

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 5 (1937-1938)

**Artikel:** Tabellen zur Berücksichtigung der Normalkräfte und einer Temperaturänderung bei Bogenkonstruktionen  
**Autor:** Enyedi, B.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-6153>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## TABELLEN

### ZUR BERÜCKSICHTIGUNG DER NORMALKRÄFTE UND EINER TEMPERATURÄNDERUNG BEI BOGENKONSTRUKTIONEN.

TABLEAUX PERMETTANT DE TENIR COMPTE DES EFFORTS  
NORMAUX ET DES VARIATIONS DE TEMPÉRATURE DANS LE  
CALCUL DES OUVRAGES EN ARC.

TABLES FOR THE INTRODUCTION OF NORMAL LOADS AND  
TEMPERATURE VARIATIONS INTO THE CALCULATION OF  
ARCHED STRUCTURES.

Dr. B. ENYEDI, Ingenieur, Budapest.

Im dritten Band der Abhandlungen, Seiten 68—86, wurden Tabellen für die Einflußlinien der Reaktionen und der Querschnittsmomente, ferner für die Grenzmomente der eingespannten Bogenkonstruktionen bzw. der Zweigelenkbogen veröffentlicht<sup>1)</sup> unter der Voraussetzung, daß die Bogenaxe mit einer Stützlinie zusammenfällt und daß die Querschnittsänderung den praktischen Bedürfnissen entspricht.

Da die Wirkung der Normalkräfte und der Temperaturänderung auch in Betracht zu ziehen sind, werden diese Einflüsse im Folgenden in die Berechnung einbezogen und tabellarisch zusammengestellt.

#### I. Normalkräfte.

Die Normalkräfte werden als die Resultierende der vertikalen Querkraft und der Horizontalkraft gebildet. Wenn also die Wirkung der Normalkräfte berücksichtigt wird, d. h. die Zusatzmomente, die durch die Normalkräfte hervorgerufen werden, ebenfalls in Betracht gezogen werden, dann ist es am richtigsten, die Wirkung der vertikalen und horizontalen Komponenten der Normalkräfte nacheinander zu bestimmen.

Die vertikale Komponente der Normalkräfte kann außer Acht gelassen werden, da durch diese Kräfte nur die Bogenhöhe ( $f$ ) unwesentlich verkürzt, sonst aber keine Änderung hervorgerufen wird.

Durch die horizontale Komponente der Normalkräfte, d. h. durch die Horizontalkraft ( $H$ ), die bei einer gewissen Belastung auf der ganzen Länge des Bogens konstant ist, müßte die Spannweite  $l$  und  $\delta$  verkürzt werden. (Fig. 1 und 2). Die Verkürzung des Bogens kann sich aber infolge der Auflagerung nicht vollziehen, der Endpunkt  $B'$  muß daher in die ursprüngliche Lage  $B$  zurückgeführt werden. Durch die Wirkung der Horizontalkraft werden also Reaktionen und innere Kräfte hervorgerufen, als ob die Spannweite um  $\delta$  verlängert würde.

<sup>1)</sup> Siehe auch: Dr. B. ENYEDI: Tableaux pour la solution des constructions en arc à deux articulations, Le Constructeur de Ciment Armé, 1933—4, Paris.

Dr. B. ENYEDI: Tableaux pour la solution des constructions en arc encastré, Science et Industrie, Travaux 1936, Paris.

Um die Zusatzkräfte, die infolge der Normalkräfte auftreten, bestimmen zu können, muß daher zuerst die Verkürzung der Spannweite festgestellt werden.

Es wird kein wesentlicher Fehler begangen, wenn vorausgesetzt wird, daß die Verkürzung der Spannweite  $l$  gleich der Verkürzung eines durch die Längskraft  $H$  belasteten geraden Stabes ist, dessen Querschnitt sich nach demselben Gesetze ändert wie die Querschnitte des Bogens. Durch diese Voraussetzung wird die wirkliche Längenänderung gar nicht betroffen, weil die Kraft und der Querschnitt, die die Verlängerungen und Verkürzungen bestimmen, nicht geändert worden sind. Es wurde eigentlich nur die krumme Bogenaxe in eine gerade Stabaxe umgewandelt, wodurch aber schon deshalb keine wesentliche Änderung hervorgerufen wurde, weil diese Voraussetzung nur zur Feststellung der Verkürzung  $\delta$  verwendet wird.

Der eingespannte Bogen. Die Querschnitte des eingespannten Bogens ändern sich nach dem folgenden Gesetze:

$$J_x \cos \varphi_x = [1 + 8(k-1)\xi^3]J_0 \quad 1)$$

wo

$$k = \frac{J_{10}}{J_0} \cos \varphi_{10} \quad 2)$$

was übrigens in der oben erwähnten Abhandlung (Seite 71) veröffentlicht wurde. Diese Formel wurde auf Grund der Voraussetzung abgeleitet, laut welcher im allgemeinen die Querschnittshöhe vom Scheitel bis zu den Kämpfern ziemlich gleichmäßig ändert (Fig. 3):

$$(h_{10} - h_0) : (h_x - h_0) = \frac{l}{2} : x$$

$$\text{Daher: } h_x = h_0 + 2 \frac{h_{10} - h_0}{l} x = \frac{h_0(l - 2x) + 2h_{10}x}{l} \quad 3)$$

Es ist klar, daß kein erwähnenswerter Fehler begangen wird, wenn an Stelle der Formel 2 angenommen wird, daß  $J_{10} = kJ_0$  sei. Mit Rücksicht darauf, daß

$$h_0 = \sqrt[3]{J_0} \quad \text{und} \quad h_{10} = \sqrt[3]{J_{10}} = \sqrt[3]{kJ_0} = h_0 \sqrt[3]{k}$$

wird aus der Gleichung (3):

$$h_x = \frac{2h_0}{l} \left[ \frac{l}{2} + x(\sqrt[3]{k} - 1) \right]$$

wodurch die Änderung der Querschnittshöhen zum Ausdruck gebracht wurde.

