# Étude statique des voiles minces en paraboloide hyperbolique travaillant sans flexion

Autor(en): **Aimond, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **4 (1936)**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5075

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# ETUDE STATIQUE DES VOILES MINCES EN PARABOLOIDE HYPERBOLIQUE TRAVAILLANT SANS FLEXION.

## STATISCHE UNTERSUCHUNG DER BIEGUNGSLOSEN SCHALEN IN FORM VON PARABOLISCHEN HYPERBOLOIDEN.

## TREATISE ON STATICS OF PARABOLIC-HYPERBOLOIDAL SHELLS NOT STIFF IN BENDING.

F. AIMOND, Docteur ès sciences, Ingénieur des Ponts et Chaussées détaché au Ministère de l'Air, Paris.

## Chapitre A. Théorie générale.

### § 1. Etude géométrique.

Equilibre d'un quadrilatère rectiligne gauche élémentaire.

Les contraintes agissant en un point $m$ d'un voile mince en paraboloïde hyperbolique peuvent être définies en fonction des contraintes agissant sur deux

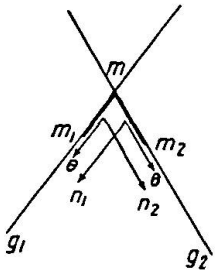



Fig. 1.

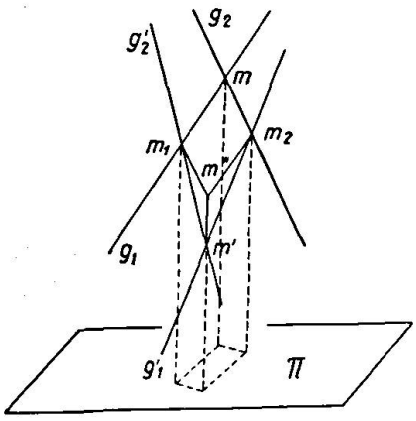



Fig. 2.

éléments $mm_1$, $mm_2$, dirigés suivant les deux génératrices $g_1$ et $g_2$ du paraboloïde passant en ce point, chacune de ces contraintes étant elle-même définie par ses composantes suivant les deux génératrices. En vertu d'un théorème dû à Cauchy, ces composantes se réduisent à trois distinctes (fig. 1), la composante $n_1$ suivant la génératrice $g_1$ de la contrainte s'exerçant sur l'élément $mm_2$; la composante $n_2$ suivant la génératrice $g_2$ de la contrainte s'exerçant sur l'élément $mm_1$, et les deux composantes égales $\vartheta$ s'exerçant sur les éléments $mm_1$ et $mm_2$ et suivant la direction de ces éléments.

Etudions maintenant les conditions d'équilibre du quadrilatère élémentaire $m\,m_1\,m'\,m_2$ (fig. 2) formé par les génératrices $g_1\,g_2$ et les génératrices infiniment

voisines des deux systèmes $g'_1$, $g'_2$. Pour cela, menons par le point $m'$ la parallèle à l'axe du paraboloïde et marquons son point de rencontre $m''$ avec le plan tangent en $m$, c'est-à-dire avec le plan $m_1 m m_2$. Décomposons la charge appliquée à l'élément $m m_1 m' m_2$, et les contraintes agissant sur le pourtour de cet élément en leurs composantes suivant la direction des génératrices $g_1 g_2$ et la direction de l'axe du paraboloïde. Désignons les composantes de la charge appliquée respectivement par $z_1$, $z_2$ et $z$, et celles de la résultante des contraintes agissant sur le pourtour par $\gamma_1$, $\gamma_2$ et $\gamma$. La composante $\gamma_1$ est la somme de deux termes: 1° la variation $\delta_2 N_1$ de la composante suivant $g_1$ de la force élastique agissant sur $m m_2$, quand on passe de l'élément $m m_2$ à l'élément correspondant $m_1 m'$; 2° la variation $\delta_1 \Theta_1$ de la composante suivant $g_1$ de la force élastique agissant sur $m m_1$ quand on passe de l'élément $m m_1$ à l'élément correspondant $m_2 m'$, soit:

$$\gamma_1 = \delta_2 N_1 + \delta_1 \Theta_1 ,$$

$N_1$ et $\Theta_1$ ayant les valeurs suivantes

$$N_1 = n_1 \cdot m m_2 \qquad \Theta_1 = \vartheta \cdot m m_1$$

On a de même

$$\gamma_2 = \delta_1 N_2 + \delta_2 \Theta_2$$

$N_2$ et $\Theta_2$ ayant les valeurs

$$N_2 = n_2 \cdot m m_1 \qquad \Theta_2 = \vartheta \cdot m m_2$$

$\delta_1 N_2$ représentant la variation de $N_2$ quand on passe de l'élément $m m_1$ à l'élément $m_2 m'$, et $\delta_2 \Theta_2$ représentant la valeur de $\Theta_2$ quand on passe de l'élément $m m_2$ à l'élément $m_1 m'$. Quant à la composante $\gamma$, c'est la somme des projections des composantes tangentielles agissant suivant $m_1 m'$ et $m_2 m'$, soit:

$$\gamma = \vartheta \cdot m_1 m' \cdot \frac{m' m''}{m_1 m'} + \vartheta \cdot m_2 m' \cdot \frac{m' m''}{m_2 m'} = 2 \vartheta \cdot m' m''$$

Les équations d'équilibre du quadrilatère élémentaire $m m_1 m' m_2$ sont d'ailleurs évidemment

$$\gamma_1 = z_1 , \qquad \gamma_2 = z_2 , \qquad \gamma = z$$

En explicitant les valeurs de $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma$, ces équations s'écrivent:

$$\delta_2 N_1 + \delta_1 \Theta_1 = z_1 \tag{1}$$

$$\delta_1 N_2 + \delta_2 \Theta_2 = z_2 \tag{2}$$

$$\vartheta = \frac{z}{2 m' m''} \tag{3}$$

## Détermination générale des contraintes.

L'équation (3) ci-dessus montre que la contrainte $\vartheta$ ne dépend en chaque point que de la valeur de la projection suivant l'axe du paraboloïde de la charge appliquée, cette projection étant effectuée parallèlement au plan tangent. $\vartheta$ étant ainsi déterminé par l'équation (3) pour chaque quadrilatère élémentaire, les équations (1) et (2) permettent le calcul des contraintes $n_1$ et $n_2$.

Projetons le quadrilatère $m m_1 m' m_2$ parallèlement à l'axe du paraboloïde sur un plan arbitraire $\pi$ et désignons par $d\sigma$ l'aire de la projection. Si nous posons

$$z = \zeta \, d\sigma ,$$

$\zeta$ peut être considéré comme la densité de la charge appliquée rapportée au

plan $\pi$. L'équation (3) s'écrit alors

$$\vartheta = k\zeta \tag{3bis}$$

avec

$$k = \frac{d\sigma}{2m'm''}$$

Démontrons que $k$ est une constante indépendante de la position et des dimensions $m m_1 m' m_2$ sur le paraboloïde. Remarquons d'abord qu'on peut multiplier séparément $m m_1$ et $m m_2$ par des facteurs quelconques sans changer $k$. D'autre part, si on déplace le quadrilatère $m m_1 m' m_2$ de manière à conserver les mêmes génératrices $g_1$ et $g'_1$ la longueur de $m m_1$ restant fixe, on se rend compte immédiatement que $m' m''$ et $d\sigma$ restent fixes et qu'il en est par conséquent de même pour $k$. Pareillement, $k$ reste fixe quand on déplace le quadrilatère $m m_1 m' m_2$, les génératrices $g_1$ et $g'_1$ restant fixes. La constance de $k$ sur tout le paraboloïde résulte immédiatement de là, le déplacement le plus général du quadrilatère $m m_1 m' m_2$ étant une combinaison des opérations précédentes dont aucune ne change la valeur de $k$.

On peut donc énoncer les trois lois suivantes:

1° La contrainte du cisaillement $\vartheta$ s'exerçant sur un élément de génératrice est en chaque point proportionnelle à la densité $\zeta$ de la composante de la charge parallèle à l'axe du paraboloïde, la projection étant effectuée parallèlement au plan tangent.

2° La variation du produit de la contrainte $n_1$ par la longueur d'un élément de génératrice $g_2$ compris entre deux génératrices infiniment voisines $g_1 g'_1$ est égale à la résultante des efforts de cisaillement appliqués aux segments balayés par les extrémités de l'élément considéré, augmentée de la résultante des composantes suivant la génératrice $g_1$ des charges appliquées.

3° La variation du produit de la contrainte $n_2$ par la longueur d'un élément de génératrice $g_1$ compris entre deux génératrices infiniment voisines $g_2 g'_2$ est égale à la résultante des efforts de cisaillement appliqués aux segments balayés par les extrémités de l'élément considéré, augmentée de la résultante des composantes suivant la génératrice $g_2$ des charges appliquées.

Ces lois permettent la détermination complète des contraintes dans le voile, les valeurs de $n_1$ et $n_2$ n'étant d'ailleurs définies qu'en fonction des valeurs prises par ces quantités respectivement sur une génératrice $g_2$ et sur une génératrice $g_1$, comme il est d'ailleurs évident étant donné que l'on peut appliquer aux extrémités de toute génératrice des efforts quelconques dans la direction de cette génératrice.

### Cas d'un système de charges à direction et à intensité constantes parallèles à l'axe du paraboloïde.

Dans le cas où les charges appliquées sont toutes parallèles à l'axe du paraboloïde et de densité superficielle constante en projection sur un plan $\pi$ quelconque non parallèle à l'axe, le cisaillement $\vartheta$ est constant sur tout le voile et les contraintes $n_1$ et $n_2$ peuvent être prises nulles. Les cercles de Mohr correspondants passent par deux points fixes de l'axe des cisaillements, le centre de chacun de ces cercles étant le point de l'axe des pressions d'où l'on voit le segment formé par ces deux points sous l'angle double de l'angle des génératrices du paraboloïde aux points correspondants. Or, pratiquement sur les voiles qu'on peut être conduit à réaliser, la variation de cet angle est faible de

telle sorte que le centre du cercle de Mohr varie peu et par conséquent son rayon est sensiblement constant. Il en résulte la propriété importante que le voile est sensiblement d'égale résistance pour des charges de direction et d'intensité constantes. La propriété est encore plus marquée au voisinage du sommet d'un paraboloïde à plans directeurs orthogonaux, comme on peut en rencontrer le plus souvent dans la pratique où une variation du premier ordre de la valeur de l'angle de deux génératrices entrainant une variation du même ordre du centre du cercle de Mohr au voisinage de l'origine, correspond à une variation du second ordre du rayon du cercle de Mohr.

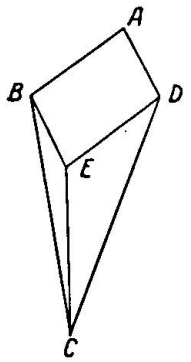


Fig. 3.

Supposons le paraboloïde limité à un quadrilatère $ABCD$ et soumis à une charge totale $P$. En appelant $g$ la distance du point $C$ au quatrième sommet $E$ (fig. 3) du parallélogramme construit sur $AB$ et $AD$, la valeur constante du cisaillement $\vartheta$ est:

$$\vartheta = \frac{P}{2g}$$

comme on le voit immédiatement en reprenant le raisonnement qui nous a conduits à l'équation (3), $g$ est une caractéristique du quadrilatère $ABCD$ indépendante du choix de l'ordre des sommets permettant de la définir, nous l'appellerons gauchissement du quadrilatère. On peut alors énoncer la loi suivante: dans un voile en paraboloïde hyperbolique soumis à une charge de densité constante et parallèle à l'axe du paraboloïde, le cisaillement $\vartheta$ a pour valeur le quotient de la charge appliquée à un quadrilatère gauche quelconque par le double du gauchissement de ce quadrilatère.

## § 2. Etude Analytique.

### Equations générales de l'équilibre funiculaire des voiles minces à double courbure.

Considérons un voile mince à double courbure défini par l'équation de sa surface moyenne $z = f(x\,y)$ en coordonnées rectilignes. Par hypothèse, le voile

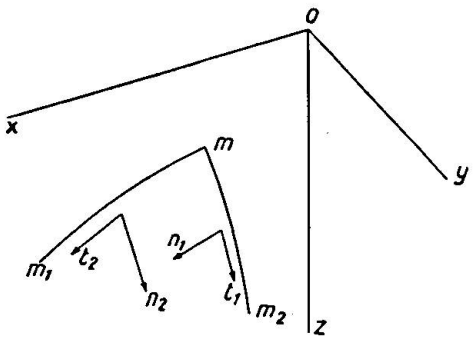


Fig. 4.

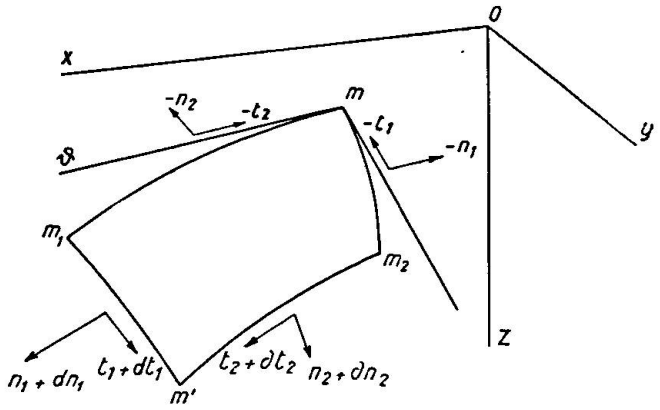


Fig. 5.

ne supporte que des contraintes tangentes à sa surface moyenne, et il suffit de déterminer en chaque point $m$ de coordonnées $x$ et $y$ les contraintes agissant sur deux éléments linéaires de la surface passant par ce point, par exemple (fig. 4) les éléments $m\,m_1$ et $m\,m_2$ respectivement parallèles aux plans $z\,o\,x$ et $z\,o\,y$. Décomposons la contrainte agissant sur chaque élément suivant deux compo-

santes, l'une parallèle à l'élément, l'autre parallèle à l'autre élément. La contrainte $c_2$ agissant sur l'élément $m\,m_2$ est ainsi décomposée en une contrainte $t_1$ parallèle à $m\,m_2$ et une contrainte $n_1$ parallèle à $m\,m_1$; de même la contrainte $c_1$ agissant sur élément $m\,m_1$ est décomposée suivant la contrainte $t_2$ parallèle à $m\,m_1$ et la contrainte $n_2$ parallèle à $m\,m_2$. Les contraintes tangentielles $t_1$ et $t_2$ ont d'ailleurs évidemment une valeur commune $\vartheta$.

Considérons maintenant un élément superficiel infiniment petit du voile $m\,m_1\,m'\,m_2$ (fig. 5) dont les côtés $m\,m_1$, $m_2\,m'$ sont parallèles au plan $z\,o\,x$ et les côtés $m\,m_2$, $m_1\,m'$ sont parallèles au plan $z\,o\,y$. Soient $x$ et $y$ les coordonnées du point $m$, et d'autre part $d\,x$ et $\delta\,y$ les composantes de $m\,m_1$ et $m\,m_2$ suivant $o\,x$ et $o\,y$. Supposons le voile chargé d'une manière quelconque et appelons $X\,dx\,\delta y$, $Y\,dx\,\delta y$, $Z\,dx\,\delta y$ les composantes suivant $o\,x$, $o\,y$, $o\,z$, de la charge appliquée à l'élément $m\,m_1\,m'\,m_2$. Désignons en outre par $\alpha_1$, $o$, $\gamma_1$ et $o$, $\beta_2$, $\gamma_2$, les coefficients directeurs des tangentes $m\,\vartheta_1$ et $m\,\vartheta_2$ aux éléments $m\,m_1$ et $m\,m_2$ au point $m$, c'est-à-dire les projections suivant $o\,x$, $o\,y$, $o\,z$ du vecteur unité porté par chacune de ces tangentes.

Sur l'élément $m\,m_2$ s'exerce un effort ayant pour composantes

$$\text{suivant } m\,\vartheta_1 : -n_1 \cdot m\,m_2 = -n_1 \frac{\vartheta y}{\beta_2}$$

$$\text{suivant } m\,\vartheta_2 : -t_1 \cdot m\,m_2 = -t_1 \frac{\vartheta y}{\beta_2}$$

et par suite

$$\text{suivant } o\,x : -f_x' = -n_1 \frac{\vartheta y}{\beta_2} \cdot \alpha_1 = -n_1 \frac{\alpha_1}{\beta_2} \vartheta y$$

$$\text{suivant } o\,y : -f_y' = -t_1 \frac{\vartheta y}{\beta_2} \cdot \beta_2 = -t_1\,\vartheta y$$

$$\text{suivant } o\,z : -f_z' = -n_1 \frac{\vartheta y}{\beta_2} \cdot \gamma_1 - t_1 \frac{\vartheta y}{\beta_2} \cdot \gamma_2 = -\left(n_1 \frac{\gamma_1}{\beta_2} + t_1 \frac{\gamma_2}{\beta_2}\right) \vartheta y$$

de même sur l'élément $m\,m_1$ s'exerce un effort ayant pour composantes

$$\text{suivant } m\,\vartheta_1 : -t_2 \cdot m\,m_1 = -t_2 \frac{dx}{\alpha_1}$$

$$\text{suivant } m\,\vartheta_2 : -n_2 \cdot m\,m_1 = -n_2 \frac{dx}{\alpha_1}$$

et par suite

$$\text{suivant } o\,x : -f_x'' = -t_2 \frac{dx}{\alpha_1} \cdot \alpha_1 = -t_2\,dx$$

$$\text{suivant } o\,y : -f_y'' = -n_2 \frac{dx}{\alpha_1} \cdot \beta_2 = -n_2 \frac{\beta_2}{\alpha_1} dx$$

$$\text{suivant } o\,z : -f_z'' = -t_2 \frac{dx}{\alpha_1} \cdot \gamma_1 - n_2 \frac{dx}{\alpha_1} \cdot \gamma_2 = -\left(t_2 \frac{\gamma_2}{\alpha_1} + n_2 \frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right) dx.$$

Sur l'élément $m_1\,m'$ s'exerce un effort ayant suivant $o\,x$, $o\,y$, $o\,z$ pour composantes respectives $f_x' + d\,f_x'$, $f_y' + d\,f_y'$, $f_z' + d\,f_z'$, et sur l'élément $m_2\,m'$ s'exerce un effort ayant suivant $o\,x$, $o\,y$, $o\,z$ pour composantes respectives $f_x'' + d\,f_x''$, $f_y'' + d\,f_y''$, $f_z'' + d\,f_z''$. La résultante des efforts agissant sur le pourtour de l'élément $m\,m_1\,m'\,m_2$ a donc pour composantes

suivant $ox$: $df_x' + \delta f_x''$
suivant $oy$: $df_y' + \delta f_y''$
suivant $oz$: $\delta f_z' + \delta f_z''$.

Les conditions d'équilibre de l'élément $m\,m_1\,m'\,m_2$ sont donc

$$df_x' + \delta f_x'' = X\,dx\,\delta y$$
$$df_y' + \delta f_y'' = Y\,dx\,\delta y$$
$$df_z' + \delta f_z'' = Z\,dx\,\delta y$$

avec

$$f_x' = n_1 \frac{\alpha_1}{\beta_2}\,\delta y \qquad f_y' = t_1\,\delta y \qquad f_z' = \left(n_1 \frac{\gamma_1}{\beta_2} + t_1 \frac{\gamma_2}{\beta_2}\right)\delta y$$

$$f_x'' = t_2\,dx \qquad f_y'' = n_2 \frac{\beta_2}{\alpha_1}\,dx \qquad f_z'' = \left(t_2 \frac{\gamma_1}{\alpha_1} + n_2 \frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right) dx$$

d'où

$$df_x' = \frac{\partial}{\partial x}\left(n_1 \frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) dx\,\delta y \quad df_y' = \frac{\partial t_1}{\partial x}\,dx\,\delta y \quad df_z' = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(n_1 \frac{\gamma_1}{\beta_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(t_1 \frac{\gamma_2}{\beta_2}\right)\right] dx\,\delta y$$

$$\delta f_x'' = \frac{\partial t}{\partial y}\,dx\,\delta y \quad df_y'' = \frac{\partial}{\partial y}\left(n_2 \frac{\beta_2}{\alpha_1}\right) dx\,\delta y \quad df_z'' = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(t_2 \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(n_2 \frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)\right] dx\,\delta y$$

Posons

$$v_1 = n_1 \frac{\alpha_1}{\beta_2},\ v_2 = n_2 \frac{\beta_2}{\alpha_1},\ \frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\partial f}{\partial x} = p,\ \frac{\gamma_2}{\beta_2} = \frac{\partial f}{\partial y} = q,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = s,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t$$

on a

$$n_1 \frac{\gamma_1}{\beta_2} = p\,v_1, \quad t_1 \frac{\gamma_2}{\beta_2} = q\,\vartheta, \quad t_2 \frac{\gamma_1}{\alpha_1} = p\,\vartheta, \quad n_2 \frac{\gamma_2}{\alpha_1} = q\,v_2$$

et il vient

$$df_x' = \frac{\partial v_1}{\partial x}\,dx\,\delta y \qquad df_y' = \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\,dx\,\delta y \qquad df_z' = \left[\frac{\partial (p\,v_1)}{\partial x} + \frac{\partial (q\,\vartheta)}{\partial x}\right] dx\,\delta y$$

$$\delta f_x'' = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\,dx\,\delta y \qquad \delta f_y'' = \frac{\partial v_2}{\partial y}\,dx\,\delta y \qquad \delta f_z'' = \left[\frac{\partial (p\,\vartheta)}{\partial y} + \frac{\partial (q\,v_2)}{\partial y}\right] dx\,\delta y$$

Les équations d'équilibre deviennent

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = X$$
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = Y$$
$$\frac{\partial (p\,v_1)}{\partial x} + \frac{\partial (q\,\vartheta)}{\partial x} + \frac{\partial (p\,\vartheta)}{\partial y} + \frac{\partial (q\,v_2)}{\partial y} = Z$$

La troisième équation développée s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial x} n_1 + \left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\vartheta + \frac{\partial q}{\partial y} v_2 + p\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = Z$$

ou en tenant compte des deux premières équations

$$r\,v_1 + 2\,s\,\vartheta + t\,v_2 = Z - p\,X - q\,Y$$

Si donc nous posons

$$\zeta = Z - pX - qY,$$

$\zeta$ est la projection du vecteur $(X, Y, Z)$ sur $oz$ effectuée parallèlement au plan tangent à la surface, et les équations d'équilibre s'écrivent sous la forme définitive

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = X$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = Y$$

$$r v_1 + 2 s \vartheta + t v_2 = \zeta$$

Détermination analytique des contraintes dans un voile en paraboloïde hyperbolique.

Nous appliquerons les équations générales précédentes au paraboloïde défini par l'équation

$$z = g \frac{xy}{ab}$$

représentant le voile en paraboloïde hyperbolique déterminé par le quadrilatère gauche $OACB$ (fig. 6) de côtés $OA = a$, $OB = b$ et de gauchissement $g$, par rapport à trois axes de coordonnées $oxyz$ dont le premier $ox$ est dirigé suivant $OA$, le second $oy$ suivant $OB$ et le troisième $oz$ suivant l'intersection des plans menés par $OA$ et $OB$ parallèlement à $BC$ et $AC$ respectivement.

En conservant les mêmes notations, on a

$$p = \frac{gy}{ab} \qquad q = \frac{gx}{ab} \qquad r = 0 \qquad s = \frac{g}{ab} \qquad t = 0$$

et les équations d'équilibre sont

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = X$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = Y$$

$$\frac{2g}{ab} \vartheta = \zeta$$

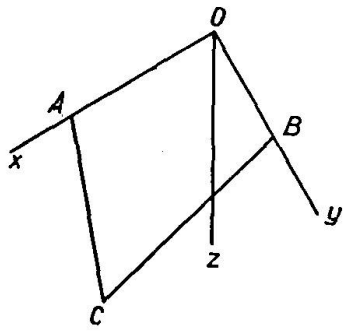



Fig. 6.

soit en intégrant

$$\vartheta = \frac{\zeta ab}{2g}$$

$$v_1 = \int X dx - \frac{ab}{2g} \int \frac{\partial \zeta}{\partial y} dx + c^{te}$$

$$v_2 = \int Y dy - \frac{ab}{2g} \int \frac{\partial \zeta}{\partial x} dy + c^{te}.$$

## § 3. Conditions générales d'emploi.

Réactions des appuis.

Un voile en paraboloïde hyperbolique doit être limité sur son pourtour par des organes susceptibles de résister aux efforts qui leur sont transmis par

le voile. Ces organes jouent vis-à-vis des voiles le même rôle que des appuis vis-à-vis d'une poutre. Nous les appellerons appuis.

Les conditions d'équilibre du voile exigent que les appuis satisfassent à certaines conditions. Nous distinguerons les systèmes d'appuis isostatiques et les systèmes d'appuis hyperstatiques. Les premiers sont ceux pour lesquels l'équilibre des contraintes dans le voile n'est possible que d'une seule manière, les seconds sont ceux pour lesquels il y a une infinité d'équilibres possibles des contraintes dans le voile compatibles avec les réactions qu'ils développent.

Au point de vue de leur nature les appuis peuvent être divisés en deux groupes, les appuis simples et les appuis doubles. Les appuis simples sont ceux qui ne peuvent développer des réactions que dans une seule direction, les appuis doubles sont ceux qui peuvent développer des réactions suivant toutes les directions d'un plan. Bien entendu les réactions développées par un appui doivent se trouver dans le plan tangent au voile. L'exemple courant d'appuis simples est constitué par ce que l'on appelle des tympans, c'est à dire des poutres ayant une grande résistance à la flexion dans un sens et une résistance très faible dans le sens perpendiculaire.

La disposition des appuis au pourtour d'un voile ne peut pas être choisie arbitrairement. Lorsque le système d'appuis doit être isostatique si les charges auxquelles le voile est soumis peuvent être quelconques, il y a nécessairement au pourtour d'un voile en paraboloïde hyperbolique des appuis doubles sur une partie de ce pourtour. Le reste du pourtour comprend un ou plusieurs bords libres et des bords aménagés en appuis simples.

Lorsque le paraboloïde est limité à un quadrilatère de génératrices, il ne peut y avoir de bords libres et pour constituer un système d'appuis isostatiques, il faut aménager deux des côtés en appuis simples et deux des côtés en appuis doubles. Lorsque le paraboloïde n'est pas limité par un quadrilatère gauche, il existe nécessairement dans un système d'appuis isostatiques des bords libres comme nous le verrons par la suite. D'une manière générale la répartition des bords libres, des appuis simples et des appuis doubles sur le pourtour d'un voile en paraboloïde hyperbolique se fait suivant les règles applicables à tous les voiles minces à courbures opposées comme nous l'avons montré par ailleurs.

## Exemples simples de voiles et d'associations de voiles.

Les modes d'emploi du paraboloïde hyperbolique comme voile mince sont très variés. Nous nous bornerons pour l'instant à quelques indications sur les voiles et associations de voiles limités à des quadrilatères gauches rectilignes.

Le plus simple de tous les voiles de cette espèce est évidemment constitué par un voile s'appuyant sur les côtés d'un quadrilatère gauche suivant lesquels sont disposées des poutres droites. La figure 7 donne un exemple de voiles de ce type.

Si l'on juxtapose des éléments constitués par des voiles du type précédent on obtient des associations plus ou moins variées de voiles limités à des quadrilatères gauches. La figure 8 représente un système composé de deux voiles accolés suivant une génératrice commune.

La disposition la plus importante au point de vue des applications consiste à juxtaposer quatre voiles limités chacun à un quadrilatère gauche, de manière que les côtés communs des quatre voiles concourent en un même point et que les axes des paraboloïdes soient parallèles. Lorsqu'au sommet commun des quatre quadrilatères gauches, les quatre paraboloïdes ont même plan tangent, et que le côté commun de deux paraboloïdes est dans le prolongement du côté

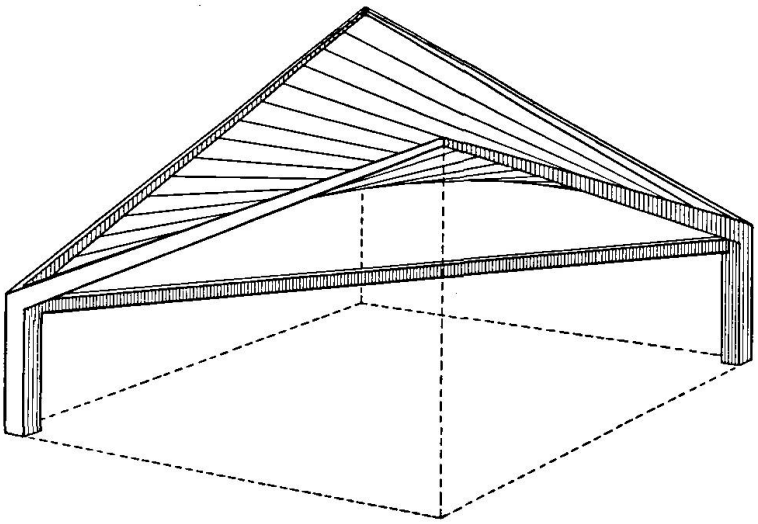


Fig. 7.

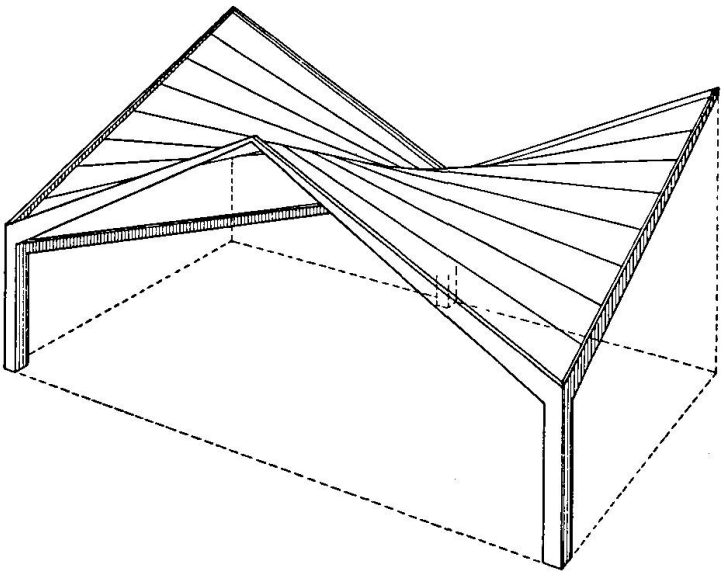


Fig. 8.

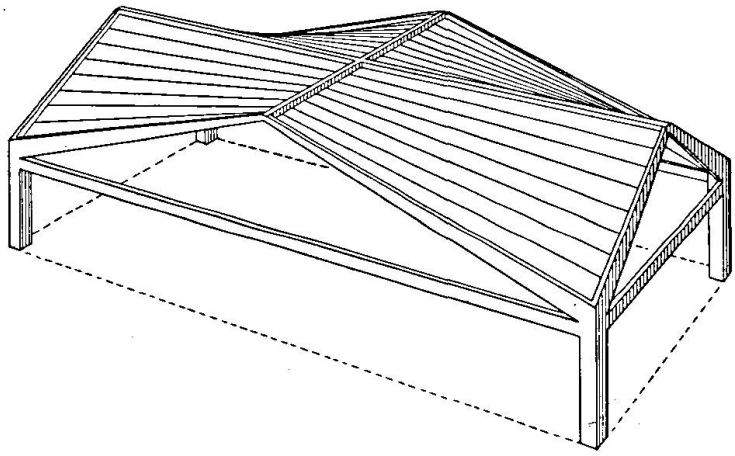


Fig. 9.

commun des deux autres, comme dans la figure 9, on obtient un voile quadruple qui se prête bien aux réalisations pratiques, parce que les réactions s'exerçant sur les côtés communs des quatre voiles se font équilibre au point d'intersection de ces côtés pour des charges uniformément réparties en projection parallèlement à l'axe commun des paraboloïdes. Si comme dans la figure 10 les côtés non communs des paraboloïdes associés sont deux à deux dans le prolongement l'un de l'autre et disposés suivant un rectangle, les réactions suivant les côtés

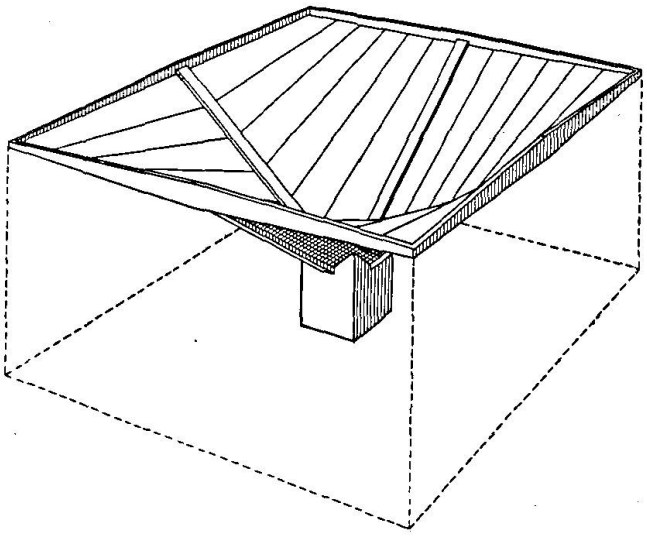


Fig. 10.

non communs s'équilibrent et les réactions suivant les côtés communs se réduisent à une force unique passant par le sommet commun des quatre quadrilatères gauches, lorsque les charges appliquées sont uniformément réparties en projection parallèlement à l'axe commun des paraboloïdes.

## § 4. Développement du calcul des contraintes.

Considérons un voile mince en paraboloïde hyperbolique à axe vertical soumis à des charges quelconques. Nous allons former des expressions générales des contraintes permettant une application facile aux cas les plus habituels de charges verticales et de charges normales et en déduire en particulier le calcul des contraintes dans les voiles minces utilisés en couverture.

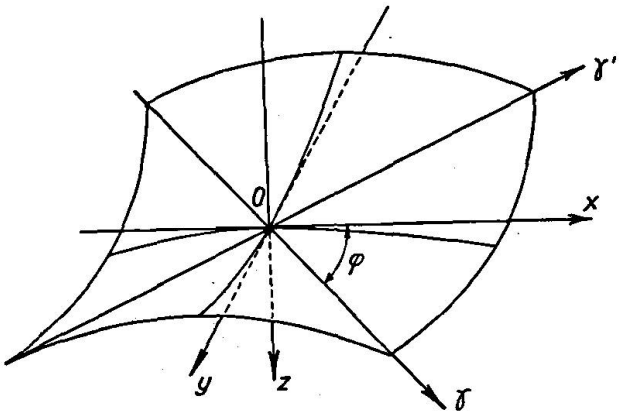



Fig. 11.

Données géométriques.

Nous considérons le paraboloïde rapporté à ses plans principaux et à son axe (fig. 11). Son équation sera de la forme:

$$2z = r x^2 + t y^2.$$

Les dérivées premières de $z$ par rapport à $x$ et $y$ seront respectivement désignées par $p$ et $q$;

$$p = r x, \quad q = t y.$$

L'axe $o z$ est supposé vertical descendant. Les traces sur le plan $x o y$ tangent au sommet $o$ des plans directeurs du paraboloïde sont les droites $o \gamma$ et $o \gamma'$ qui font avec l'axe $o x$ l'angle $\varphi$ défini par:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r}{t}}} \qquad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t}{r}}}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2\varepsilon\sqrt{-rt}}{r-t} \qquad \cos 2\varphi = -\frac{r+t}{r-t}$$

$\varepsilon$ ayant le signe de $r-t$.

Les formules de transformation permettant de passer des coordonnées $x$ et $y$ d'un point du plan $xoy$ aux coordonnées $\gamma$ et $\gamma'$ de ce point par rapport aux axes $o\gamma$ et $o\gamma'$ sont:

$$x = \frac{\gamma+\gamma'}{\sqrt{1-\frac{r}{t}}}, \qquad y = \frac{\gamma-\gamma'}{\sqrt{1-\frac{t}{r}}}$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r}{t}}\cdot x + \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{t}{r}}\cdot y$$

$$\gamma' = \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r}{t}}\cdot x - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{t}{r}}\cdot y$$

Les mêmes formules sont applicables à la transformation des composantes d'un vecteur rapportées aux mêmes axes en remplaçant les coordonnées du point considéré par les composantes du vecteur.

Nous aurons besoin de l'expression du gauchissement unitaire $k$ qui est par définition le quotient du gauchissement[1]) d'un quadrilatère de génératrices par la surface de la projection de ce quadrilatère sur le plan $xoy$. Si $z$ est la cote d'un point $M$ de coordonnées $x$ et $y$, $\gamma$ et $\gamma'$, le quadrilatère des génératrices passant par ce point et par le sommet $o$ se projette suivant un parallélogramme dont la surface est $\gamma\gamma'\sin 2\varphi$ et a pour gauchissement $z$. Donc

$$k = \frac{z}{\gamma\gamma'\sin 2\varphi}$$

avec

$$2z = rx^2 + ty^2, \qquad x = \frac{\gamma+\gamma'}{\sqrt{1-\frac{r}{t}}}, \qquad y = \frac{\gamma-\gamma'}{\sqrt{1-\frac{t}{r}}}$$

d'où

$$k = \frac{\dfrac{r(\gamma+\gamma')^2}{1-\frac{r}{t}} + \dfrac{t(\gamma-\gamma')^2}{1-\frac{t}{r}}}{2\gamma\gamma'\cdot\dfrac{\varepsilon\sqrt{-rt}}{r-t}} = \frac{\dfrac{(\gamma+\gamma')^2-(\gamma-\gamma')^2}{\frac{1}{r}-\frac{1}{t}}}{2\gamma\gamma'\cdot\dfrac{\varepsilon\sqrt{-rt}}{r-t}} = \varepsilon\sqrt{-rt}$$

## Données mécaniques.

On suppose que sur un élément $d\Sigma$ projeté en $d\sigma$ sur le plan $xoy$ s'exerce un effort $F\,d\Sigma$ ayant pour composantes suivant $ox$, $oy$ et $oz$ les vecteurs $X\,d\sigma$,

[1]) Nous rappelons que le gauchissement d'un quadrilatère de génératrices est égal à la distance comptée parallèlement à l'axe d'un des sommets au plan formé par les côtés non adjacents.

