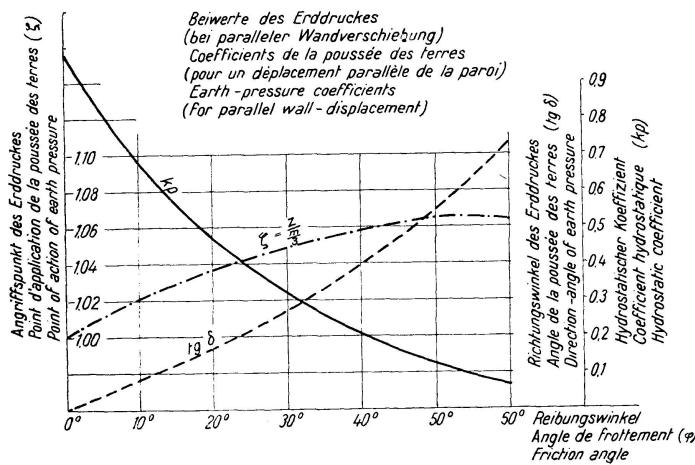


Fig. 17.

Im Falle:  
 $\varphi = 30^\circ; \gamma = 1,6 \text{ t/m}^3, m = 10,0 \text{ m}$   
wird

$$N = \frac{m^2 \gamma}{2} \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = 26,6 \text{ t}$$

der Richtungswinkel des Erddruckes:  $\delta = 0,9 \varphi = 27^\circ$  (Gl. 38 a),  
die Tangentialkomponente:  $T = N \operatorname{tg} \delta = 13,6 \text{ t}$ ,  
der resultierende Erddruck:  $E = \sqrt{T^2 + N^2} = 29,9 \text{ t}$ ,  
und die Höhenlage des Angriffspunktes:  $z = \frac{m}{3} = 3,33 \text{ m}$ .

Bei den in Fig. 18 angegebenen Wandabmessungen wird die Resultierende  $R_a$  der Kräfte  $E$  und  $G$  über den in  $\xi = 2,26 \text{ m}$  entfernten Drittelpunkt verlaufen.

Im Punkt (2) ist die Höchstspannung

$$\sigma_2^a = \frac{2V}{F} = \frac{2 \cdot 71,2 \text{ t}}{3,40 \cdot 1,0} = 4,23 \text{ kg/cm}^2$$

im Fußpunkt (1) ist  $\underline{\sigma_1 = 0}$ .

b) Wenn der Untergrund widerstandsfähig genug ist bzw. wenn sich die Bodenpressungen so verteilen, daß die großen Kantendrücke entfallen und kein einseitiges

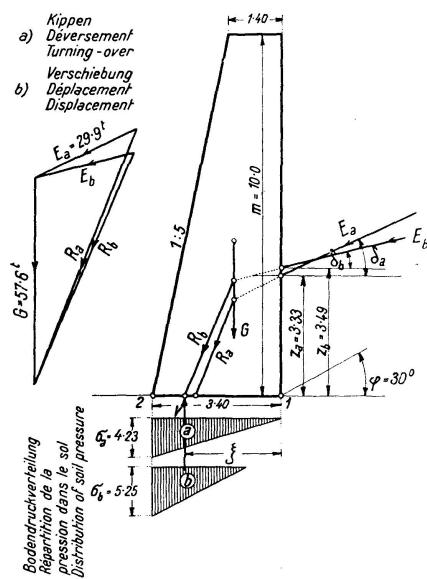


Fig. 18.  
Numerisches Beispiel.  
Exemple numérique.  
Numerical example.

Einsinken der Wand eintritt, die Reibung hingegen zwischen Boden und Wandsohle gering ist (z. B. zwischen Beton und Ton), so wird eine parallele Verschiebung der Wand eintreten. In diesem Falle ist die Spannungsverteilung eine unhydrostatische und die den Erddruck kennzeichnenden Werte lassen sich aus den Schaubildern der Fig. 17 entnehmen.

Die vorigen Wandabmessungen beibehaltend, erhalten wir für die Normalkomponente:

$$N = \frac{m^2 \gamma}{2} k_p = 0,318 \frac{m^2 \gamma}{2} = 25,4 \text{ t}$$

für den Richtungswinkel des Erddruckes —  $\operatorname{tg} \delta = 0,27$  an der Kurve abgelesen —  $\delta = 15^\circ 10'$ , d. h. der Druck greift unter bedeutend kleinerem Winkel als im Falle a) an.