Die Längenänderung des geraden Stabes mit veränderlichem Querschnitt hat den Wert:

$$\delta = \int \frac{H dx}{F_x E}$$

wo  $F_x$  die Querschnittsfläche,  $E$  den Elastizitätsmodul,  $H$  die Längskraft und  $dx$  die Länge bedeutet, für welche die Querschnittsfläche  $F_x$  ist. Die Summation muß sich selbstredend auf die ganze Länge des Bogens erstrecken; es wird daher nur die Hälfte des Bogens in Betracht gezogen, und das Resultat wird verdoppelt. Wenn die Querschnittsbreite  $b$  ist, dann wird:

$$F_x = b h_x = \frac{2b h_0}{l} \left[ \frac{l}{2} + x(\sqrt[3]{k} - 1) \right] = b h_0 \left[ 1 + \frac{2x}{l}(\sqrt[3]{k} - 1) \right]$$

und dementsprechend:

$$\delta = 2 \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{H dx}{E b h_0} \frac{1}{1 + \frac{2x}{l} \left( \sqrt[3]{k} - 1 \right)} = \frac{2H}{E b h_0} \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{dx}{1 + \frac{2x}{l} \left( \sqrt[3]{k} - 1 \right)} =$$

$$= \frac{Hl}{E b h_0} \frac{1}{\sqrt[3]{k} - 1} \log \text{nat} \left[ 1 + \frac{2x}{l} \left( \sqrt[3]{k} - 1 \right) \right]_0^{\frac{1}{2}l} = \frac{Hl}{E b h_0} \frac{2,302585}{\sqrt[3]{k} - 1} \log \sqrt[3]{k}$$

Vorausgesetzt, daß

$$\frac{2,302585}{\sqrt[3]{k} - 1} \log \sqrt[3]{k} = d,$$

ist die Längenänderung der Spannweite:

$$\delta = \frac{Hl}{Eb h_o} d = \frac{Hl}{EF_o} d \quad 4)$$

wo  $F_0$  die Querschnittsfläche im Scheitel bedeutet. Es folgt aus Gleichung (4), daß die Längenänderung von der Bogenaxe, d. h. von den  $\gamma$ -Werten unabhängig ist, von der Änderung der Querschnittsänderungen, von den  $k$ -Werten, aber nicht.

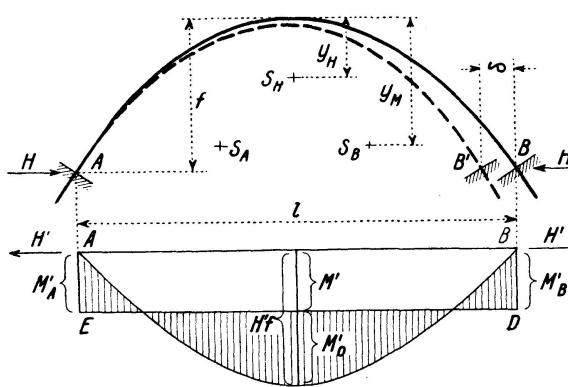


Fig. 1.

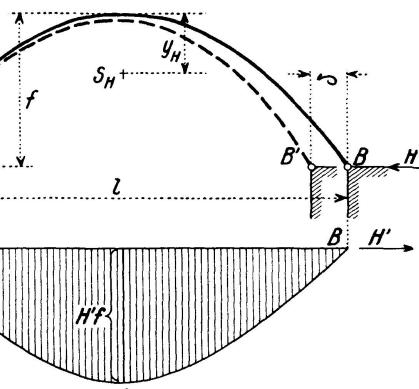


Fig. 2.

Die  $d$ -Werte wurden für jeden  $k$ -Wert berechnet. Die Resultate sind:

$$\begin{array}{ll}
 k = 1 & d = 1,00000 \\
 k = 2 & d = 0,88893 \\
 k = 4 & d = 0,78668 \\
 k = 7 & d = 0,71051
 \end{array}$$

Es ist selbstverständlich, daß, je größer  $k$  ist, sich ein umso kleinerer Wert für  $d$  ergibt, weil die Verkürzung eines Stabes kleiner ist, wenn der Querschnitt zunimmt.

Die Verkürzung des Bogens, die auf Grund der Gleichung (4) immer festgestellt werden kann, wird zur Bestimmung der Wirkung von Normalkräften benutzt.

Vorausgesetzt, daß der Endquerschnitt  $A$  in der ursprünglichen Lage bleibt (Fig. 1), wird sich der Endquerschnitt  $B$  um  $\delta$  parallel verschieben. Zum Zurückführen des Querschnittes  $B'$  in die ursprüngliche Lage sind wegen der Symmetrie des Systems zwei in  $A$  und  $B$  angreifende, gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete horizontale Kräfte  $H'$  und gleich große, eben-

falls in  $A$  und  $B$  angreifende Einspannmomente  $M'_A$  und  $M'_B$  nötig. Da in diesem Falle keine äußeren Kräfte angreifen, und nur die Kräfte  $H'$  und Momente  $M'_A$  und  $M'_B$  wirken, wird das Moment im Scheitel des eingespannten Bogens:

$$M'_0 = H' f + M'$$

betragen, wo:

$$M' = M'_A = M'_B$$

Das Momentenbild ist natürlich symmetrisch, und zur Bestimmung der Formänderungen wird es in zwei Teilmomentenbilder aufgelöst.

Das erste Momentenbild ( $ABC$ ) wird durch die Horizontalkraft  $H'$  hervorgerufen, daher werden dessen Flächen- und Schwerpunktsordinaten durch die Gleichungen (5 a) und (5 b) (siehe 3. Band der Abhandlungen, Seite 74) angegeben zu

$$F_H = H' f l F_H$$

$$y_H = f y_h$$

Das zweite Momentenbild ( $ABDE$ ) ist durch die gleich großen Einspannmomente  $M'$  durch die Vereinigung zweier gleicher Momentendreiecke ( $ABE$  und  $BDE$ ) entstanden, daher werden die Flächen und die Schwerpunktsordinate laut Gleichung (6) (siehe 3. Band der Abhandlungen, Seite 74) verdoppelt:

$$F_M = 2 l M' F_m$$

$$y_M = f y_m.$$

Der Schwerpunkt liegt in der Mittellinie.