$Y\,d\sigma$ et $Z\,d\sigma$. Si l'on décompose cet effort suivant deux composantes dont l'une est verticale et l'autre située dans le plan tangent au paraboloïde, la composante verticale aura pour valeur.

$$\zeta\,d\sigma = (Z - pX - qY)\,d\sigma$$

et la composante tangentielle que nous désignerons par $T\,d\sigma$ sera définie par les composantes de sa projection sur le plan $x\,o\,y$. Ces composantes ne sont autres que $X\,d\sigma$ et $Y\,d\sigma$ suivant les axes $o\,x$ et $o\,y$. Suivant les axes $o\,\gamma$ et $o\,\gamma'$ les composantes de la projection de $T\,d\sigma$ seront

$$\Gamma\,d\sigma = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\frac{r}{t}}\cdot X + \sqrt{1-\frac{t}{r}}\cdot Y\right)d\sigma$$

$$\Gamma'\,d\sigma = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\frac{r}{t}}\cdot X - \sqrt{1-\frac{t}{r}}\cdot Y\right)d\sigma$$

$\Gamma\,d\sigma$ et $\Gamma'\,d\sigma$ sont d'ailleurs les projections sur le plan $x\,o\,y$ des composantes de $T\,d\sigma$ suivant les génératrices.

## Détermination des contraintes.

Les contraintes en un point $M$ quelconque sont bien définies lorsqu'on connaît les composantes suivant les génératrices des contraintes s'exerçant suivant les éléments de génératrices. Ces composantes sont au nombre de trois: $n_1$ qui est la composante suivant la génératrice du même système que $o\,\gamma$ de la contrainte s'exerçant sur un élément de l'autre génératrice; $n_2$ qui est la composante suivant cette dernière génératrice de la contrainte s'exerçant sur un élément de la première; $\vartheta$ qui est la valeur commune des composantes suivant les génératrices des contraintes s'exerçant suivant ces génératrices.

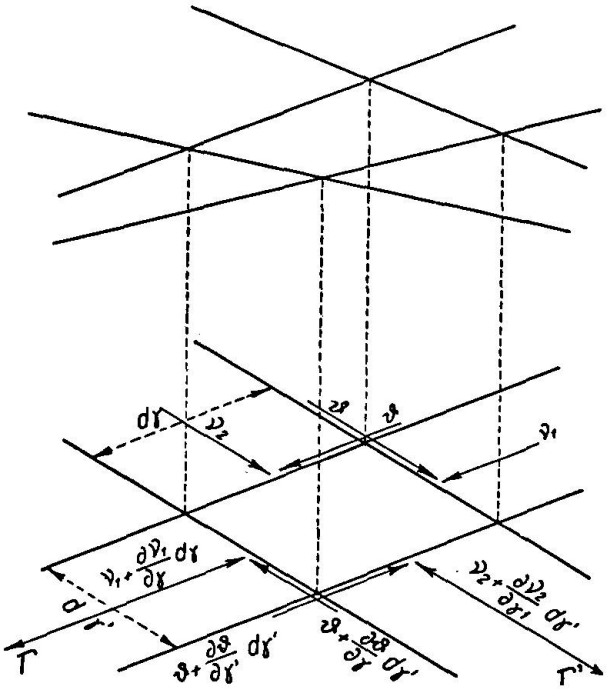



Fig. 12.

La valeur de $\vartheta$ est immédiatement connue; c'est:

$$\vartheta = \frac{\zeta}{2k} = \frac{\zeta}{2\varepsilon\sqrt{-rt}}$$

Les valeurs de $n_1$ et de $n_2$ se déduisent de celles des contraintes réduites $\nu_1$ et $\nu_2$ correspondantes, chacune de celles-ci étant définie comme la valeur de la projection de la contrainte correspondante $n_1$ ou $n_2$, rapportée à la projection de l'élément unité sur lequel elle s'exerce, toutes les projections étant faites sur le plan $x\,o\,y$. Les relations qui lient $n_1$ et $n_2$ à $\nu_1$ et $\nu_2$ sont:

$$n_1 = \nu_1\sqrt{\frac{1+\dfrac{4\gamma'^2}{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)^2}}{1+\dfrac{4\gamma^2}{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)^2}}}, \qquad n_2 = \nu_2\sqrt{\frac{1+\dfrac{4\gamma^2}{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)^2}}{1+\dfrac{4\gamma'^2}{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)^2}}}$$

Les équations qui déterminent $\nu_1$ et $\nu_2$ ne sont autres que les équations d'équilibre en projection suivant $o\gamma$ et $o\gamma'$ lesquels s'écrivent immédiatement comme on le voit sur la fig. 12. Ce sont

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial \gamma} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \gamma'} = \Gamma \sin 2\varphi$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \gamma} + \frac{\partial \nu_2}{\partial \gamma'} = \Gamma' \sin 2\varphi$$

En tenant compte de la valeur précédemment obtenue pour $\vartheta$, on trouve pour $\nu_1$ et $\nu_2$ les valeurs suivantes, déterminées sur chaque génératrice à une constante additive près:

$$\nu_1 = \frac{2\varepsilon\sqrt{-rt}}{r-t}\int \Gamma d\gamma - \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{-rt}}\int \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma'} d\gamma$$

$$\nu_2 = \frac{2\varepsilon\sqrt{-rt}}{r-t}\int \Gamma' d\gamma' - \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{-rt}}\int \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma} d\gamma'$$

Cas de charges verticales.

On a dans ce cas

$$\Gamma = \Gamma' = 0, \quad \zeta = Z$$

Les contraintes sont

$$\vartheta = \frac{Z}{2\varepsilon\sqrt{-rt}}, \quad \nu_1 = -\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{-rt}}\int \frac{\partial Z}{\partial \gamma'} d\gamma, \quad \nu_2 = -\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{-rt}}\int \frac{\partial Z}{\partial \gamma} d\gamma'$$

Cas de charges normales au paraboloïde.

Soit $N$ l'intensité de la charge normale au paraboloïde. On a

$$X = -pN, \qquad Y = -qN, \qquad Z = N$$

Posons:

$$\Phi = 1 + p^2 + q^2 = 1 - rt\left(\gamma^2 + \gamma'^2 + 2\frac{r+t}{r-t}\gamma\gamma'\right),$$

on a

$$\zeta = N(1 + p^2 + q^2) = N\Phi$$

$$\Gamma = -\tfrac{1}{2}[(r+t)\gamma + (r-t)\gamma']N = \frac{r-t}{4rt}N\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma'}$$

$$\Gamma' = -\tfrac{1}{2}[(r-t)\gamma + (r+t)\gamma']N = \frac{r-t}{4rt}N\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}$$

Les contraintes sont

$$\vartheta = \frac{N\Phi}{2\varepsilon\sqrt{-rt}}$$

$$\nu_1 = -\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{-rt}}\int\left(\Phi\frac{\partial N}{\partial \gamma'} + 2N\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma'}\right)d\gamma$$

$$\nu_2 = -\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{-rt}}\int\left(\Phi\frac{\partial N}{\partial \gamma} + 2N\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\right)d\gamma'$$

On peut dans certains cas avoir avantage, comme nous le verrons, à prendre au lieu des variables $\gamma$ et $\gamma'$ les nouvelles variables

$$g = k\gamma, \quad g' = k\gamma'$$

On a alors des expressions de même forme pour $\nu_1$ et $\nu_2$.

$$\nu_1 = -\frac{1}{2k}\int\left(\Phi\frac{\partial N}{\partial g'} + 2N\frac{\partial \Phi}{\partial g'}\right)dg$$

$$\nu_2 = -\frac{1}{2k}\int\left(\Phi\frac{\partial N}{\partial g} + 2N\frac{\partial \Phi}{\partial g}\right)dg'$$

mais l'expression de $\Phi$ se simplifie et on a

$$\Phi = 1 + g^2 + g'^2 - 2gg'\cos 2\varphi$$

d'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial g} = 2g - 2g'\cos 2\varphi, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial g'} = 2g' - 2g\cos 2\varphi$$

Nous allons, en vue des applications, traiter successivement trois cas particuliers correspondant aux valeurs $\frac{1}{\sqrt{\Phi}}$, $\frac{g}{\sqrt{\Phi}}$ et $\frac{g'}{\sqrt{\Phi}}$ de la pression $N$. Nous aurons besoin à cette occasion des valeurs des trois intégrales suivantes

$$\int\frac{dg}{\sqrt{\Phi}} = L(g - g'\cos 2\varphi + \sqrt{\Phi})$$

$$\int\frac{g - g'\cos 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}dg = \sqrt{\Phi}$$

$$\int\frac{2g^2 - 3gg'\cos 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}dg = g\sqrt{\Phi} - (g'^2 + 1)L(g - g'\cos 2\varphi + \sqrt{\Phi})$$

1er Cas: $N = \frac{1}{\sqrt{\Phi}}$

On a

$$\Phi\frac{\partial N}{\partial g'} = \frac{g\cos 2\varphi - g'}{\sqrt{\Phi}}, \qquad 2N\frac{\partial \Phi}{\partial g'} = \frac{4g' - 4g\cos 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}$$

d'où

$$\nu_1 = -\frac{3}{2k}\int\frac{g'\sin^2 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}dg + \frac{3\cos 2\varphi}{2k}\int\frac{g - g'\cos 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}dg$$

$$= \frac{3\cos 2\varphi}{2k}\sqrt{\Phi} - \frac{3g'\sin^2 2\varphi}{2k}L(g - g'\cos 2\varphi + \sqrt{\Phi});$$

de même

$$\nu_2 = \frac{3\cos 2\varphi}{2k}\sqrt{\Phi} - \frac{3g\sin^2 2\varphi}{2k}L(g' - g\cos 2\varphi + \sqrt{\Phi})$$

2e Cas: $N = \frac{g}{\sqrt{\Phi}}$

On a

$$\Phi\frac{\partial N}{\partial g'} = \frac{g^2\cos 2\varphi - gg'}{\sqrt{\Phi}}, \qquad 2N\frac{\partial \Phi}{\partial g'} = \frac{4gg' - 4g^2\cos 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}$$

d'où

$$\nu_1 = -\frac{3}{2k}\int\frac{gg'-g^2\cos 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}dg = \frac{3}{4k}\int\frac{2g^2\cos 2\varphi-3gg'\cos^2 2\varphi+gg'(1-3\sin^2 2\varphi)}{\sqrt{\Phi}}dg$$

$$= \frac{3\cos 2\varphi}{4k}\int\frac{2g^2-3gg'\cos 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}dg + \frac{3g'(1-3\sin^2 2\varphi)}{4k}\int\frac{g-g'\cos 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}dg$$

$$+ \frac{3g'^2\cos 2\varphi(1-3\sin^2 2\varphi)}{4k}\int\frac{dg}{\sqrt{\Phi}}$$

soit en définitive

$$\nu_1 = \frac{3\cos 2\varphi}{4k}g\sqrt{\Phi} + \frac{3(1-3\sin^2 2\varphi)}{4k}g'\sqrt{\Phi} - \frac{3\cos 2\varphi(1+3g'^2\sin^2 2\varphi)}{4k}L(g-g'\cos 2\varphi+\sqrt{\Phi})$$

on a de même

$$\Phi\frac{\partial N}{\partial g} = \frac{gg'\cos 2\varphi-g^2}{\sqrt{\Phi}}+\sqrt{\Phi} = \frac{g'^2-gg'\cos 2\varphi+1}{\sqrt{\Phi}}, \quad 2N\frac{\partial\Phi}{\partial g} = \frac{4g^2-4gg'\cos 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}$$

d'où

$$\nu_2 = -\frac{1}{2k}\int\frac{g'^2-5gg'\cos 2\varphi+4g^2+1}{\sqrt{\Phi}}dg' = -\frac{1}{4k}\int\frac{2g'^2-3gg'\cos 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}dg'$$

$$+ \frac{7g\cos 2\varphi}{4k}\int\frac{g'-g\cos 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}dg' - \frac{g^2(8-7\cos^2 2\varphi)+2}{4k}\int\frac{dg'}{\sqrt{\Phi}}$$

soit en définitive

$$\nu_2 = -\frac{1}{4k}g'\sqrt{\Phi} + \frac{7\cos 2\varphi}{4k}g\sqrt{\Phi} - \frac{(1+7g^2\sin^2 2\varphi)}{4k}L(g'-g\cos 2\varphi+\sqrt{\Phi})$$

### 3e Cas: $N = \frac{g'}{\sqrt{\Phi}}$

Ce cas se déduit du précédent en intervertissant $\nu_1$ et $\nu_2$ d'une part, $g$ et $g'$ d'autre part

$$\nu_1 = -\frac{1}{4k}g\sqrt{\Phi} + \frac{7\cos 2\varphi}{4k}g'\sqrt{\Phi} - \frac{(1+7g'^2\sin^2 2\varphi)}{4k}L(g-g'\cos 2\varphi+\sqrt{\Phi})$$

$$\nu_2 = \frac{3\cos 2\varphi}{4k}g'\sqrt{\Phi} + \frac{3(1-3\sin^2 2\varphi)}{4k}g\sqrt{\Phi} - \frac{3\cos 2\varphi(1+3g^2\sin^2 2\varphi)}{4k}L(g'-g\cos 2\varphi+\sqrt{\Phi})$$

## Calcul des couvertures.

Les couvertures sont soumises à trois systèmes d'efforts, celui de leur charge propre, celui dû à la neige et celui dû au vent. Nous les étudierons successivement.

### 1° Charge propre.

Si la couverture est un voile mince d'épaisseur constante et de densité $\varpi$ par unité de surface, la charge propre appliquée correspond à:

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = \varpi\sqrt{\Phi}$$

$\Phi$ ayant la même signification que précédemment. En prenant pour variables les quantités $g$ et $g'$ précédemment considérées on peut écrire

$$\nu_1 = -\frac{\varpi}{2k}\int\frac{\partial\sqrt{\Phi}}{\partial g'}dg = -\frac{\varpi}{2k}\int\frac{g'-g\cos 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}dg$$

$$= \varpi\frac{\cos 2\varphi}{2k}\int\frac{g-g'\cos 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}dg - \frac{\varpi}{2k}\int\frac{g'\sin^2 2\varphi}{\sqrt{\Phi}}dg$$

ou en définitive

$$\nu_1 = \varpi\frac{\cos 2\varphi}{2k}\sqrt{\Phi} - \varpi\frac{g'\sin^2 2\varphi}{2k}L(g-g'\cos 2\varphi+\sqrt{\Phi}),$$

de même

$$\nu_2 = \varpi\frac{\cos 2\varphi}{2k}\sqrt{\Phi} - \varpi\frac{g\sin^2 2\varphi}{2k}L(g'-g\cos 2\varphi+\sqrt{\Phi})$$

par ailleurs

$$\vartheta = \varpi\frac{\sqrt{\Phi}}{2k}$$

2° Neige.

La neige étant supposée uniformément répartie en projections horizontales ne donne aucune contrainte $\nu_1$, $\nu_2$ suivant les génératrices.

3° Vent.

Deux cas sont à distinguer suivant la position des éléments frappés; ou bien la pression du vent ne dépend pas de l'incidence et peut être pratiquement prise égale à une constante $P_0$, ou bien la pression du vent dépend de l'incidence seule et peut être assez bien representée par une expression de la forme $2P_0\sin\alpha$, où $P_0$ désigne une constante et $\alpha$ l'angle de la direction du vent avec le plan tangent à la surface frappée.

Le cas de la pression constante se traite immédiatement en faisant $N = P_0$ dans les équations précédemment données, on a:

$$\nu_1 = -\frac{2P_0}{k}\int(g'-g\cos 2\varphi)\,g = -\frac{P_0}{k}(2gg'-g^2\cos 2\varphi)$$

de même

$$\nu_2 = -\frac{P_0}{k}(2gg'-g'^2\cos 2\varphi)$$

par ailleurs

$$\vartheta = \frac{P_0}{2k}(1+g^2+g'^2-2gg'\cos 2\varphi)$$

Passons au cas où la pression du vent obéit à la loi $2P_0\sin\alpha$. On a

$$\sin\alpha = \frac{-rx\cos a - ty\cos b + \cos c}{\sqrt{\Phi}} = \frac{-r\dfrac{\gamma+\gamma'}{\sqrt{1-\dfrac{r}{t}}}\cos a - t\dfrac{\gamma-\gamma'}{\sqrt{1-\dfrac{t}{r}}}\cos b + \cos c}{\sqrt{\Phi}}$$

$a$, $b$, $c$ désignant les angles de la direction du vent avec les axes $ox$, $oy$, $oz$. On peut encore écrire

$$\sin\alpha = \frac{-\dfrac{r}{\varepsilon\sqrt{-rt}}\cdot\dfrac{g+g'}{\sqrt{1-\dfrac{r}{t}}}\cos a - \dfrac{t}{\varepsilon\sqrt{-rt}}\cdot\dfrac{g-g'}{\sqrt{1-\dfrac{t}{r}}}\cos b + \cos c}{\sqrt{\Phi}}.$$

Or

$$\frac{r}{\varepsilon\sqrt{-rt}} = \frac{1}{\sqrt{-\dfrac{t}{r}}}, \qquad \frac{t}{\varepsilon\sqrt{-rt}} = \frac{-1}{\sqrt{-\dfrac{r}{t}}}$$

donc

$$\sin\alpha = \frac{-\dfrac{g+g'}{\sqrt{1-\dfrac{t}{r}}}\cos a + \dfrac{g-g'}{\sqrt{1-\dfrac{r}{t}}}\cos b + \cos c}{\sqrt{\Phi}}$$

$$= \frac{-\cos a\sin\varphi(g+g') + \cos b\cos\varphi(g-g') + \cos c}{\sqrt{\Phi}}$$

soit en définitive

$$\sin\alpha = \frac{\left[\cos a\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+\cos b\cos\varphi\right]g+\left[\cos a\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+\cos b\cos(\varphi+\pi)\right]g'+\cos c}{\sqrt{\Phi}}.$$

L'expression précédente se simplifie si l'on suppose, comme dans la figure 13 que la direction du vent est définie par les angles $\lambda$, $\mu$, $\nu$ qu'elle fait respectivement avec la droite $oL$ du plan $xoy$ définie par $(o\widehat{x, oL}) = \varphi + \frac{\pi}{2}$, avec la droite $OM$ du plan $xoy$ définie par $(o\widehat{x, oM}) = -\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ et avec la verticale descendante $oz$. On a en effet dans ce cas:

$$\cos\lambda = \cos a\cdot\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) + \cos b\cdot\cos\varphi,$$

$$\cos\mu = \cos a\cdot\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) + \cos b\cdot\cos(\varphi+\pi),$$

$$\cos\nu = \cos c$$

et

$$\sin\alpha = \frac{g\cos\lambda + g'\cos\mu + \cos\nu}{\sqrt{\Phi}}.$$

On a en définitive

$$N = 2P_0\frac{g\cos\lambda + g'\cos\mu + \cos\nu}{\sqrt{\Phi}}.$$

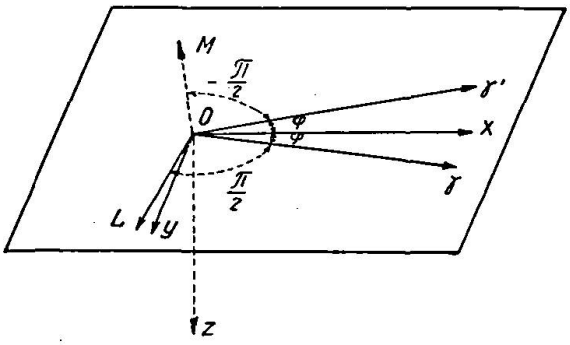


Fig. 13.

Nous sommes ramenés aux trois cas précédemment traités, l'application des formules ainsi trouvées donne immédiatement

$$\nu_1 = \frac{P_0}{2k}[(3\cos 2\varphi\cos\lambda - \cos\mu)g + (3(1-3\sin^2 2\varphi)\cos\lambda + 7\cos 2\varphi\cos\mu)g' + 6\cos\nu\cos 2\varphi]\sqrt{\Phi}$$
$$+ \frac{P_0}{2k}[(-q\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi\cos\lambda - 7\sin^2 2\varphi\cos\mu)g'^2 - 6g'\sin^2 2\varphi\cos\nu - 3\cos 2\varphi\cos\lambda - \cos\mu]L(g - g'\cos 2\varphi + \sqrt{\Phi})$$
$$\nu_2 = \frac{P_0}{2k}[(3\cos 2\varphi\cos\mu - \cos\lambda)g' + (3(1-3\sin^2 2\varphi)\cos\mu + 7\cos 2\varphi\cos\lambda)g + 6\cos 2\varphi\cos\nu]\sqrt{\Phi}$$
$$+ \frac{P_0}{2k}[(-q\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi\cos\mu - 7\sin^2 2\varphi\cos\lambda)g^2 - 6g\sin^2 2\varphi\cos\nu - 3\cos 2\varphi\cos\mu - \cos\lambda]L(g' - g\cos 2\varphi + \sqrt{\Phi})$$
$$\vartheta = \frac{P_0}{k}(g\cos\lambda + g'\cos\mu + \cos\nu)\sqrt{\Phi}.$$

En ordonnant par rapport à $\cos\lambda$, $\cos\mu$ et $\cos\nu$, ces formules deviennent:

$$\frac{\nu_1}{\frac{P_0}{2k}} = \cos\lambda[3(g\cos 2\varphi + (1-3\sin^2 2\varphi)g')\sqrt{\Phi} - 3(3g'^2\sin^2 2\varphi + 1)\cos 2\varphi \cdot L(g - g'\cos 2\varphi + \sqrt{\Phi})]$$
$$+ \cos\mu[(-g + 7g'\cos 2\varphi)\sqrt{\Phi} + (-7g'^2\sin^2 2\varphi - 1)L(g - g'\cos 2\varphi + \sqrt{\Phi})]$$
$$+ \cos\nu[6\cos 2\varphi\sqrt{\Phi} - 6g'\sin^2 2\varphi\, L(g - g'\cos 2\varphi + \sqrt{\Phi})]$$
$$\frac{\nu_2}{\frac{P_0}{2k}} = \cos\lambda[(-g' + 7g\cos 2\varphi)\sqrt{\Phi} + (-7g^2\sin^2 2\varphi - 1)L(g' - g\cos 2\varphi + \sqrt{\Phi})]$$
$$+ \cos\mu[3(g'\cos 2\varphi + (1-3\sin^2 2\varphi)g)\sqrt{\Phi} - 3(3g^2\sin^2 2\varphi + 1)\cos 2\varphi \cdot L(g' - g\cos 2\varphi + \sqrt{\Phi})]$$
$$+ \cos\nu[6\cos 2\varphi\sqrt{\Phi} - 6g\sin^2 2\varphi\, L(g' - g\cos 2\varphi + \sqrt{\Phi})]$$
$$\frac{\vartheta}{\frac{P_0}{k}} = \cos\lambda \cdot g\sqrt{\Phi} + \cos\mu \cdot g'\sqrt{\Phi} + \cos\nu \cdot \sqrt{\Phi}.$$

Ces formules se simplifient lorsque le paraboloïde est équilatère, ce qui correspond à $\varphi = \frac{\pi}{4}$. $OL$ et $OM$ sont alors directement opposés à $o\gamma'$ et $o\gamma$.

$$\frac{\nu_1}{\frac{P_0}{2k}} = -\cos\lambda[6g'\sqrt{1+g^2+g'^2}]$$
$$-\cos\mu[g\sqrt{1+g^2+g'^2} + (7g'^2+1)L(g + \sqrt{1+g^2+g'^2})]$$
$$-\cos\nu[6g'L(g + \sqrt{1+g^2+g'^2})]$$
$$\frac{\nu_2}{\frac{P_0}{2k}} = -\cos\lambda[g'\sqrt{1+g^2+g'^2} + (7g^2+1)L(g' + \sqrt{1+g^2+g'^2})]$$
$$-\cos\mu[6g\sqrt{1+g^2+g'^2}]$$
$$-\cos\nu[6gL(g' + \sqrt{1+g^2+g'^2})]$$
$$\frac{\vartheta}{\frac{P_0}{k}} = \cos\lambda \cdot g\sqrt{1+g^2+g'^2} + \cos\mu \cdot g'\sqrt{1+g^2+g'^2} + \cos\nu \cdot \sqrt{1+g^2+g'^2}.$$

## § 5. Abaques pour le calcul des contraintes dans les couvertures.

Les résultats du § 4 relatifs aux couvertures peuvent être condensés sous forme d'abaques. Pour faciliter l'utilisation de ces abaques nous rappelons succintement les notations, les données et les formules auxquelles elles se rapportent.

Notations, données, inconnues.

Le paraboloïde rapporté à ses plans principaux $xoz$ et $yoz$ et à son axe $oz$ supposé vertical descendant est représenté par l'équation

$$2z = rx^2 + ty^2.$$

Si on rapporte le paraboloïde à ses génératrices au sommet $o\gamma$ et $o\gamma'$ qui font avec $ox$ l'angle $\varphi$ défini par:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r}{t}}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t}{r}}}, \quad \sin 2\varphi = \frac{2\varepsilon\sqrt{-rt}}{r-t}, \quad \cos 2\varphi = -\frac{r+t}{r-t}$$

$\varepsilon$ ayant le signe de $r-t$, son équation s'écrit

$$z = k\gamma\gamma' \sin 2\varphi,$$

$k$ étant le gauchissement unitaire défini par la formule

$$k = \varepsilon\sqrt{-rt}.$$

Au lieu des variables $\gamma$ et $\gamma'$ qui ont les dimensions d'une longueur nous rapporterons le paraboloïde aux variables sans dimensions

$$g = k\gamma, \qquad g' = k\gamma'.$$

Le rapport $\Phi$ d'un élément de surface à sa projection horizontale s'écrit avec ces variables

$$\Phi = 1 + g^2 + g'^2 - 2gg' \cos 2\varphi.$$

Associons au système de variables $g$ et $g'$ deux autres systèmes, le premier formé par les variables

$$g_1 = g - g' \cos 2\varphi, \qquad g_1' = g' \sin 2\varphi$$

le second formé par les variables

$$g_2 = g' - g \cos 2\varphi, \qquad g_2' = g \sin 2\varphi.$$

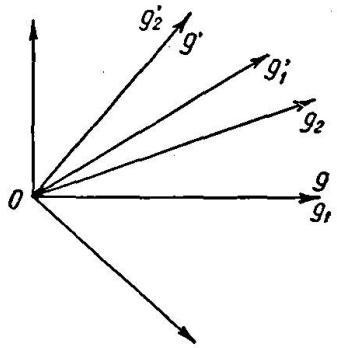


Fig. 14.

Ces deux systèmes sont identiques au système des variables $g$ et $g'$ lorsque le paraboloïde est équilatère. Dans le cas général, il est facile de passer d'un système à l'autre. La figure 14 montre les positions relatives des axes des trois systèmes. Les axes des $g$ et des $g_1$ coïncident et il en est de même des axes des $g'_2$ et des $g'$. L'axe des $g'_1$ est défini par la condition que l'axe des $g'$ est le lieu des milieux des segments découpés sur l'axe des $g'_1$ et la perpendiculaire à l'axe des $g$ par des parallèles à l'axe des $g$. De même l'axe des $g_2$ est défini par la condition que l'axe des $g$ est le lieu des milieux des segments découpés sur l'axe des $g_2$ et la perpendiculaire à l'axe des $g'$ par des parallèles à l'axe des $g'$.

Les contraintes en un point sont définies par leurs trois composantes $n_1$, $n_2$ et $\vartheta$ s'exerçant sur les éléments de génératrices parallèlement à ces génératrices, $n_1$ est la composante suivant la génératrice du même système que $o\gamma$ de la contrainte s'exerçant sur un élément de l'autre génératrice; $n_2$ est la composante suivant la génératrice du même système que $o\gamma'$ de la contrainte s'exerçant sur un élément de l'autre génératrice; $\vartheta$ est la valeur commune des composantes suivant les génératrices des contraintes s'exerçant suivant ces génératrices. Seule la contrainte $\vartheta$ est bien déterminée et facilement connue en fonction des charges appliquées. Les contraintes $n_1$ et $n_2$ ne sont déterminées sur les génératrices qui les portent qu'à une constante près, fonction de la position de la génératrice. Associons à chacune des contraintes $n_1$ et $n_2$ le rapport de sa projection horizon-

tale à la projection de l'élément unité sur lequel elle s'exerce. Les deux quantités ainsi obtenues sont les contraintes réduites $\nu_1$ et $\nu_2$. Elles sont liées à $n_1$ et $n_2$ par les formules

$$\frac{n_1}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1 + g'^2 \sin^2 2\varphi}{1 + g^2 \sin^2 2\varphi}}, \qquad \frac{n_2}{\nu_2} = \sqrt{\frac{1 + g^2 \sin^2 2\varphi}{1 + g'^2 \sin^2 2\varphi}}$$

qui s'écrivent encore avec les variables $g'_1$ et $g'_2$

$$\frac{n_1}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1 + g_1'^2}{1 + g_2'^2}}, \qquad \frac{n_2}{\nu_2} = \sqrt{\frac{1 + g_2'^2}{1 + g_1'^2}}.$$

Les systèmes de charges appliquées sont de quatre sortes:

1° la charge propre supposée répartie avec une densité constante $\varpi$ par unité de surface;

2° la charge de neige supposée uniformément répartie en projection horizontale avec une densité $\varpi'$ constante;

3° la charge de vent constant supposée s'exerçant normalement à la surface avec une intensité constante $P_0$;

4° la charge de vent variable supposée s'exerçant normalement à la surface avec une intensité égale à $2P_0 \sin \alpha$, où $P_0$ désigne une constante et $\alpha$ l'angle de la direction du vent avec le plan tangent à la surface frappée, direction définie par les angles $\lambda$, $\mu$, $\nu$ qu'elle fait respectivement comme le montre la figure 13 avec la droite $oL$ du plan $xoy$ telle que $(\widehat{ox, oL}) = \varphi + \frac{\pi}{2}$, avec la droite $oM$ du plan $xoy$ telle que $(\widehat{ox, oM}) = -\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, et avec la verticale descendante $oz$.

Pour chacun des cas de charge précédents nous indiquerons les valeurs de $\nu_1$, $\nu_2$ et $\vartheta$, les deux premières étant données sous forme indéfinie, c'est à dire déterminées à une fonction additive près constante sur toute parallèle à la direction correspondante de la contrainte réduite. Les valeurs des contraintes $n_1$ et $n_2$ se déduisent sans difficulté de celles de $\nu_1$ et $\nu_2$.

### Fonctions $\chi$ $\Omega$ $\Psi$, $H$, $K$, $L$.

Introduisons les fonctions des variables $j$ et $j'$

$$\begin{aligned}
\chi(j,j') &= \sqrt{\frac{1+j^2}{1+j'^2}} \\
\Omega(j,j') &= 6\sqrt{1+j^2+j'^2} \\
\Psi(j,j') &= 6j' \log_e (j + \sqrt{1+j^2+j'^2}) \\
H(j,j') &= j\sqrt{1+j^2+j'^2} + (7j'^2+1) \log_e (j + \sqrt{1+j^2+j'^2}) \\
K(j,j') &= 6j'\sqrt{1+j^2+j'^2} \\
L(j,j') &= 3(3j'^2+1) \log_e (j + \sqrt{1+j^2+j'^2}) - 3j\sqrt{1+j^2+j'^2}
\end{aligned}$$

dont les valeurs sont données par les abaques ci après. La fonction $\chi(j,j')$ permet le passage aisé des contraintes réduites $\nu_1$ et $\nu_2$ aux contraintes réelles $n_1$ et $n_2$. Les fonctions $\Omega(j,j')$ et $\Psi(j,j')$ facilitent le calcul des contraintes dans le cas de la charge propre et les fonctions $\Omega(j,j')$, $\Psi(j,j')$, $H(j,j')$, $K(j,j')$, $L(j,j')$ permettent un calcul rapide des contraintes dans le cas de la charge de vent variable. Les cas de charge de neige ou de vent constant se traitent directement sans l'intermédiaire d'aucune fonction.

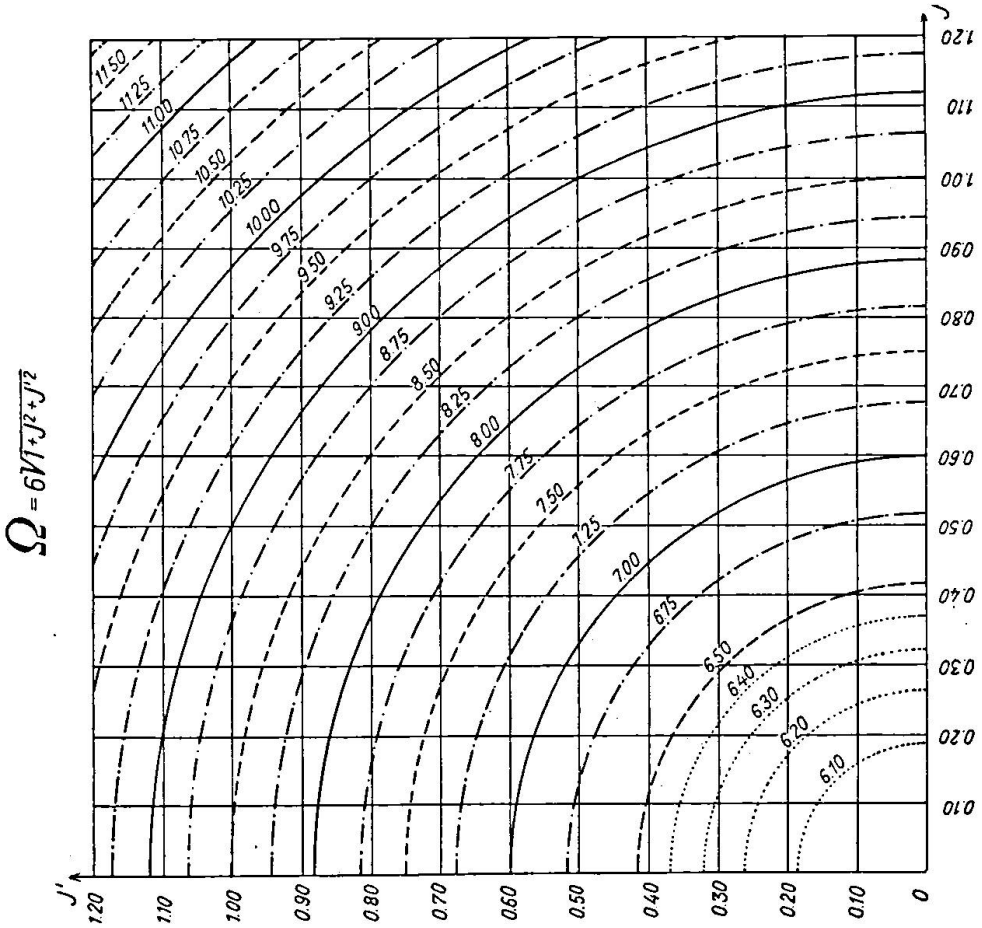

$\Omega = 6\sqrt{1+J^2+J'^2}$
J'
J
11.50
11.25
11.00
10.75
10.50
10.25
10.00
9.75
9.50
9.25
9.00
8.75
8.50
8.25
8.00
7.75
7.50
7.25
7.00
6.75
6.50
6.40
6.30
6.20
6.10

Fig. 17.

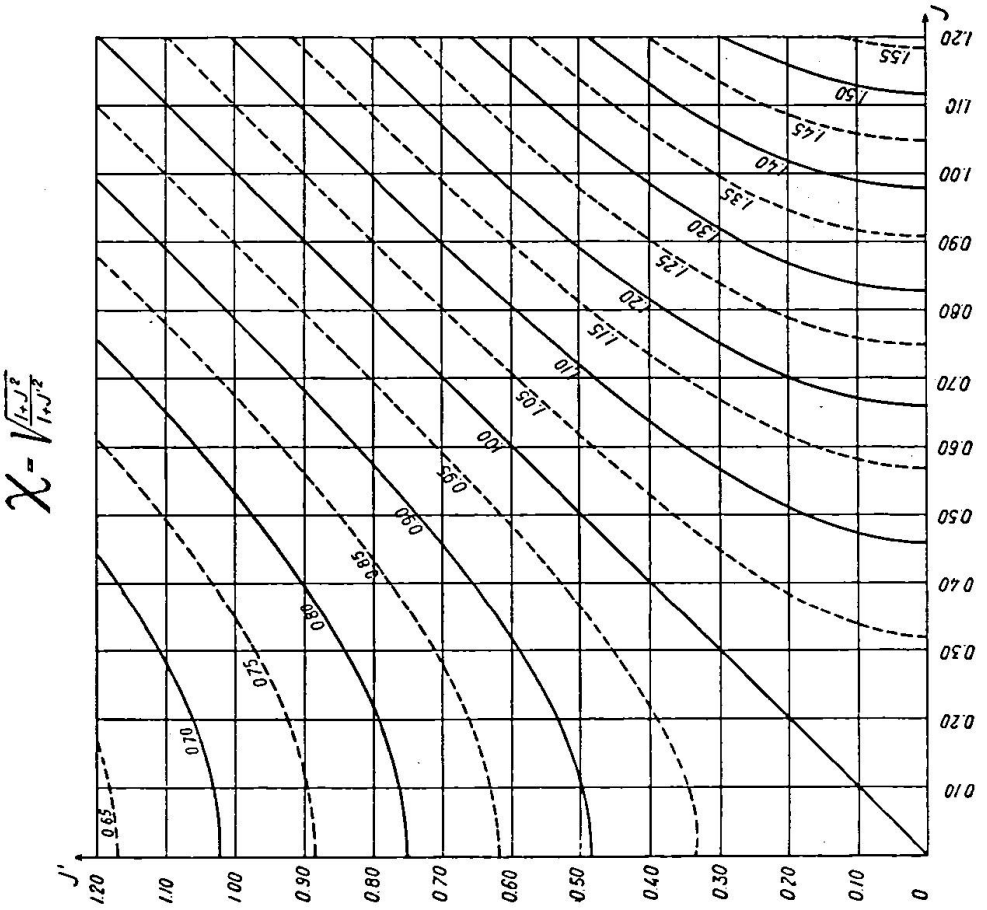

$\chi = \sqrt{\frac{1+J^2}{1+J'^2}}$
J'
J
1.55
1.50
1.45
1.40
1.35
1.30
1.25
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
0.70
0.65

Fig. 16.