Die Tangentialkomponente ist:  $T = N \operatorname{tg} \delta = 6,85 \text{ t}$

der resultierende Erddruck:  $E = \sqrt{T^2 + N^2} = 26,4 \text{ t}$

und schließlich der Angriffspunkt des Erddruckes  $z = \xi \frac{m}{3} = 1,05 \times 3,33 = 3,49 \text{ m}$ .

Die Resultierende  $R_b$  schneidet das Fundament in einem Abstand von  $\xi = 2,53 \text{ m}$  und tritt aus dem Kerndrittel heraus, folglich entsteht im Punkte (1) Zugspannung. Wird diese vernachlässigt, bzw. wird nur mit Druck gerechnet, so erhält man als Bodenpressung für den Punkt (2)

$$\sigma_2^b = 5,25 \text{ kg/cm}^2.$$

Daß der unter b) behandelte Fall der gefährlichere ist, geht aus der Rechnung hervor, denn der Zusammenhang  $\sigma_2^b = 1,25 \sigma_2^a$  sagt nicht weniger, als daß die parallele Verschiebung der Wand um 25% höhere Mauerbeanspruchungen erzeugt, als es bei der Drehung der Fall war. Die Ergebnisse des Zahlenbeispiels wurden der besseren Übersicht halber in der Tabelle IV zusammengestellt.

Tabelle IV — Table IV.

Angaben — Data:  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\gamma_{\text{Sand}} = 1,6 \text{ t/m}^3$ ,  $\gamma_{\text{Stein}} = 2,4 \text{ t/m}^3$ ,  $m = 10,0 \text{ m}$

Rechnungsvorgang Mode of Calculation	$N$	$T$	$E$	$\delta$	$z$	$\Sigma M$	$V$	$\xi$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
	t			°	m	tm	t	m	kg/cm²	
a) Hydrostatische Spannungsverteilung Hydrostatic Stress distribution	26,6	13,6	29,9	27°	3,33	163,2	71,2	2,26	0	4,23
b) Unhydrostatische Spannungsverteilung Nonhydrostatic Stress distribution	25,4	6,85	26,4	14° 30'	3,49	163,2	64,5	2,53	0	5,25

### Literatur.

1. VAUBAN: *Traité de la Défense des Places*. 1687.
2. PONCELET: *Mémoire sur la Stabilité des Revêtements et de leur Fondations*. 1840.
3. COULOMB: *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'Architecture*. 1773.
4. E. WINKLER: *Neue Theorie des Erddruckes nebst einer Geschichte der Theorie des Erddruckes und der hierüber angestellten Versuche*. Wien, 1872.
5. C. CULMANN: *Die graphische Statik*. Zürich, 1866.
6. G. REBHANN: *Theorie des Erddruckes und der Futtermauern mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen*. Wien, 1871.
7. M. MÖLLER: *Erddrucktabellen*. Leipzig, 1902.
8. H. MÜLLER-BRESLAU: *Erddruck auf Stützmauern*. Stuttgart, 1906.
9. ifj. SZILY KÁLMÁN: *Adalékok a földnyomás elméletéhez*. (Beiträge zur Erddrucktheorie. Magyar Mérnök és Építész Egylet Közlönye, 1912 és 1913.)
10. SZILY KÁLMÁN: *Földnyomás és kohézió*. (Erddruck und Kohäsion.) Budapest, 1928.
11. RANKINE: *On the stability of loose earth*. Phil. Trans. London, 1857.
12. J. FELD: *Lateral Earth Pressure*. American Soc. of C.E. Transactions. Paper No. 1529.
13. H. KREY: *Erddruck, Erdwiderstand und Tragfähigkeit des Baugrundes*. Berlin, 1932. Vierte Auflage.
14. K. v. TERZAGHI: *Festigkeitseigenschaften d. Schüttungen, Sedimente und Gele*. Handbuch d. physik. u. techn. Mechanik. IV. Bd. 2. Teil.
15. L. PRANDTL: *Zur Härte plastischer Körper*. Z. ang. Math., 1921.
16. W. FELLENIUS: *Erdstatische Berechnungen mit Reibung u. Kohäsion und unter Annahme kreiszylindrischer Gleitfläche*. Berlin, 1927.
17. CH. TERZAGHI: *The Mechanics of Shear Failures on Clay Slopes and the Creep of Retaining Walls*. Public Roads. Vol. 10. No. 10.
18. F. KÖTTER: *Die Bestimmung des Druckes an gekrümmten Gleitflächen*. Berliner Akad. Bericht. 1903.
19. M. RITTER: *Grenzzustände des Gleichgewichtes in Erd- und Schüttmassen*. Vortrag des II. Kongreß d. Intern. Vereinigung für Brückenbau u. Hochbau. 1936.
20. H. REISSNER: *Zum Erddruckproblem*. Proceedings of the 1st Intern. Congress for Applied Mechanics. Delft, 1924.
21. TH. v. KÁRMÁN: *Über elastische Grenzzustände*. Proceedings of the 2nd Intern. Congress für Applied Mechanics. Zürich, 1926.
22. J. JÁKY: *The Classical Earth — Pressure Theory*. Proceedings of the 4th Intern. Congress for Applied Mechanics. Cambridge, 1934.
23. J. JÁKY: *A klasszikus földnyomáselmélet*. (Die klassische Erddrucktheorie.) Vízügyi Közlemények. Budapest, 1935.
24. J. BOUSSINESQ: *Applications des potentiels*. Paris, 1885.
25. A. CAQUOT: *Équilibre des massifs à frottement interne*. Paris, 1934.
26. K. v. TERZAGHI: *A Fundamental Fallacy in Earth Pressure Computations*. Journal of the Boston Society of C. E. April, 1936.