Die Summe der zwei Formänderungsbilderflächen muß verschwinden, da die Endquerschnitte gegeneinander keine Verdrehung erleiden:

$$H' f l F_h + 2 l M' F_m = 0$$

$$H' f F_h + 2 M' F_m = 0 \quad 5)$$

Da die Verkürzung der Spannweite den Wert  $\delta$  hat, muß das Drehmoment der Flächen von beiden Formänderungsbildern, bezogen auf die Horizontale durch  $A$  und  $B$ , ebenfalls den Wert  $\delta$  haben. Man muß aber in Betracht ziehen, daß die Momente der Formänderungsbilder die Verschiebungen in einem mit  $EJ_0$  vergrößerten Maßstabe ergeben, daher muß die Verkürzung  $\delta$  ebenfalls mit  $EJ_0$  multipliziert werden.

$$H' f l F_h (f - y_h f) + 2 l M' F_m (f - y_m f) = \delta EJ_0 \quad 6)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung, die vergrößerte Verkürzung, hat laut Gleichung (4) den folgenden Wert:

$$\delta EJ_0 = \frac{Hl}{EF_0} d EJ_0 = \frac{J_0}{F_0} Hld$$

Wenn der rechteckige Querschnitt am Scheitel des Bogens die Breite  $b$  und die Höhe  $h$  hat, dann ist:

$$\delta EJ_0 = \frac{b h_0^3}{12 b h_0} Hld = \frac{h_0^2}{12} Hld$$

Die Gleichung (6) geht dann in die Form über:

$$H' f F_h (1 - y_h) + 2 M' F_m (1 - y_m) = \frac{h_0^2}{12} \frac{H}{f} d \quad 7)$$

Tabelle 1.

Horizontalkraft und Momente des eingespannten Bogens infolge der Normalkräfte.

Force horizontale et moments dûs aux efforts normaux pour l'arc encastré.

Table 1.

Thrust and Moments for encastre-arch due to normal forces.

Momente im Querschnitt — Moments dans la section — Moments in section																											
Horizontalkraft Force horizontale		Horizontal thrust ( $C_1$ )		Horizontalkraft ( $C_2$ )		10		9		8		7		6		5		4		3		2		1		0	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14														
0	+	0,93750	-	0,62500	-	0,44687	-	0,28750	-	0,14687	-	0,02500	+	0,07812	+	0,16250	+	0,22812	+	0,27500	+	0,30312	+	0,31250			
1,2	+	0,98127	-	0,67496	-	0,46408	-	0,28539	-	0,13546	-	0,01123	+	0,08994	+	0,17001	+	0,23056	+	0,27295	+	0,29797	+	0,30631			
1	3	+	1,02258	-	0,72366	-	0,47876	-	0,28140	-	0,12310	+	0,00257	+	0,10104	+	0,17631	+	0,23173	+	0,26956	+	0,29165	+	0,29891		
5	5	+	1,05954	-	0,76508	-	0,49130	-	0,27854	-	0,11378	+	0,01305	+	0,10957	+	0,18151	+	0,23322	+	0,26797	+	0,28789	+	0,29446		
8	8	+	1,09906	-	0,80983	-	0,50308	-	0,27404	-	0,10314	+	0,02413	+	0,11799	+	0,18613	+	0,23394	+	0,26549	+	0,28340	+	0,28923		
0	0	+	1,18779	-	0,85961	-	0,63393	-	0,43200	-	0,25384	-	0,09942	+	0,03123	+	0,13813	+	0,22128	+	0,28067	+	0,31630	+	0,32818		
1,2	2	+	1,26281	-	0,93895	-	0,66758	-	0,43762	-	0,24466	-	0,08479	+	0,04541	+	0,14845	+	0,22637	+	0,28092	+	0,31312	+	0,32386		
2	3	+	1,33924	-	1,02056	-	0,69982	-	0,44134	-	0,23403	-	0,06944	+	0,05953	+	0,15810	+	0,23069	+	0,28024	+	0,30917	+	0,31867		
5	5	+	1,40033	-	1,08580	-	0,72396	-	0,44277	-	0,22502	-	0,05740	+	0,07017	+	0,16525	+	0,23359	+	0,27952	+	0,30585	+	0,31453		
8	8	+	1,47014	-	1,15988	-	0,74957	-	0,44319	-	0,21459	-	0,04434	+	0,08121	+	0,17235	+	0,23630	+	0,27850	+	0,30246	+	0,31025		
0	0	+	1,57373	-	1,22247	-	0,92346	-	0,65593	-	0,41987	-	0,21528	-	0,04217	+	0,09946	+	0,20962	+	0,28831	+	0,33552	+	0,35126		
1,2	1,2	+	1,69918	-	1,35022	-	0,98507	-	0,67565	-	0,41601	-	0,20089	-	0,02571	+	0,11295	+	0,21779	+	0,29119	+	0,33452	+	0,34896		
4	3	+	1,82874	-	1,48343	-	1,04545	-	0,69250	-	0,40941	-	0,18466	-	0,00855	+	0,12604	+	0,22516	+	0,29282	+	0,33232	+	0,34531		
5	5	+	1,93349	-	1,59133	-	1,09171	-	0,70347	-	0,40281	-	0,17137	+	0,00477	+	0,13605	+	0,23041	+	0,29383	+	0,33017	+	0,34216		
8	8	+	2,05363	-	1,71478	-	1,14161	-	0,71364	-	0,39430	-	0,15649	+	0,01889	+	0,14622	+	0,23555	+	0,29449	+	0,32796	+	0,33885		
0	0	+	2,04051	-	1,66426	-	1,27656	-	0,92968	-	0,62360	-	0,35833	-	0,13388	+	0,04977	+	0,19260	+	0,29463	+	0,35584	+	0,37625		
1,2	1,2	+	2,22874	-	1,85317	-	1,37421	-	0,96836	-	0,62781	-	0,34565	-	0,11586	+	0,06600	+	0,20351	+	0,29980	+	0,35663	+	0,37557		
7	3	+	2,42662	-	2,05332	-	1,47214	-	1,00380	-	0,62816	-	0,32993	-	0,09625	+	0,08235	+	0,21387	+	0,30366	+	0,35607	+	0,37330		
5	5	+	2,58768	-	2,21667	-	1,54801	-	1,02840	-	0,62602	-	0,31627	-	0,08054	+	0,09517	+	0,22145	+	0,30632	+	0,35497	+	0,37102		
8	8	+	2,77307	-	2,40458	-	1,63062	-	1,05271	-	0,62150	-	0,30038	-	0,06356	+	0,10837	+	0,22900	+	0,30859	+	0,35379	+	0,36849		
Multiplikator Multiplicateur Multiplikator		$\times \left[ \frac{h_0^2}{f} H \right]$																				$\times \frac{h_0^2}{f} H$					

Aus den Gleichungen (5) und (7) sind die Unbekannten:

$$\left. \begin{aligned} H' &= \frac{1}{12} \frac{d}{(y_m - y_h) F_h} \left( \frac{h_0}{f} \right)^2 H \\ M' &= \frac{1}{24} \frac{d}{(y_h - y_m) F_m} \frac{h_0^2}{f} H \end{aligned} \right\} \quad 8)$$

Es ist auffallend, daß die zwei statisch unbekannten Faktoren, die Horizontalkraft und die Einspannmomente, hier von der Spannweite unabhängig erscheinen. Diese Unabhängigkeit besteht aber tatsächlich nicht, da die Länge  $l$  in der Horizontalkraft  $H$  zum Ausdruck kommt.