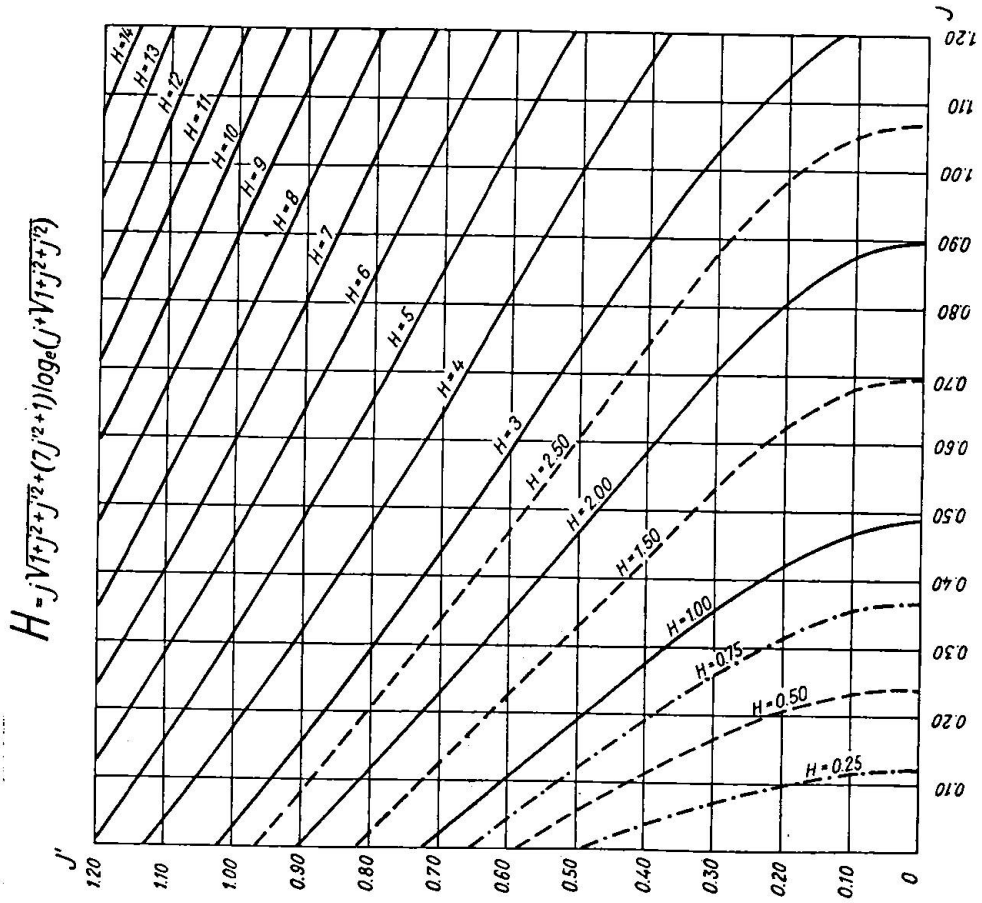

H = j'√(1+j'²+j'⁴)+(7j'²+1)log_e(j'+√(1+j'²+j'⁴))
H=14
H=13
H=12
H=11
H=10
H=9
H=8
H=7
H=6
H=5
H=4
H=3
H=2.50
H=2.00
H=1.50
H=1.00
H=0.75
H=0.50
H=0.25
j'
1.20
1.10
1.00
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0

Fig. 19.

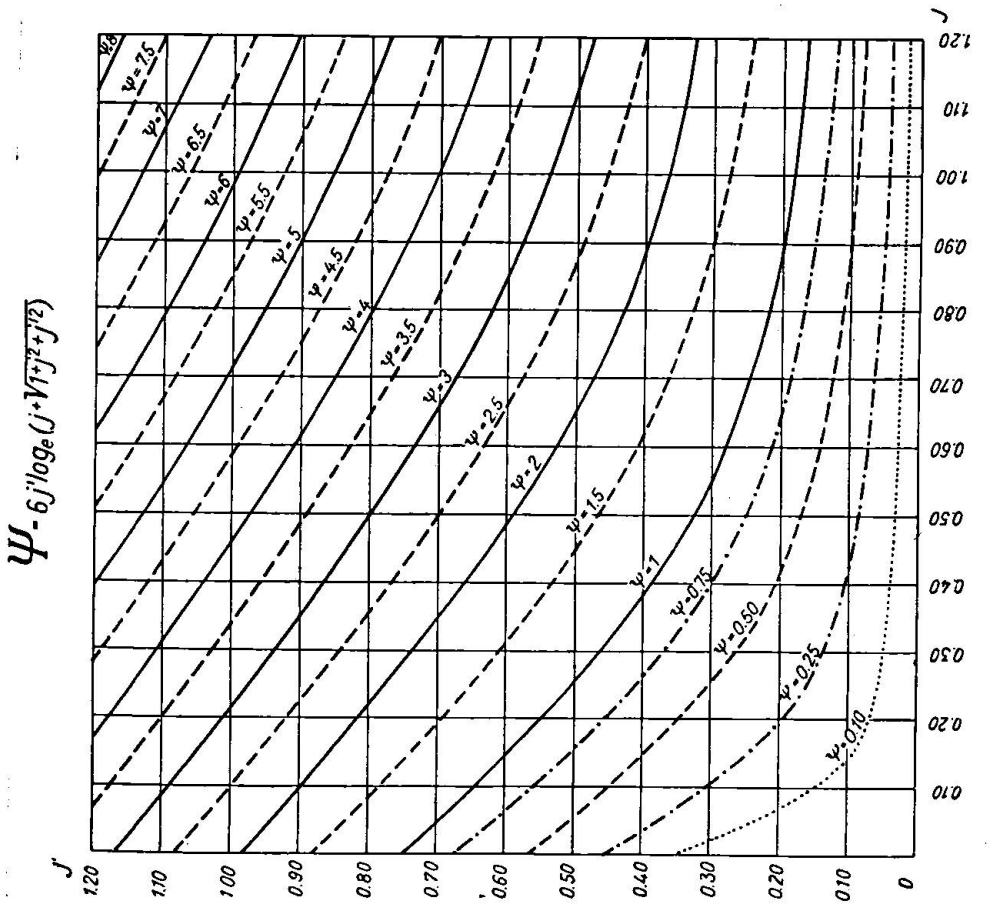

Ψ = 6j'log_e(j'+√(1+j'²+j'⁴))
ψ=8
ψ=7.5
ψ=7
ψ=6.5
ψ=6
ψ=5.5
ψ=5
ψ=4.5
ψ=4
ψ=3.5
ψ=3
ψ=2.5
ψ=2
ψ=1.5
ψ=1
ψ=0.75
ψ=0.50
ψ=0.25
ψ=0.10
j'
1.20
1.10
1.00
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0

Fig. 18.

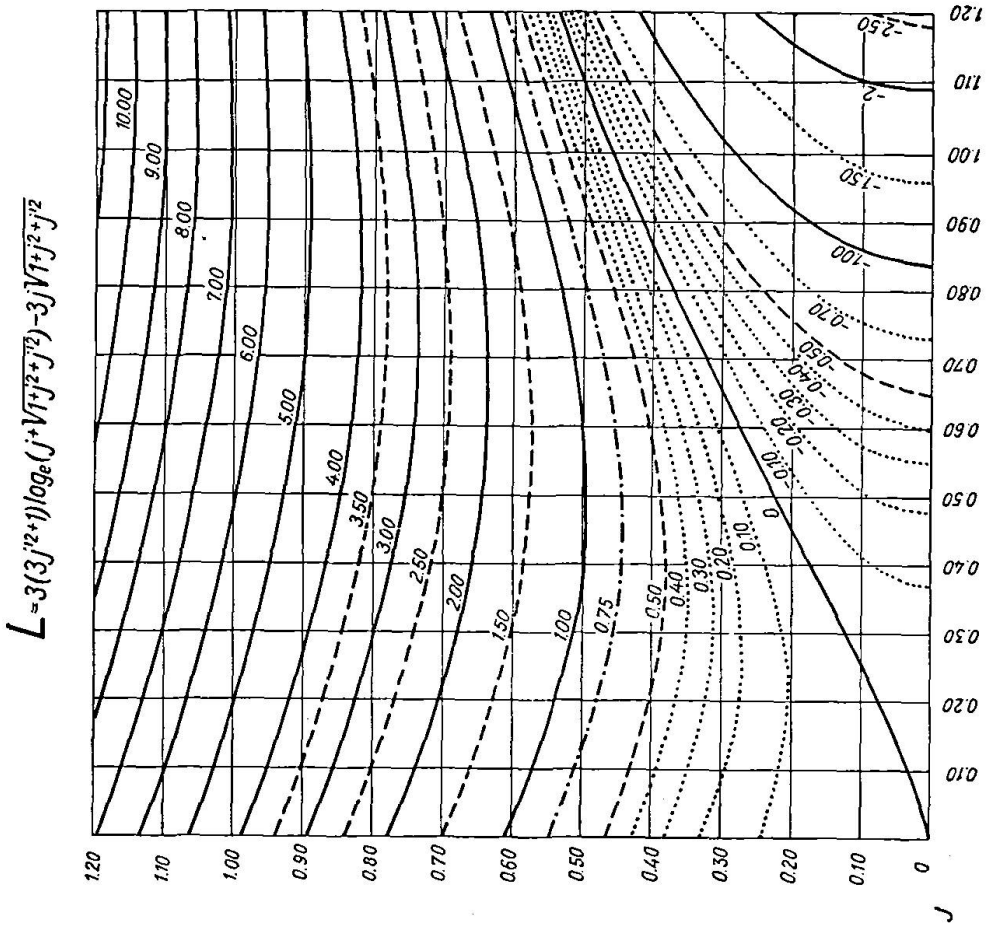

$L = 3(3j'^2+1)\log_e(j'+\sqrt{1+j'^2+j'^2}) - 3j'\sqrt{1+j'^2+j'^2}$
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
4.00
3.50
3.00
2.50
2.00
1.50
1.00
0.75
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0
-0.10
-0.20
-0.30
-0.40
-0.50
-0.70
-1.00
-1.50
-2
-2.50
j'
j

Fig. 21.

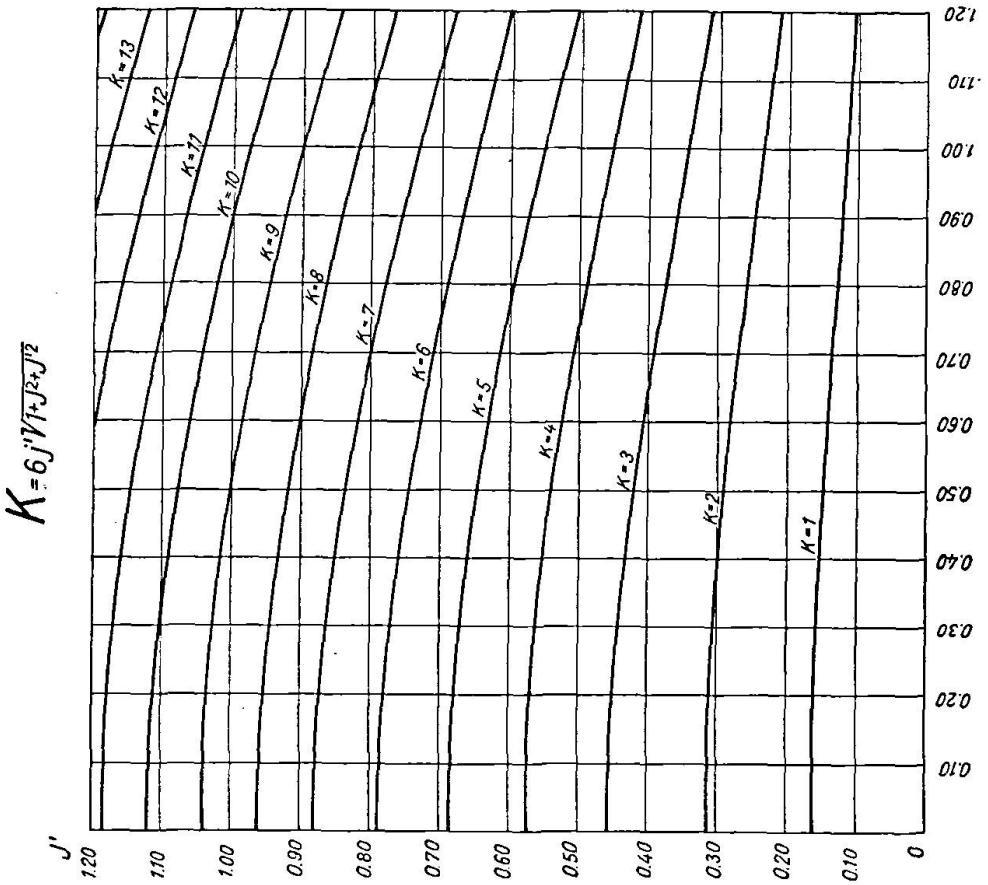

$K = 6j'\sqrt{1+j'^2+j'^2}$
K=13
K=12
K=11
K=10
K=9
K=8
K=7
K=6
K=5
K=4
K=3
K=2
K=1
j'

Fig. 20.

Passage des contraintes réduites aux contraintes réelles.

$$\frac{n_1}{\nu_1} = \chi(g_1', g_2')$$

$$\frac{n_2}{\nu_2} = \chi(g_2', g_1')$$

Charge propre de densité constante par unité de surface.

$$\frac{\vartheta}{\frac{\bar{\omega}}{12k}} = \Omega(g_1, g_1')$$

$$\frac{\nu_1}{\frac{\bar{\omega}}{12k}} = \Omega(g_1, g_1') \cos 2\varphi - \Psi(g_1, g_1') \sin 2\varphi$$

$$\frac{\nu_2}{\frac{\bar{\omega}}{12k}} = \Omega(g_2, g_2') \cos 2\varphi - \Psi(g_2, g_2') \sin 2\varphi$$

Charge de neige.

$$\vartheta = \frac{\bar{\omega}'}{2k}$$

$$\nu_1 = 0$$

$$\nu_2 = 0$$

Charge de vent constant.

$$\frac{\vartheta}{\frac{P_0}{2k}} = 1 + g^2 + g'^2 - 2gg' \cos 2\varphi$$

$$\frac{\nu_1}{\frac{P_0}{k}} = -g(2g' - g \cos 2\varphi)$$

$$\frac{\nu_2}{\frac{P_0}{k}} = -g'(2g - g' \cos 2\varphi)$$

Charge de vent variable.

$$\frac{\vartheta}{\frac{P_0}{6k}} = \cos\lambda\,[K(g_1', g_1) + K(g_1, g_1') \cot 2\varphi] + \cos\mu\,[K(g_2', g_2) + K(g_2, g_2') \cot 2\varphi] + \cos\nu \cdot \Omega(g_1, g_1')$$

$$\frac{\nu_1}{\frac{P_0}{2k}} = -\cos\lambda\,[K(g_1, g_1') \sin 2\varphi (1 - \cot^2 2\varphi) + L(g_1, g_1') \cos 2\varphi] - \cos\mu\,[H(g_1, g_1') - K(g_1, g_1') \cot 2\varphi] - \cos\nu\,[\Psi(g_1, g_1') \sin 2\varphi - \Omega(g_1, g_1') \cos 2\varphi]$$

$$\frac{\nu_2}{\frac{P_0}{2k}} = -\cos\lambda\,[H(g_2, g_2') - K(g_2, g_2') \cot 2\varphi] - \cos\mu\,[K(g_2, g_2') \sin 2\varphi (1 - \cot^2 2\varphi) + L(g_2, g_2') \cos 2\varphi] - \cos\nu\,[\Psi(g_2, g_2') \sin 2\varphi - \Omega(g_2, g_2') \cos 2\psi].$$

# Chapitre B.
# Théorie géométrique des voiles limités à des paraboles principales.

## § 1. Généralités.

### Définition des voiles étudiés.

Considérons un voile mince en paraboloïde hyperbolique limité à un quadrilatère curviligne formé de paraboles principales, c'est à dire de paraboles parallèles aux plans principaux (plans de symétrie) de la quadrique. Un tel

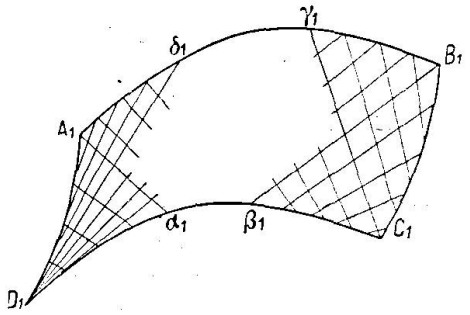
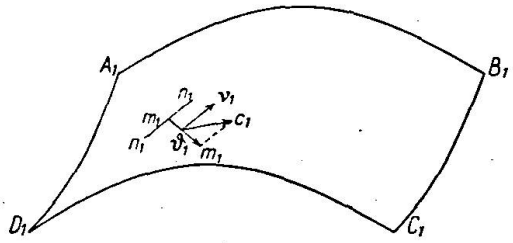



Fig. 22.



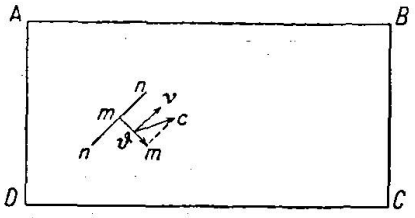




Fig. 24.

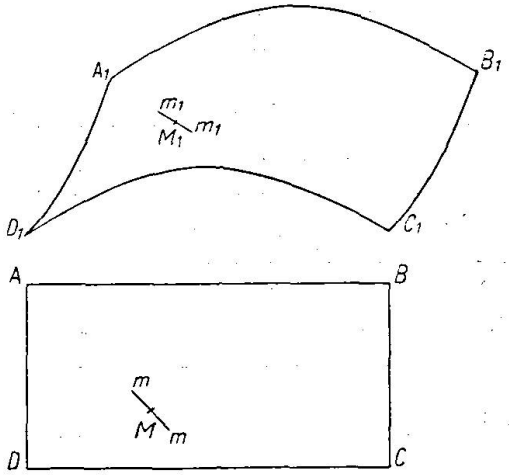



Fig. 23.

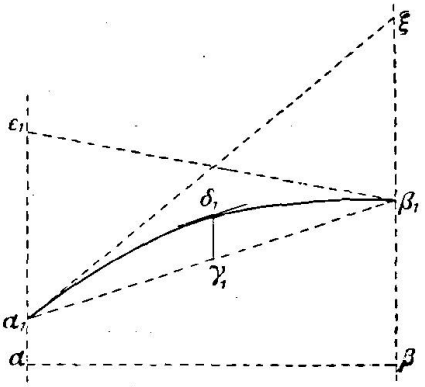



Fig. 25.

voile peut être calculé par les méthodes générales applicables à tous les voiles en paraboloïde hyperbolique. Mais ce mode de calcul ne permet pas de mettre aussi bien en évidence les propriétés mécaniques du voile que la méthode géométrique que nous nous proposons d'exposer. Cette méthode repose toute entière, comme nous allons le voir, sur les propriétés géométriques élémentaires de la parabole.

Soit $A_1 B_1 C_1 D_1$ un voile de cette espèce (fig. 22). Il existe toujours deux côtés opposés, par exemple $A_1 D_1$ et $B_1 C_1$, tels que les génératrices qui passent par ces côtés coupent un des deux autres côtés. On voit alors immédiatement que les réactions d'un tel voile sur son pourtour peuvent se réduire dans tous les cas soit à des forces appliquées le long de $C_1 D_1$ et à des forces appliquées le long de $A_1 B_1$ soit à des forces appliquées le long de $A_1 B_1$ et $C_1 D_1$ dans les plans de ces arcs et à des forces quelconques appliquées le long de $A_1 D_1$

ou le long de $B_1 C_1$. Ces circonstances résultent directement de l'indétermination des efforts de traction simple ou de compression simple que peuvent transmettre les génératrices. Elles ont en particulier cette conséquence que les réactions du voile supposé soumis à des forces toutes parallèles à une direction fixe ne sont pas en général toutes parallèles à cette direction et ne sont même pas toutes contenues dans les plans des arcs de pourtour dans le cas où la direction fixe considérée coïncide avec la direction de l'axe du paraboloïde. Cette particularité ne doit pas nous surprendre, elle est l'analogue du phénomène de poussée dans les arcs. Toutefois elle constitue un inconvénient sérieux pour les applications des voiles qui nous occupent, et il importe au premier chef d'en atténuer les effets par un choix judicieux des formes de voile et de la disposition des points d'appui. C'est ainsi que parmi les voiles limités à quatre paraboles principales, deux types fondamentaux méritent une attention spéciale. Nous désignons ces deux types fondamentaux sous les noms de voiles normaux et voiles semi-normaux.

Un voile sera dit „semi-normal" lorsqu'il se projettera horizontalement suivant un rectangle dont les diagonales sont parallèles aux projections des génératrices. Un voile sera dit „normal" lorsqu'on pourra le considérer comme la juxtaposition de 2 voiles semi-normaux. La raison de ces dénominations résultera d'elle-même des propriétés des 2 types de voiles.

### Contraintes réduites.

Pour la simplification de l'exposé nous ne considérerons que des voiles à axe vertical dont les génératrices se projettent suivant deux séries de droites parallèles.

Soit $A_1 B_1 C_1 D_1$ un tel voile (fig. 28). Projetons le horizontalement suivant le rectangle $A B C D$. L'étude des contraintes dans le voile en un point quelconque $M_1$ peut être remplacée par celle des contraintes en projection horizontale au point $M$ projection de $M_1$, contraintes que nous appellerons contraintes réduites. Par définition la contrainte réduite s'exerçant sur un élément unité $m m$ de la projection du voile est la projection de la force élastique s'exerçant sur l'élément $m_1 m_1$ du voile projeté en $m m$. La répartition des contraintes réduites autour d'un point suit d'ailleurs les mêmes lois que les contraintes réelles et la représentation de Mohr leur est applicable. En particulier on peut définir les contraintes principales réduites comme les contraintes normales aux éléments sur lesquels elles agissent. Il y a lieu de remarquer que les directions des contraintes principales réduites ne sont pas les projections des directions principales dans le voile, mais que deux éléments conjugués dans le voile se projettent suivant deux éléments conjugués dans le plan des contraintes principales réduites.

La connaissance des contraintes réelles détermine celle des contraintes réduites et vice-versa. On peut remarquer à cette occasion que les contraintes de cisaillement se conservent en projection. Voici ce qu'il faut entendre par là. Considérons (fig. 24) sur le voile deux éléments $m_1 m_1$ et $n_1 n_1$ projetés en $m m$ et $n n$. Soient $\vartheta_1$ et $\nu_1$ les composantes suivant $m_1 m_1$ et $n_1 n_1$ de la contrainte $C_1$ s'exerçant sur l'élément $m m_1$, $\vartheta$ et $\nu$ les composantes suivant $m m$ et $n n$ de la contrainte réduite $c$ s'exerçant sur l'élément $m m$. On a:

$$\vartheta_1 = \vartheta$$

mais on n'a pas $\nu_1 = \nu$.

Lorsque le plan tangent au voile est peu incliné sur l'horizon, les contraintes réduites diffèrent peu des contraintes réelles et on peut en première approxi-

mation confondre les unes et les autres. La connaissance des contraintes réduites et en particulier des contraintes principales réduites en grandeur et position donne alors une idée très approchée des contraintes vraies et des contraintes principales réelles en grandeur et position.

Dans les applications nous définirons fréquemment la contrainte s'exerçant sur un élément du voile par ses composantes suivant les paraboles principales se croisant sur l'élément. La contrainte réduite correspondante se trouve alors définie très simplement par ses composantes suivant les directions rectangulaires avec les projections des paraboles principales. En particulier s'il s'agit d'un élément de parabole principale, la contrainte réduite pourra être définie par sa composante normale à l'élément projeté et sa composante tangente à cet élément. Nous désignerons respectivement ces composantes sous les noms de composante normale réduite et composante tangentielle réduite. Nous compterons les composantes normales réduites positivement quand elles représenteront des compressions et négativement quand elles représenteront des tractions; de même, lorsque le voile sera rapporté à deux axes de coordonnées, les composantes tangentielles réduites seront comptées positivement lorsqu'elles tendront à provoquer l'ouverture de l'angle des directions positives.

## Flèches et déviations.

Précisons encore quelques définitions et propriétés qui nous seront utiles. Considérons (fig. 25) tout d'abord un arc de parabole $\alpha_1 \beta_1$ à axe vertical projeté horizontalement suivant $\alpha \beta$. Nous appellerons flèche de cet arc de parabole la distance $\gamma_1 \delta_1$ comptée verticalement entre le milieu $\gamma_1$ de la corde $\alpha_1 \beta_1$ et le point correspondant $\delta_1$ de l'arc. Nous appellerons déviation du même arc de parabole la valeur commune des distances $\alpha_1 \varepsilon_1$ et $\beta_1 \zeta_1$ comptées verticalement entre une des extrémités de l'arc et la tangente à l'autre extrémité. La déviation ainsi définie est quadruple de la flèche. Tous les arcs de parabole situés sur des paraboles de même paramètre et ayant même projection horizontale $\alpha \beta$ ont même flèche et même déviation.

Considérons maintenant un paraboloïde hyperbolique quelconque à axe vertical. Nous attribuerons des valeurs algébriques aux flèches et déviations des arcs de parabole tracés sur la surface, le signe + correspondant aux arcs dont la convexité est tournée vers le haut et le signe — à ceux dont la convexité est tournée vers le bas.

Si nous considérons en particulier les arcs de parabole principale limitant le voile, les flèches de ces arcs jouent un rôle important au point de vue de la résistance et du mode d'emploi du voile, nous les désignerons sous le nom de flèches principales ou même de flèches du paraboloïde; c'est ainsi que les voiles normaux ont des flèches qui sont dans le rapport de 1 à 4 en valeur absolue, et les voiles semi-normaux des flèches égales et opposées.

## Tympans.

Nous désignerons sous l'appellation de tympans des voiles plans venant s'encastrer dans le voile suivant des génératrices ou des arcs de coniques. Les tympans sont des éléments de transmission des réactions d'appui au voile.

Les tympans seront de préférence parallèles à l'axe du voile et dans des plans de parabole principale. Un système de tels tympans n'est pas suffisant dans le cas général pour transmettre tous les efforts appliqués aux points d'appuis. Il est alors nécessaire de prévoir des éléments de contreventement supplémentaires. Un des objets de la présente étude est d'indiquer les moyens dont on dispose pour supprimer ces organes de contreventement et diminuer

le nombre et l'importance des tympans, compte tenu du mode d'application des efforts.

Faisons à ce sujet une remarque générale relative aux voiles à quatre tympans disposés comme l'indique la fig. 36. Supposons appliqué un système quelconque de charges donnant sur tout le pourtour $A_1' A_1'' B_1'' B_1'$ des réactions dans le plan tangent à la surface. Si on décompose les réactions appliquées en $A_1' B_1'$ et $A_1'' B_1''$ suivant les génératrices passant aux points où elles sont appliquées, on voit que l'on peut remplacer les réactions considérées par des réactions appliquées le long des tympans. Considérons maintenant les réactions appliquées suivant les arcs $A_1' E_1'$, $A_1'' E_1''$, $B_1' F_1'$, $B_1'' F_1''$. En les décomposant autant de fois qu'il le faudra suivant le plan du tympan et une génératrice convenable en chaque point d'application, on parviendra à n'avoir de réactions non contenues dans les plans des tympans, que sur les arcs $E_1' F_1'$, $E_1'' F_1''$, $E_1' E_1''$, $F_1' F_1''$. En faisant les mêmes opérations sur ces dernières réactions on arrive finalement à n'avoir de réactions non contenues dans le plan des tympans que sur un seul de ces arcs, $E_1' E_1''$ par exemple. Mais ce système de réactions est hyperstatique. On vérifie en effet immédiatement qu'on peut toujours équilibrer des forces quelconques agissant tangentiellement à la surface sur l'un des trois arcs $E_1' F_1'$, $F_1' F_1''$, $F_1'' E_1''$ choisi parmi ceux pour lesquels aucune des génératrices passant par un de leurs points ne rencontrent le tympan opposé, au moyen de réactions agissant dans le plan des deux autres arcs et des réactions sur $E_1' E_1''$. En supprimant le tympan contenant l'un de ces arcs, on rend le système isostatique. Mais il y a d'autres procédés, on peut par exemple ne supprimer que certaines parties de tympans convenablement choisies.

L'exemple précédent met nettement en évidence le processus des réflexions successives sur les tympans des efforts qui se propagent suivant les génératrices.

## § 2. Voiles normaux.

### Propriétés fondamentales.

Considérons fig. 26 le voile normal $A_1' A_1'' B_1'' B_1'$ projeté horizontalement suivant le rectangle $A' A'' B'' B'$ et constitué par la juxtaposition des voiles seminormaux projetés suivant $A A' B' B$ et $A A'' B'' B$. Les deux arcs de parabole $A_1' A_1''$ et $B_1' B_1''$ ont même flèche $f$, les deux arcs $A_1' B_1'$ et $A_1'' B_1''$ ont la même flèche $f'$. On vérifie immédiatement que $f = 4 f'$. Nous appellerons $2a$ la longueur de la projection des arcs de flèche $f$ et $b$ la longueur de la projection des arcs de flèche $f'$. Tous les arcs de parabole tracés sur le voile parallèlement aux plans principaux ont même flèche et même longueur de projection horizontale que les arcs limitant le voile qui leur sont parallèles. Ce sont les arcs de parabole principale du voile.

Cela posé, imaginons que le voile soit encastré suivant les arcs de parabole $A_1' A_1''$ et $B_1' B_1''$ dans des tympans verticaux que nous appellerons tympans principaux. Les propriétés fondamentales du voile, considéré comme reportant sur ces tympans les charges qui lui sont appliquées, sont alors les suivantes:

1° Le voile est en équilibre sous un système de charges dont la densité est constante sur tout arc de parabole principale de flèche $f$.

2° Le voile est en équilibre sous un système de charges dont la densité est constante sur tout arc de parabole principale de flèche $f'$ et a même valeur sur deux arcs de parabole de flèche $f'$ dont les projections horizontales sont distantes de $a$.

Dans les deux cas la densité des charges est supposée mesurée en projection horizontale.

Nous allons démontrer successivement ces deux propriétés et déterminer en même temps les valeurs correspondantes des contraintes dans tout le voile et des réactions sur les tympans.

Supposons tout d'abord le voile chargé suivant une bande élémentaire $\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \beta_1$ projetée en $\alpha \alpha \beta \beta$, et limitée à deux arcs de parabole principale de flèche $f$. Soit $\bar{\omega}$ la densité de la charge supposée constante en projection horizontale et $a$ la longueur de la bande chargée. Le voile sera en équilibre à condition d'appliquer en $\alpha_1 \alpha_1$ et $\beta_1 \beta_1$ deux forces $Q_1 q_1$ tangentes à l'axe de parabole $\alpha_1 \beta_1$ et dont les projections horizontales ont pour valeur commune

$$Q = \frac{\bar{\omega} \cdot a^2}{2f} e.$$

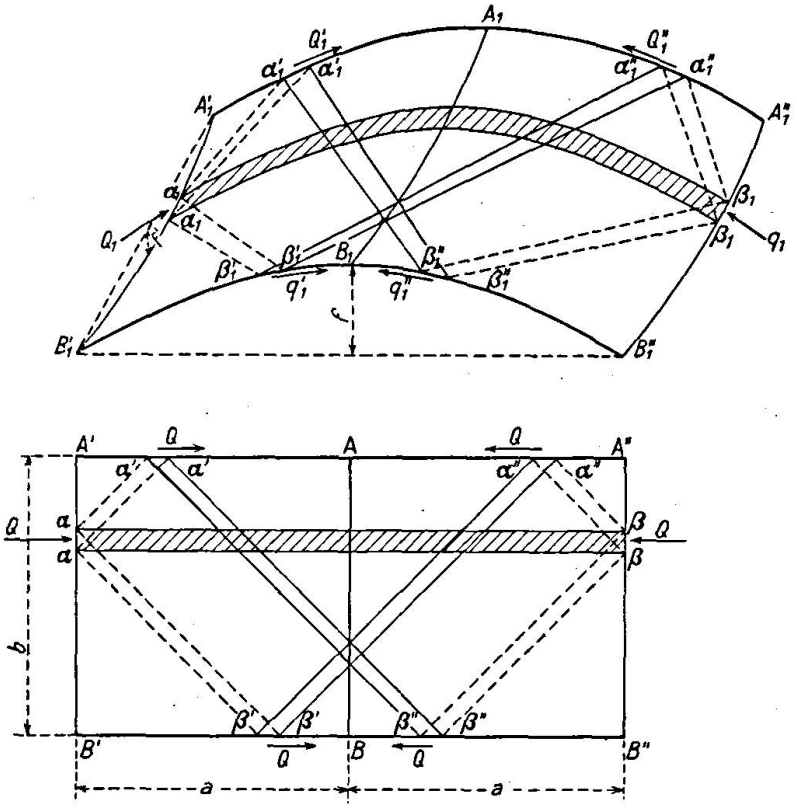



Fig. 26.

Au lieu d'appliquer les forces $Q_1$ et $q_1$, il revient au même d'appliquer les forces $Q_1'$, $q_1'$, $Q_1''$, $q_1''$, ayant en projections horizontales la valeur commune $Q$, suivant la tangente aux axes de parabole $A_1'$, $A_1''$ et $B_1' B_1''$ aux points $\alpha_1' \beta_1'$, $\alpha_1'' \beta_1''$ où les génératrices du voile passant par $\alpha$ et $\beta$ rencontrent les tympans. On voit en effet immédiatement que le système de forces $Q_1'$, $q_1'$, $Q_1''$, $q_1''$ est équivalent statiquement au système des forces $Q_1, q_1$. En résumé, dans l'hypothèse de charge envisagée, les réactions des tympans sont les quatre forces $Q_1'$, $Q_1''$, $q_1'$, $q_1''$. L'état de contraintes dans le voile se déduit facilement de là [2]). Suivant la bande chargée $\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \beta_1$ se propage un état de compression simple défini par la contrainte de compression ayant pour projection horizontale:

$$q = \frac{\bar{\omega} \cdot a^2}{2 \cdot f}$$

[2]) Nous supposons dans ce qui suit pour fixer les idées, que la flèche $f$ est positive et les charges $\bar{\omega}$ dirigées vers le bas.

et s'exerçant sur les éléments de parabole principale de flèche $f'$ normalement à ces éléments; suivant les éléments de parabole principale de flèche $f$ ne s'exerce aucun effort. Suivant chacune des bandes $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1' \alpha_1'$, $\alpha_1 \alpha_1 \beta_1' \beta_1'$, $\beta_1 \beta_1 \alpha_1'' \alpha_1''$, $\beta_1 \beta_1 \beta_1'' \beta_1''$, se propage un état de traction simple défini par la contrainte mixte de traction-cisaillement s'exerçant sur les éléments de parabole principale de flèche $f'$, dont la composante normale réduite est:

$$q = \frac{\varpi \cdot a^2}{4 \cdot f}$$

et la composante tangentielle réduite:

$$t = \frac{\varpi \cdot a \cdot b}{4 \cdot f}.$$

Sur les éléments de parabole principale de flèche $f$ s'exerce une contrainte mixte de traction-cisaillement dont la composante normale réduite est:

$$q' = -\frac{\varpi \cdot b^2}{4 \cdot f}$$

et la composante tangentielle réduite:

$$t = \frac{\varpi \cdot a \cdot b}{4 \cdot f}.$$

Sur chacune des bandes $\alpha_1' \alpha_1' \beta_1'' \beta_1''$, $\alpha_1'' \alpha_1'' \beta_1' \beta'$ se propage un état de compression simple défini par la contrainte mixte de compression-cisaillement s'exerçant sur les éléments de parabole principale de flèche $f'$, dont la composante normale réduite est:

$$q = \frac{\varpi \cdot a^2}{4 \cdot f}$$

et la composante tangentielle réduite:

$$t = \frac{\varpi \cdot a \cdot b}{4 \cdot f}.$$

Sur les éléments de parabole principale de flèche $f$ s'exerce une contrainte mixte de compression-cisaillement dont la composante normale réduite est:

$$q' = \frac{\varpi \cdot b^2}{4 \cdot f}$$

et la composante tangentielle réduite est:

$$t = \frac{\varpi a b}{4 f}.$$

La première propriété énoncée se trouve ainsi démontrée et les valeurs des contraintes correspondantes dans le voile se déduisent immédiatement des formules précédentes.