### Zusammenfassung.

Die gekrümmte Gleitfläche bildet die einzige richtige Lösung der Erddrucktheorie, weil sich die Bedingungen des Gleichgewichtes der Kräfte nur in diesem Falle restlos erfüllen lassen. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung (21) ist als Grundgleichung jedes Erddruckproblems (Stützwand, Silo, Gründung) anzusprechen. Bei der Bewegung der Wand sind zwei Grundfälle zu unterscheiden, nämlich Drehung und parallele Verschiebung. Von den zweifach unendlich vielen Lösungsmöglichkeiten wird die maßgebende einzige Lösung durch Annahmen bestimmt, die sich aus Beobachtungen bei den Versuchen ergeben haben. Entscheidend für die eintrtende Wandbewegung, ob a) Drehung oder b) parallele Verschiebung, sind die Reibungsverhältnisse und die Art der Verteilung der Bodenpressungen, gemäß welchen die Wand für den Fall a) oder b) zu bemessen ist. Im allgemeinen ist der letztere Fall der gefährlichere, weshalb die Wand zweckmäßig diesem entsprechend

zu bemessen ist. Die hierbei in Betracht kommenden kennzeichnenden Werte des Erddruckes lassen sich mit Hilfe der Kurven der Fig. 17 durch ganz einfache Berechnungen bestimmen.

### Résumé.

La surface de cession incurvée est la seule solution exacte de la théorie de la poussée des terres car ce n'est que dans ce cas que les conditions d'équilibre des forces sont entièrement satisfaites. L'équation différentielle de 2<sup>e</sup> ordre (21) est à considérer comme l'équation fondamentale de tout problème de poussée des terres (murs de soutènement, silos, fondations). Dans le mouvement de la paroi de soutènement il y a deux cas fondamentaux à distinguer: la rotation et la translation. Des deux infinités de solutions possibles la seule solution exacte est celle que l'on peut tirer de l'observation des essais. Les conditions de frottement et le type de répartition de la poussée déterminent s'il y a a) rotation ou b) translation. On partira de là pour le calcul suivant a) ou b). En général le dernier cas est le plus dangereux c'est pourquoi il est bon de dimensionner le mur pour ce cas. Les caractéristiques de la poussée des terres qui entrent en ligne de compte peuvent être déterminées par un calcul très simple à l'aide des courbes de la fig. 17.

### Summary.

The assumption of a curved slip surface is the only one compatible with a correct solution of the earth-pressure theory since no other will completely satisfy the conditions for equilibrium of the forces involved. The differential equation of the second order (21) is to be regarded as the fundamental equation for every problem of earth pressures (retaining walls, silos and foundations). In regard to the movement of the wall a distinction must be drawn between two basic conditions — rotation, and parallel displacement — and there are, therefore, two infinite numbers of possible solutions, the only valid solution being that determined in accordance with the assumptions which resulted out of experiments. The criterion as between the two types of wall movement, a) rotation and b) parallel displacement, is supplied by the condition of friction and the manner of distribution of pressure over the ground, and the walls must be designed to suit case a) or b) accordingly. As a rule the latter case is the more dangerous and is, therefore, the one for which the wall should be designed. The appropriate values for the earth pressure to be considered may be determined by simple calculations from the curves in Fig. 17.