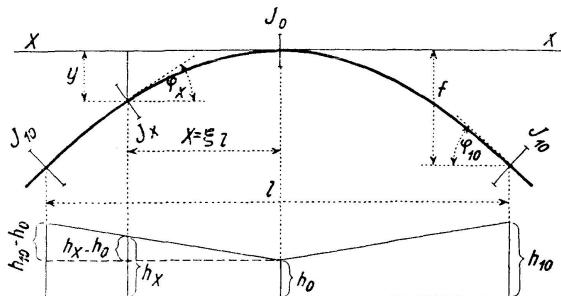


Fig. 3.

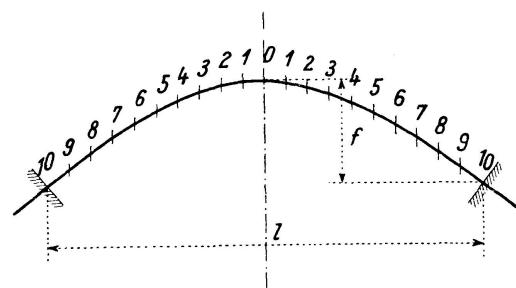


Fig. 4.

Die Werte  $F_h$ ,  $F_m$ ,  $y_h$  und  $y_m$  sind bekanntlich konstante Faktoren, die nur von den  $\gamma$ - und  $k$ -Werten abhängig sind. Da die Verhältniszahl  $d$  bereits bestimmt wurde, ist es möglich, die Faktoren in den Gleichungen (8)

$$C_1 = \frac{1}{12} \frac{d}{(y_m - y_h) F_h} \quad C_2 = \frac{1}{24} \frac{d}{(y_h - y_m) F_m}$$

zu berechnen, und dann sind die Reaktionen:

$$H' = C_1 \left( \frac{h_0}{f} \right)^2 H \quad M' = C_2 \frac{h_0^2}{f} H$$

Die Werte  $C_1$  und  $C_2$  wurden für jeden  $\gamma$ - und  $k$ -Wert berechnet und in der Tabelle 1, Spalten 3—4 zusammengestellt. Auf Grund dieser Konstanten werden die horizontale Auflagerkraft und die Einspannmomente in jedem Falle leicht ermittelt, und im Besitze dieser Reaktionen können die Biegemomente in jedem Querschnitt berechnet werden.

Die Tabelle 1 enthält in der Spalte 3 die Horizontalkraft und in den Spalten 4—14 die Biegemomente der Querschnitte 10—0 (Fig. 4); es ist selbstredend, daß für die Zwischenquerschnitte oder für die Zwischenwerte von  $\gamma$  und  $k$  sowohl die Horizontalkraft als auch die Querschnittsmomente durch Interpolation bestimmt werden können.

Die Wirkung der Normalkräfte kann auf Grund der Längskraft  $H$ , — wenn eine größere Genauigkeit verlangt wäre —, immer in Betracht gezogen werden, und mit den dadurch erhaltenen Momenten können die von der äußeren Belastung hervorgerufenen Momente ergänzt werden.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Wirkung der Normalkräfte tatsächlich unwesentlich ist. Wenn zum Beispiel das Verhältnis  $h_0/f = 1/6$ ,  $\gamma = 0$  und  $k = 4$  ist, dann ist auf Grund der Tabelle 1

$$H' = 1,5737 \frac{1}{36} H = 0,044 H$$

und diese Änderung der Horizontalkraft hat tatsächlich nur eine untergeordnete praktische Bedeutung.

**Der Zweigelenkbogen.** Die Normalkräfte eines Zweigelenkbogens werden auf Grund derselben Überlegungen bestimmt, wie jene des eingespannten Bogens; es wird daher aus denselben Gründen nur die horizontale Komponente der Normalkraft in Betracht gezogen, ferner muß das mit  $\delta$  verschobene Stützgelenk  $B$  in die originale Lage zurückgeführt werden und für die Verkürzung  $\delta$  der Spannweite  $l$  wird die Verkürzung eines durch dieselbe Längskraft  $H$  belasteten geraden Stabes angenommen (Fig. 2).

Um die Zusatzkräfte, die infolge der Normalkräfte auftreten, bestimmen zu können, muß zuerst die Verkürzung des Zweigelenkbogens festgestellt werden.

Die Höhe und Breite des mittleren Bogenquerschnittes ist  $h_0$  und  $b$ ; es wird vorausgesetzt, daß die Querschnittsfläche  $bh_0$  bezüglich Berechnung der Verkürzung auf der ganzen Länge des Zweigelenkbogens konstant bleibt; die Verkürzung ist daher:

$$\delta = \frac{Hl}{Eb h_0}$$

Vorausgesetzt, daß das Stützgelenk  $A$  in der ursprünglichen Lage bleibt, wird sich  $B$  um  $\delta$  parallel verschieben. Zum Zurückführen des Querschnittes  $B'$  in die ursprüngliche Lage  $B$  sind wegen der Symmetrie des Systems zwei in  $A$  und  $B$  angreifende, gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete horizontale Kräfte  $H'$  nötig (Fig. 2).

Da in diesem Falle keine äußeren Kräfte angreifen, werden die Biegemomente nur von den Horizontalkräften  $H'$  hervorgerufen; daher muß man das Momentenbild von  $H'$  feststellen, dessen Drehmoment bezüglich  $AB$  die  $EJ_0$ -fache Verlängerung  $\delta$  ergeben wird.