Supposons maintenant (fig. 27) le voile chargé suivant deux bandes élémentaires $\alpha_1' \alpha_1' \beta_1' \beta_1'$, $\alpha_1'' \alpha_1'' \beta_1'' \beta_1''$ projetées en $\alpha' \alpha' \beta' \beta'$ $\alpha'' \alpha'' \beta'' \beta''$ et limitées à des arcs de parabole principale de flèche $f'$. Les deux bandes sont par hypothèse distantes de $a$ en projection horizontale. Soit encore $\varpi$ la densité de la charge supposée constante en projection horizontale, cette densité ayant par hypothèse même valeur sur les deux bandes considérées. Supposons de plus que la largeur des bandes ait la valeur commune $e$. Le voile sera en équilibre à condition d'appliquer en $\alpha_1' \alpha_1'$, $\beta_1' \beta_1'$, $\alpha_1'' \alpha_1''$, $\beta_1'' \beta_1''$, des forces $Q_1, q_1$,

$\bar{Q}_1, \bar{q}_1$, tangentes aux arcs de parabole $\alpha_1' \beta_1'$ et $\alpha_2'' \beta_2''$ et dont les projections horizontales ont pour valeur commune:

$$Q' = \frac{\bar{\omega} b^2}{2f} e \qquad (f = 4f').$$

Au lieu d'appliquer les forces $Q_1$, $q_1$, $\bar{Q}_1$, $\bar{q}_1$, il revient au même d'appliquer les forces $Q_1'$, $q_1'$, $Q_1''$, $q_1''$, ayant en projection horizontale la valeur commune $Q' \frac{a}{b}$, suivant les tangentes aux arcs de parabole $A_1' A_1''$ et $B_1' B_1''$ aux points $\alpha_1'$, $\beta_1'$, $\alpha_1''$, $\beta_1''$. On reconnait immédiatement l'équivalence des deux systèmes

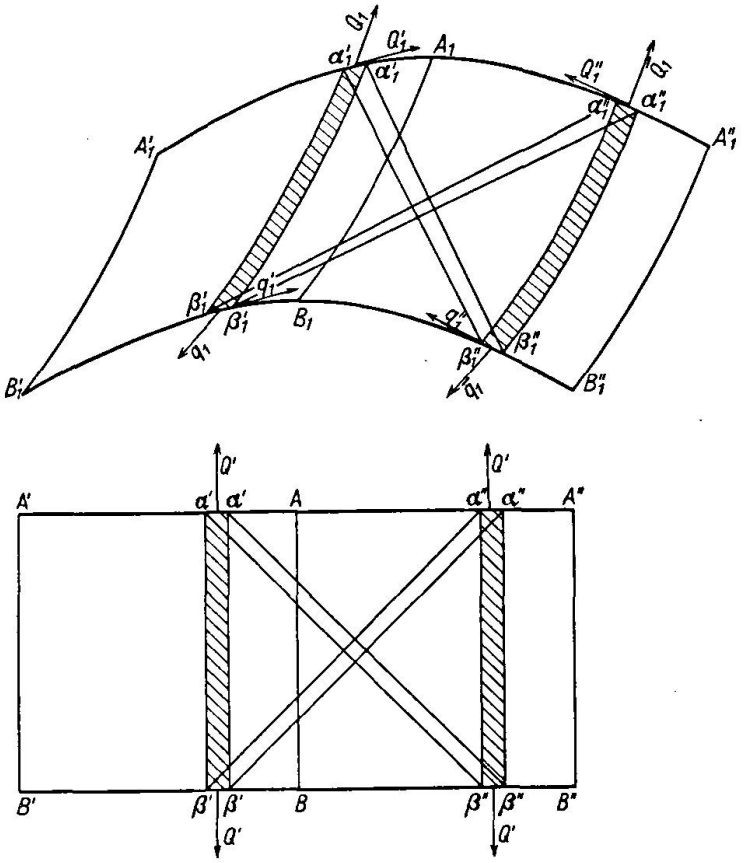



Fig. 27.

de forces. En résumé, dans l'hypothèse de charge envisagée, les réactions des tympans sont les 4 forces $Q_1'$, $Q_1''$, $q_1'$, $q_1''$. L'état des contraintes dans le voile se déduit facilement de là. Suivant chacune des bandes chargées $\alpha_1' \alpha_1' \beta_1' \beta_1'$ et $\alpha_1'' \alpha_1'' \beta_1'' \beta_1''$ se propage un état de traction simple[3]) défini par la contrainte de traction ayant pour projection horizontale:

$$q' = -\frac{\bar{\omega} \cdot b^2}{2f}$$

et s'exerçant sur les éléments de parabole principale de flèche $f$ normalement à ces éléments. Suivant les éléments de parabole principale de flèche $f'$ ne s'exerce aucun effort. Suivant chacune des bandes $\alpha_1' \alpha_1' \beta_1'' \beta_1''$ et $\alpha_1'' \alpha_1'' \beta_1' \beta_1'$ se propage un état de compression simple défini par la contrainte mixte de compres-

[3]) Nous supposons toujours pour fixer les idées que la flèche $f$ est positive et les charges $\bar{\omega}$ dirigées vers le bas.

sion-cisaillement s'exerçant sur les éléments de parabole principale de flèche $f$ dont la composante normale réduite est:

$$q' = \frac{\varpi \cdot b^2}{2f}$$

et la composante tangentielle réduite:

$$t = \frac{\varpi \cdot a \cdot b}{2f}.$$

Sur les éléments de parabole principale de flèche $f'$ s'exerce une contrainte de compression-cisaillement dont la composante normale réduite est:

$$q = \frac{\varpi \cdot a^2}{2f}$$

et la composante tangentielle réduite:

$$t = \frac{\varpi \cdot a \cdot b}{2f}.$$

La deuxième propriété énoncée se trouve ainsi démontrée et les valeurs des contraintes correspondantes dans le voile se déduisent immédiatement des formules précédentes.

Appliquons les résultats que nous avons obtenu à un voile normal à deux tympans principaux dans les trois cas suivants de charge:

1° Charge uniformément répartie en projection horizontale de densité $\varpi$.

2° Charge de densité $\varpi = \varpi_0 \left[\frac{\xi}{a} - E\left(\frac{\xi}{a}\right)\right]$, $\varpi_0$ étant une constante, $E(x)$ désignant la partie entière de $x$, $2a$ étant la longueur de la projection horizontale des arcs de parabole des tympans, et $\xi$ la distance comptée horizontalement parallèlement aux tympans d'un point quelconque du voile à l'un des bords du voile autres que ceux des tympans.

3° Charge de densité $\varpi = \varpi_0 \frac{\eta}{b}$, $\varpi_0$ étant une constante, $b$ la longueur de la projection horizontale des arcs de parabole principale perpendiculaires aux tympans et $\eta$ la distance comptée horizontalement perpendiculairement aux tympans d'un point quelconque du voile à l'un des tympans.

### Charge uniformément répartie en projection horizontale de densité $\varpi$.

Reprenons le voile projeté horizontalement suivant le rectangle $A'A''B'B''$ avec $A'A'' = B'B'' = 2a$, $A'B' = A''B'' = b$, $f$ désigne toujours la flèche de l'arc de parabole projeté en $A'A''$. Soient $A$ et $B$ les milieux de $A'A''$ et de $B'B''$, $C'$ et $C''$ les points d'intersection de $A'B$ et $AB'$ d'une part, de $AB''$ et $A''B$ d'autre part. $A'A''$ et $B'B''$ sont par hypothèse les projections des tympans principaux. On constate immédiatement qu'il y a trois états de contrainte dans le voile (fig. 28):

1° Dans les parties du voile projetées suivant $A'B'C'$ et $A''B''C''$, un état de traction simple de direction perpendiculaire aux tympans et défini par la valeur

$$q' = -\frac{\varpi\, b^2}{2f}$$

de la projection horizontale de la contrainte s'exerçant sur des éléments parallèles aux tympans et normalement à ces éléments.

2° Dans les parties du voile projetées suivant $A C' B C''$, un état de compression double correspondant à des contraintes principales projetées horizontalement parallèlement aux côtés du rectangle $A' A'' B'' B'$ dont les valeurs sont pour la contrainte parallèle aux tympans

$$q = \frac{\bar{\omega}\, a^2}{f}$$

et pour la contrainte perpendiculaire aux tympans:

$$q' = \frac{\bar{\omega}\, b^2}{2f}.$$

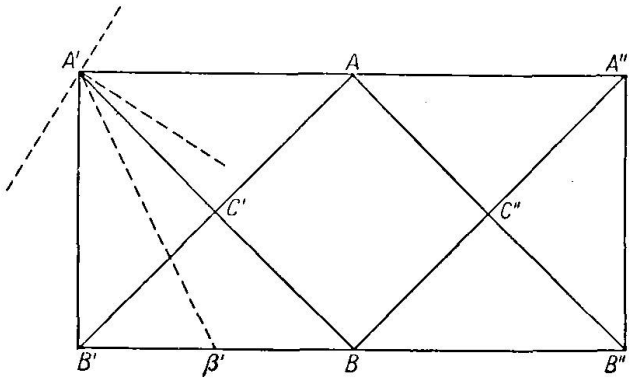



Fig. 28.

3° Dans les autres parties, c'est à dire dans celles projetées suivant $A A' C'$, $A A'' C''$, $B B' C'$, $B B'' C''$, un état de compression et traction défini par une contrainte de cisaillement

$$t = \frac{\bar{\omega} \cdot a \cdot b}{2f}$$

s'exerçant sur les éléments parallèles et normaux aux tympans, et par les composantes normales s'exerçant sur ces éléments, à savoir zéro sur les éléments parallèles aux tympans et

$$q = \frac{\bar{\omega}\, a^2}{2f}$$

sur les éléments normaux à ces tympans.

Les directions principales et les valeurs des contraintes principales sont immédiatement connues dans les deux premiers cas. Dans le troisième cas la construction du cercle de Mohr conduit aux résultats suivants dans la région $A A' C'$. $\beta'$ étant le milieu de $B B'$, les directions principales réduites sont parallèles aux bissectrices de l'angle $\widehat{A A' \beta'}$, suivant la bissectrice intérieure s'exerce une contrainte principale de compression ayant pour valeur

$$\frac{\bar{\omega} \cdot a\,(a + \sqrt{a^2 + 4b^2})}{4f}$$

et suivant la bissectrice extérieure une contrainte principale de traction ayant pour valeur

$$\frac{\bar{\omega} \cdot a\,(\sqrt{a^2 + 4b^2} - a)}{4f}.$$

Les réactions des tympans sont des efforts tangents aux arcs de parabole qui les constituent et ont pour valeur en projection horizontale

$$\frac{\bar{\omega} \cdot a \cdot b}{2f}$$

par unité de longueur. Ces réactions sont toujours dirigées vers le point $A$ pour le tympan $A'A''$ et vers le point $B$ pour le tympan $B'B''$.

Charge répartie avec la densité $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 \left[\frac{\xi}{a} - E\left(\frac{\xi}{a}\right)\right]$.

Prenons le même voile, $\xi$ étant comptée à partir de $A'B'$, on est conduit aux résultats suivants:

Valeur du coefficient $K'$ dans la formule
Wert des Koeffizienten $K'$ in der Formel
Value of coefficient $K'$ in formula

$$q' = K' \frac{\bar{\omega}_0 b^2}{2f}$$

Valeur du coefficient $x$ dans la formule
Wert des Koeffizienten $x$ in der Formel
Value of coefficient $x$ in formula

$$t = x \frac{\bar{\omega}_0 a \cdot b}{2f}$$

Valeur du coefficient $K$ dans la formule
Wert des Koeffizienten $K$ in der Formel
Value of coefficient $K$ in formula

$$q = K \frac{\bar{\omega}_0 a^2}{2f}$$

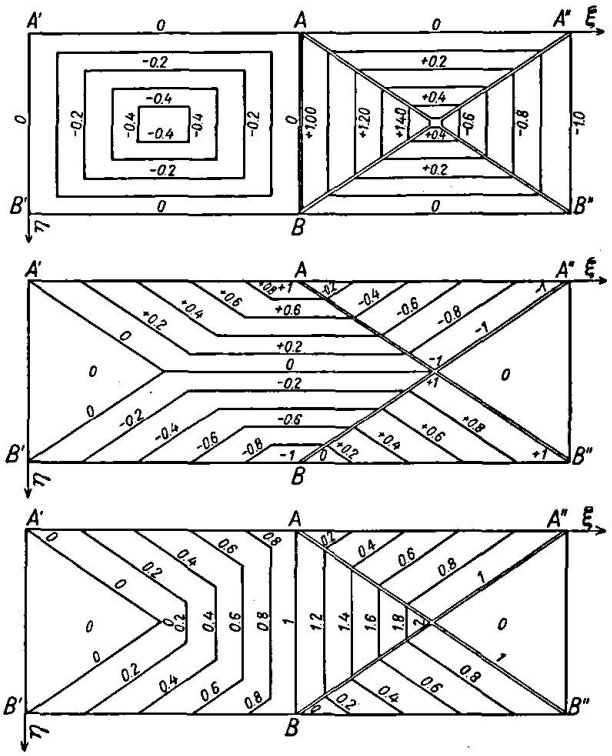



Fig. 29. Densité de charge / Belastungsgröße / Intensity of loading $\bar{\omega}_0 \left[\frac{\xi}{a} - E\left(\frac{\xi}{a}\right)\right]$

1° Sur un élément de parabole principale de flèche $f$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q' = K' \frac{\bar{\omega}_0 b^2}{2f}$$

et pour composante tangentielle

$$t = \chi \frac{\bar{\omega}_0 ab}{2f}$$

$K'$ et $\chi$ ayant les valeurs données par les abaques de la figure 29.

2° Sur un élément de parabole principale de flèche $f'$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q = K \frac{\bar{\omega}_0 a^2}{2f}$$

et pour composante tangentielle

$$t = \chi \frac{\bar{\omega}_0 \, a b}{2 f}$$

$K$ et $\chi$ ayant les valeurs données par les abaques de la figure 29.

Charge répartie avec la densité $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 \frac{\eta}{b}$.

Prenons toujours les mêmes voiles, $\eta$ étant comptée à partir de $A' A''$. On est conduit aux résultats suivants:

Valeur du coefficient $K'$ dans la formule
Wert des Koeffizienten $K'$ in der Formel
Value of coefficient $K'$ in formula

$$q' = K' \frac{\bar{\omega}_0 \, b^2}{2 f}$$

Valeur du coefficient $z$ dans la formule
Wert des Koeffizienten $z$ in der Formel
Value of coefficient $z$ in formula

$$t = x \cdot \frac{\bar{\omega}_0 \cdot a \cdot b}{2 f}$$

Valeur du coefficient $K$ dans la formule
Wert des Koeffizienten $K$ in der Formel
Value of coefficient $K$ in formula

$$q = K \frac{\bar{\omega}_0 \cdot a^2}{2 f}$$

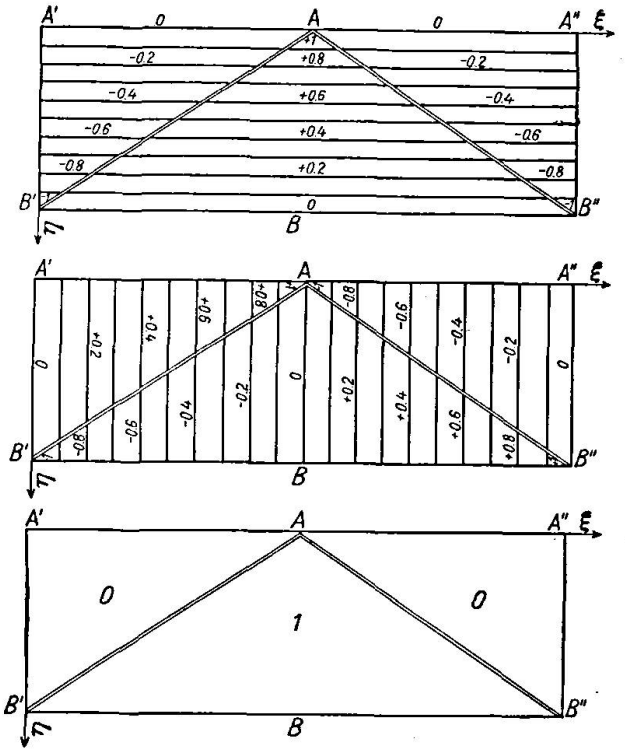



Fig. 30.

Densité de charge
Belastungsgröße
Intensity of loading

$$\frac{\bar{\omega}_0 \, \eta}{b}$$

1° Sur un élément de parabole principale de flèche $f$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q' = K' \frac{\bar{\omega}_0 \, b^2}{2 f}$$

et pour composante tangentielle

$$t = \chi \frac{\bar{\omega}_0 \, a b}{2 f}$$

$K'$ et $\chi$ ayant les valeurs données par les abaques de la figure 30.

2° Sur un élément de parabole principale de flèche $f'$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q = K \frac{\bar{\omega}_0 \, a^2}{2 f}$$

et pour composante tangentielle

$$t = \chi \frac{\bar{\omega}_0 \, a \, b}{2 f}$$

$K$ et $\chi$ ayant les valeurs données par les abaques de la figure 30.

Expressions générales des contraintes réduites pour une charge de densité quelconque constante sur les paraboles de flèche $f$.

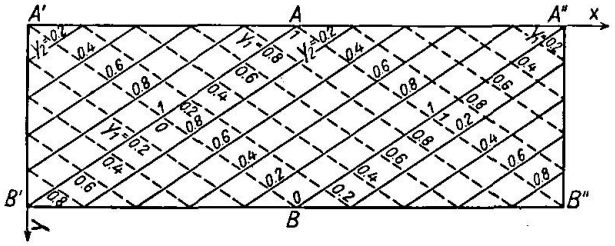
Reprenons le même voile et posons:

$$x = \frac{\xi}{a}, \qquad y = \frac{\eta}{b}$$

$\xi$ et $\eta$ étant comptés, le premier à partir de $A'B'$, et le second à partir de $A''B''$. On est conduit aux résultats suivants; en désignant par $\pi(y)$ la densité, par $y_1$ et $y_2$ les deux fonctions définies par l'abaque de la figure 31 et par $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ deux coefficients ayant les valeurs $+1$ ou $-1$ suivant les régions du voile comme l'indique la figure 32,

Fig. 31.

Densité de charge
Belastungsgröße
Intensity of loading } $\pi(y)$

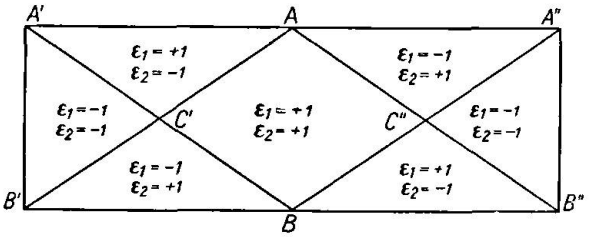



Valeur des fonctions $y_1$ et $y_2$ dans les formules
Wert der Funktionen $y_1$ und $y_2$ in den Formeln
Value of functions $y_1$ and $y_2$ in the formula

$$\begin{cases} q' = \dfrac{b^2}{4f}\left[\varepsilon_1 \pi(y_1) + \varepsilon_2 \pi(y_2)\right] \\ q = \dfrac{a^2}{4f}\left[\varepsilon_1 \pi(y_1) + \varepsilon_2 \pi(y_2) + 2\pi(y)\right] \\ t = \dfrac{a \cdot b}{4f}\left[\varepsilon_1 \pi_1(y_1) - \varepsilon_2 \pi(y_2)\right] \end{cases}$$

Fig. 32. Densité de charge
Belastungsgröße
Intensity of loading } $\pi(y)$

Valeurs des coefficients
Werte der Koeffizienten
Value of coefficients } et $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ and




1° Sur un élément de parabole principale de flèche $f$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q' = \left[\varepsilon_1 \pi(y_1) + \varepsilon_2 \pi(y_2)\right] \frac{b^2}{4f}$$

et pour composante tangentielle

$$t = \left[\varepsilon_1 \pi(y_1) - \varepsilon_2 \pi(y_2)\right] \frac{a\,b}{4f}$$

2° Sur un élément de parabole principale de flèche $f'$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q = \left[\varepsilon_1 \pi(y_1) + \varepsilon_2 \pi(y_2) + 2\pi(y)\right] \frac{a^2}{4f}$$

et pour composante tangentielle

$$t = [\varepsilon_1 \pi(y_1) - \varepsilon_2 \pi(y_2)] \frac{ab}{4f}.$$

Expressions générales des contraintes réduites pour une charge de densité constante sur les paraboles de flèche $f'$ ayant même valeur sur deux paraboles de flèche $f'$ distantes de $a$ en projection.

Reprenons le même voile et posons toujours $x = \frac{\xi}{a}$, $y = \frac{\eta}{b}$. Désignons par $\pi(x)$ la densité, par $x_1$ et $x_2$ deux fonctions définies par l'abaque de la figure 33 et par $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ deux coefficients ayant les valeurs $+1$ ou zéro suivant les régions du voile comme l'indique la figure 34.

Fig. 33. Densité de charge / Belastungsgröße / Intensity of loading } $\pi(x)$

Valeurs des fonctions / Werte der Funktionen / Value of functions } et $x_1$ und $x_2$ and

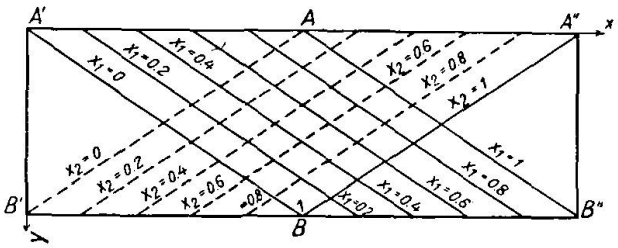
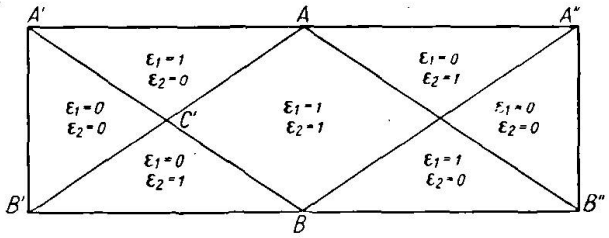



Fig. 34. Densité de charge / Belastungsgröße / Intensity of loading } $\pi(x)$

Valeurs des coefficients / Werte der Koeffizienten / Value of coefficients } et $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ and




1° Sur un élément de parabole principale de flèche $f$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale:

$$q' = [\varepsilon_1 \pi(x_1) + \varepsilon_2 \pi(x_2) - \pi(x)] \frac{b^2}{2f}$$

et pour composante tangentielle:

$$t = [\varepsilon_1 \pi(x_1) - \varepsilon_2 \pi(x_2)] \frac{a \cdot b}{2f}.$$

2° Sur un élément de parabole principale de flèche $f'$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale:

$$q = [\varepsilon_1 \pi(x_1) + \varepsilon_2 \pi(x_2)] \frac{a^2}{2f}$$

et pour composante tangentielle:

$$t = [\varepsilon_1 \pi(x_1) - \varepsilon_2 \pi(x_2)] \frac{ab}{2f}.$$

## Introduction de tympans secondaires.

Lorsque les tympans principaux ne permettent pas d'équilibrer les réactions du voile, on peut envisager l'introduction de nouveaux tympans que nous appellerons tympans secondaires. Ces tympans seront de préférence dans deux plans

de parabole principale de flèche $f'$; par exemple (fig. 35) suivant les arcs $E_1' F_1'$, $E_1'' F_1''$ projetés en $E' F'$, $E'' F''$. Un tel système n'est pas dans le cas le plus général susceptible d'équilibre sans contreventement, mais il suffit toujours de contreventer un des deux éléments de tympans principaux $E_1' E_1''$ ou $F_1' F_1''$, mais on obtient alors un système hyperstatique. On peut toutefois disposer de l'indétermination laissée jusqu'ici dans le choix des tympans secondaires pour qu'aucun contreventement ne soit nécessaire dans des cas bien déterminés de charges. Le système reste cependant hyperstatique, mais nous verrons qu'il est facile d'éliminer les éléments surabondants.

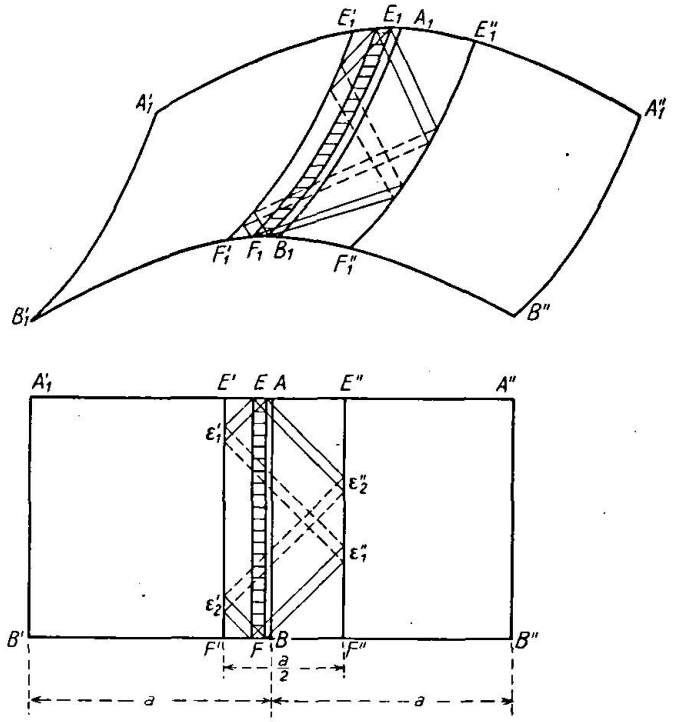



Fig. 35.

Cherchons en particulier à réaliser l'équilibre sans contreventement pour des charges dont la densité est constante sur tout arc de parabole principale de flèche $f'$. Il est facile de voir qu'il suffit que les tympans secondaires soient en projection horizontale distants de $\frac{a}{2}$. De tels tympans seront dits normaux. Supposons en effet cette condition réalisée et supposons le voile chargé suivant une bande limitée à deux paraboles de flèche $f'$. L'équilibre sera réalisé à condition d'appliquer aux extrémités de la bande des efforts convenables normaux aux tympans principaux. On se rend compte immédiatement par le procédé des réflexions successives qu'il est toujours possible de remplacer ces forces par d'autres appliquées normalement aux mêmes tympans mais sur les arcs $E_1' E_1''$ et $F_1' F_1''$. Soient $E_1$ et $F_1$ les points d'application de ces forces, $E$ et $F$ leurs projections. Les projections des forces considérées sont évidemment égales et opposées et on reconnait sans difficulté qu'elles se font équilibre dans le voile suivant les génératrices $E\,\varepsilon_1'\,\varepsilon_1''\,F$ et $E\,\varepsilon_2''\,\varepsilon_2'\,F$. Le système est d'ailleurs hyperstatique, car deux forces égales et opposées appliquées par exemple en $E$ et $F$ tangentiellement aux tympans se font également équilibre dans le voile suivant les mêmes génératrices.

On peut rendre le système isostatique en supprimant le tympan $E_1' E_1''$, ou le tympan $F_1' F_1''$. On arrive au même résultat en supprimant un des demi-

tympans $E_1' G_1'$, $F_1' G_1'$, $E_1'' G_1''$, $F_1'' G_1''$ $G_1'$ et $G_1''$ désignant les points des arcs $E_1' F_1'$ et $E_1'' F_1''$ projetés sur les milieux de $E' F'$ et $E'' F''$. On peut d'ailleurs aussi bien supprimer deux éléments de tympans choisis sur deux des quatre arcs considérés à condition que tout circuit tel que $E\, \varepsilon_1' \varepsilon_1'' F\ \varepsilon_2' \varepsilon_2'' E$ ne rencontre pas plus d'un tympan supprimé.

Revenons au système primitif. Il n'y a plus d'éléments surabondants si l'on assujetit les réactions à être, en projection, symétriques par rapport à la projection de $G_1' G_1''$. Nous allons tout d'abord calculer les contraintes dans le voile, dans ce cas là; il est évident que, pour passer de ce cas à celui d'un système isostatique tel que le précédent, il suffit d'appliquer au droit des éléments de tympans supprimés des forces égales et opposées aux réactions calculées aux points correspondants dans le cas de réactions symétriques en projection. Le système de forces ainsi appliquées n'intéresse que l'intérieur du voile $E_1' E_1'' F_1'' F_1'$ et le problème posé revient au calcul des contraintes dans un voile normal limité à quatre tympans, lorsqu'on supprime tout ou partie de certains de ces tympans et que l'on applique au droit des éléments ainsi supprimés des forces tangentielles convenables.

### Calcul des contraintes dans un voile normal à tympans secondaires normaux chargé avec une densité constante sur les paraboles principales de flèche $f'$ et dont les réactions sont symétriquement disposées.

Reprenons le voile de la fig. 35 et supposons par exemple que $E'' A'' > A' E'$. Nous prendrons pour axes des $\xi$ et des $\eta$ les axes $A'' B''$ et $A' B'$ et nous poserons $x = \frac{\xi}{a}$, $y = \frac{\eta}{b}$. La densité de la charge sera la fonction $\pi(x)$. Distinguons deux cas:

1° $E'' A'' < A A''$. Décomposons le voile en six zones numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 comme l'indique la figure 36, les arcs de parabole principale de flèche $f'$, $H_1' K_1'$ et $H_1'' K_1''$ étant définis en projection par

$$A' H' = A E'', \qquad H'' A'' = E' A.$$

Posons $\lambda = \frac{A' E'}{A' A}$, et décomposons la fonction $\pi(x)$ en trois fonctions $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$, $\pi_3(x)$ telles que

$$\pi(x) = \pi_1(x) + \pi_2(x) + \pi_3(x)$$

et définies par le tableau suivant dans les différentes zones 1, 2, 3, 4, 5, 6.

| fonctions | zone 1 | zone 2 | zone 3 | zone 4 | zones 5 et 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_1(x)$ | $\pi(x)$ | $\pi(x+1)$ | $\pi(x+1)$ | $\pi(x-1)$ | $\pi(x)$ |
| $\pi_2(x)$ | 0 | $\pi(x)-\pi(x+1)$ | $\pi(2\lambda-x)-\pi(2\lambda+1-x)$ | $\pi(2\lambda-x)-\pi(2\lambda+1-x)$ | 0 |
| $\pi_3(x)$ | 0 | 0 | $\pi(x)-\pi(x+1)-\pi(2\lambda-x)$ $+\pi(2\lambda+x-1)$ | $\pi(x)-\pi(x-1)-\pi(2\lambda-x)$ $+\pi(2\lambda+1-x)$ | 0 |

Les contraintes dans le voile seront la somme des contraintes obtenues en chargeant successivement avec les densités $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$, $\pi_3(x)$. Or les contraintes dues aux charges $\pi_1(x)$ sont connues par application de formules déjà données, puisque les charges ont même valeur sur deux arcs de parabole de flèche $f'$ distantes de $A' A$ en projection. D'autre part les contraintes dues aux

surcharges de densité $\pi_2(x)$ seront déterminées plus loin dans l'étude des voiles semi-normaux, en remarquant, que l'ensemble des zones 2, 3, 4 forme un voile semi-normal à 3 tympans principaux $H_1' E_1''$, $K_1' F_1''$, $E_1' F_1'$ chargé symétriquement par rapport au tympan principal $E_1' F_1'$. Enfin les contraintes dues aux charges de densité $\pi_3(x)$ sont également connues par application des formules déjà données au voile normal $E_1' F_1' F_1'' E_1''$ chargé avec la densité $\pi_3(x)$ et dont $E_1' F_1'$ et $E_1'' F_1''$ sont les tympans principaux.

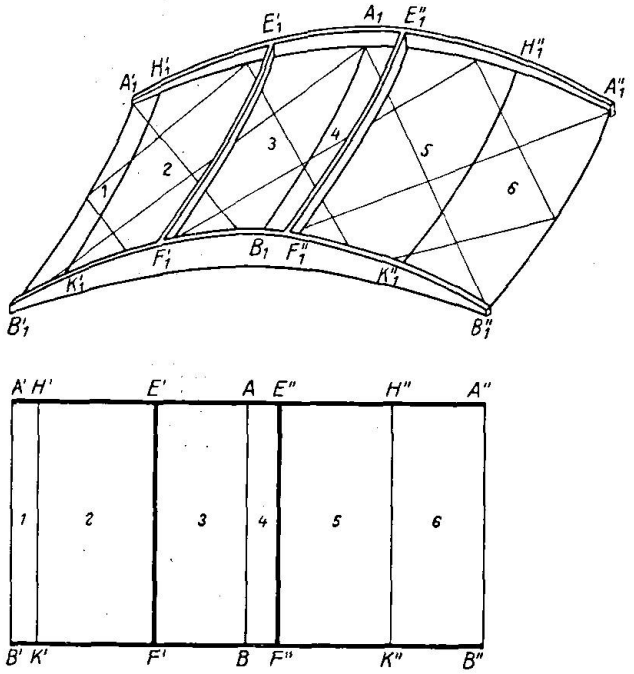


Fig. 36.

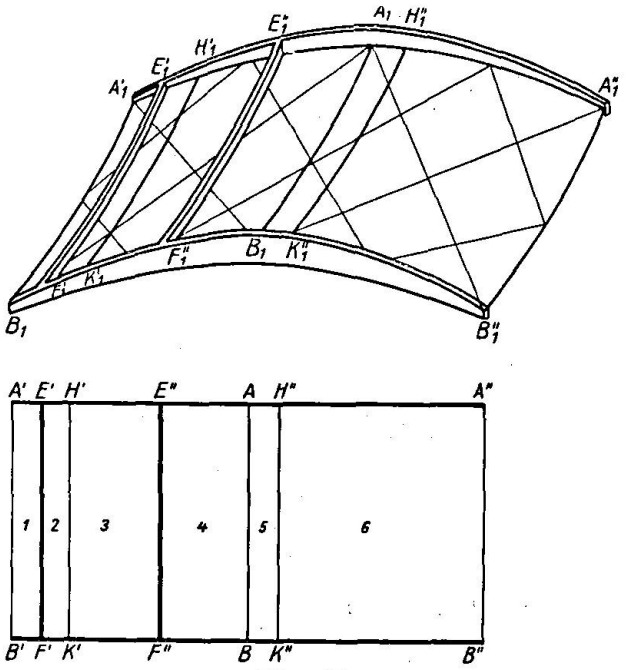


Fig. 37.

2° $E''A'' > AA''$. Décomposons le voile en six zones numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 comme l'indique la figure 37, les arcs de parabole principale de flèche $f'$, $H_1' K_1'$ et $H_1'' K_1''$ étant définis en projection par

$$A'H' = 2A'E', \qquad A'H'' = A'A + A'E'$$

Posons $\lambda = \dfrac{A'E''}{A'A}$, et définissons les fonctions $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$, $\pi_3(x)$ par le tableau suivant:

| fonctions | zone 1 | zone 2 | zone 3 | zone 4 | zone 5 | zone 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_1(x)$ | $\pi(x)$ | $\pi(x+1)$ | $\pi(x+1)$ | $\pi(x+1)$ | $\pi(x-1)$ | $\pi(x)$ |
| $\pi_2(x)$ | 0 | $\pi(2\lambda-x)-\pi(2\lambda-1-x)$ | $\pi(2\lambda-x)-\pi(2\lambda+1-x)$ | $\pi(x)-\pi(x+1)$ | $\pi(x)-\pi(x-1)$ | 0 |
| $\pi_3(x)$ | 0 | $\pi(x)-\pi(x+1)-\pi(2\lambda-x)$ $-\pi(2\lambda-1-x)$ | $\pi(x)-\pi(x+1)-\pi(2\lambda-x)$ $+\pi(2\lambda+1-x)$ | 0 | 0 | 0 |

On a:

$$\pi(x) = \pi_1(x) + \pi_2(x) + \pi_3(x)$$

et par conséquent les contraintes dans le voile sont la somme des contraintes obtenues en chargeant successivement avec les densité $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$, $\pi_3(x)$. Or chacun des chargements partiels donne des contraintes calculables par des formules connues, le chargement de densité $\pi_1(x)$ ayant même valeur sur deux

arcs de parabole de flèche $f'$ distantes de $A'A$, le chargement de densité $\pi_2(x)$ étant un chargement symétrique du voile semi-normal $E_1'H_1''K_1''F_1'$ à trois tympans principaux $E_1'H_1''$, $F_1'K_1''$, $E_1''F_1''$, enfin le chargement de densité $\pi_3(x)$ étant celui du voile normal $E_1'E_1''F_1''F_1'$ aux deux tympans principaux $E_1'F_1'$, $E_1''F_1''$.

Calcul des contraintes dans un voile normal limité à quatre tympans et chargé avec une densité constante sur toute parabole principale de flèche $f'$ perpendiculaire aux tympans principaux et dont les réactions ont été rendues isostatiques.

Soit le voile normal $E_1'E_1''F_1''G_1''$ projeté en $E'E''F''G''$ tel que $E'E'' = \frac{a}{2}$, $E'F' = b$. Prenons comme coordonnées les distances $\xi'$ et $\eta'$ aux droites $E'F'$ et $E'E''$ et posons $x' = \frac{\xi'}{a}$, $y' = \frac{\eta'}{b}$. Nous allons indiquer les résultats dans quatre cas.

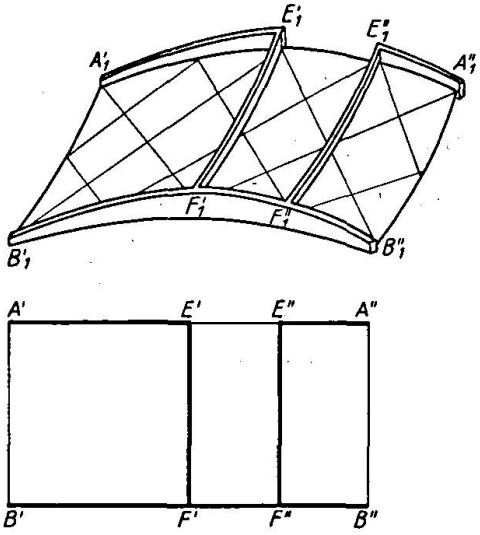



Fig. 38.

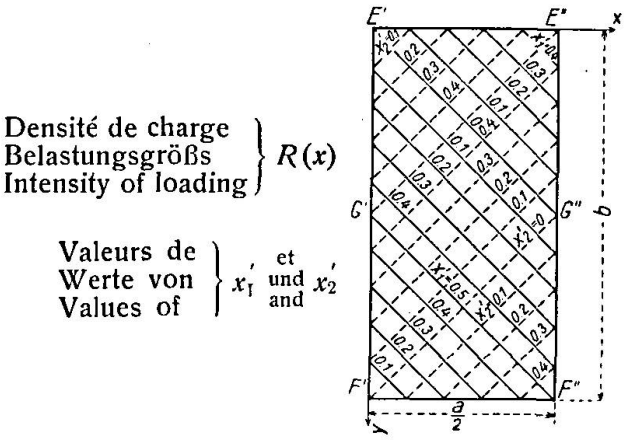



Fig. 39.

1° *Il s'agit d'un voile du type de la figure 38, où l'élément de tympan $E_1'E_1''$ est supprimé.*

Nous supposerons appliquées à l'arc $E_1'E_1''$ des réactions tangentielles avec une densité $R(x)$ comptée positivement dans le sens des $x$ croissants. Les contraintes réduites seront respectivement.

$$q' = [R(x_1') - R(x_2')]\frac{b}{2a}$$

$$t = \frac{R(x_1') + R(x_2')}{2}$$

$$q = [R(x_1') - R(x_2')]\frac{a}{2b}$$

$x_1$ et $x_2$ étant donnés par l'abaque de la figure 39.

2° *Il s'agit d'un voile du type de la figure 40 où le demi-tympan $E_1''G_1''$ est supprimé.*

Nous supposons appliquées à l'arc $E_1'' G_1''$ des réactions tangentielles avec une densité $R(y)$ comptée positivement dans le sens des $y$ croissants. Les contraintes réduites seront respectivement.

$$q' = [-R(y_1') + R(y_2')]\frac{b}{2a}$$

$$t = \frac{-R(y_1') - R(y_2')}{2}$$

$$q = [-R(y_1') + R(y_2')]\frac{a}{2b}$$

$y_1$ et $y_2$ étant donnés par l'abaque de la figure 41.