Die Fläche des Momentenbildes von  $H'$  beträgt nach Gleichung (5 a) (siehe 3. Band der Abhandlungen, Seite 74):

$$F_H = H' f l F_h$$

deren Schwerpunktsordinate die folgende Größe hat:  $y_H = f y_h$ . Das Drehmoment, auf die Horizontale  $AB$  bezogen:

$$H' f l F_h (f - f y_h) = H' f^2 l (1 - y_h) F_h$$

stellt die  $EJ_0$ -fache Längenänderung dar, daher wird deren richtiger Wert:

$$\frac{1}{EJ_0} H' f^2 l (1 - y_h) F_h = \delta = \frac{Hl}{Eb h_0} \quad 9)$$

Mit Rücksicht darauf, daß

$$J_0 = \frac{b h_0^3}{12}$$

wird die Unbekannte:

$$H' = \frac{1}{12 F_h (1 - y_h)} \left( \frac{h_0}{f} \right)^2 H \quad 10)$$

Es ist auch hier auffallend, daß die Horizontalkraft  $H'$  von der Spannweite unabhängig erscheint; diese Unabhängigkeit besteht aber tatsächlich nicht, da die Länge  $l$  in dem Werte der Horizontalkraft  $H$  zum Ausdruck kommt.

Durch die Formel 10 wurden die Horizontalkräfte und auf Grund derselben auch die Querschnittsmomente für jeden  $\gamma$ -Wert berechnet und in die Tabelle 2 eingetragen. Es ist selbstredend, daß die Zahlenwerte für die Horizontalkräfte bzw. Querschnittsmomente mit  $\left(\frac{h_0}{f}\right)^2 H$  bzw.  $\frac{h_0^2}{f} H$  multipliziert werden müssen, um die richtigen Werte zu erhalten.

Tabelle 2 — Table 2.

Horizontalkraft und Momente des Zweigelenkbogens infolge der Normalkräfte.  
Force horizontale et moments dûs aux efforts normaux pour l'arc à deux articulations.  
Horizontal thrust and moments for two-hinged arch due to normal forces.

Querschnitt Section	Momente, wenn der Achsenbeiwert = Moments, lorsque le coefficient pour l'axe = Moments for which axis-coefficient =				
	0,0	1,2	3,0	5,0	8,0
1	2	3	4	5	6
9	+ 0,029687	+ 0,032091	+ 0,034285	+ 0,035885	+ 0,037589
8	+ 0,056250	+ 0,059284	+ 0,061914	+ 0,063771	+ 0,065656
7	+ 0,079687	+ 0,082101	+ 0,084074	+ 0,085366	+ 0,086598
6	+ 0,100000	+ 0,101007	+ 0,101667	+ 0,101990	+ 0,102194
5	+ 0,117187	+ 0,116402	+ 0,115453	+ 0,114641	+ 0,113695
4	+ 0,131250	+ 0,128588	+ 0,125989	+ 0,124071	+ 0,122045
3	+ 0,142187	+ 0,137801	+ 0,133748	+ 0,130848	+ 0,127904
2	+ 0,150000	+ 0,144252	+ 0,139045	+ 0,135403	+ 0,131769
1	+ 0,154687	+ 0,148060	+ 0,142137	+ 0,138014	+ 0,133964
0	+ 0,156250	+ 0,149330	+ 0,143153	+ 0,138875	+ 0,134678
Multiplikator Multiplicateur Multiplicator	$\times \frac{1}{f} h_0^2 H$				
Horizontalkraft Force horizontale Horizontal thrust	+ 0,156250	+ 0,149330	+ 0,143153	+ 0,138875	+ 0,134678
Multiplikator Multiplicateur Multiplicator	$\times \frac{1}{f^2} h_0^2 H$				

Die Wirkung der Normalkräfte kann auf Grund der Längskraft  $H$ , wenn eine größere Genauigkeit verlangt wird, immer in Betracht gezogen werden; es sei aber darauf hingewiesen, daß die Wirkung der Normalkräfte tatsächlich unwesentlich ist; falls z. B. das Verhältnis  $\frac{h_0}{f} = \frac{1}{5}$  und  $\gamma = 3$  beträgt, ist

$$H' = 0,14315 \frac{1}{25} H = 0,0057 H$$

und diese Änderung der Horizontalkraft hat tatsächlich keine Bedeutung.

## II. Temperaturänderung.

Durch die Temperaturänderungen wird einerseits die Bogenhöhe geändert, wodurch keine inneren Spannungen auftreten, andererseits wird aber die Spannweite  $l$  um  $\delta$  verkürzt oder verlängert.

Wenn der Wärmeausdehnungskoeffizient  $\varepsilon$  und der in Betracht zu ziehende Temperaturunterschied  $t^0$  ist, dann hat die Längenänderung den folgenden Wert (Fig. 5 und 6):

$$\delta = \varepsilon t l$$

Da es sich aber um die Änderung der Spannweite handelt, wird zur Bestimmung der Wirkung der Temperaturänderungen dasselbe Verfahren angewendet wie bei der Feststellung der Wirkung der Normalkräfte.

Es wird, wie bei der Wirkung der Normalkräfte, vorausgesetzt, daß die Längenänderung der Spannweite der Längenänderung eines geraden Stabes gleich ist, der die Länge  $l$  hat, und dessen Querschnitt sich nach ähnlichem Gesetze ändert wie die Querschnitte des Bogens.

Der eingespannte Bogen. Es wird angenommen, daß der Endquerschnitt  $A$  (Fig. 5) in der ursprünglichen Lage bleibt, und der andere Endquerschnitt  $B$  sich parallel um  $\delta$  verschiebt. Zum Zurückführen des Quer-

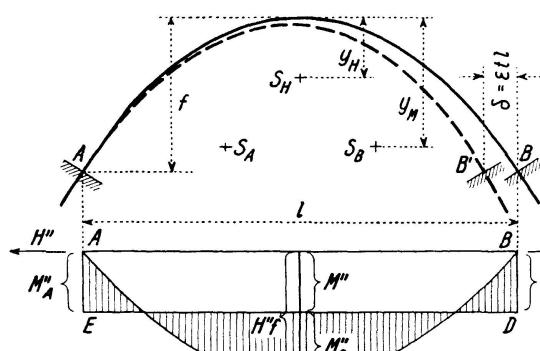


Fig. 5.

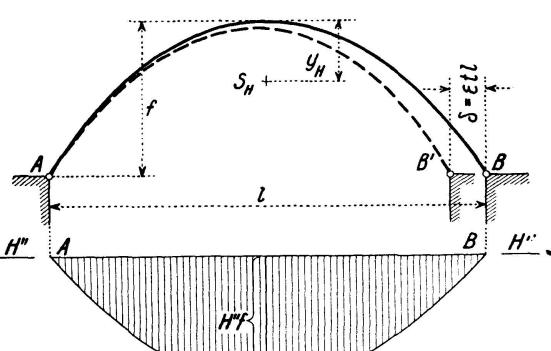


Fig. 6.

schnittes  $B$  in die ursprüngliche Lage sind, wegen der Symmetrie des Systems, zwei in  $A$  und  $B$  angreifende, gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete horizontale Kräfte  $H''$ , und gleiche, ebenfalls in  $A$  und  $B$  wirkende Momente  $M''_A$  und  $M''_B$  nötig. Das symmetrische Momentenbild wird zur Bestimmung der Formänderungen in zwei Teilmomentenbildern aufgelöst: in eine Momentenparabel ( $ABC$ ) und in ein Momentenviereck ( $ABDE$ ). Für die Formänderungsbilder, die aus diesen Teilmomentenbildern gestaltet werden, sind dieselben Formeln gültig, die bei der Berücksichtigung der Wirkung der Normalkräfte abgeleitet worden sind, daher:

$$\begin{aligned} F_H &= H'' f l F_h & y_H &= f y_h \\ F_M &= 2 l M' F_m & y_M &= f y_m \end{aligned}$$

wo die Zahlenwerte  $F_h$ ,  $F_m$ ,  $y_h$  und  $y_m$  natürlich konstant sind.

Mit Rücksicht darauf, daß die Endquerschnitte  $A$  und  $B$  gegeneinander keine Verdrehung erleiden dürfen, muß die Summe der Formänderungsflächen den Wert Null haben:

$$H'' f l F_h + 2 l M' F_m = 0$$

oder:

$$H'' f F_h + 2 M' F_m = 0 \quad (11)$$

Da die Verschiebung der Endquerschnitte  $A$  und  $B$  gegeneinander den Wert  $\varepsilon t l$  hat, ist das Drehmoment der Flächen von den Formänderungsbildern:

$$H'' f l F_h (f - f y_h) + 2 l M' F_m (f - f y_m) = \varepsilon t l E J_0 \quad (12)$$

Die Längenänderung  $\delta$  der Spannweite, die rechte Seite der Gleichung (12), war mit  $EJ_0$  zu multiplizieren, da das Moment der Formänderungsflächen die  $EJ_0$ -fache Verschiebung ergibt. Die Gleichung (12) ist nach Vereinfachung:

$$H'' f F_h (1 - y_h) + 2 M'' F_m (1 - y_m) = \frac{\varepsilon t E J_0}{f} \quad (13)$$

Aus den Gleichungen (11) und (13) sind die Unbekannten:

$$\left. \begin{aligned} H'' &= \frac{1}{(y_m - y_h) F_h} \frac{t \varepsilon E J_0}{f^2} \\ M'' &= \frac{1}{2(y_h - y_m) F_m} \frac{t \varepsilon E J_0}{f} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Es ist auffallend, daß sowohl die Horizontalkraft, als auch die Einspannmomente von der Spannweite selbst vollkommen unabhängig sind. Die natürliche Folge davon ist, daß die Biegemomente in jedem Querschnitt ebenfalls unabhängig von der Spannweite des Bogens sind. Da aber das Trägheitsmoment des Scheitelquerschnittes mit der Spannweite stark wächst, ist es klar, daß bezüglich der Wirkung der Temperaturänderungen die Spannweite doch nicht ohne Einfluß ist. Demgegenüber steht es fest, daß die Wirkung bei kleinerer Bogenhöhe bedeutend größer ist als bei einer hohen Bogenkonstruktion.

Die Zahlenwerte in den Gleichungen (14) sind alle bekannt, und zwar für jeden  $\gamma$ - und  $k$ -Wert. Es werden die Faktoren

$$D_1 = \frac{1}{(y_m - y_h) F_h} \quad D_2 = \frac{1}{2(y_h - y_m) F_m}$$

berechnet; die Reaktionen sind dann:

$$H'' = D_1 \frac{\varepsilon t E J_0}{f^2} \quad M'' = D_2 \frac{\varepsilon t E J_0}{f}$$

Die Werte  $D_1$  und  $D_2$  sind für jeden  $\gamma$ - und  $k$ -Wert bestimmt worden und in der Tabelle 3 Spalte 3—4 zusammengestellt. Auf Grund dieser Konstanten können die Horizontalkraft und die Einspannmomente, und dann auf Grund dieser Reaktionen die Biegemomente jedes Querschnittes berechnet werden.

In der Tabelle 3 sind für jeden  $\gamma$ - und  $k$ -Wert die Horizontalkraft (Spalte 3) und die Biegemomente der Querschnitte 10—0 (Spalten 4—14) zu finden. Für die Zwischenquerschnitte sind die Horizontalkraft und Biegemomente durch Interpolation zu bestimmen.

Die Wirkung der Temperaturänderung kann auf Grund der Tabelle 3 immer in Betracht gezogen werden. Wenn aber, wie gewöhnlich, von einer mittleren Temperatur ausgegangen wird, und demzufolge eine Temperaturabnahme ebenso möglich ist wie eine Zunahme, dann muß man die durch die Temperaturänderung hervorgerufenen Momente und Horizontalkräfte zu den von der äußeren Belastung hervorgerufenen Werten ohne Rücksicht auf das Vorzeichen addieren. Aus diesem Grunde sind in der Tabelle 3 sowohl die Momente als auch die Horizontalkraft mit doppeltem Vorzeichen eingetragen.

Tabelle 3.

Horizontalkraft und Momente des eingespannten Bogens infolge Temperaturänderung.

Force horizontale et moments dûs aux variations de température pour l'arc encastré.

Table 3.

Horizontal thrust and moments for encastre-arch due to temperature changes.