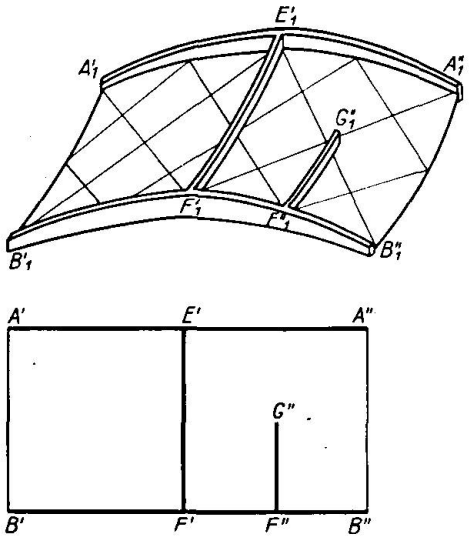



Fig. 40.

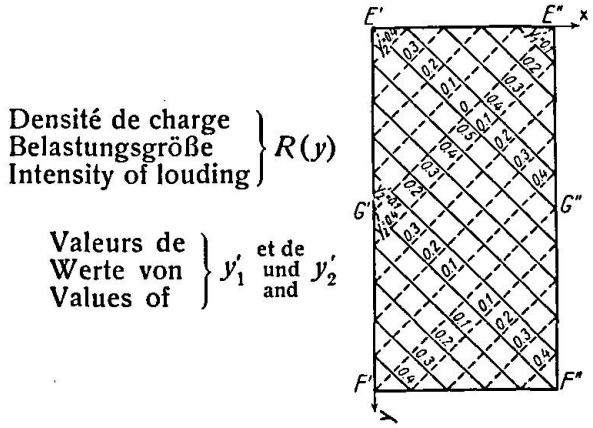



Fig. 41.

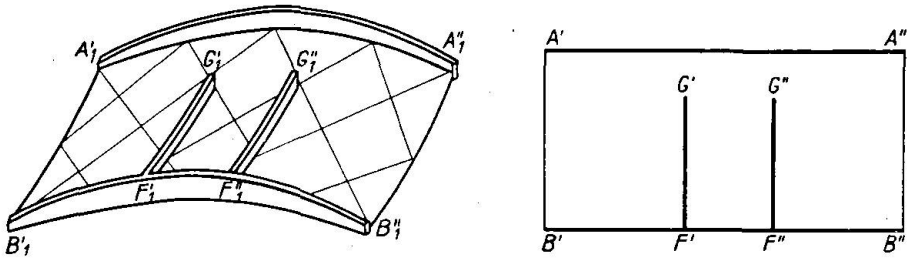



Fig. 42.

3° *Il s'agit d'un voile tel que celui de la figure 42 où les deux tympans secondaires normaux $E_1' F_1'$ et $E_1'' F_1''$ sont supprimés sur les arcs $E_1' G_1'$ et $E_1'' G_1''$ ayant pour projection* $\frac{b}{4}$.

Nous supposerons appliquées à l'arc $E_1' G_1'$ des réactions tangentielles avec une densité $R'(y)$ et à l'arc $E_1'' G_1''$ des réactions tangentielles avec une densité $R''(y)$, les densités étant comptées positives dans le sens des $y$ croissants. Les contraintes réduites seront respectivement.

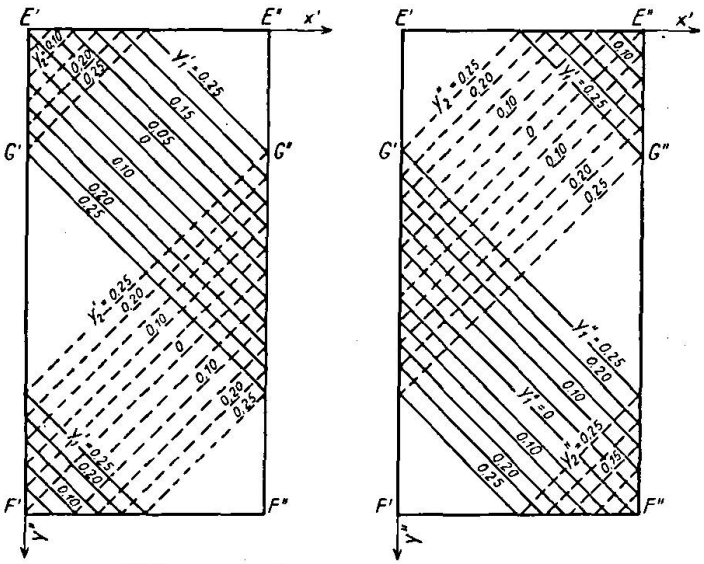
$$q' = [\varepsilon_1' R'(y_1') - \varepsilon_2' R'(y_2') - \varepsilon_1'' R''(y_1'') + \varepsilon_2'' R''(y_2'')]\frac{b}{2a}$$

$$t = \frac{\varepsilon_1' R'(y_1') + \varepsilon_2' R'(y_2') - \varepsilon_1'' R''(y_1'') - \varepsilon_2'' R''(y_2'')}{2}$$

$$q = [\varepsilon_1' R'(y_1') - \varepsilon_2' R'(y_2') - \varepsilon_1'' R''(y_1'') + \varepsilon_2'' R''(y_2'')] \frac{a}{2b}$$

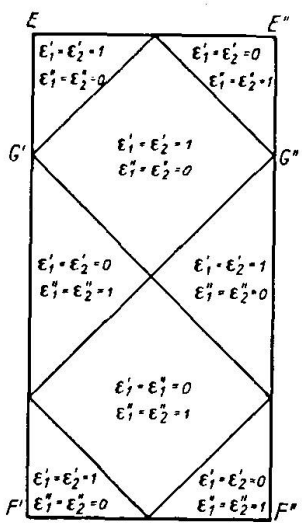
$y_1'$, $y_2'$, $y_1''$, $y_2''$ étant données par les abaques de la figure 43, $\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2'$, $\varepsilon_1''$, $\varepsilon_2''$ par l'abaque de la figure 44.

4° *Il s'agit d'un voile tel que celui de la figure 45 où les deux tympans secondaires normaux $E_1' F_1'$ et $E_1'' F_1''$ sont supprimés sur les arcs $G_1' J_1'$ et $J_1'' G_1''$ ayant pour projection $\frac{b}{4}$ issus des points $G_1'$ et $G_1''$ ayant pour projections les milieux de $E' F'$ et $E'' F''$.*




Valeurs de / Werte von / Values of $\Big\}$ $y_1'$, $y_2'$, $y_1''$, $y_2''$

Fig. 43.




Valeurs de / Werte von / Values of $\Big\}$ $\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2'$, $\varepsilon_1''$, $\varepsilon_2''$

Fig. 44.

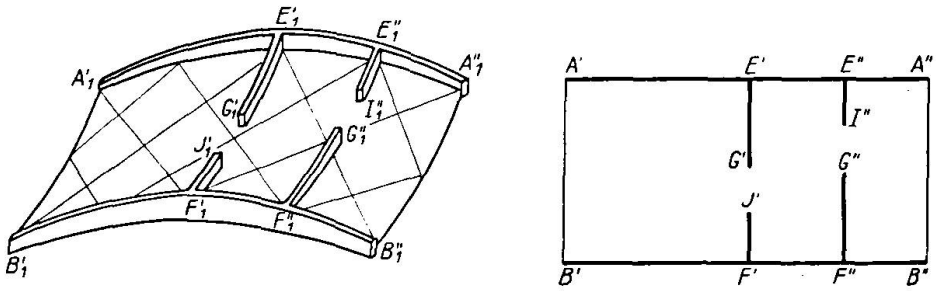



Fig. 45.

Nous supposerons appliquées à l'arc $G_1' J_1'$ des réactions tangentielles avec une densité $R'(y)$ et à l'arc $I_1'' G_1''$ des réactions tangentielles avec une densité $R''(y)$, les densités étant comptées positives dans le sens des $y$ croissants. Les contraintes réduites seront respectivement

$$q' = [\varepsilon_1' R'(y_1') - \varepsilon_2' R'(y_2') - \varepsilon_1'' R''(y_1'') + \varepsilon_2'' R''(y_2'')] \frac{b}{2a}$$

$$t = \frac{\varepsilon_2' R'(y_1') + \varepsilon_2' R'(y_2') - \varepsilon_1'' R''(y_1'') - \varepsilon_2'' R''(y_2'')}{2}$$

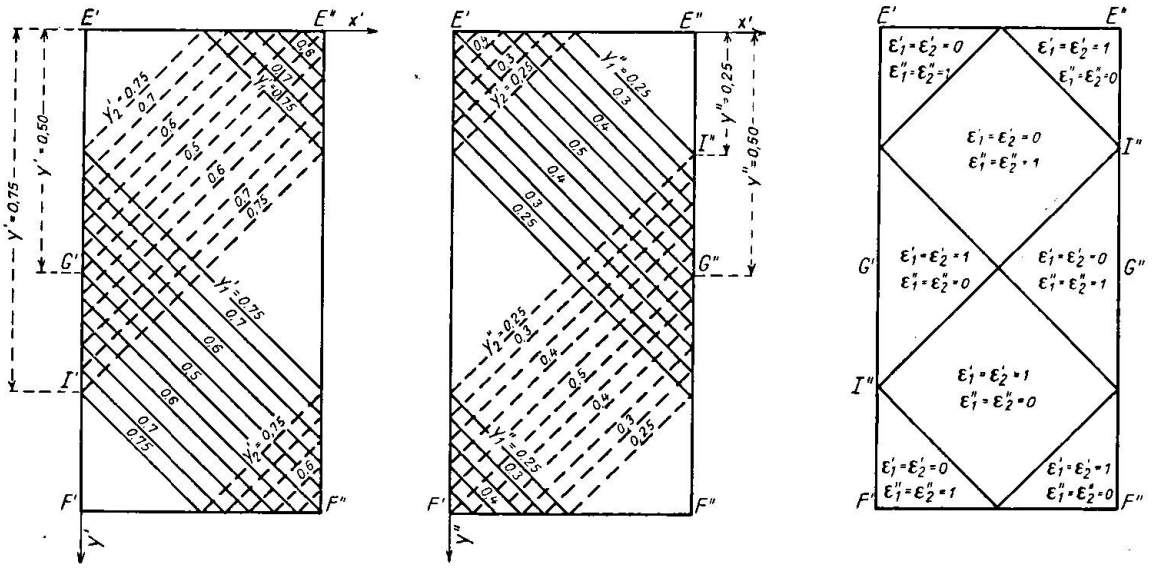
$$q = [\varepsilon_1' R'(y_1') - \varepsilon_2' R'(y_2') - \varepsilon_1'' R''(y_1'') + \varepsilon_2'' R''(y_2'')] \frac{a}{2b}$$

$y_1'$, $y_2'$, $y_1''$ et $y_2''$ étant données par les abaques de la figure 46, $\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2'$ $\varepsilon_1''$ et $\varepsilon_2''$ par l'abaque de la figure 47.

## § 3. Voiles semi-normaux.

### Propriétés fondamentales.

Considérons un voile semi-normal $A_1' A_1'' B_1'' B_1'$ projeté horizontalement suivant le rectangle $A'A'' B'' B'$. On peut l'envisager comme formé par la juxtaposition des voiles normaux projetés suivant $A A' B' B$ et $A A'' B'' B$. Les deux




Valeurs de / Werte von / Values of } $y_1'$, $y_2'$, $y_1''$, $y_2''$

Fig. 46.

Valeurs de / Werte von / Values of } $\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2'$, $\varepsilon_1''$, $\varepsilon_2''$

Fig. 47.

arcs de parabole $A_1' A_1''$ et $B_1' B_1''$ ont même flèche $f$, les deux arcs $A_1' B_1'$ et $A_1'' B_1''$ ont même flèche $f'$. On vérifie immédiatement que $f = -f'$. Nous appellerons $2a$ la longueur de la projection des arcs de flèche $f$ et $b$ la longueur de la projection des arcs de flèche $f'$. Tous les arcs de parabole tracés sur le voile parallèlement aux plans principaux ont même flèche et même projection horizontale que les arcs limitant les voiles qui leurs sont parallèles. Ce sont les arcs de parabole principale du voile.

Cela posé imaginons que le voile soit encastré suivant les arcs de parabole $A_1' A_1''$, $B_1' B_1''$, et $A_1 B_1$ [4]) dans des tympans verticaux que nous appellerons tympans principaux. Les propriétés fondamentales du voile considéré comme reportant sur ces tympans les charges qui lui sont appliquées sont alors les suivantes:

1° Le voile est en équilibre sous un système de charges dont l'intensité est constante sur tout arc de parabole principale de flèche $f$.

2° Le voile est en équilibre sous un système de charges dont la densité est constante sur tout arc de parabole principale de flèche $f'$ et a même valeur sur deux arcs de parabole de flèche $f'$ dont les projections horizontales sont symétriques par rapport à $AB$.

[4]) Les points $A_1, B_1$ sont les points du voile projetés en $A, B$.

Dans les deux cas la densité des charges est supposée mesurée en projection horizontale. Nous allons démontrer successivement ces deux propriétés et déterminer en même temps les valeurs correspondantes des contraintes dans tout le voile et des réactions sur les tympans.

Supposons tout d'abord le voile chargé suivant une bande élémentaire $\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \beta_1$ projetée en $\alpha \alpha \beta \beta$ et limitée à deux arcs de parabole principale de flèche $f$ (fig. 48). Soit $\bar{\omega}$ la densité de la charge supposée constante en projection horizontale et $e$ la longueur de la bande chargée. Le voile sera en équilibre à condition d'appliquer en $\alpha_1 \alpha_1$ et $\beta_1 \beta_1$ deux forces $Q_1 q_1$ tangentes à l'arc de parabole $\alpha_1 \beta_1$ et dont les projections horizontales ont pour valeur commune

$$Q = \frac{\bar{\omega} \cdot a^2}{2f} e.$$

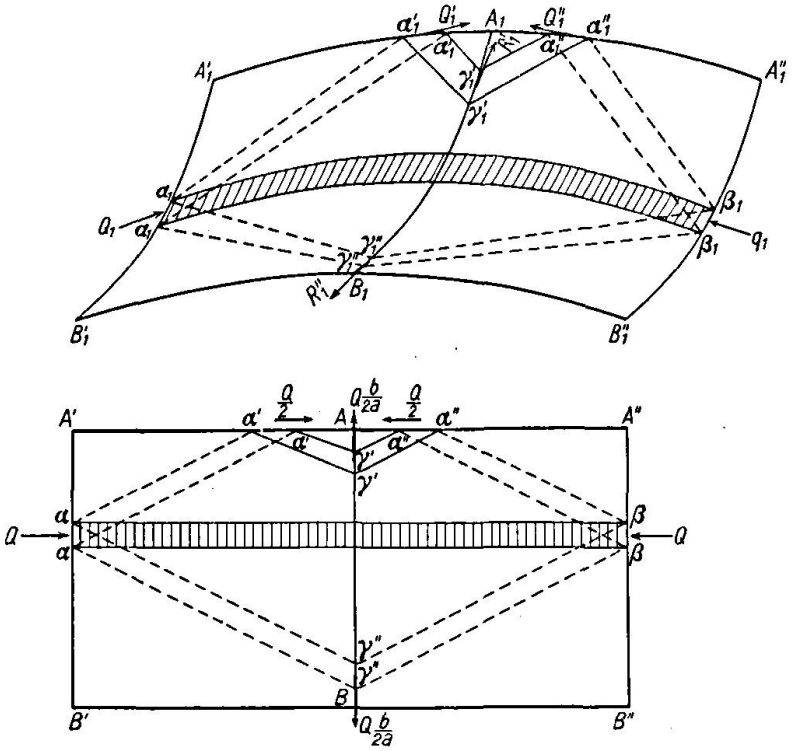



Fig. 48.

Au lieu d'appliquer les forces $Q_1$ et $q_1$, il revient au même d'appliquer les forces $Q_1'$, $Q_1''$, $R_1'$, $R_1''$ dont les projections horizontales ont pour valeur $Q$ pour les deux premières et $Q \frac{b}{2a}$ pour les deux dernières, suivant les tangentes aux arcs de parabole $A_1' A_1''$ et $A_1 B_1$ aux points $\alpha_1'$, $\alpha_1''$, $\gamma_1'$, $\gamma_1''$ ainsi définis: les points $\alpha_1'$, $\alpha_1''$ sont les intersections des tympans $A_1' A_1''$ et des génératrices passant par $\alpha_1$ et $\beta_1$; les points $\gamma_1'$, $\gamma_2''$ sont les intersections des tympans $A_1 B_1$ et des génératrices passant par $\alpha_1$ et $\alpha_1'$ [5]). On voit en effet immédiatement que le système des forces $Q_1'$, $Q_1''$, $R_1'$, $R_1''$ est équivalent statiquement au système des forces $Q_1$, $q_1$. En résumé dans l'hypothèse de charge envisagée, les ré-

[5]) Pour fixer les idées nous avons supposé que les génératrices passant par $\alpha_1$ coupaient le tympan $A_1' A_1''$ entre $A_1$ et $A_1'$ et le tympan $B_1' B_1''$ entre $B_1$ et $B_1''$. Dans le cas contraire il faut échanger la position des lettres $A, A', A''$ d'une part et $B, B', B''$ de l'autre.

actions des tympans sont les quatre forces $Q_1'$, $Q_1''$, $R_1''$, $R_1'$. L'état de contraintes dans le voile se déduit facilement de là. Suivant la bande chargée $\alpha_1 \alpha_1 \beta_1 \beta_1$ se propage un état de compression simple [6]) défini par la contrainte de compression ayant pour projection horizontale

$$q = \frac{\bar{\omega} \cdot a^2}{2f}$$

et s'exerçant sur les éléments de parabole principale de flèche $f'$ normalement à ces éléments. Suivant les éléments de parabole principale de flèche $f$ ne s'exerce aucun effort. Suivant chacune des bandes $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1' \alpha_1'$, $\alpha_1 \alpha_1 \gamma_1'' \gamma_1''$, $\beta_1 \beta_1 \alpha_1'' \alpha_1''$, $\beta_1 \beta_1 \gamma_1'' \gamma_1''$ se propage un état de traction simple défini par la contrainte mixte de traction-cisaillement s'exerçant sur les éléments de parabole principale de flèche $f'$ dont la composante normale réduite est:

$$q = -\frac{\bar{\omega} \cdot a^2}{4f}$$

et la composante tangentielle réduite:

$$t = \frac{\bar{\omega} \cdot a \cdot b}{8f}.$$

Sur les éléments de parabole principale de flèche $f$ s'exerce une contrainte mixte de traction-cisaillement dont la composante normale réduite est:

$$q' = -\frac{\bar{\omega} \cdot b^2}{16f}$$

et la composante tangentielle réduite:

$$t = \frac{\bar{\omega} \cdot a \cdot b}{8f}.$$

Sur chacune des bandes $\alpha_1' \alpha_1' \gamma_1' \gamma_1'$ et $\alpha_1'' \alpha_1'' \gamma_1' \gamma_1'$ se propage un état de compression simple défini par la contrainte mixte de compression-cisaillement s'exerçant sur les éléments de parabole principale de flèche $f'$, dont la composante normale réduite est:

$$q = \frac{\bar{\omega} \cdot a^2}{4f}$$

et la composante tangentielle réduite:

$$t = \frac{\bar{\omega} \cdot a \cdot b}{8f}.$$

Sur les éléments de parabole principale de flèche $f$ s'exerce une contrainte mixte de compression-cisaillement dont la composante normale réduite est:

$$q' = \frac{\bar{\omega} \cdot b^2}{16f}$$

et la composante tangentielle réduite:

$$t = \frac{\bar{\omega} \cdot a \cdot b}{8f}.$$

La première propriété énoncée se trouve ainsi démontrée et les valeurs des contraintes correspondantes dans le voile se déduisent immédiatement des formules précédentes.

[6]) Nous supposons pour fixer les idées que la flèche $f$ est positive et les charges $\bar{\omega}$ dirigées vers le bas.

Supposons maintenant le voile chargé suivant deux bandes élémentaires $\alpha_1' \alpha_1' \beta_1' \beta_1'$, $\alpha_1'' \alpha_1'' \beta_1'' \beta_1''$ projetés en $\alpha' \alpha' \beta' \beta'$, $\alpha'' \alpha'' \beta'' \beta''$ et limité à des arcs de parabole principale de flèche $f'$ (fig. 49). Les deux bandes sont par hypothèse symétriques en projection horizontale par rapport à $AB$. Soit encore $\bar{\omega}$ la densité de la charge supposée constante en projection horizontale, cette densité ayant par hypothèse même valeur sur les deux bandes considérées. Supposons de plus que la largeur des bandes est une valeur commune $e$. Le voile sera en équilibre à condition d'appliquer en $\alpha_1' \alpha_1'$, $\beta_1' \beta_1'$, $\alpha_1'' \alpha_1''$, $\beta_1'' \beta_1''$ des forces $Q_1$, $q_1$, $\bar{Q}_1$, $\bar{q}_1$, tangentes aux arcs de parabole $\alpha_1' \beta_1'$ et $\alpha_1'' \beta_1''$ et dont les projections horizontales ont pour valeur commune:

$$Q' = \frac{\bar{\omega} \cdot b^2}{8 f} e.$$

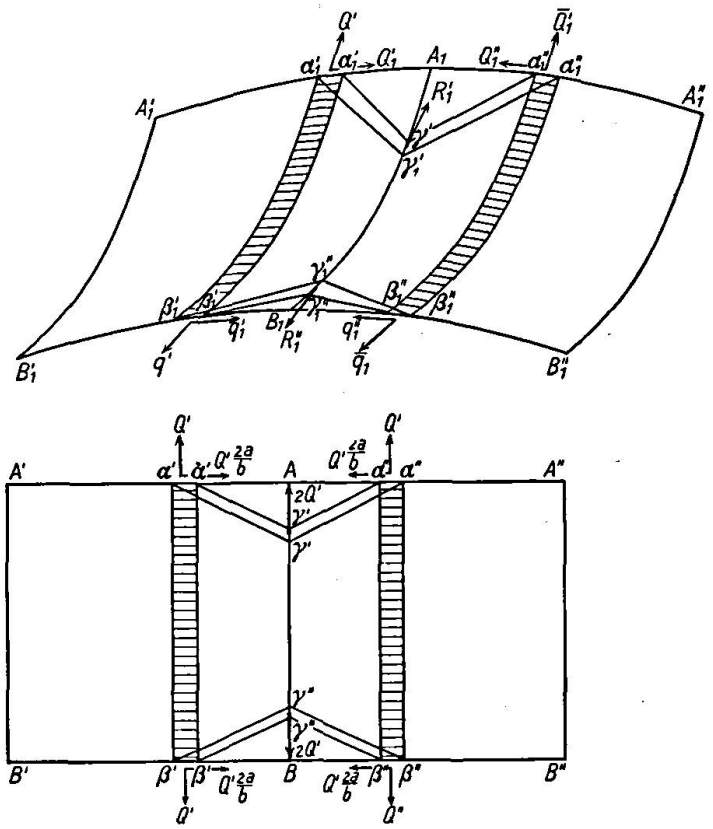


Fig. 49.

Au lieu d'appliquer les forces $Q_1 q_1$, $\bar{Q}_1 \bar{q}_1$, il revient au même d'appliquer les forces $Q_1'$, $q_1'$, $Q_1''$, $q_1''$ ayant en projection horizontale la valeur commune $Q' \frac{2a}{b}$, suivant les tangentes aux arcs de parabole $A_1' A_1''$ et $B_1' B_1''$ aux points $\alpha_1'$, $\beta_1'$, $\alpha_1''$, $\beta_1''$ et les forces $R_1'$, $R_1''$ ayant en projection horizontale la valeur commune $2 Q'$, suivant les tangentes à l'axe de parabole $A_1 B_1$ aux points $\gamma_1'$, $\gamma_1''$. On reconnait immédiatement l'équivalence des deux systèmes de forces. En résumé dans l'hypothèse de charge envisagée, les réactions des tympans sont les six forces $Q_1'$, $Q_1''$, $q_1'$, $q_1''$, $R_1'$, $R_1''$. L'état de contraintes dans le voile se déduit facilement de là. Suivant chacune des bandes chargées $\alpha_1' \alpha_1' \beta_1' \beta_1'$ et

[7]) Nous supposons toujours pour fixer les idées que la flèche $f$ est positive et les charges $\bar{\omega}$ dirigées vers le bas.

$\alpha_1'' \alpha_1'' \beta_1'' \beta_1''$ se propage un état de traction simple [7]) défini par la contrainte de traction ayant pour projection horizontale:

$$q' = \frac{\bar{\omega} \cdot b^2}{8 f}$$

et s'exerçant sur les éléments de parabole principale de flèche $f$ normalement à ces éléments. Suivant les éléments de parabole principale de flèche $f'$ il ne s'exerce aucun effort. Suivant chacune des bandes $\alpha_1' \alpha_1' \gamma_1' \gamma_1'$, $\alpha_1'' \alpha_1'' \gamma_1' \gamma_1'$, $\beta_1' \beta_1' \gamma_1'' \gamma_1''$, $\beta_1'' \beta_1'' \gamma_1'' \gamma_1''$, se propage un état de compression, simple défini par la contrainte mixte de compression-cisaillement s'exerçant sur les éléments de parabole principale de flèche $f$ dont la composante normale réduite est:

$$q' = \frac{\omega\, b^2}{8 f}$$

et la composante tangentielle réduite

$$t = \frac{\bar{\omega} \cdot a \cdot b}{4 f}.$$

Sur les éléments de parabole principale de flèche $f'$ s'exerce une contrainte mixte de compression-cisaillement dont la composante normale réduite est:

$$q = \frac{\bar{\omega} \cdot a^2}{2 f}$$

et la composante tangentielle réduite

$$t = \frac{\bar{\omega} \cdot a \cdot b}{4 f}.$$

La deuxième propriété énoncée se trouve ainsi démontrée et les valeurs des contraintes correspondantes dans le voile se déduisent immédiatement des formules précédentes.

Appliquons les résultats que nous avons obtenus à un voile semi-normal à trois tympans principaux dans les trois cas suivants de charge.

1° Charge uniformément répartie en projection horizontale de densité $\bar{\omega}$.

2° Charge de densité $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 \frac{\eta}{b}$, $\bar{\omega}_0$ étant une constante, $b$ la longueur des arcs de parabole principale parallèle au tympan médian, et $\eta$ la distance comptée horizontalement parallèlement à ce tympan d'un point quelconque du voile à l'un des deux autres tympans.

3° Charge répartie symétriquement par rapport au tympan médian avec une densité $\omega = \bar{\omega}_0 \left[1 - \left|1 - \frac{\xi}{a}\right|\right]$, $\bar{\omega}_0$ étant une constante, $a$ la longueur des arcs de parabole de flèche $f$ et $\xi$ la distance comptée horizontalement perpendiculairement au tympan médian d'un point quelconque du voile à un des bords libres.

### Charge uniformément répartie en projection horizontale de densité $\bar{\omega}$.

Reprenons (fig. 50) le voile projeté horizontalement suivant le rectangle $A' A'' B'' B'$ avec $A' A'' = B' B'' = 2a$, $A' B' = A'' B'' = b$, $f$ désigne toujours la flèche de l'arc de parabole projeté en $A' A''$. Soient $A$ et $B$ les milieux de $A' A''$, $B' B''$, et $C$ le point d'intersection de $A' B''$ et $A'' B'$. $A' A''$, $B' B''$ et

$AB$ sont par hypothèse les projections des tympans principaux. On constate immédiatement qu'il y a deux états de contraintes dans le voile:

1° Dans les parties du voile projetées suivant $A'B'C$ et $A''B''C$ un état de traction simple de direction parallèle à $AB$ en projection et défini par la valeur

$$q' = \frac{\bar{\omega}\, b^2}{8f}$$

de la projection horizontale de la contrainte s'exerçant sur les éléments perpendiculaires à $AB$ en projection et normalement à ces éléments;

2° Dans les parties du voile projetées suivant $AA'C$, $AA''C$, $BB'C$, $BB''C$, un état de compression et traction défini par une contrainte de cisaillement:

$$t = \frac{\bar{\omega}\, a\, b}{4f}$$

s'exerçant sur les éléments parallèles en projection aux tympans et par les composantes normales s'exerçant sur ces éléments, à savoir zéro sur les éléments parallèles à $A'A''$ et

$$q = \frac{\bar{\omega}\, a^2}{2f}$$

sur les éléments parallèles à $AB$.

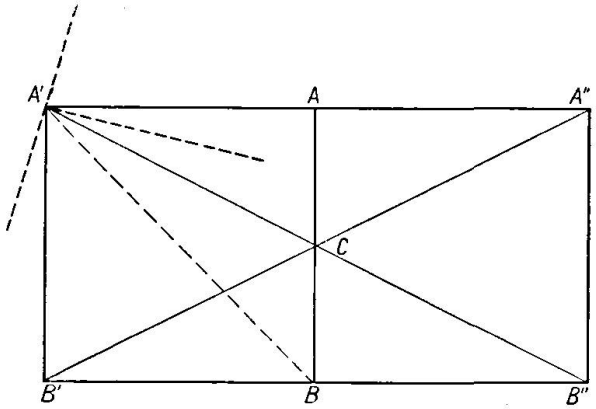


Fig. 50.

Les directions principales et les valeurs des contraintes principales sont immédiatement connues dans le premier cas. Dans le second la construction du cercle de Mohr conduit aux résultats suivants, dans la région $AA'C$; les directions principales réduites sont parallèles aux bissectrices de l'angle $\widehat{AA'C}$; suivant la bissectrice intérieure s'exerce une contrainte principale de compression ayant pour valeur

$$\frac{\bar{\omega}\, a\,(a + \sqrt{a^2 + b^2})}{4f}$$

et suivant la bissectrice extérieure une contrainte principale de traction ayant pour valeur

$$\frac{\bar{\omega}\, a\,(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}{4f}.$$

Les réactions des tympans sont des efforts tangents aux arcs de parabole qui les constituent et ont pour valeur en projection horizontale

$$\frac{\bar{\omega} \cdot a\, b}{4f}$$

par unité de longueur. Ces réactions sont toujours dirigées vers le point $A$ pour le tympan $A'A''$ et la partie $AC$ du tympan $AB$, et vers le point $B$ pour le tympan $B'B''$ et la partie $BC$.

### Charges réparties avec la densité $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 \frac{\eta}{b}$.

Prenons le même voile, $\eta$ étant comptée à partir de $A'A''$. On est conduit aux résultats suivants:

1° Sur un élément de parabole principale de flèche $f$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q' = k' \frac{\bar{\omega}_0 b^2}{16 f}$$

et pour composante tangentielle

$$t = \varkappa \frac{\bar{\omega}_0 a b}{8 f}$$

$k'$ et $\varkappa$ ayant les valeurs données par les abaques de la figure 51.

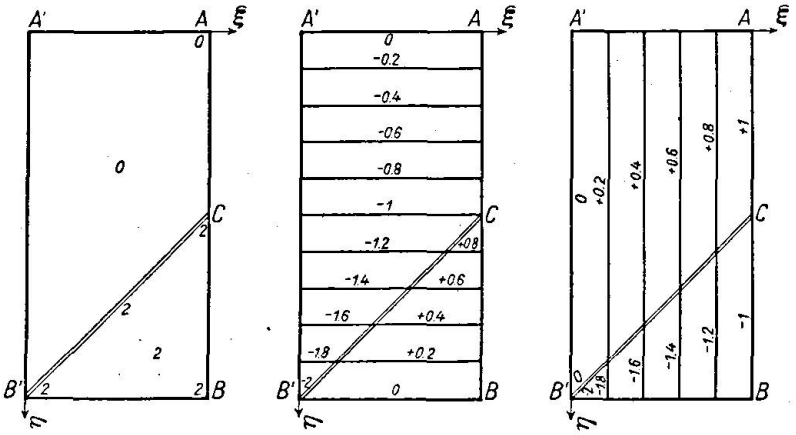
2° Sur un élément de parabole principale de flèche $f'$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q = k \frac{\bar{\omega}_0 a^2}{4 f}$$

et pour composante tangentielle

$$t = \varkappa \frac{\bar{\omega}_0 \cdot a \cdot b}{8 f}$$

$k$ et $\varkappa$ ayant les valeurs données par les abaques de la figure 51.




Valeurs de $K$ — Werte von $K$ — Values of K

Valeurs de K' — Werte von $K'$ — Values of $K'$

Valeurs de $x$ — Werte von $x$ — Values of $x$

Fig. 51. Densité de charge — Belastungsgröße — Intensity of loading $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 \frac{\eta}{b}$

## Charge répartie symétriquement par rapport au tympan médian avec une densité $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 \left[1 - \left|1 - \frac{\xi}{a}\right|\right]$.

Prenons le même voile, $\xi$ étant comptée à partir de $A'B'$. On est conduit aux résultats suivants:

1° Sur un élément de parabole principale de flèche $f$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q' = k' \frac{\bar{\omega} b^2}{8 f}$$

et pour composante tangentielle

$$t = \varkappa \frac{\bar{\omega} \cdot a b}{4 f}$$

$k'$ et $\varkappa$ ayant les valeurs données par les abaques de la figure 52.

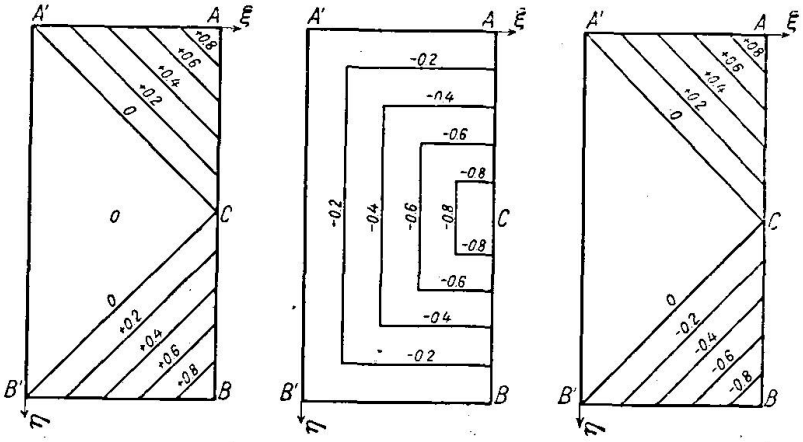
Sur un élément de parabole principale de flèche $f'$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q = k \frac{\bar{\omega} \cdot a^2}{2f}$$

et pour composante tangentielle

$$t = \varkappa \frac{\bar{\omega} \cdot ab}{4f}$$

$k'$ et $\varkappa$ ayant les valeurs données par les abaques de la figure 52.




Valeurs de $K$ — Werte von $K$ — Values of $K$

Valeurs de $K'$ — Werte von $K'$ — Values de $K'$

Valeurs de $x$ — Werte von $x$ — Values of $x$

Fig. 52. Densité de charge — Belastungsgröße — Intensity of loading $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 \left[1 - \left|1 - \frac{\xi}{a}\right|\right]$

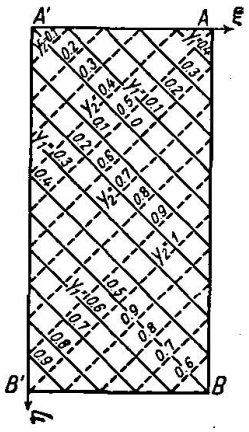



Fig. 53.

Fonctions $y_1$ et $y_2$
Funktionen $y_1$ und $y_2$
Functions $y_1$ and $y_2$

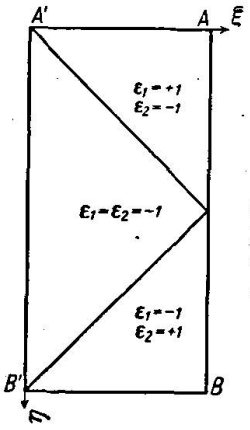



Fig. 54.

Coefficients $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$
Koeffizienten $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$
Coefficients $\varepsilon_1$ and $\varepsilon_2$

Expressions générales des contraintes réduites pour une densité quelconque constante sur les paraboles de flèche $f$.

Reprenons le voile et posons

$$x = \frac{\xi}{a}, \qquad y = \frac{\eta}{b}$$

$\xi$ et $\eta$ étant comptés, le premier à partir de $A'B'$ et le second à partir de $A'A''$. On est conduit aux résultats suivants, en désignant par $\pi(y)$ la densité, par $y_1$ et $y_2$ les deux fonctions définies par l'abaque de la figure 53 et par $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ deux coefficients ayant les valeurs $+1$ ou $-1$ suivant les régions du voile comme l'indique l'abaque de la figure 54:

1° Sur un élément de parabole principale de flèche $f$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q' = \frac{b^2}{16 f} [\varepsilon_1 \pi(y_1) + \varepsilon_2 \pi(y_2)]$$

et pour composante tangentielle

$$t = \frac{a \cdot b}{8 f} [\varepsilon_1 \pi(y_1) - \varepsilon_2 \pi(y_2)].$$

2° Sur un élément de parabole principale de flèche $f'$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q = \frac{a^2}{4 f} [\varepsilon_1 \pi(y_1) + \varepsilon_2 \pi(y_2) + 2 \pi(y)]$$

et pour composante tangentielle

$$t = \frac{a \cdot b}{8 f} [\varepsilon_1 \pi(y_1) - \varepsilon_2 \pi(y_2)].$$

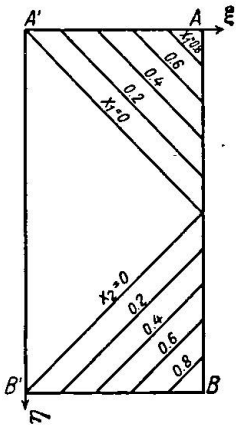



Fig. 55.

Fonctions $x_1$ et $x_2$
Funktionen $x_1$ und $x_2$
Funktions $x_1$ and $x_2$

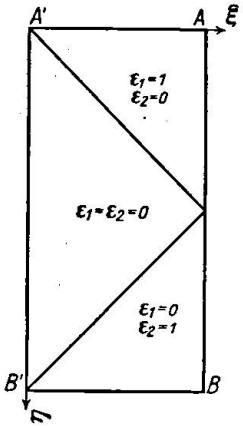



Fig. 56.

Coefficients $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$
Koeffizienten $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$
Coefficients $\varepsilon_1$ and $\varepsilon_2$

Expressions générales des contraintes réduites pour une charge de densité constante sur les paraboles de flèche $f'$ et ayant même valeur en des points symétriques par rapport au tympan principal médian.

Reprenons ce même voile et posons toujours $x = \frac{\xi}{a}$, $y = \frac{\eta}{b}$. Désignons par $\pi(x)$ la densité, par $x_1$ et $x_2$ deux fonctions définies par l'abaque de la figure 55, et par $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ deux coefficients ayant les valeurs $+1$ ou zéro suivant les régions du voile comme l'indique la figure 56.

1° Sur un élément de parabole principale de flèche $f$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q' = \frac{b^2}{8 f} [\varepsilon_1 \pi(x_1) + \varepsilon_2 \pi(x_2) - \pi(x)]$$

et pour composante tangentielle

$$t = \frac{a \cdot b}{4 f} [\varepsilon_1 \pi(x_1) - \varepsilon_2 \pi(x_2)].$$

2° Sur un élément de parabole principale de flèche $f'$ s'exerce une contrainte réduite ayant pour composante normale

$$q = \frac{a^2}{2 f} [\varepsilon_1 \pi(x_1) + \varepsilon_2 \pi(x_2)]$$

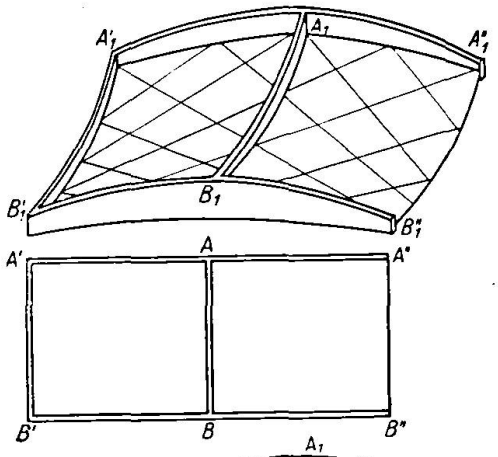



Fig. 57.

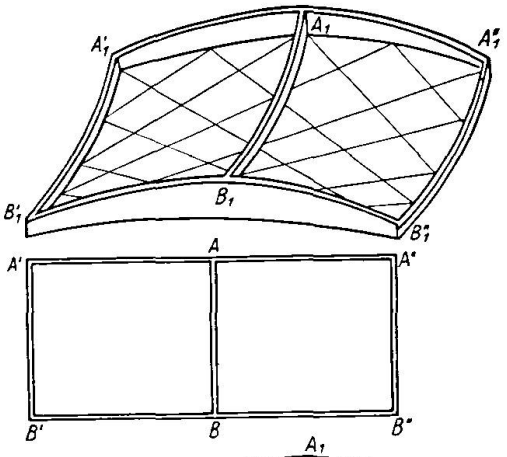



Fig. 58.

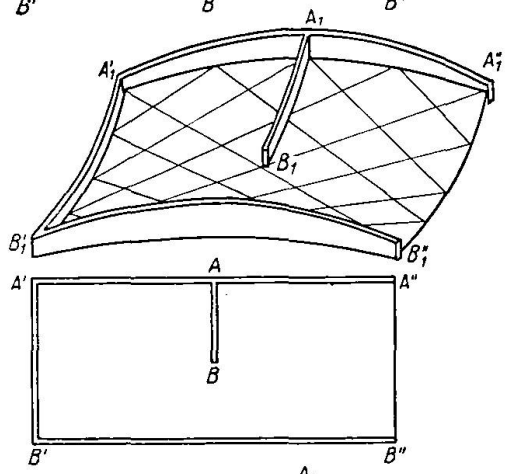



Fig. 59.

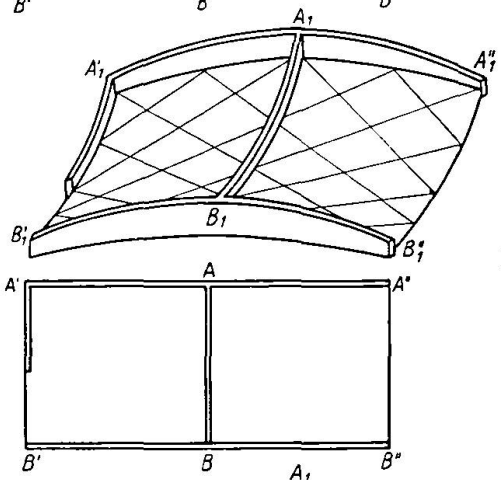



Fig. 60.

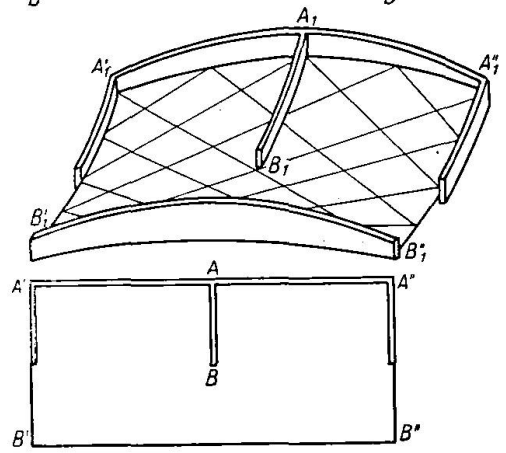



Fig. 61.

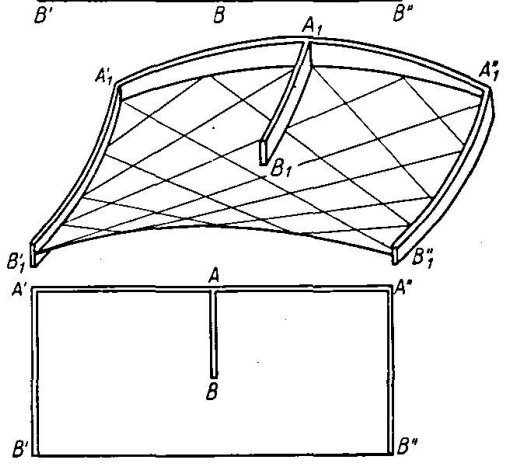



Fig. 62.

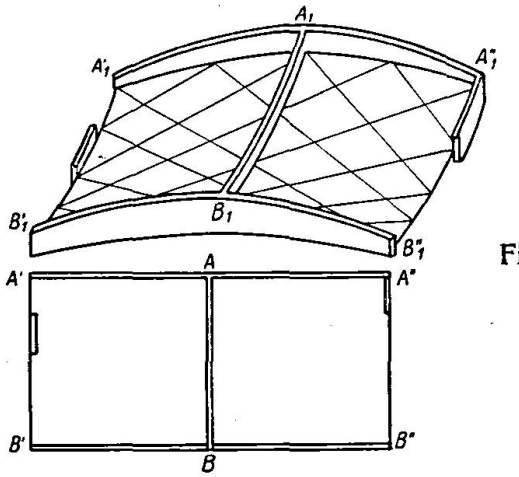



Fig. 63.

et pour composante tangentielle

$$t = \frac{a \cdot b}{4 f} [\varepsilon_1 \pi(x_1) - \varepsilon_2 \pi(x_2)].$$

Introduction de tympans secondaires.

Comme dans le cas des voiles normaux, l'introduction de tympans secondaires permet de réaliser l'équilibre, sans contreventement sous des charges admettant d'autres répartitions. Reprenons toujours le même voile et bornons nous au cas de charges réparties avec une densité constante sur toute parabole principale de flèche $f'$. Nous introduirons d'abord un tympan secondaire suivant $A_1' B_1'$ (fig. 57) puis un second tympan secondaire suivant $A_1'' B_1''$ (fig. 58).

Dans le premier cas où il n'y a qu'un tympan secondaire suivant $A_1' B_1'$ on décompose la charge appliquée en deux charges, la première symétrique en projection par rapport au tympan principal médian $AB$ et la seconde appliquée seulement sur le voile normal $A_1' A_1 B_1 B_1'$, dont $A_1' B_1'$ et $A_1 B_1$ forment les tympans principaux. Les deux charges ainsi obtenues correspondent à des équilibres déjà étudiés, qui sont d'ailleurs hyperstatiques, comme nous l'avons vu. On peut d'ailleurs les rendre isostatiques par suppression de certains tympans comme dans les figures 59 (suppression de la moitié du tympan $A_1 B_1$) et 60 (suppression de la moitié du tympan $A_1' B_1'$).

Dans le cas de deux tympans secondaires suivant $A_1' B_1'$ et $A_1'' B_1''$, chaque demi-voile $A_1' A_1 B_1 B_1'$ et $A_1'' A_1 B_1 B_1''$ constitue un voile normal chargé parallèlement à ses tympans principaux, cas précédemment étudié. L'équilibre est hyperstatique. Pour le rendre isostatique il faut supprimer certains éléments de tympans comme dans les figures 61 — (suppression de la moitié des tympans $A_1' B_1'$, $A_1 B_1$, $A_1'' B_1''$), 62 (suppression de la moitié du tympan $A_1 B_1$ et de tout le tympan $B_1' B_1''$) et 63 (suppression de trois quarts de tympan $A_1' B_1'$ et de trois quarts de tympan $A_1'' B_1''$).

## § 4. Association de voiles normaux et semi-normaux.

**(Voiles tronqués, voiles hyponormaux et sesquinormaux, voiles busqués.)**

Modes divers d'association des voiles normaux et semi-normaux.

On peut associer les voiles normaux entre eux, les voiles semi-normaux entre eux. On peut également associer voiles normaux et semi-normaux. Ces associations peuvent consister soit dans de simples juxtapositions de bords libres ou de tympans, soit dans la liaison mécanique des voiles suivant un bord libre ou suivant un tympan.

Dans de telles associations chaque voile pourra toujours être considéré comme intervenant selon ses propriétés particulières, mais on pourra souvent envisager l'ensemble de deux voiles ou de deux parties de voiles comme un voile spécial agissant en vertu de ses caractéristiques propres pour certaines des charges à supporter. C'est ainsi que la juxtaposition de deux voiles semi-normaux pourra être assimilée dans certains cas à un voile normal.

Les associations ainsi formées constituent souvent des systèmes hyperstatiques. On pourra toujours les rendre isostatiques en pratiquant des coupures convenables au droit des éléments surabondants.

Associations de voiles tronqués.

Dans certains cas il peut être avantageux d'associer des voiles dont on a au préalable retranché certains éléments. C'est ce que nous appellerons des

associations de voiles tronqués. En général on associera les bords suivant lesquels auront été opérés les troncatures et on adjoindra les tympans supplémentaires rendus nécessaires par ces troncatures.

Parmi les associations de voiles tronqués, nous en étudierons deux particulières intéressantes au point de vue des applications. La première est la juxtaposition de deux voiles semi-normaux tronqués au quart et se raccordant suivant un plan tangent commun (fig. 64). Nous appellerons une telle association „voile hyponormal". La seconde association que nous envisagerons est constituée par la juxtaposition de trois voiles semi-normaux raccordés deux à deux suivant un plan tangent commun (fig. 65) en la considérant comme l'association de deux voiles normaux tronqués au quart et réunis suivant les bords tronqués. Nous appellerons une telle association „voile sesquinormal".

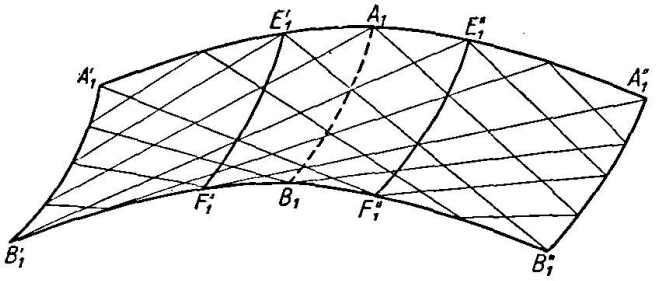



Fig. 64.

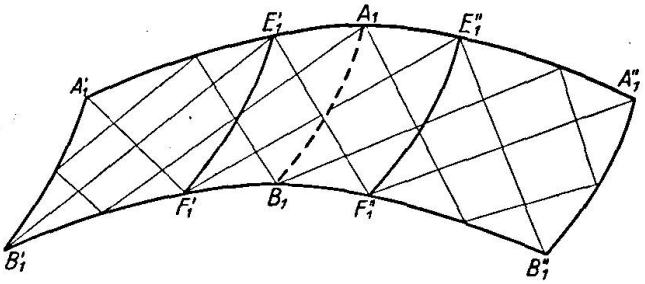



Fig. 65.

## Voiles hyponormaux.

Considérons par exemple le voile hyponormal de la figure 64 constitué par les voiles semi-normaux $A_1' E_1'' F_1'' B_1'$ et $E_1' A_1'' B_1'' F_1'$ tronqué suivant $A_1 B_1$ et associés suivant cette troncature. On est naturellement conduit à considérer cinq tympans répartis comme l'indique la fig. 66. Le voile ainsi obtenu est ce que nous appellerons le voile hyponormal hyperstatique symétrique. Il est

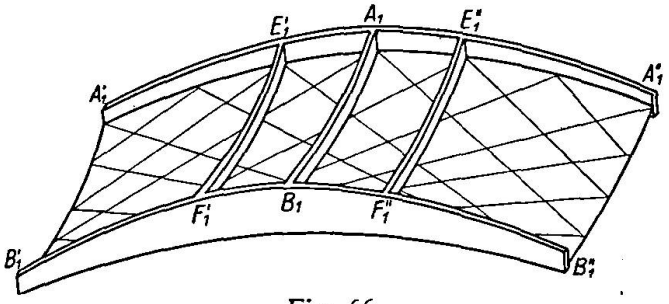



Fig. 66.

facile de déterminer des systèmes de contraintes correspondants aux deux cas de charges suivants:

1° Charge à densité constante sur toute parabole principale dont le plan est parallèle aux tympans $E_1' F_1'$, $A_1 B_1$, $E_1'' F_1''$.

2° Charge à densité constante sur toute parabole principale dont le plan est parallèle aux tympans $A_1' A_1''$, $B_1' B_1''$.

Pour le premier cas de charge envisagé, on peut par exemple considérer la charge comme supportée en partie par chacun des voiles semi-normaux $A_1' E_1'' F_1'' B_1'$ et $E_1' A_1'' B_1'' F_1'$ composants. Dans le second cas de charge, on calculera les contraintes dans chaque demi-voile tronqué $A_1' A_1 B_1 B_1'$ et $A_1'' A_1 B_1 B_1''$ comme s'il s'agissait du voile semi-normal correspondant. Il est en effet facile de se rendre compte que les contraintes que l'on obtient ainsi

sur chaque élément du tympan $A_1 B_1$ ont nécessairement une résultante suivant le plan du tympan.

Fig. 67.

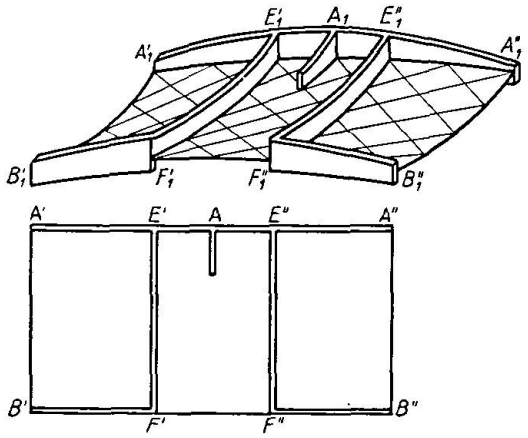
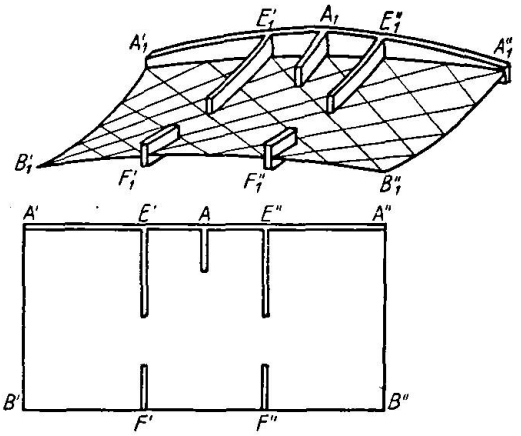



Fig. 68.



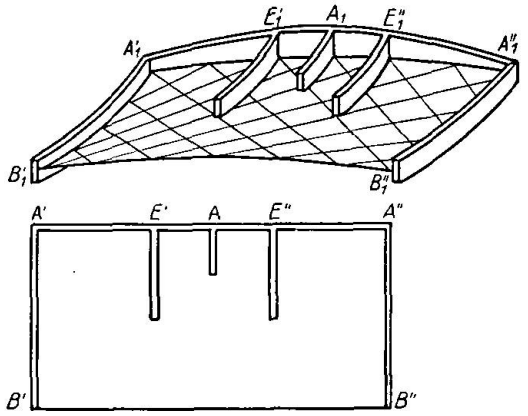




Fig. 69.

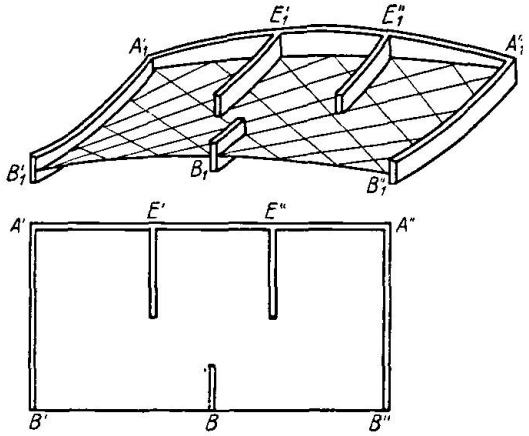



Fig. 70.

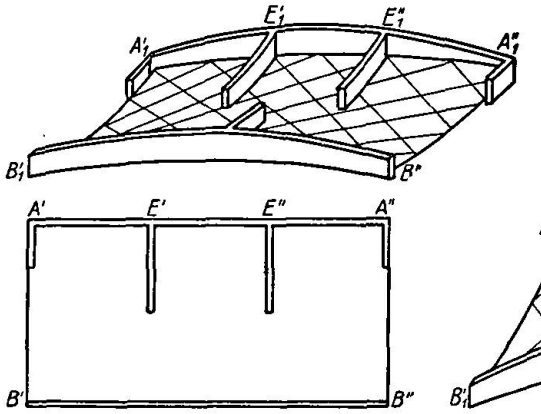



Fig. 71.

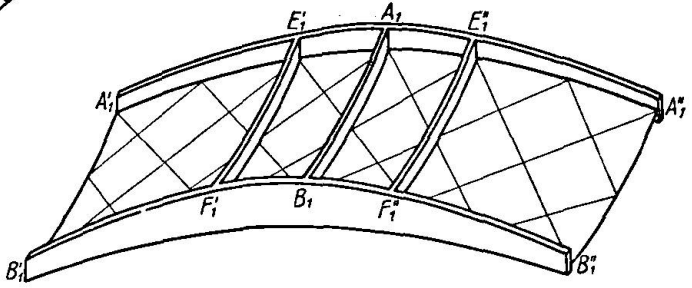



Fig. 72.

Considérons maintenant un voile hyponormal isostatique obtenu à partir du voile hyperstatique symétrique précédent par suppression de certains éléments de tympan. Le calcul des contraintes, dans un tel voile se fera à partir des résultats obtenus pour le voile hyperstatique symétrique, en appliquant au droit des éléments de tympan supprimés les réactions correspondantes changées

de sens et en calculant les contraintes qui en résultent par la méthode des réflexions successives. Les figures 67—71 donnent quelques types de voiles hyponormaux isostatiques.

## Voiles sesquinormaux.

Considérons le voile sesquinormal de la figure 65 constitué par les voiles normaux $A_1' E_1'' F_1'' B_1'$ et $E_1' A_1'' B_1'' F_1'$ tronqués suivant $A_1 B_1$ et associés suivant cette troncature. On est naturellement conduit à considérer cinq tympans répartis comme l'indique la figure 72. Le voile ainsi obtenu est ce que nous appellerons le voile sesquinormal hyperstatique symétrique. Il est facile de déterminer des systèmes de contraintes correspondant aux deux cas de charges suivants:

1° Charge à densité constante sur toute parabole principale dont le plan est parallèle aux tympans $E_1' F_1'$, $A_1 B_1$, $E_1'' F_1''$.

2° Charge à densité constante sur toute parabole principale dont le plan est parallèle aux tympans $A_1' A_1''$, $B_1' B_1''$.

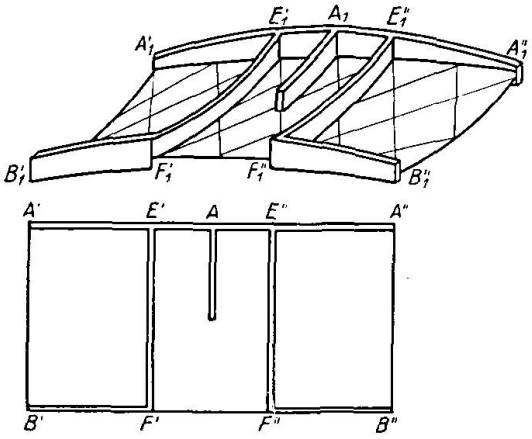



Fig. 73.

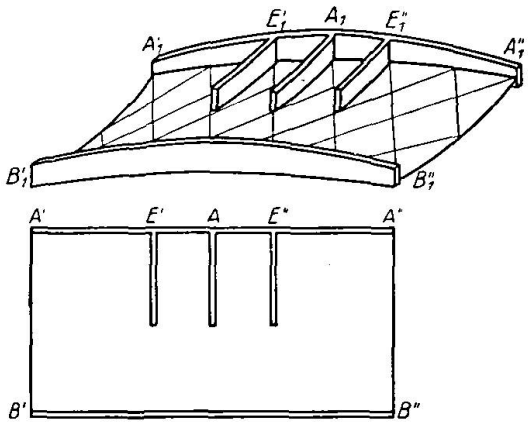



Fig. 74.

Dans le premier cas de charge envisagé, on peut par exemple considérer la charge comme supportée en partie par chacun des voiles normaux $A_1' E_1'' F_1'' B_1'$ et $E_1' A_1'' B_1'' F_1'$ composants; dans le second cas de charge, on calculera les contraintes dans chaque demi-voile tronqué $A_1' A_1 B_1' B_1$ et $A_1'' A_1 B_1 B_1''$ comme s'il s'agissait du voile normal correspondant. Il est en effet facile de se rendre compte que les contraintes que l'on obtient ainsi sur chaque élément du tympan $A_1 B_1$ ont nécessairement une résultante suivant le plan de ce tympan.

Considérons maintenant un voile sesquinormal isostatique obtenu à partir du voile hyperstatique symétrique précédent par suppression de certains éléments de tympans. Le calcul des contraintes dans un tel voile se fera à partir des résultats obtenus pour le voile hyperstatique symétrique en appliquant au droit des éléments de tympans supprimés les réactions correspondantes changées de sens et en calculant les contraintes qui en résultent par la méthode des réflexions successives. Les figures 73, 74 et 75 donnent quelques types de voiles sesquinormaux isostatiques.

## Voiles busqués.

Considérons un voile quelconque $M_1' M_1'' N_1'' N_1'$ (fig. 76) limité à quatre paraboles principales et pourvu d'un nombre quelconque de tympans verticaux.

Le voile peut être considéré comme engendré par un arc de parabole $\pi$ à axe vertical se déplaçant parallèlement à lui-même de telle sorte que ses extrémités décrivent les arcs de parabole égaux $M_1' M_1''$ et $N_1' N_1''$. Soit $M_1 N_1$ une position quelconque de l'arc $\pi$ dans le mouvement. Par les points $M_1$ et $N_1$ menons dans les plans $M_1 M_1' M_1''$ et $N_1 N_1' N_1''$ des arcs de parabole parallèles à axes verticaux $M_1 M_2'$ et $N_1 N_2'$ dont les extrémités $M_2'$ et $N_2'$ auront mêmes projections horizontales que $M_1'$ et $N_1'$ et dont les déviations aient même valeur que celle des arcs $M_1' M_1$ et $N_1 N_1'$. Si nous déplaçons l'arc de parabole $\pi$ parallèlement à l'arc $M_1 N_1$ de manière à faire décrire à ses extrémités les arcs $M_2' M_1 M_1''$ et $N_2' N_1 N_1''$ respectivement, nous engendrons un nouveau voile que nous désignons sous le nom de voile busqué, pour rappeler qu'il est engendré par un même arc de parabole dont les directrices présentent une discontinuité angulaire.

L'importance de la considération des voiles busqués résulte de la propriété suivante: un voile busqué tel que $M_2' M_1'' N_1'' N_2''$ pourvu d'un tympan vertical

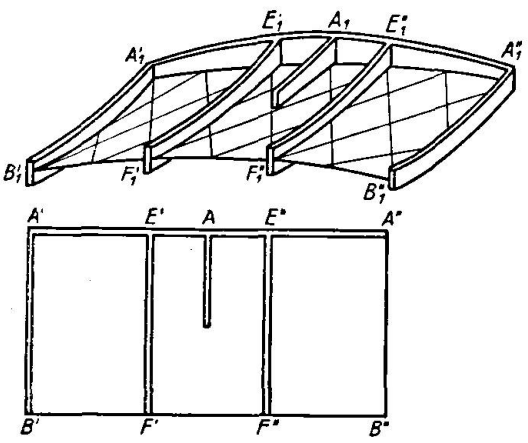



Fig. 75.

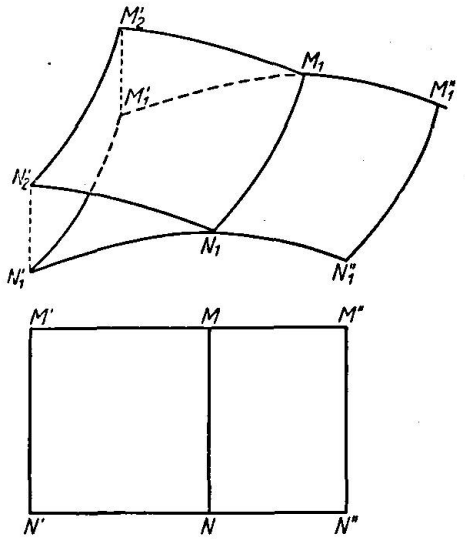



Fig. 76.

suivant l'arc de busquage $M_1 N_1$ et soumis aux mêmes charges verticales et aux mêmes efforts tangentiels que le voile primitif $M_1' M_1'' N_1'' N_1'$ (les densités de charges étant comptées en projection horizontale) supporte les mêmes contraintes que le voile primitif aux points ayant même projection horizontale. Cette propriété résulte immédiatement du fait que les contraintes dans un voile ne dépendent que de la densité des charges appliquées, comptée en projection horizontale, des longueurs projetées des paraboles de bord et des flèches de ces paraboles.

## § 5. Action des efforts tangentiels sur les voiles normaux, semi-normaux et voiles dérivés.

### Définition des efforts tangentiels considérés — Principe d'équivalence.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que des charges verticales à densité constante sur toute parabole principale ayant son plan parallèle à celui d'une parabole de bord du voile considéré. Nous allons maintenant étudier l'action sur les mêmes voiles d'efforts tangentiels agissant parallèlement au plan d'une

parabole de bord avec une densité constante sur toute parabole principale ayant son plan perpendiculaire à celui de la parabole de bord considérée.

Le calcul des contraintes sous l'influence des efforts tangentiels envisagés se ramène très aisément aux cas précédemment traités où les charges appliquées sont des charges verticales, grâce au principe d'équivalence. Ce principe peut s'énoncer ainsi: étant donné une parabole principale soumise à des efforts qui lui sont tangents, il est possible d'obtenir un système équivalent formé par des charges verticales appliquées le long de la dite parabole et par des charges s'équilibrant sur l'arc considéré comme un fil sans raideur, ou ce qui revient au même admettant l'arc pour courbe funiculaire.

La démonstration du principe précédent et la détermination effective du système de charges verticales correspondant à un système donné d'efforts tangentiels peuvent s'obtenir ainsi qu'il suit. Soit $\alpha$ la projection horizontale de l'abscisse curviligne d'un point de la parabole considérée, $\Theta \cdot d\alpha$ la projection de l'effort tangentiel agissant au point d'abscisse $\alpha$ sur un élément $d\alpha$, $\Omega \cdot d\alpha$ la charge verticale cherchée, $\alpha_0$ et $\alpha_1$ les abscisses des points extrêmes de l'arc de parabole, $\delta$ la déviation de cet arc. Pour que l'arc considéré comme un fil sans raideur soit en équilibre sous l'action des charges $-\Omega \cdot d\alpha$ il faut:

1° qu'en chaque point de l'arc, il s'exerce sur un élément perpendiculaire une contrainte ayant en projection la valeur $-\dfrac{\Omega(\alpha_1-\alpha_0)^2}{2\delta}$.

2° que sur tout élément d'arc $d\alpha$ on applique une force tangentielle ayant en projection horizontale la valeur $-\dfrac{(\alpha_1-\alpha_0)^2}{2\delta}\dfrac{d\Omega}{d\alpha}d\alpha$

Il résulte de là que les charges $-\Omega\, d\alpha$ et les efforts tangentiels appliqués formeront un système en équilibre sur l'arc considéré comme un fil sans raideur si

$$-\frac{(\alpha_1-\alpha_0)^2}{2\cdot\delta}\frac{d\Omega}{d\alpha}=\Theta$$

c'est-à-dire

$$\Omega=\Omega_0-\frac{2\delta}{(\alpha_1-\alpha_0)^2}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Theta\, d\alpha.$$

Les réactions de ce système sont deux forces appliquées aux extrémités de l'arc et ayant respectivement pour valeur en projection horizontale:

$$T_0=-\frac{\Omega_0(\alpha_1-\alpha_0)^2}{2\delta}\quad\text{et}\quad T_1=-\frac{\Omega_0(\alpha_1-\alpha_0)^2}{2\delta}+\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\Theta\, d\alpha,$$

$\Omega_0$ étant une quantité arbitraire. Par conséquent si au système initial d'efforts tangentiels on superpose le système en équilibre $(-\Omega\cdot d\alpha)\cdot(+\Omega\, d\alpha)$, le système résultant, équivalent au système initial peut être considéré comme la somme d'un système de charges verticales et d'un système de forces admettant l'arc comme courbe funiculaire. Le principe énoncé est établi.

Supposons en particulier qu'on ait un voile $A_1B_1C_1D_1$ (fig. 77) projeté en $ABCD$ et qu'on soumette ce voile à des efforts tangentiels projetés parallèlement à $AB$ et ayant une densité constante sur toute parabole projetée parallèlement à $AD$. L'application du principe précédent montre qu'il revient au même de supposer un système de charges verticales de densité constante sur toute parallèle à $AD$, complété par un système de forces réparties de manière à maintenir en équilibre funiculaire tout arc de parabole principale parallèle à $AB$ en projection. Nous appellerons le système de charges verticales le système vertical et le système se faisant équilibre sur l'arc $\pi$ considéré comme un fil

sans raideur, le système funiculaire, pour rappeler que tout arc de parabole principale parallèle à $AB$ en projection est un funiculaire du système des charges qui lui sont appliquées. Le système funiculaire ainsi défini est essentiellement caractérisé par sa poussée dont la valeur projetée est $T = \int_0^a \Theta \, d\alpha$ au point d'abscisse $\alpha$.

Remarquons que l'on peut choisir arbitrairement un des deux systèmes de réactions suivant $AD$ et $BC$, l'autre système s'en déduisant ainsi que le système des charges verticales. Nous aurons fréquemment l'occasion d'utiliser cette remarque dans les applications.

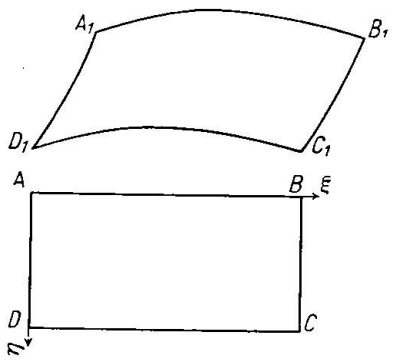



Fig. 77.

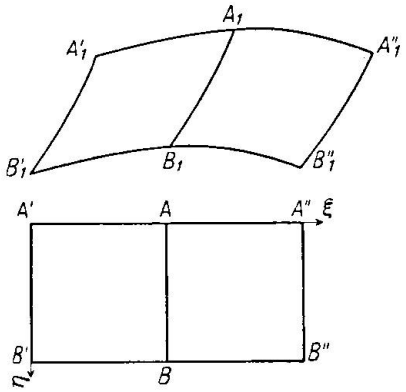



Fig. 78.

Efforts tangentiels sur un voile normal.

Considérons à nouveau le voile normal $A_1' A_1'' B_1'' B_1'$ (fig. 78) projeté en $A' A'' B'' B'$ et comportant les tympans principaux $A_1' A_1''$ et $B_1' B_1''$. Rapportons le voile projeté à deux arcs de coordonnées $A'\xi$ et $A'\eta$ dirigées suivant $A' A''$ et $A' B'$. Posons toujours $a = A' A = A A'' = \frac{A' A''}{2}$, $b = A' B'$ et appelons également $f$ la flèche de l'arc $A_1' A_1''$. Nous allons traiter trois cas d'efforts tangentiels analogues à ceux déjà traités de charges verticales, auxquels ils se ramènent immédiatement.

1°. Efforts tangentiels appliqués parallèlement à $A' A''$ en projection avec une densité $X(\xi)$ admettant la période $a$. Considérons séparément l'équilibre de deux demi-voiles $A_1' A_1 B_1 B_1'$ et $A_1'' A_1 B_1 B_1''$ et appliquons le principe d'équivalence à chacun d'eux, en prenant des réactions nulles sur $A_1' B_1'$ pour le premier demi-voile et des réactions nulles sur $A_1 B_1$ pour le second. Les charges verticales correspondantes sont réparties avec la densité

$$\omega(\xi) = -\frac{2f}{a^2} \int_0^\xi X(\xi) \, d\xi$$

sur le demi-voile $A_1' A_1 B_1 B_1'$, et avec la densité

$$\omega(\xi) = -\frac{2f}{a^2} \int_a^\xi X(\xi) \, d\xi$$

sur le demi-voile $A_1'' A_1 B_1 B_1''$. Le système funiculaire a pour poussée au point $\xi$, $\tau = \int_0^\xi X(\xi) \, d\xi$. Les réactions sur $A_1 B_1$ et $A_1'' B_1''$ dues au système funiculaire sont en projection horizontale parallèles à $A' A''$ et sont réparties sur $AB$ et

$A''B''$ avec la densité

$$\tau_1 = \int_0^a X(\xi)\, d\xi$$

Ces réactions se font d'ailleurs équilibre sur le voile par réflexion sur les tympans principaux, comme on s'en assure immédiatement. Le système considéré d'efforts tangentiels ne donne donc que des réactions dirigées suivant les tympans principaux. Il est facile d'après ce qui précède d'en déterminer les contraintes par application des résultats précédemment obtenus.

En résumé les contraintes dans le voile se composent:

a) *des contraintes dues à l'application de charges verticales ayant pour densité*

$$\omega(\xi) = \begin{cases} -\dfrac{2f}{a^2}\displaystyle\int_0^\xi X(\xi)\, d\xi & \text{pour } 0 < \xi < a \\ -\dfrac{2f}{a^2}\displaystyle\int_a^\xi X(\xi)\, d\xi & \text{pour } a < \xi < 2a. \end{cases}$$

b) *des contraintes dues au système funiculaire qui ont en posant*

$$\tau_1 = \int_0^a X(\xi)\, d\xi,\ \tau = \int_0^\xi X(\xi)\, d\xi \text{ pour } 0 < \xi < a \text{ et } \tau = \int_a^\xi X(\xi)\, d\xi \text{ pour } a < \xi < 2a$$

les valeurs réduites suivantes:

sur un élément de parabole principale de flèche $f$

pour la composante normale $\quad q' = \varepsilon \dfrac{b^2}{a^2} \tau_1$

pour la composante tangentielle $\quad t = \varepsilon' \dfrac{b}{a} \tau_1$

sur un élément de parabole principale de flèche $f'$

pour la composante normale $\quad q = \tau + \varepsilon \tau_1$

pour la composante tangentielle $\quad t = \varepsilon' \dfrac{b}{a} \tau_1$

$\varepsilon$ et $\varepsilon'$ ayant les valeurs données par l'abaque de la fig. 79.

2° Efforts tangentiels appliqués parallèlement à $A'B'$ en projection avec une densité $Y(\eta)$. Supposons que les réactions dues au système funiculaire et appliquées suivant $A_1'A_1''$ aient une densité $\tau_0$ en projection parallèlement à $A'B'$. Les réactions appliquées en $B_1'B_1''$ auront en projection parallèlement à $A'B'$ une densité

$$\tau_1 = \tau_0 + \int_0^b Y(\eta)\, d\eta$$

et la poussée du système funiculaire au point $\eta$ sera

$$\tau = \tau_0 + \int_0^\eta Y(\eta)\, d\eta.$$

Le système vertical aura pour densité au point $\eta$

$$\omega(\eta) = \frac{2f}{b^2}\left(\tau_0 + \int_0^\eta Y(\eta)\, d\eta\right)$$

Les réactions du système funiculaire ne pourront plus s'équilibrer suivant les seuls tympans principaux, mais il suffit de prévoir un tympan médian suivant $A_1 B_1$ qui permet d'absorber tout système de réactions disposées en projection symétriquement par rapport à $AB$. Les contraintes dans le voile se composent alors:

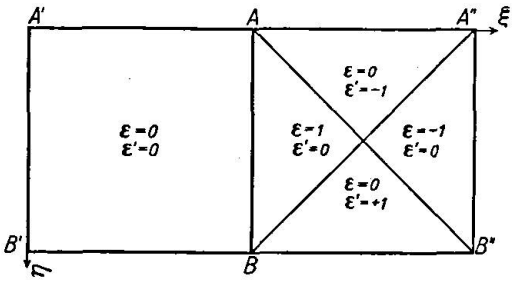



Fig. 79. Densité de charge / Belastungsgröße / Intensity of loading } $X(\xi)$

Coefficients $\varepsilon$ et $\varepsilon'$
Koeffizienten $\varepsilon$ und $\varepsilon'$
Coefficients $\varepsilon$ and $\varepsilon'$

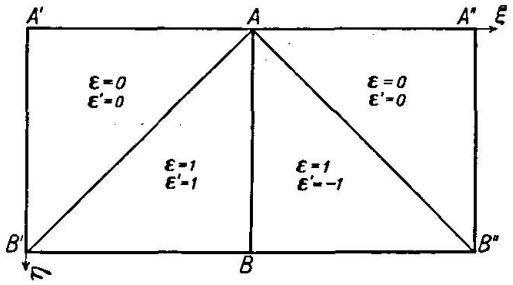



Fig. 80. Densité de charge / Belastungsgröße / Intensity of loading } $Y(\eta)$

Coefficients $\varepsilon$ et $\varepsilon'$
Koeffizienten $\varepsilon$ und $\varepsilon'$
Coefficients $\varepsilon$ and $\varepsilon'$

a) des contraintes dues à l'application de charges verticales ayant pour densité

$$\omega(\eta) = \frac{2f}{b^2} \int_0^{\eta} Y(\eta)\, d\eta$$

b) des contraintes dues au système funiculaire qui ont, en posant

$$\tau_1 = \int_0^{b} Y(\eta)\, d\eta, \qquad \tau = \int_0^{\eta} Y(\eta)\, d\eta$$

les valeurs réduites suivantes:

sur un élément de parabole principale de flèche $f$

pour la composante normale $\quad q' = \tau - \varepsilon \tau_1$

pour la composante tangentielle $\quad t = \varepsilon' \dfrac{a}{b} \tau_1$

sur un élément de parabole principale de flèche $f'$

pour la composante normale $\quad q = -\varepsilon \dfrac{a^2}{b^2} \tau_1$

pour la composante tangentielle $\quad t = \varepsilon' \dfrac{a}{b} \tau_1$

$\varepsilon$ et $\varepsilon'$ ayant les valeurs données par l'abaque de la figure 80.