Momente im Querschnitt — Moments dans la section — Moments in section									
Horizontalkraft Force horizontale Horizontal thrust ( $D_1$ )		Horizontal- kraft ( $D_2$ )		10		9		8	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	$\pm 11,25000$	$\mp 7,50000$	$\mp 5,36250$	$\mp 3,45000$	$\mp 1,76250$	$\mp 0,30000$	$\pm 0,93750$	$\pm 1,95000$
1,2	1,2	$\pm 11,77529$	$\mp 8,09953$	$\mp 5,56902$	$\mp 3,42474$	$\mp 1,62548$	$\mp 0,13472$	$\pm 1,07931$	$\pm 2,04017$
1	3	$\pm 12,27093$	$\mp 8,68398$	$\mp 5,74509$	$\mp 3,37680$	$\mp 1,47726$	$\mp 0,03083$	$\pm 1,21253$	$\pm 2,11567$
5	5	$\pm 12,71449$	$\mp 9,18097$	$\mp 5,89555$	$\mp 3,34248$	$\mp 1,36537$	$\mp 0,15655$	$\pm 1,31484$	$\pm 2,17816$
8	8	$\pm 13,18869$	$\mp 9,71798$	$\mp 6,03702$	$\mp 3,28849$	$\mp 1,23765$	$\mp 0,28960$	$\pm 1,41591$	$\pm 2,23361$
0	0	$\pm 16,03451$	$\mp 11,60405$	$\mp 8,55769$	$\mp 5,83183$	$\mp 3,42665$	$\mp 1,34216$	$\pm 0,42163$	$\pm 1,86474$
1,2	1,2	$\pm 17,04726$	$\mp 12,67538$	$\mp 9,01192$	$\mp 5,90762$	$\mp 3,30280$	$\mp 1,14461$	$\pm 0,61296$	$\pm 2,00402$
2	3	$\pm 18,07899$	$\mp 13,77705$	$\mp 9,44713$	$\mp 5,95789$	$\mp 3,15926$	$\mp 0,93735$	$\pm 0,80366$	$\pm 2,13427$
5	5	$\pm 18,90376$	$\mp 14,65778$	$\mp 9,77305$	$\mp 5,97717$	$\mp 3,03764$	$\mp 0,77486$	$\pm 0,94727$	$\pm 2,23084$
8	8	$\pm 19,84604$	$\mp 15,65779$	$\mp 10,11876$	$\mp 5,98285$	$\mp 2,89769$	$\mp 0,59861$	$\pm 1,09624$	$\pm 2,32669$
0	0	$\pm 24,00552$	$\mp 18,64746$	$\mp 14,08641$	$\mp 10,00547$	$\mp 6,40464$	$\mp 3,28393$	$\mp 0,64332$	$\pm 1,51718$
1,2	1,2	$\pm 25,91919$	$\mp 20,59615$	$\mp 15,02612$	$\mp 10,30623$	$\mp 6,34578$	$\mp 3,06441$	$\mp 0,39214$	$\pm 1,72286$
4	3	$\pm 27,89541$	$\mp 22,62813$	$\mp 15,94718$	$\mp 10,56337$	$\mp 6,24516$	$\mp 2,81681$	$\mp 0,13048$	$\pm 1,92262$
5	5	$\pm 29,49323$	$\mp 24,27392$	$\mp 16,65287$	$\mp 10,73063$	$\mp 6,14443$	$\mp 2,61409$	$\mp 0,07274$	$\pm 2,07533$
8	8	$\pm 31,32581$	$\mp 26,15710$	$\mp 17,41407$	$\mp 10,88577$	$\mp 6,01460$	$\mp 2,38708$	$\mp 0,28815$	$\pm 2,23035$
0	0	$\pm 34,46276$	$\mp 28,10818$	$\mp 21,56026$	$\mp 15,70159$	$\mp 10,53217$	$\mp 6,05201$	$\mp 2,26111$	$\pm 0,84054$
1,2	1,2	$\pm 37,64195$	$\mp 31,29877$	$\mp 23,20951$	$\mp 16,35492$	$\mp 10,60323$	$\mp 5,83776$	$\mp 1,95687$	$\pm 1,11471$
7	3	$\pm 40,98400$	$\mp 34,67916$	$\mp 24,86349$	$\mp 16,95358$	$\mp 10,60926$	$\mp 5,57232$	$\mp 1,62556$	$\pm 1,39086$
5	5	$\pm 43,70425$	$\mp 37,43805$	$\mp 26,14487$	$\mp 17,36906$	$\mp 10,57305$	$\mp 5,34165$	$\mp 1,36019$	$\pm 1,60733$
8	8	$\pm 46,83528$	$\mp 40,61179$	$\mp 27,54006$	$\mp 17,77959$	$\mp 10,49670$	$\mp 5,07318$	$\mp 1,07345$	$\pm 1,83034$
Multiplikator Multiplicateur Multiplicator		$\times \frac{t^e J_0 E}{f^2}$						$\times \frac{t^e J_0 E}{f}$	

Der Zweigelenkbogen. Auf Grund der gleichen Überlegungen wie beim eingespannten Bogen, muß man eine waagerechte Verschiebung des Endquerschnittes  $B$  um

$$\delta = \varepsilon t l$$

annehmen, und zum Zurückführen des Querschnittes  $B$  in die ursprüngliche Lage sind zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Horizontalkräfte  $H''$  nötig; die Gleichung (9) ist daher für  $H''$  gültig, nur für die Längenänderung  $\delta$  muß man  $\varepsilon t l$  einsetzen:

$$\frac{1}{EJ_0} H'' f^2 l (1 - y_h) F_h = \delta = \varepsilon t l$$

Demzufolge: 
$$H'' = \frac{1}{F_h (1 - y_h)} \frac{\varepsilon t E J_0}{f^2} \quad 15)$$

Tabelle 4 — Table 4.

Horizontalkraft und Momente des Zweigelenkbogens infolge Temperaturänderung.  
Force horizontale et moments dûs aux variations de température pour l'arc à deux articulations.

Horizontal thrust and moments for two-hinged arch due to temperature changes.

Querschnitt Section	Momente, wenn der Achsenbeiwert = Moments, lorsque le coefficient pour l'axe = Moments for which axis-coefficient =				
	0,0	1,2	3,0	5,0	8,0
1	2	3	4	5	6
9	± 0,356250	± 0,385092	± 0,411422	± 0,430624	± 0,451064
8	± 0,675000	± 0,711407	± 0,742965	± 0,765257	± 0,787867
7	± 0,956250	± 0,985218	± 1,008886	± 1,024398	± 1,039177
6	± 1,200000	± 1,212080	± 1,220009	± 1,223878	± 1,226326
5	± 1,406250	± 1,396830	± 1,385436	± 1,375696	± 1,364344
4	± 1,575000	± 1,543054	± 1,511869	± 1,488851	± 1,464544
3	± 1,706250	± 1,653618	± 1,604976	± 1,570176	± 1,534846
2	± 1,800000	± 1,731030	± 1,668536	± 1,624838	± 1,581229
1	± 1,856250	± 1,776725	± 1,705641	± 1,656168	± 1,607572
0	± 1,875000	± 1,791957	± 1,717838	± 1,666500	± 1,616138
Multiplikator Multiplicateur Multiplicator	$\times \frac{1}{f} t \varepsilon E J_0$				
Horizontalkraft Force horizontale Horizontal thrust	± 1,875000	± 1,791957	± 1,717838	± 1,666500	± 1,616138
Multiplikator Multiplicateur Multiplicator	$\times \frac{1}{f^2} t \varepsilon E J_0$				

Die Horizontalkraft und dementsprechend auch die Querschnittsmomente sind von der Spannweite des Zweigelenkbogens vollkommen unabhängig; da aber das Trägheitsmoment des Scheitelquerschnittes mit der Spannweite stark wächst, ist es klar, daß bezüglich der Wirkung der Temperaturänderungen die Spannweite auch bei dieser Konstruktion nicht ohne Einfluß ist. Demgegenüber steht es fest, daß die Wirkung auch beim Zweigelenkbogen bei kleinerer Bogenhöhe bedeutend größer ist als bei einem hohen Bogen.

Durch die Formel 15 wurden die Horizontalkräfte und auf Grund derselben die Querschnittsmomente für jeden  $\gamma$ -Wert berechnet und in die Tabelle 4 eingetragen. Es ist selbstredend, daß die Zahlenwerte für die Horizontalkräfte bzw. Querschnittsmomente mit  $\frac{\varepsilon t E J_0}{f^2}$  bzw.  $\frac{\varepsilon t E J_0}{f}$  multipliziert werden müssen. Für die Zwischenwerte von  $\gamma$  muß man natürlich interpolieren.

Die Wirkung der Temperaturänderung kann auf Grund der Tabelle 4 immer berücksichtigt werden. In Anbetracht dessen, daß eine Temperaturzunahme ebenso möglich ist als eine Abnahme, sind auch hier die Tabellenwerte mit doppeltem Vorzeichen eingetragen.

### Zusammenfassung.

Im dritten Band der *Abhandlungen*, Seiten 68—86, wurden solche Tabellen zur Berechnung von eingespannten Bogenkonstruktionen und Zweigelenkbogen veröffentlicht, die geeignet waren, die statischen Werte der genannten Tragsysteme auf die einfachste Weise derart anzugeben, wie die WINKLER'schen Tabellen für die durchlaufenden Träger.

Die bei der statischen Untersuchung nötigen Grenzmomente und Querkräfte sind aber durch die Wirkung der Normalkräfte und der Temperaturänderung zu ergänzen; die Tabellen, die die Endresultate dieser Berechnung liefern, sind in dieser Abhandlung veröffentlicht.

Bekanntlich wird die Spannweite durch die Normalkräfte um  $\delta$  verkürzt; es war daher nur nötig, die an den Auflagern wirkenden Belastungen derart zu bestimmen, daß sie die Spannweite um  $\delta$  verkürzen sollen. Um dies zu erreichen, waren beim eingespannten Bogen je eine Horizontalkraft und ein Einspannmoment nötig, während beim Zweigelenkbogen die Verwendung einer Horizontalkraft genügte.

Bei der Berücksichtigung der Wirkung von Temperaturänderungen ist die Lage ähnlich, mit dem Unterschiede aber, daß die Längenänderung  $\delta$  nur von der Temperaturänderung abhängig ist, und nicht nur eine Verkürzung der Spannweite, sondern auch eine Verlängerung möglich ist.

Nach Bestimmung der Auflagerkräfte und der Momente werden die Querschnittsmomente berechnet, und tabellarisch derart zusammengestellt, daß die nötigen Werte einfach ausgeschrieben und verwertet werden können.

### Résumé.

Dans le 3<sup>e</sup> volume de „Mémoires“, p. 68—86, l'auteur a publié des tableaux pour le calcul des arcs encastrés et des arcs à deux articulations; ces tableaux donnaient les valeurs statiques des systèmes susnommés d'une façon aussi simple que les tableaux de Winkler pour les poutres continues.

Les moments limites et les efforts tranchants nécessaires à l'étude statique sont à compléter par l'action des efforts normaux et des variations de température; les tableaux qui donnent les résultats finaux de ce calcul sont publiés dans ce mémoire.

Comme on le sait la portée est réduite de la valeur  $5$  sous l'effet des efforts normaux; il suffisait par conséquent de déterminer les charges qui agissent aux appuis de telle sorte qu'elles réduisent la portée de la valeur  $\delta$ . Pour l'obtenir il a été nécessaire d'introduire, pour l'arc encastré, une force

horizontale et un moment d'encastrement alors que pour l'arc à deux articulations l'introduction d'une force horizontale suffisait.

Il en est à peu près de même pour les variations de température; la seule différence est que la variation de la portée,  $\delta$ , ne dépend que de la température et peut être aussi bien un allongement qu'un raccourcissement.

Après avoir déterminé les réactions aux appuis et les moments on a calculé les moments dans les différentes sections et on a reporté ces derniers dans des tableaux tels qu'il suffit d'y prendre les valeurs utiles et de les interpréter.

### Summary.

In Volume 3 of the Publications, pages 68—86, tables for use in the design of fixed and two-hinged arches are presented which enable the calculation of statical values for these types of structures in the simplest possible way, like the Winkler tables for continuous girders.

The limiting moments and shears proper to the statical analysis require, however, to be adjusted for the effects of normal thrusts and of temperature changes, and in the present paper tables are given for the final results of these calculations.

The effect of the normal forces being, of course, to shorten the span by an amount  $\delta$ , it is merely necessary to determine the loads on the supports that will bring this about; a requirement which in the case of the built-in arch implies both a horizontal force and a fixing moment, but in that of the two-hinged arch only the horizontal force.

The calculation for the effect of temperature change is similar except that the alteration in length  $\delta$  depending on this alone may be either an increase or a decrease.

Following upon the reactions and moments at the supports, the sectional moments are determined and tabulated in such a way that the required values only need to be taken out and evaluated.