Lorsque le voile ne comporte pas de tympan médian suivant $A_1 B_1$, mais deux tympans secondaires normaux $E_1' F_1'$ et $E_1'' F_1''$ (fig. 81) on peut facilement absorber les réactions du système funiculaire. Distinguons deux cas:

a) $E'' A'' < A A''$. Reprenons la décomposition de la fig. 36. On peut transporter les réactions appliquées sur les éléments $A_1' H_1', B_1', K_1'$, $A_1'' H_1'', B_1'' K_1''$ le long des génératrices passant par ces éléments de manière à les composer avec les réactions appliquées sur $E_1' E_1''$ et $F_1' F_1''$. On peut également ramener sur $E_1' E_1''$ et $F_1' F_1''$ les réactions agissant sur $H_1' E_1'$ et $K_1' F_1'$ d'une part, sur $H_1'' E_1''$ et $K_1'' F_1''$ d'autre part, par simple réflexion sur les tympans $E_1' F_1'$

ou $E_1'' F_1''$. On constate alors facilement que les réactions appliquées sur $E_1' E_1''$ et $F_1' F_1''$ se font équilibre sur le voile normal $E_1' E_1'' F_1'' F_1'$.

b) $E'' A'' > A A''$. Reprenons la décomposition de la fig. 37. On peut transporter les réactions appliquées sur les éléments $H_1'' A_1''$, $K_1'' B_1''$ et $A_1' E_1'$, $B_1' F_1'$ le long des génératrices passant par ces éléments de manière à les composer avec les réactions appliquées sur $B_1 F_1'$ et $A_1 F_1'$, puis on ramène sur $E_1' E_1''$ et $F_1' F_1''$ les réactions de $H_1'' E_1''$, $K_1'' F_1''$ par simple réflexion sur le tympan $E_1'' F_1''$. On constate alors facilement que les réactions appliquées sur $E_1' E_1''$ et $F_1' F_1''$ se font équilibre sur le voile normal $E_1' E_1'' F_1'' F_1'$.

3° Efforts tangentiels appliqués parallèlement à $A' A''$ en projection avec une densité $X(\xi)$ n'admettant pas la période $a$. Dans ce cas les tympans principaux ne suffisent plus pour équilibrer

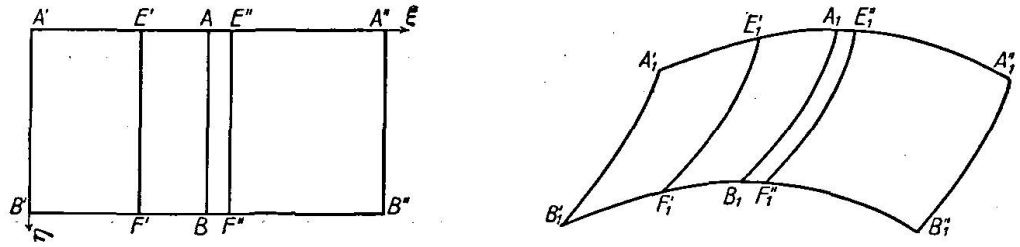



Fig. 81.

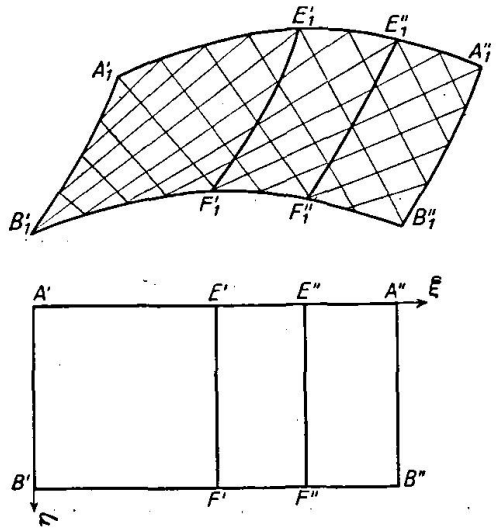



Fig. 82.

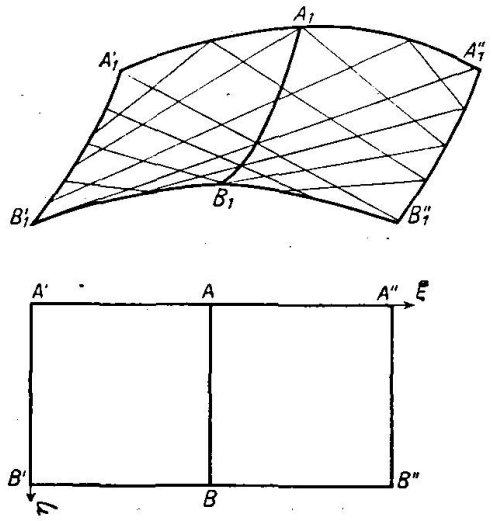



Fig. 83.

les efforts. Supposons donc que le voile admette deux tympans secondaires normaux (fig. 82) et considérons l'équilibre séparé des deux demi-voiles $A_1' E_1' F_1' B_1'$ et $E_1' F_1' B_1'' A_1''$. Appelons $\xi_1$ le $\xi$ de l'élément $E_1' F_1'$. Le demi-voile $A_1' E_1' F_1' B_1'$ sera soumis:

a) aux contraintes dues aux charges verticales de densité:

$$\omega(\xi) = -\frac{2f}{a^2} \int_0^{\xi} X(\xi)\, d\xi$$

b) aux contraintes dues au système funiculaire correspondant à la poussée réduite

$$\tau = \int_0^{\xi} X(\xi)\, d\xi .$$

Ce système funiculaire exerce sur les éléments de $E_1' F_1'$ des contraintes normales ayant pour valeur réduite

$$\tau_1 = \int_0^{\xi} X(\xi)\, d\xi .$$

De même le demi-voile $E_1' F_1' B_1'' A_1''$ sera soumis:

a) aux contraintes dues aux charges verticales de densité:

$$\omega(\xi) = \frac{2f}{a^2} \int_{\xi}^{2a} X(\xi)\, d\xi$$

b) aux contraintes dues au système funiculaire correspondant à la poussée réduite

$$\tau = -\int_{\xi}^{2a} X(\xi)\, d\xi .$$

Ce système funiculaire exerce sur les éléments de $E_1' F_1'$ des contraintes normales ayant pour valeur réduite

$$\tau_1' = -\int_{\xi}^{2a} X(\xi)\, d\xi .$$

Sur les éléments de $E_1' F_1'$ on doit pour maintenir l'équilibre appliquer des réactions, parallèles à $A' A''$ en projection et de densité

$$\tau_1' - \tau_1 = -\int_0^{2a} X(\xi)\, d\xi .$$

Il est facile de voir que ces réactions s'équilibrent sur le voile normal $E_1' E_1'' F_1'' F_1'$ par réflexion sur les quatre tympans.

### Efforts tangentiels sur un voile semi-normal.

Considérons le voile semi-normal $A_1' A_1'' B_1'' B_1'$ (fig. 83) projeté en $A' A'' B'' B'$ et comportant les tympans principaux $A_1' A_1''$, $B_1' B_1''$ et $A_1 B_1$. Rapportons le voile projeté à deux axes de coordonnées $A' \xi$, $A' \eta$ dirigés suivant $A' A''$ et $A' B'$. Posons toujours $a = A A' = A A'' = \frac{A' A''}{2}$, $b = A' B'$ et appelons $f$ la flèche de l'arc $A_1' A_1''$. Nous allons traiter deux cas d'efforts tangentiels:

#### 1° Efforts tangentiels appliqués parallèlement à $AB$ en projection avec une densité $Y(\eta)$.

Supposons que les réactions appliquées suivant $A_1' A_1''$ et dues au système funiculaire aient une densité $\tau_0$ en projection parallèlement à $AB$. Les réactions appliquées en $B_1' B_1''$ auront en projection parallèlement à $AB$ une densité

$$\tau_1 = \tau_0 + \int_0^{b} Y(\eta)\, d\eta$$

et la poussée du système funiculaire sera au point $\eta$

$$\tau = \tau_0 + \int_0^{\eta} Y(\eta)\, d\eta$$

le système vertical aura pour densité au point $\eta$

$$\omega(\eta) = \frac{8f}{b^2}\left(\tau_0 + \int_0^{\eta} Y(\eta)\, d\eta\right).$$

Les réactions du système funiculaire sur $A_1' A_1''$ et $B_1' B_1''$ s'équilibreront sur le tympan $A_1 B_1$ comme dans le cas du voile normal à tympan médian soumis aux mêmes efforts tangentiels.

2° Efforts tangentiels appliqués parallèlement à $A' A''$ en projection avec une densité $X(\xi)$.

Considérons l'équilibre séparé de deux demi-voiles $A_1' A_1 B_1 B_1'$ et $A_1'' A_1 B_1 B_1''$. Chacun de ces demi-voiles sera soumis à des charges verticales et à un système funiculaire que l'on pourra convenablement choisir de manière que les réactions du système funiculaire soient nulles en $A_1' B_1'$ et $A_1'' B_1''$. Les réactions à appliquer sur $A_1 B_1$ pour équilibrer le système funiculaire sont alors parallèles à $A' A''$ en projection et ont pour densité

$$-\int_0^{2a} X(\xi)\, d\xi .$$

Il n'est pas possible d'équilibrer ces réactions par les seuls tympans principaux. Il faut ajouter un tympan secondaire tel que $A_1'' B_1''$ par exemple. Dans ce cas les réactions précitées s'équilibrent sur les quatre tympans du voile normal $A_1 A_1'' B_1'' B_1$.

## § 6. Voiles les plus généraux limités à des paraboles principales.

### Définition de l'indice d'un voile.

Reprenons le voile de la figure 22 et appelons $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ les extrémités des génératrices issues de $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$. Par définition, nous appellerons indice du voile considéré le rapport de la projection de $A_1 B_1$ à la projection de $A_1 \delta_1$. Avec cette définition on voit qu'un voile normal est un voile d'indice 2, qu'un voile semi-normal est un voile d'indice 1, qu'un voile hyponormal est un voile d'indice $\frac{3}{2}$ et qu'un voile sesquinormal est un voile d'indice 3.

Les voiles les plus généraux limités à des paraboles principales peuvent être caractérisés par la valeur de leur indice. Lorsque l'indice est un nombre fractionnaire, le voile peut être considéré indifféremment, soit comme la juxtaposition de voiles normaux, soit comme celle de voiles semi-normaux; dans les deux cas le voile considéré se trouve décomposé en un quadrillage de voiles normaux ou semi-normaux, auxquels les règles de calcul précédemment exposées sont applicables.

Les voiles les plus généraux peuvent également être étudiés directement suivant les mêmes principes que précédemment. Nous allons traiter à titre d'exemple le cas d'un voile d'indice quelconque envisagé comme la généralisation d'une voûte cylindrique ordinaire, et que nous désignerons pour cette raison sous le nom de „voûte paraboloïde".

### Calcul de la voûte paraboloïde.

Soit le voile $A_1 B_1 C_1 D_1$ projeté en $A B C D$ (figure 84). Supposons que les génératrices passant par les côtés $A_1 D_1$ et $B_1 C_1$ coupent les deux autres côtés et soient $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$ les extrémités des génératrices issues de $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$. Désignons par $n$ l'indice du voile, par $f$ la flèche de l'arc $A_1 B_1$, par $f'$ celle de l'arc $A_1 D_1$, par $2a$ la longueur de la projection $AB$ et par $2b$ celle de la projection $AD$. Nous aurons:

$$\frac{f}{f'} = n^2 .$$

Dès que $n$ est un peu grand, la flèche $f'$ est petite par rapport à la flèche $f$. Le voile $A_1, B_1, C_1, D_1$ peut alors être considéré comme une voûte de portée $2a$ et de largeur $2b$, voûte d'autant plus rapprochée d'une voûte cylindrique que $n$ est plus grand.

Disposons deux tympans suivant les retombées $A_1 D_1$ et $B_1 C_1$ de la voûte paraboloïde $A_1 B_1 C_1 D_1$ et un troisième tympan suivant la parabole $E_1 F_1$ équidistante de $A_1 B_1$ et $C_1 D_1$. Soient $\varepsilon_1$ et $\zeta_1$ les points d'intersection des génératrices $A_1 \alpha_1$ et $D_1 \delta_1$ d'une part, $B_1 \beta_1$ et $C_1 \gamma_1$ d'autre part. On voit immédiatement que le voile ainsi organisé est stable d'une part sous des charges verticales symétriquement disposées par rapport au tympan $E_1 F_1$ et à densité constante sur toute parabole parallèle à ce tympan, d'autre part sous des charges à densité quelconque, constante sur toute parabole parallèle aux tympans $A_1 D_1$ et $B_1 C_1$. En effet, dans le premier cas, les poussées sur les tympans $A_1 D_1$ et $B_1 C_1$ de deux bandes uniformément chargées parallèles à $E_1 F_1$ et symétriques par rapport à $E_1 F_1$ peuvent être décomposées suivant les tympans de retombée et suivant des génératrices se coupant sur le tympan $E_1 F_1$; les efforts qui se transmettent suivant ces génératrices s'équilibrent sur

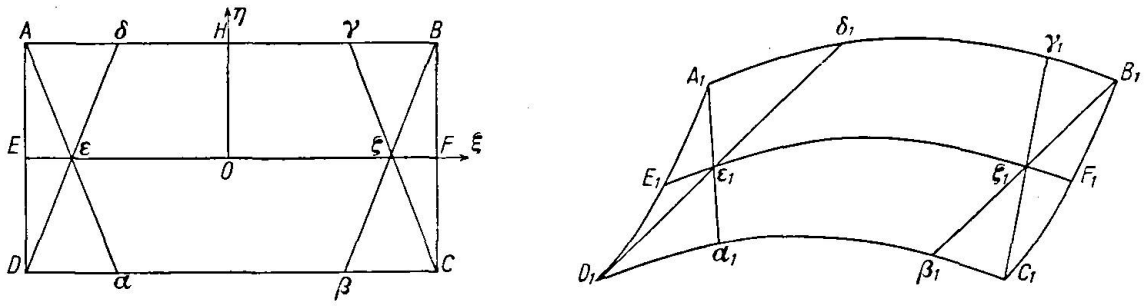



Fig. 84.

le tympan $E_1 F_1$ (d'une manière plus précise sur les éléments de tympan $E_1 \varepsilon_1$ et $F_1 \zeta_1$). Dans le second cas, des poussées sur les bords libres $A_1 B_1$ et $C_1 D_1$ d'une bande uniformément chargée parallèle à $A_1 D_1$ se décomposent suivant les génératrices passant aux extrémités de la bande chargée et les efforts ainsi transmis s'équilibrent deux à deux sur le tympan $E_1 F_1$ avec ou sans réflexion sur les tympans de retombée. Le voile considéré ne sera pas stable pour des charges à densité constante sur toute parabole parallèle à $E_1 F_1$ qui ne seraient pas symétriquement disposées par rapport à $E_1 F_1$. Dans ce cas en effet, les génératrices qui reprennent les poussées sur les tympans de retombée donnent sur le tympan $E_1 F_1$ des composantes normales résiduelles. Pour assurer la stabilité dans ce cas, il faut alors soit organiser le tympan $E_1 F_1$ pour qu'il puisse résister aux composantes normales résiduelles précédentes, soit le remplacer par deux tympans parallèles et symétriquement disposés de manière à former poutre horizontale entre les tympans de retombée, soit buter le voile considéré par un voile identique juxtaposé suivant un bord libre.

Rapportons le voile projeté à 2 axes de coordonnées rectangulaires $o\xi$ et $o\eta$, $o$ étant le centre du voile projeté et $o\xi$ étant dirigé suivant le tympan projeté $EF$. Posons: $x = n\frac{\xi}{a}$, $y = \frac{\eta}{b}$. Supposons le voile chargé avec une densité

$$\delta = \pi_0(y) + \pi_1(x)$$

en admettant pour plus de généralité que le tympan médian $E_1 F_1$ soit conçu pour résister aux composantes normales résiduelles dont il vient d'être parlé.

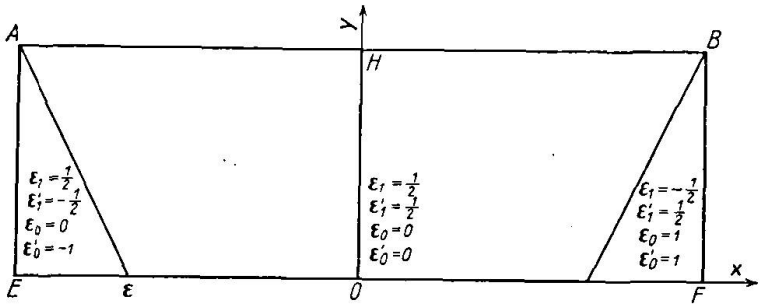
Appelons $q'$ la contrainte normale réduite sur un élément projeté parallèlement à $o\xi$, $q$ la contrainte normale réduite s'exerçant sur un élément projeté parallèlement à $o\eta$ et $t$ la contrainte tangentielle réduite s'exerçant sur des éléments projetés parallèlement à $o\xi$ et $o\eta$. On a, en supposant $y > 0$

$$q' = \frac{b^2}{2f'}\left[\varepsilon_1 \pi_1(x_1) + \varepsilon_1' \pi_1(x_1') - \pi_1(x) - \varepsilon_0 \pi_0(y_0)\right]$$

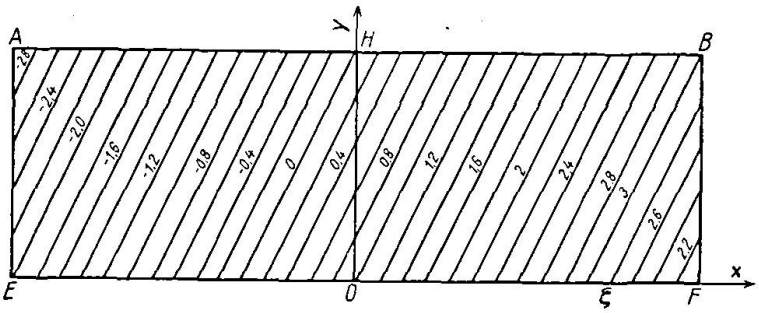
$$q = \frac{a^2}{2f}\left[\pi_0(y) - \varepsilon_0 \pi_0(y_0) + \varepsilon_1 \pi_1(x_1) + \varepsilon_1' \pi_1(x_1')\right]$$

$$t = \frac{a \cdot b}{2\sqrt{ff'}}\left[\varepsilon_1 \pi_1(x_1) - \varepsilon_1' \pi_1(x_1') - \varepsilon_0' \pi_0(y_0)\right]$$

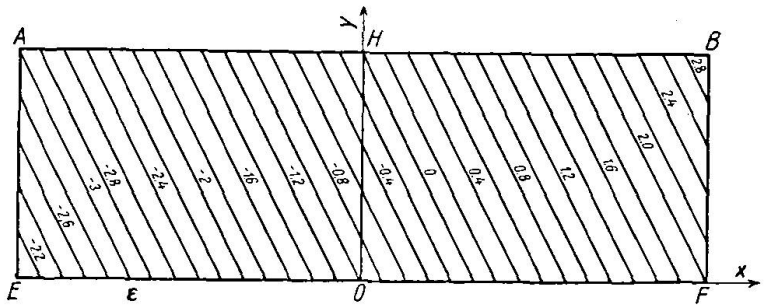
Valeurs de $\varepsilon_1$, $\varepsilon_1'$ et de $\varepsilon_0$, $\varepsilon_0'$
Werte von $\varepsilon_1$, $\varepsilon_1'$ und von $\varepsilon_0$, $\varepsilon_0'$
Values of $\varepsilon_1$, and $\varepsilon_1$, $\varepsilon_0'$




Valeurs de
Werte von
Values of $x_1$




Valeurs de
Werte von
Values of $x_1'$




Valeurs de
Werte von
Values of $y_0$

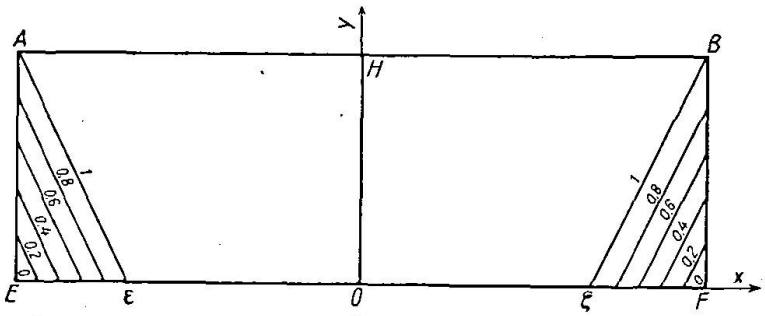



Fig. 85. Voûte d'indice $\frac{3}{2}$ — Fläche mit Index $\frac{3}{2}$ — Value of index $\frac{3}{2}$

avec

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x < y+n-1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x > y+n-1 \end{cases}, \qquad \varepsilon_1' = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } x < -(y+n-1) \\ \frac{1}{2} & \text{si } x > -(y+n-1) \end{cases}$$

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < y+n-1 \\ 1 & \text{si } |x| > y+n-1 \end{cases}, \qquad \varepsilon_0' = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < y+n-1 \\ -1 & \text{si } x < -(y+n-1) \\ 1 & \text{si } x > y+n-1 \end{cases}$$

$$x_1 = \begin{cases} x + (1-y) & \text{si } x < y+n-1 \\ 2n - [x + (1-y)] & \text{si } x > y+n-1 \end{cases}$$

$$x_1' = \begin{cases} 2n + [x - (1-y)] & \text{si } x < -(y+n-1) \\ x - (1-y) & \text{si } x > -(y+n-1) \end{cases}$$

$$y_0 = \begin{cases} y + (n+x) & \text{si } x < -(y+n-1) \\ y + (n-x) & \text{si } x > y+n-1 \end{cases}$$

Les figures 85--88 donnent sous forme d'abaques les valeurs de $\varepsilon_1, \varepsilon_1'$, $\varepsilon_0$, $\varepsilon_0'$, $x_1$, $x_1'$, $y_0$ pour $n = \frac{3}{2}$, 2, 3, 4.

Appliquons ces résultats aux quatre cas suivants:

1° Densité de charge $\pi_0(y) = \bar{\omega}_0$

2° Densité de charge $\pi_1(x) = \dfrac{\bar{\omega}_1 \cdot x}{n}$

3° Densité de charge $\pi_1(x) = \dfrac{\bar{\omega}_2 \cdot x^2}{n^2}$

4° Densité de charge $\pi_1(x) = \dfrac{\bar{\omega}_3 \cdot x^3}{n^3}$

$\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ étant des constantes.

### 1° Cas: Densité de charge constante $\bar{\omega}_0$.

Dans ce cas on a:

$$\left.\begin{aligned} q' &= 0 \\ q &= \frac{\bar{\omega}_0 a^2}{2f} \\ t &= 0 \end{aligned}\right\} \text{pour } -(y+n-1) < x < (y+n-1)$$

(région intérieure au quadrilatère $A\varepsilon\zeta B$ de la fig. 84).

$$\left.\begin{aligned} q' &= -\frac{\bar{\omega}_0 \cdot b^2}{2f'} \\ q &= 0 \\ t &= \frac{\bar{\omega}_0 \cdot a \cdot b}{2\sqrt{f \cdot f'}} \end{aligned}\right\} \text{pour } x < -(y+n-1)$$

(région intérieure au triangle $AE\varepsilon$ de la figure 84).

$$\left.\begin{aligned} q' &= -\frac{\bar{\omega}_0 b^2}{2f'} \\ q &= 0 \\ t &= -\frac{\bar{\omega}_0 \cdot a \cdot b}{2\sqrt{ff'}} \end{aligned}\right\} \text{pour } x > (y+n-1)$$

(région intérieure au triangle $BF\zeta$ de la figure 84).

### 2° Cas: Densité de charge $\frac{\bar{\omega}_1 x}{n}$

Dans ce cas on a:

$$\left.\begin{aligned} q' &= 0 \\ q &= \frac{\bar{\omega}_1 \cdot a^2}{2f} \cdot \frac{x}{n} \\ t &= \frac{\bar{\omega}_1 \cdot a \cdot b}{2\sqrt{ff'}} \cdot \frac{(1-y)}{n} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{pour } -(y+n-1) < x < (y+n-1) \\ &\text{(région intérieure au quadrilatère } A\varepsilon\zeta B \text{ de la fig. 84).} \end{aligned}$$

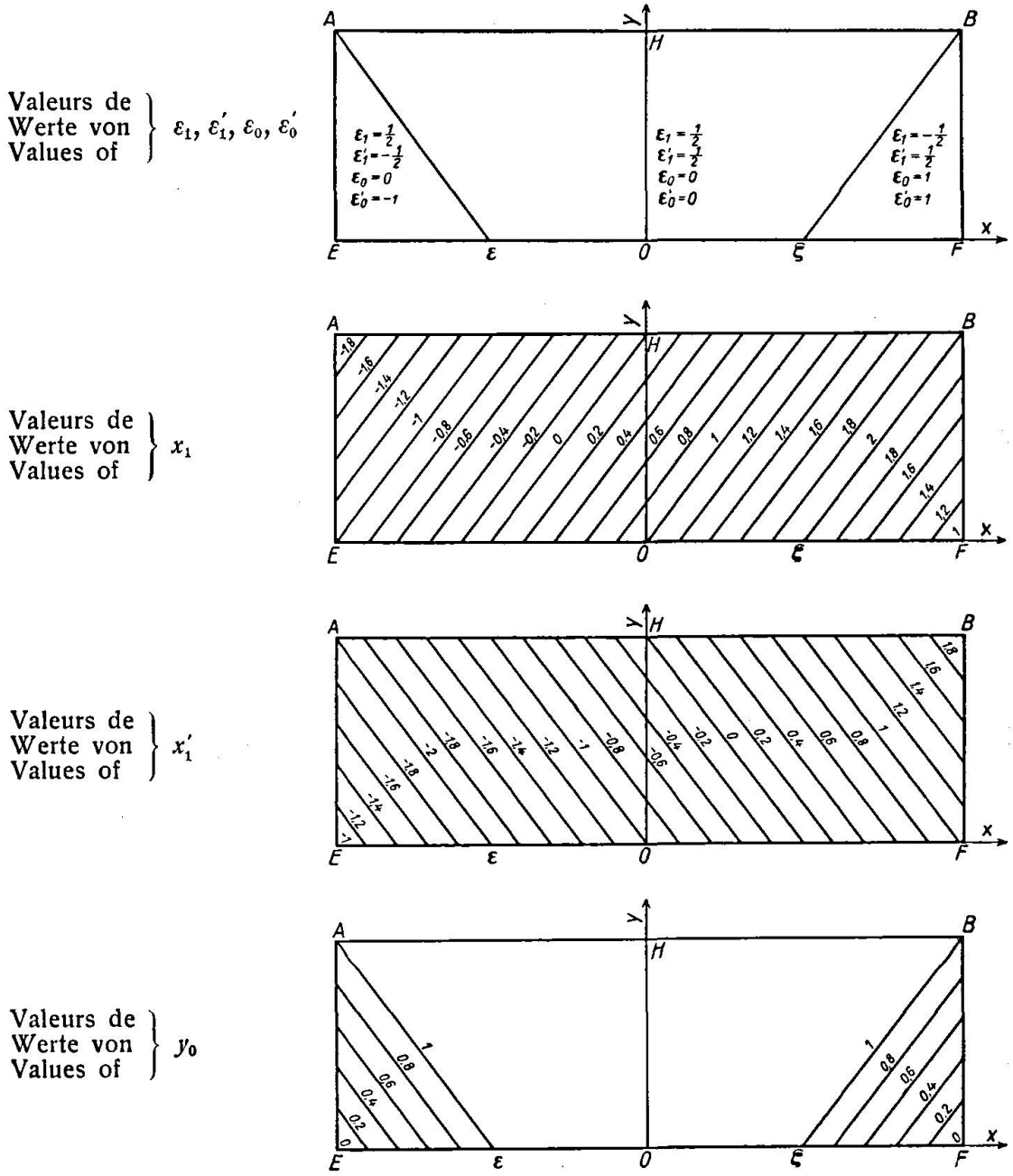



Fig. 86. Voûte d'indice 2 — Fläche mit Index 2 — Value of index 2.

$$\left.\begin{aligned} q' &= \bar{\omega}_1 \frac{b^2}{2f'} \\ q &= \frac{\bar{\omega}_1 \cdot a^2}{2f}\left(1+\frac{x}{n}\right) \\ t &= -\frac{\bar{\omega}_1 \cdot a \cdot b}{2\sqrt{ff'}}\left[1-\frac{1-y}{n}\right] \end{aligned}\right\} \text{pour } x < -(y+n-1)$$

(région intérieure au triangle $AE\varepsilon$ de la figure 84).

$$\left.\begin{aligned} q' &= -\bar{\omega}_1 \frac{b^2}{2f'} \\ q &= -\frac{\bar{\omega}_1 \cdot a^2}{2f}\left(1-\frac{x}{n}\right) \\ t &= -\frac{\bar{\omega}_1 \cdot a \cdot b}{2\sqrt{ff'}}\left[1-\frac{1-y}{n}\right] \end{aligned}\right\} \text{pour } x > (y+n-1)$$

(région intérieure au triangle $BF\zeta$ de la figure 84)

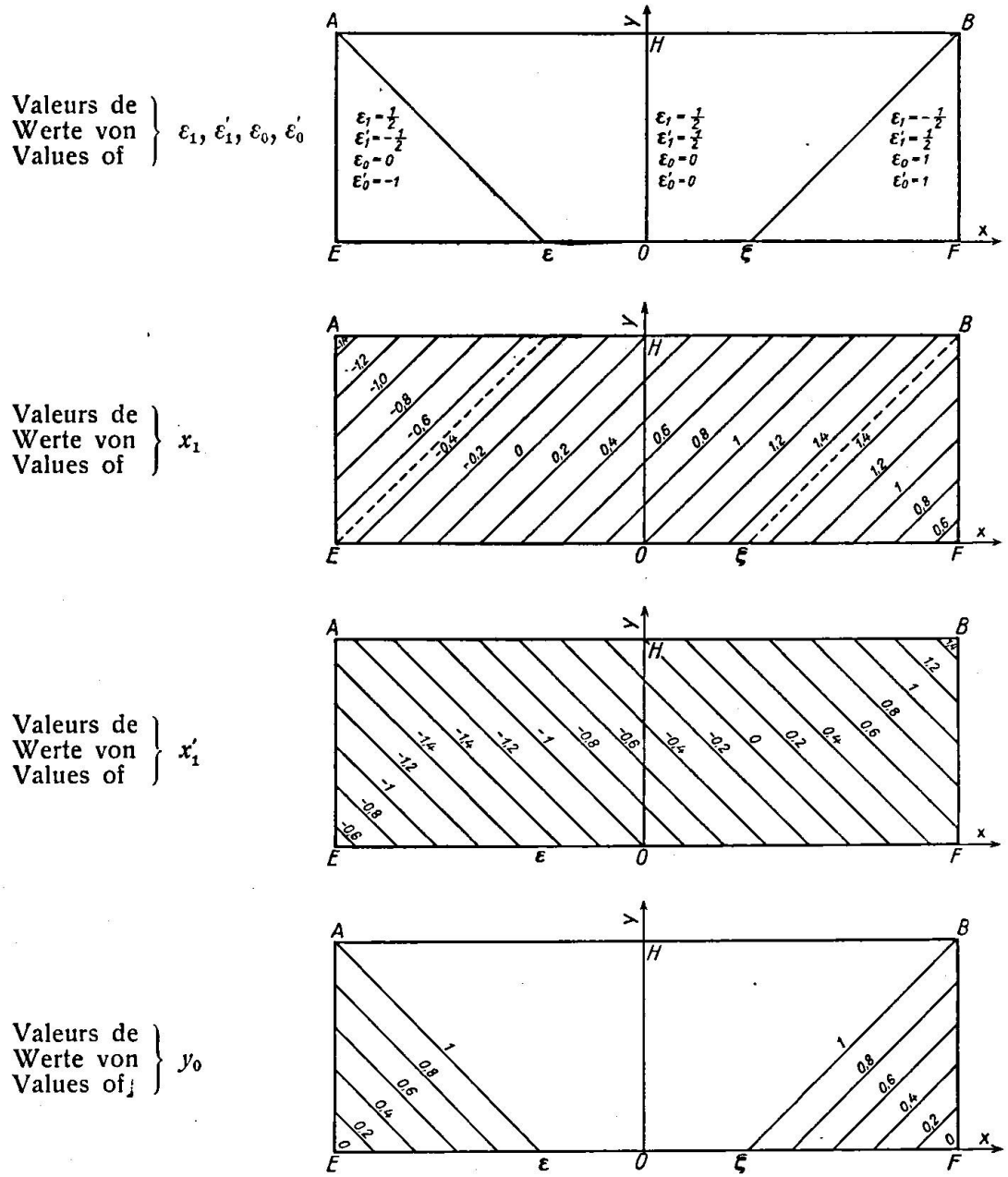



Fig. 87. Voûte d'indice 3 — Fläche mit Index 3 — Value of index 3.

### 3° Cas: Densité de charge $\frac{\bar{\omega}_2 x^2}{n^2}$

Dans ce cas on a:

$$\left.\begin{aligned} q' &= \frac{\bar{\omega}_2 \cdot b^2}{2f}(1-y)^2 \\ q &= \frac{\bar{\omega}_2 \cdot a^2}{2n^2 f}\left[x^2+(1-y)^2\right] \\ t &= \frac{\bar{\omega}_2\, a\, b}{n f} \cdot x(1-y) \end{aligned}\right\} \text{ dans le quadrilatère } A\,\varepsilon\,\zeta\,B \text{ de la figure 84.}$$

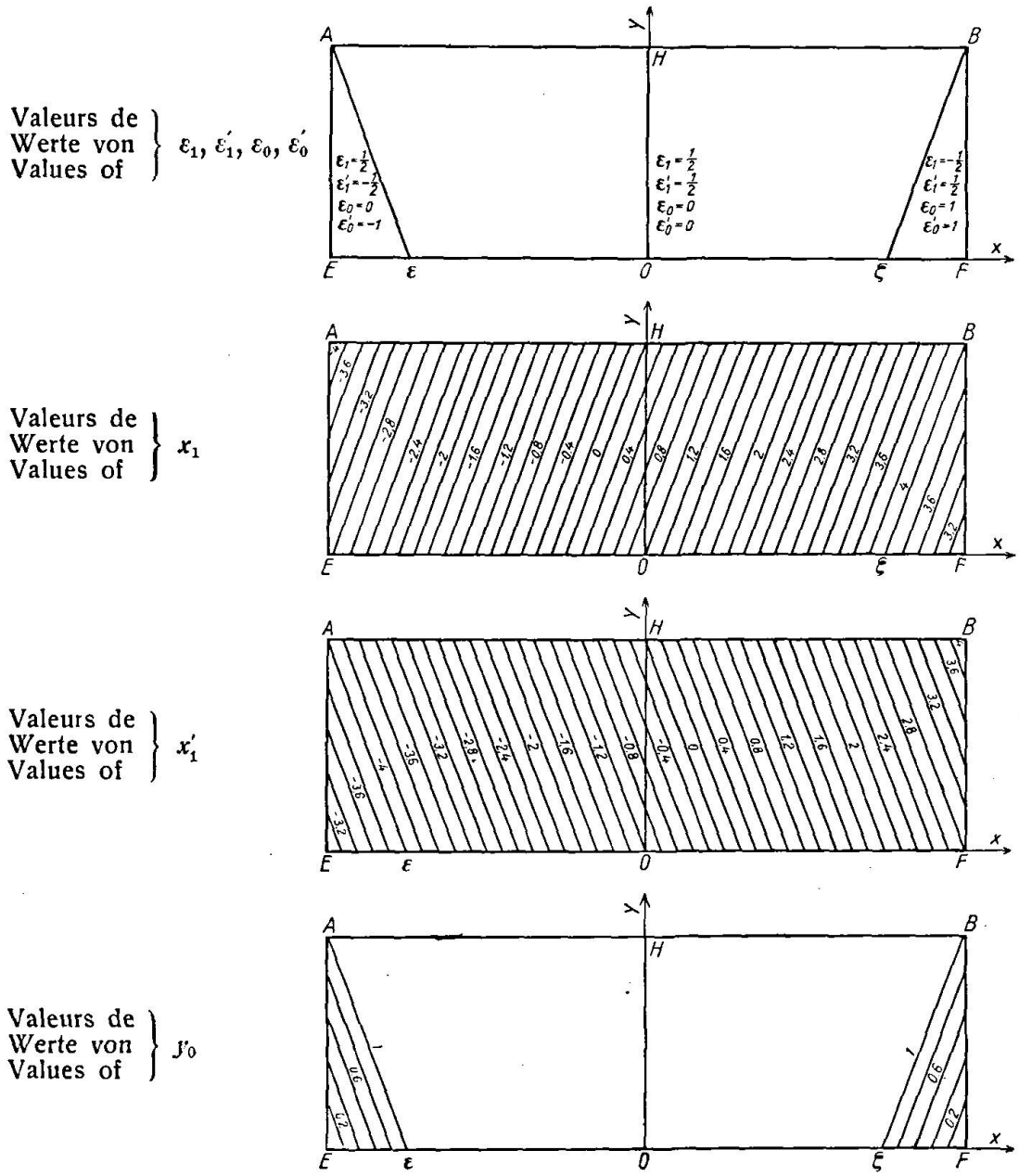



Fig. 88. Voûte d'indice 4 — Fläche mit Index 4 — Value of index 4.

$$\left.\begin{aligned} q' &= -\frac{\varpi_2 \cdot b^2}{2f}\left[x^2+2(|x|-n)(1-y-n)\right] \\ q &= -\frac{\varpi_2 \cdot a^2}{n^2 \cdot f}(|x|-n)(1-y-n) \\ t &= \frac{\varpi_2 \cdot a\,b}{2\,n\,f}\left[(|x|-n)^2+(1-y-n)^2\right] \end{aligned}\right\} \text{ dans le triangle } A\,\varepsilon\,E \text{ de la figure 84.}$$

$$\left.\begin{aligned} q' &= -\frac{\varpi_2 \cdot b^2}{2f}\left[x^2+2(|x|-n)(1-y-n)\right] \\ q &= -\frac{\varpi_2 \cdot a^2}{n^2 \cdot f}(|x|-n)(1-y-n) \\ t &= -\frac{\varpi_2 \cdot a\,b}{2\,n\,f}\left[(|x|-n)^2+(1-y-n)^2\right] \end{aligned}\right\} \text{ dans le triangle } B\,\zeta\,F \text{ de la figure 84.}$$

## 4° Densité de charge $\frac{\varpi_3\,x^3}{n^3}$

Dans ce cas on a:

$$\left.\begin{aligned} q' &= \frac{\varpi_3 \cdot b^2}{2\,n\,f} \cdot 3\,x\,(1-y)^2 \\ q &= \frac{\varpi_3 \cdot a^2}{2\,n^3 f}\left[x^3+3\,x\,(1-y)^2\right] \\ t &= \frac{\varpi_3 \cdot a\,b}{2\,n^2 f}\left[(1-y)^3+3\,x^2(1-y)\right] \end{aligned}\right\} \text{ dans le quadrilatère } A\,\varepsilon\,\zeta\,B \text{ de la figure 84.}$$

$$\left.\begin{aligned} q' &= \begin{cases} \frac{\varpi_3 \cdot b^2}{2\,n\,f}\left[n^3+3\,n\,(|x|+1-y-n)^2-3\,|x|\,(1-y)^2\right] \\ \text{ou} \\ \frac{\varpi_3 \cdot b^2}{2 \cdot n\,f} \cdot \left\{n^3+3\,(x+n)\left[(1-y-n)^2+n\,x\right]\right\} \end{cases} \\ q &= \begin{cases} \frac{\varpi_3 \cdot a^2}{2\,n^3 f}\left[n^3+3\,n\,(|x|+1-y-n)^2-|x|^3-3\,|x|\,(1-y)^2\right] \\ \text{ou} \\ \frac{\varpi_3 \cdot a^2}{2\,n^3 f}(x+n)\left[(x+n)^2+3\,(1-y-n)^2\right] \end{cases} \\ t &= \begin{cases} -\frac{\varpi_3 \cdot a \cdot b}{2\,n^2 f}\left[n^2+3\,n(x+1-y-n)^2-(1-y)^3-3\,x(1-y)\right] \\ \text{ou} \\ \frac{\varpi_3 \cdot a \cdot b}{2\,n^2 f}(1-y-n)\left[3\,(x+n)^2+(1-y-n)^2\right] \end{cases} \end{aligned}\right\} \text{ dans le triangle } A\,\varepsilon\,E \text{ de la figure 84.}$$

$$\left.\begin{array}{l} q' = \begin{cases} -\dfrac{\bar{\omega}_3 \cdot b^2}{2nf}\left[n^3+3n(x+1-y-n)^2-3x(1-y)^2\right] \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ \dfrac{\bar{\omega}_3 \cdot b^2}{2 \cdot nf}\left\{-n^3+3(x-n)\left[(y-1+n)^2-nx\right]\right\} \end{cases} \\[2ex] q = \begin{cases} -\dfrac{\bar{\omega}_3 \cdot a^2}{2n^3 f}\left[n^3+3n(x+1-y-n)^2-x^3-3x(1-y)^2\right] \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ \dfrac{\bar{\omega}_3 \cdot a^2}{2n^3 f}(x-n)\left[(x-n)^2+3(y-1+n)^2\right] \end{cases} \\[2ex] t = \begin{cases} -\dfrac{\bar{\omega}_3 \cdot ab}{2n^2 f}\left[n^3+3n(x+1-y-n)^2-(1-y)^3-3x^2(1-y)\right] \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ -\dfrac{\bar{\omega}_3 \cdot ab}{2n^2 f}(y+n-1)\left[3(x-n)^2+(y+n-1)^2\right] \end{cases} \end{array}\right\} \text{dans le triangle } B\zeta F \text{ de la figure 84.}$$

Les figures 89—92 donnent pour les quatre cas de charges précédents et pour les valeurs $\frac{3}{2}$, 2, 3, 4 de $n$, des abaques traduisant les valeurs précédentes de $q'$, $q$, $t$.

Le calcul du voile sous l'effet d'efforts tangentiels parallèles au plan du tympan $E_1 F_1$ et répartis avec une densité constante sur toute parabole parallèle aux tympans de retombée $AD$ et $BC$ se ramènera au cas précédemment traité de charges verticales en utilisant le principe d'équivalence exposé au § 5 pour les voiles normaux, semi-normaux ou dérivés.

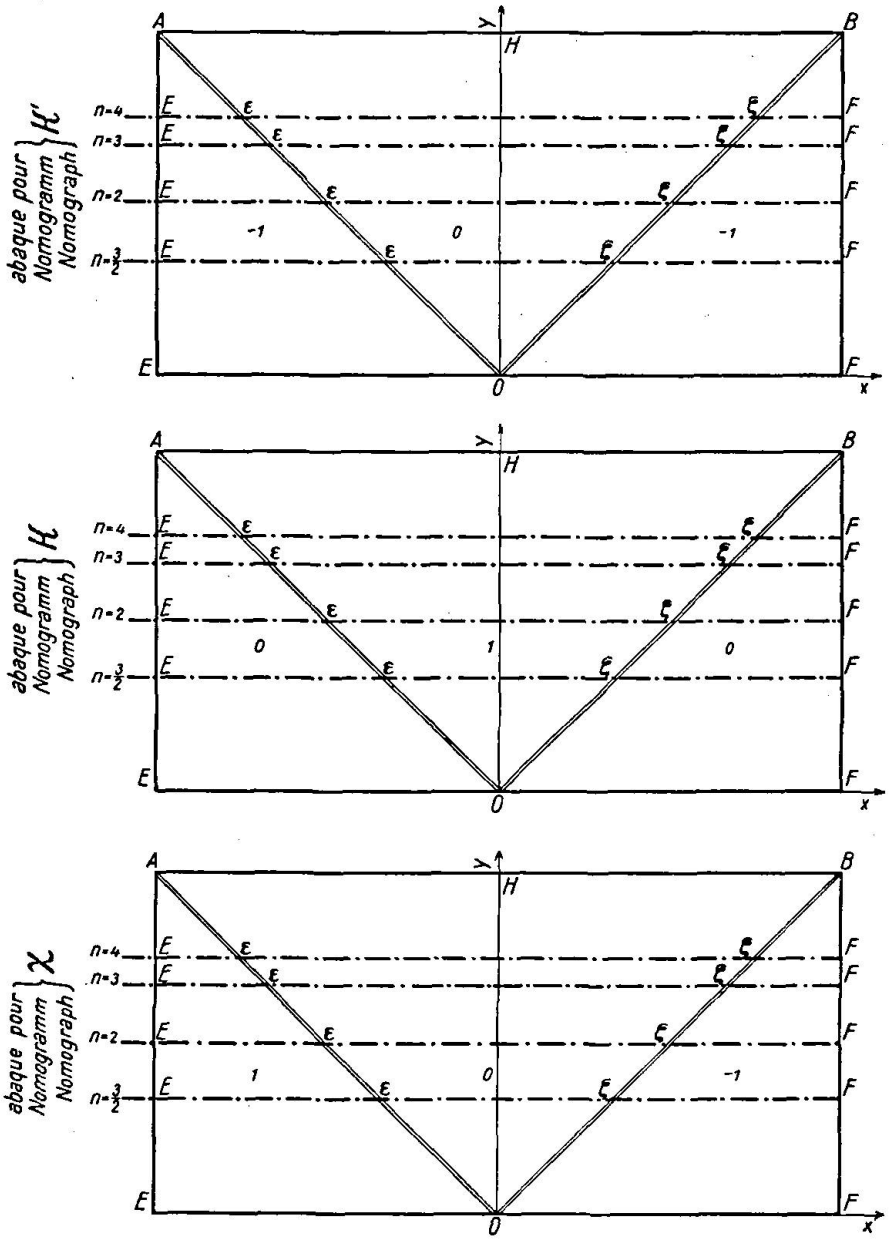
## § 7. Etude directe de l'action de certains efforts tangentiels dans quelques cas et retour sur le principe d'équivalence.

### Définition des efforts tangentiels envisagés — Propriétés fondamentales — Conséquences.

Au § 5 nous avons ramené à des cas déjà connus de charges verticales l'étude d'efforts tangentiels s'exerçant parallèlement à une parabole principale avec une densité constante sur toute parabole principale ayant son plan perpendiculaire à la direction de plans parallèle aux efforts considérés. Nous nous proposons maintenant de trouver directement la répartition des contraintes dans le cas d'efforts tangentiels agissant parallèlement à une parabole principale avec une densité constante le long de cette parabole. L'application du principe d'équivalence aux résultats ainsi obtenus nous permettra alors de traiter des cas de charges verticales plus généraux que ceux précédemment considérés.

Prenons (fig. 93) le voile $A_1 B_1 C_1 D_1$ projeté en $ABCD$, où toutes les génératrices passant par $A_1 D_1$ rencontrent un des côtés adjacents $A_1 B_1$ ou $C_1 D_1$. Supposons que les efforts appliqués soient décomposés suivant les génératrices passant par le point d'application. Le système des contraintes sera défini en chaque point par les valeurs des contraintes s'exerçant sur les éléments de génératrices et dirigées suivant la direction même des génératrices. Ces valeurs s'obtiendront en sommant sur chaque génératrice les composantes suivant la dite génératrice des efforts appliqués en tous ses points et en y ajoutant les réactions des tympans aux extrémités s'il y a lieu.

Supposons en particulier qu'il y ait deux tympans, l'un suivant $A_1 B_1$ et l'autre suivant $C_1 D_1$. Appelons file de génératrices toute ligne brisée dont les côtés sont formés par des génératrices et dont l'origine est sur $A_1 D_1$ l'extrémité sur $B_1 C_1$ et les sommets intermédiaires sur les tympans $A_1 B_1$ et $C_1 D_1$. Il existe deux séries de files de génératrices. Par tout point de $A_1 D_1$ et par




$$q' = \frac{\bar{\omega}_0 b^2}{2f'} \cdot k'$$

$$q = \frac{\bar{\omega}_0 a^2}{2f} \cdot k$$

$$t = \frac{\bar{\omega}_0 ab}{2\sqrt{ff'}} \cdot x$$

Fig. 89. 1er cas: Charge de densité constante
Erster Fall: Belastung von gleichbleibender Größe } $\bar{\omega}_0$
1st case: Loading of constant intensity

tout point de $B_1 C_1$ passe une file et une seule de chaque série. Par deux points du voile situés sur une même parallèle à $AB$, il passera deux files de génératrices, si leur distance est un multiple de la distance de deux sommets consécutifs d'une même file sur un même tympan, distance que nous appellerons période du voile. Les efforts tangentiels qui s'exercent sur le voile déterminent aux deux extrémités d'une même file des efforts connus à une constante ad-

ditive près. On peut en particulier choisir cette constante de manière que l'un de ces efforts soit nul.

L'intérêt de la considération des files de génératrices dans le cas des efforts tangentiels que nous envisageons résulte des deux propriétés suivantes:

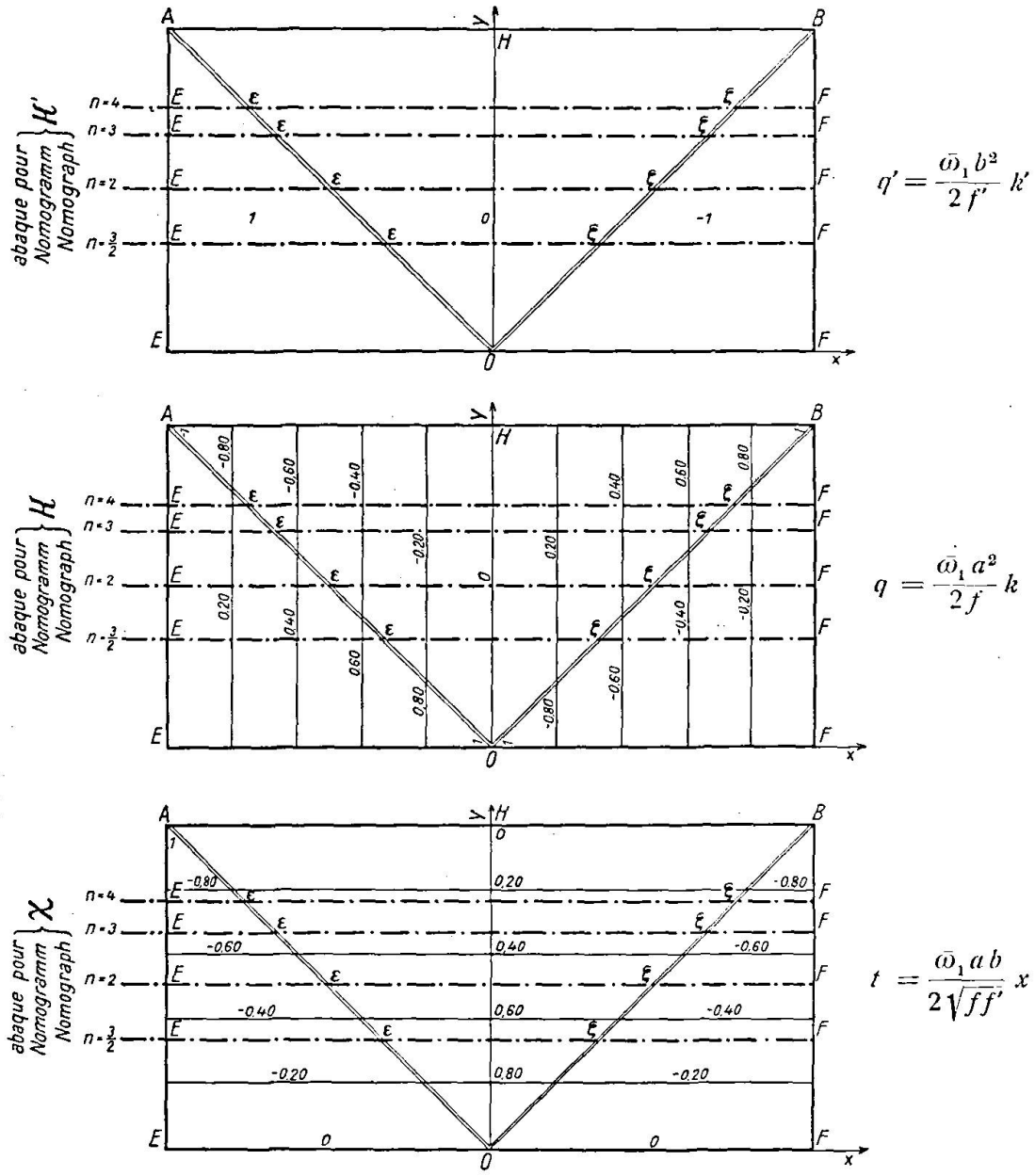
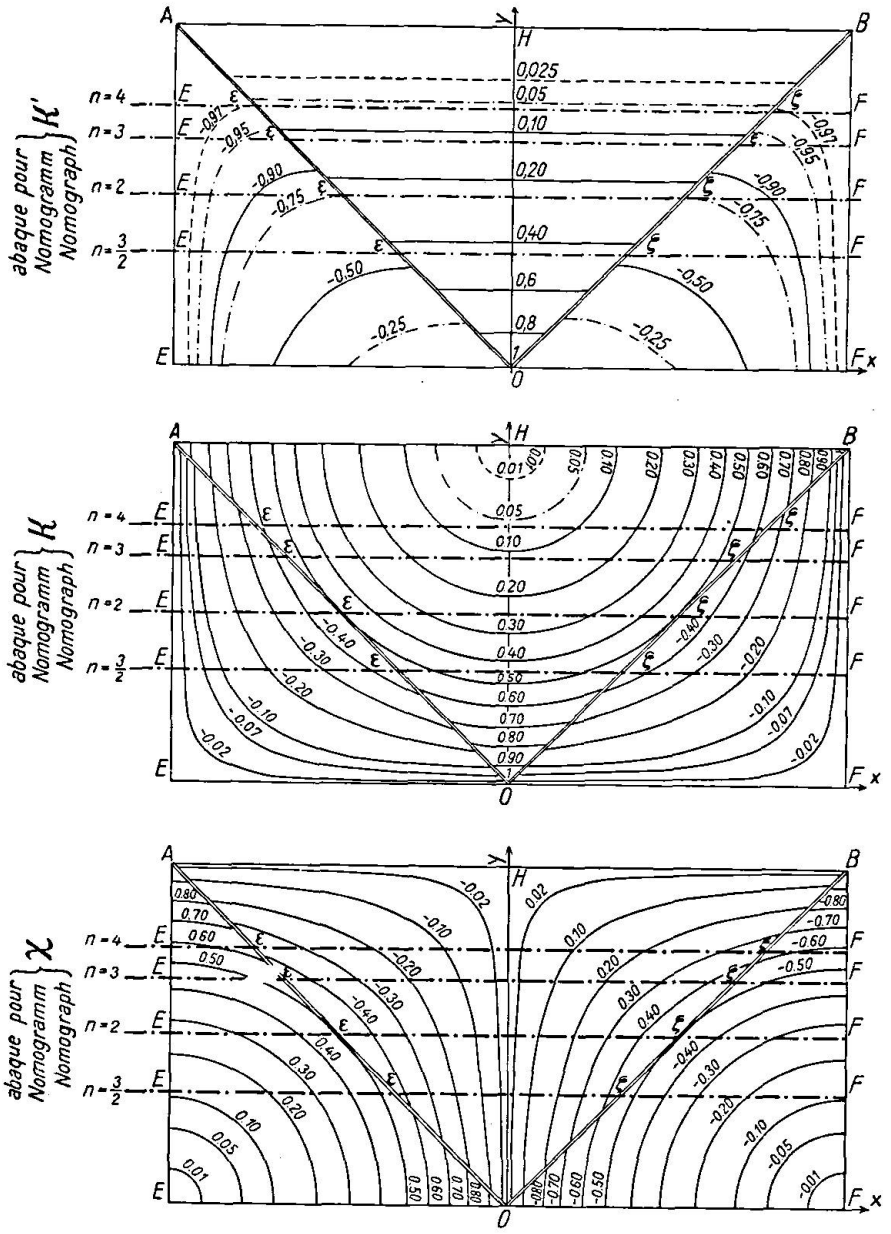



Fig. 90. 2e cas: Charge de densité
Zweiter Fall: Belastungsgröße
2nd case: Intensity of loading
$\left.\right\} \frac{\bar{\omega}_1 x}{n}$

1° Dans le cas d'efforts tangentiels parallèles en projection à $AD$ et de densité constante sur toute parabole principale parallèle en projection à $AD$, la différence des contraintes réduites, s'exerçant aux extrémités d'une file de génératrices telle que $PNMN'M'N''Q$ suivant la direction des génératrices extrêmes de la file, est constante pour toutes les files d'une même série et change de signe sans changer de valeur absolue quand on passe d'une file d'une série à une file de l'autre.

2° Dans le cas d'efforts tangentiels parallèles à $AB$ en projection et de densité constante sur toute parabole principale parallèle en projection à $AB$ les contraintes réduites en un même point dirigées suivant les génératrices ont les mêmes valeurs pour deux points situés sur une même parallèle aux tympans $AB$ et $CD$ et distants l'un de l'autre d'un multiple de la période du voile.




$$q' = \frac{\bar{\omega}_2\, b^2}{2\, f'} \cdot k$$

$$q = \frac{\bar{\omega}_2\, a^2}{2\, f}\, k$$

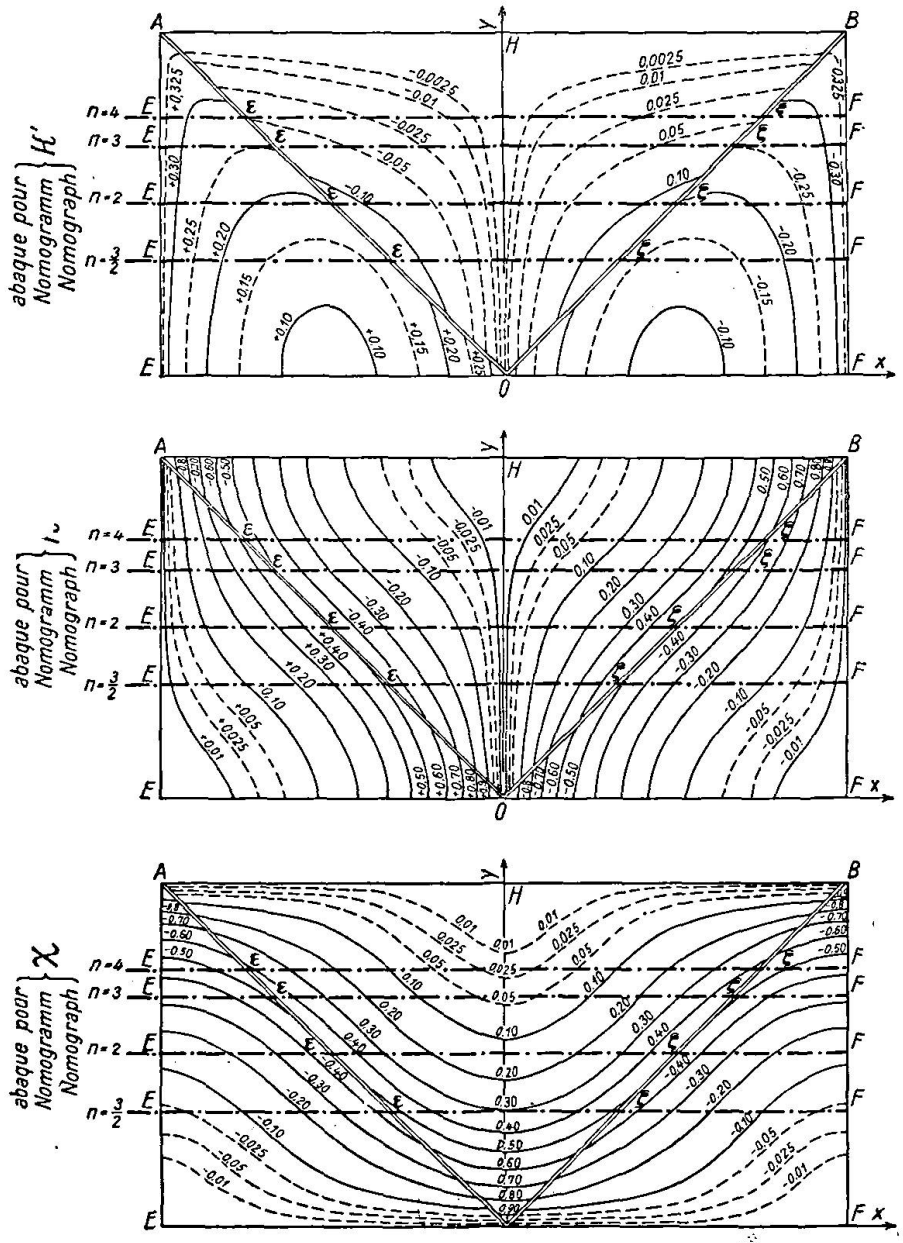
$$t = \frac{\bar{\omega}_2\, a\, b}{2\sqrt{f f'}}\, x$$

Fig. 91. 3e cas: Charge de densité
Dritter Fall: Belastungsgröße
3rd case: Intensity of loadiug
$\Big\}\ \dfrac{\bar{\omega}_2\, x^2}{n^2}$

Pour démontrer les deux propriétés fondamentales précédentes rapportons le voile en projection à deux axes de coordonnées $o\zeta$ et $o\eta$ et appelons $\Xi$ et $H$ les composantes suivant $o\zeta$ et $o\eta$ des efforts tangentiels appliqués sur l'unité de surface projetée. La différence des contraintes réduites agissant en deux points $R$ et $R'$ d'une même génératrice suivant la direction de cette génératrice, sur un élément perpendiculaire à cette génératrice, a pour valeur

$$\Delta_R^{R'} = \frac{1}{2 \sin\varphi \cos\varphi}\left[\int_R^{R'} \Xi\, d\eta + \int_R^{R'} H d\xi\right]$$

en appelant $\varphi$ l'angle de $R R'$ avec $o\zeta$. On vérifie assez facilement que la même formule est applicable au cas où $R$ et $R'$ ne sont pas situés sur une même génératrice mais se trouvent sur une même file à condition d'affecter $\varphi$ du signe correspondant à la génératrice de la file sur laquelle se trouve le point $R'$. Il




$$q' = \frac{\varpi_3\, b^2}{2 f'}\, k$$

$$q = \frac{\varpi_3\, a^2}{2 f}\, k$$

$$t = \frac{\varpi_3\, a\, b}{2\sqrt{f f'}} \cdot x$$

Fig. 92. 4e cas: Charge de densité / Vierter Fall; Belastungsgröße / 4th case: Intensity of loading $\left.\right\} \dfrac{\varpi_3\, x^3}{n^3}$

suffit par exemple de remarquer que les contraintes réduites changent brusquement de signe sans changer de valeur absolue lorsque le point $R'$ passe par un sommet de la file considérée.

Prenons d'abord $\Xi = 0$, $H = \mathfrak{H}(\xi)$ et plaçons $R$ en $P$ et $R'$ en $Q$. La formule précédente montre que la différence $\Delta_P^Q$ des contraintes réduites s'exer-

çant en $P$ et $Q$ suivant les génératrices de la file $P N M N' M' N'' Q$ est indépendante du choix de la file dans une même série et change de signe sans changer de valeur absolue quand la file change de série. Faisons maintenant $\Xi = X(\eta)$, $H = 0$. La différence $\Delta_R^{R'}$ est nulle si les points $R$ et $R'$ sont sur une même parallèle à $AB$ et à une distance égale à un multiple de la période du voile, on pourra joindre $R$ et $R'$ par deux files de séries différentes et les contraintes réduites suivant chaque file auront même valeur en $R$ et $R'$. Les deux propriétés énoncées se trouvent démontrées.

De ces propriétés on tire aisément les conséquences suivantes:

1° Des efforts tangentiels tels que $\Xi = 0$, $H = \mathfrak{H}(\xi)$ peuvent être équilibrés par l'adjonction d'un tympan vertical perpendiculaire à $AB$ et $CD$ et distant des bords libres $AD$ ou $BC$ d'un nombre entier de demi-périodes. Les contraintes se réduisent à des cisaillements simples s'exerçant sur les paraboles principales et dont la valeur reste constante sur toute parallèle à $AD$ (fig. 94).

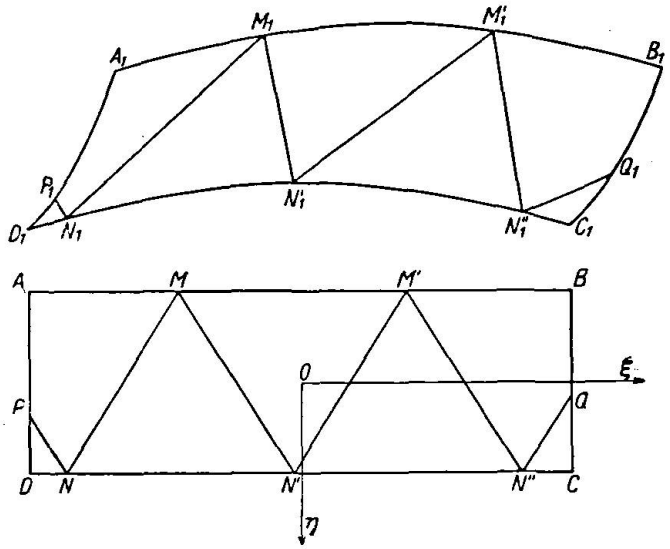



Fig. 93.

2° Des efforts tangentiels tels que $\Xi = X(\eta)$, $H = 0$ peuvent s'équilibrer sans l'adjonction de tympan si le voile est d'indice entier et pair, sinon les efforts envisagés peuvent être réduits à des efforts de même type agissant sur une portion du voile formant un voile d'indice inférieur à 2.

Le cas d'efforts $\Xi = 0$, $H = \mathfrak{H}(\xi)$ se trouve ainsi entièrement résolu. Il n'en est pas de même du cas d'efforts $\Xi = X(\eta)$, $H = 0$ où il faut distinguer suivant que l'indice est ou non un multiple de 2. Il en résulte, si on se borne aux indices entiers, qu'on peut toujours considérer un voile quelconque comme la juxtaposition de voiles normaux, ou comme celle de voiles normaux et d'un voile semi-normal, et qu'il suffit de savoir résoudre le problème posé pour un voile normal et un voile semi-normal.

Examinons en premier lieu le cas du voile semi-normal projeté en $ABCD$ (fig. 95) et supposons le à 4 tympans $AB$ et $CD$, d'une part, $BC$ et $DA$ d'autre part. On voit immédiatement qu'on peut appliquer à ce voile les considérations qui nous ont conduit à la première propriété fondamentale, en intervertissant les tympans $AB$ et $CD$ avec $BC$ et $DA$. Les contraintes se réduisent à des cisaillements simples s'exerçant sur les paraboles principales et dont la valeur reste constante sur toute parallèle à $AB$.

Prenons maintenant le cas du voile normal $ABCD$ (fig. 96) à deux tympans $AB$ et $CD$. Adjoignons provisoirement les 3 tympans AD, $BC$, $MN$, $M$ et $N$ étant les milieux de $AB$ et $CD$. On est ramené au cas de deux voiles semi-normaux qu'on sait résoudre, comme nous venons de le voir. Mais on constate immédiatement que sur le tympan $MN$ les efforts exercés par le voile s'équilibrent et que par suite ce tympan peut être supprimé. D'autre part les efforts exercés sur les tympans $AD$ et $BC$ s'équilibrent sur le voile normal considéré par l'intermédiaire de deux séries de files de génératrices telles que $PM'N''Q$ et $PN'M''Q$ suivant lesquelles se propagent des efforts connus. Les tympans $AD$ et $BC$ peuvent être alors supprimés.

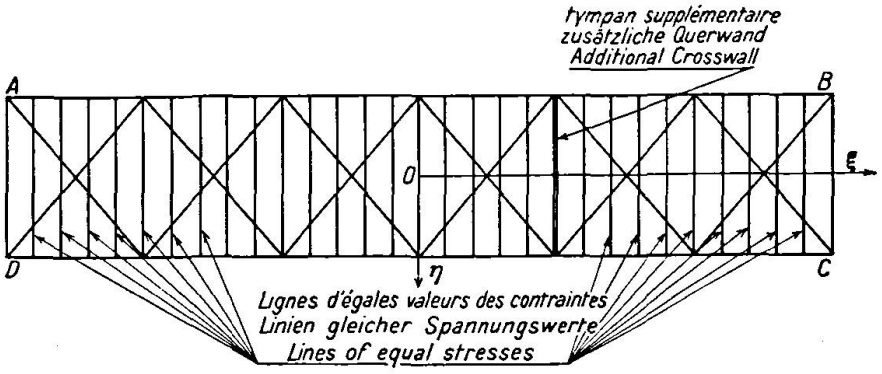



Fig. 94.

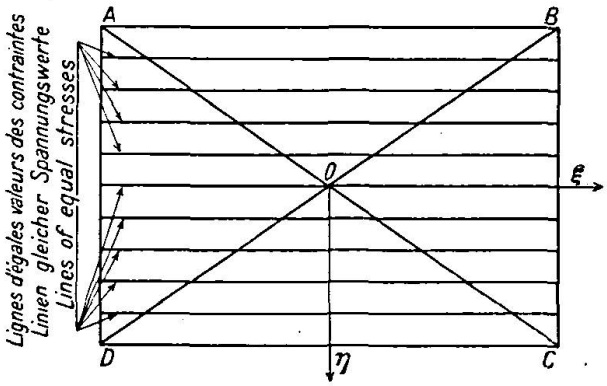



Fig. 95.

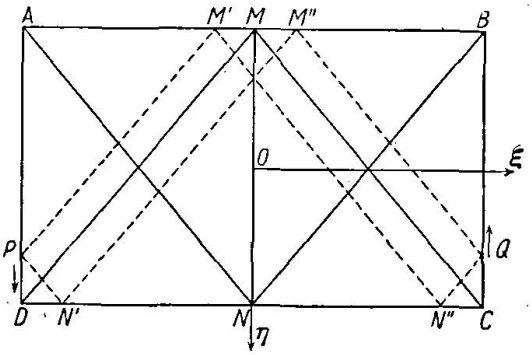



Fig. 96.

## Application du principe d'équivalence aux cas d'efforts tangentiels précédents — Nouveaux cas de charges verticales.

Reprenons le voile $ABCD$ de la figure 93. Nous venons de résoudre le problème de la détermination des contraintes pour des efforts tangentiels $\Xi = X(\eta)$, $H = \mathfrak{H}(\xi)$. Le principe d'équivalence énoncé au § 5 permet de ramener à ce cas celui d'efforts verticaux répartis avec une densité de la forme $\xi X(\eta) + \eta \mathfrak{H}(\xi)$. En effet des charges verticales réparties sur une parabole $\eta =$ constante avec une densité $\xi X(\eta)$ ont cette parabole pour courbe funiculaire à condition d'adjoindre des efforts dirigés tangentiellement à cette parabole et répartis avec la densité $pX(\eta)$, $p$ désignant le paramètre de la parabole. De même des charges verticales réparties sur une parabole $\xi = c^{te}$ avec une densité $\eta \mathfrak{H}(\xi)$ ont cette parabole pour courbe funiculaire à condition d'adjoindre des efforts dirigés tangentiellement à cette parabole et répartis avec

la densité $q\,\mathfrak{H}(\xi)$, $q$ étant le paramètre de la parabole. Il en résulte que le calcul du voile pour une densité de charges verticales égale à $\xi X(\eta) + \eta\,\mathfrak{H}(\xi)$ revient au calcul du cas d'efforts tangentiels $\Xi = pX(\eta)$ et $H = q\,\mathfrak{H}(\xi)$.

## § 8. Calcul des tympans.

Calcul d'un tympan console soumis à des efforts tangentiels le long d'une parabole principale d'un voile quelconque.

Considérons (fig. 97) un tympan console libre à une extrémité $O$ et encastré à l'autre $E$, et soit $OE$ l'arc de parabole principale du voile suivant lequel agissent des efforts tangentiels quelconques supposés définis par la valeur de leur projection sur un axe quelconque $ox$ effectuée parallèlement à l'axe du paraboloïde, projection ayant pour valeur $t(x)$ par unité de longueur

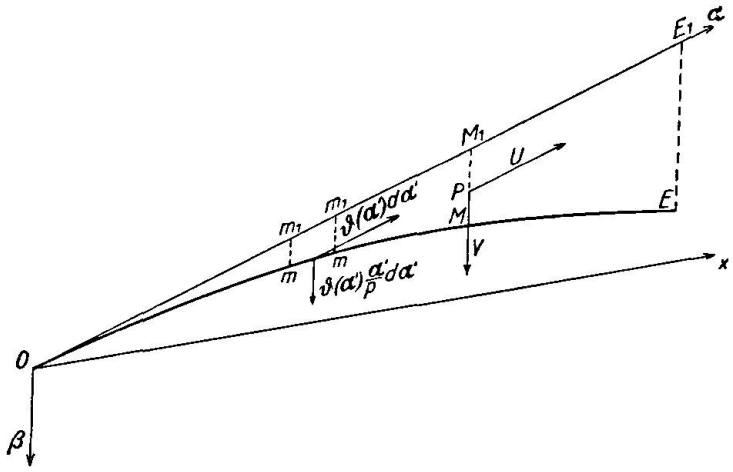



Fig. 97.

de $ox$. Rapportons l'arc de parabole aux deux axes de coordonnées formés par sa tangente $o\alpha$ au point $o$ et par la verticale $o\beta$ et soient $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées correspondantes. Les efforts tangentiels appliqués le long de $OE$ peuvent être définis par la valeur $\vartheta(\alpha)$ de leur projection sur l'axe $o\alpha$ effectuée parallèlement à $o\beta$. On a d'ailleurs

$$\vartheta(\alpha) = t(x).$$

Désignons par $E_1$ et $M_1$ les projections sur $o\alpha$ du point $E$ et d'un point quelconque $M$ de l'arc $OE$ et soit:

$$OM_1 = \alpha \qquad M_1M = \beta$$
$$OE_1 = \alpha_0 \qquad E_1E = \beta_0$$

Calculons le moment $\Gamma_1$ des efforts appliqués le long de $OM$ par rapport au point $M_1$. Pour cela cherchons le moment en $M_1$ de l'effort appliqué sur un élément $mm$ projeté sur $o\alpha$ suivant $m_1m_1$ et tel que

$$om_1 = \alpha', \qquad m_1m = \beta', \qquad m_1m_1 = d\alpha'.$$

Cet effort a respectivement pour composantes parallèlement à $o\alpha$ et $o\beta$

$$\vartheta(\alpha')\,d\alpha' \quad \text{et} \quad \vartheta(\alpha')\frac{\alpha'}{p}\,d\alpha'$$

en désignant par $p$ le paramètre de la parabole $OE$. Le moment par rapport à $M_1$ de ces deux efforts est donc, en appelant $\frac{\pi}{2} + \varphi$ l'angle des directions

$o\alpha$ et $o\beta$

$$\beta' \cos\varphi \cdot \vartheta(\alpha')\, d\alpha' + (\alpha - \alpha') \cos\varphi \cdot \vartheta(\alpha') \frac{\alpha'}{p}\, d\alpha'$$

soit en remarquant que $\beta' = \dfrac{\alpha'^2}{2p}$

$$\frac{\cos\varphi}{2p} (2\alpha\alpha' - \alpha'^2)\, \vartheta(\alpha')\, d\alpha'.$$

On a ainsi

$$\Gamma_1 = \frac{\cos\varphi}{2p} \int_0^\alpha (2\alpha\alpha' - \alpha'^2)\, \vartheta(\alpha')\, d\alpha'.$$

Posons

$$\Theta_1(\alpha) = \int_0^\alpha \vartheta(\alpha)\, d\alpha, \quad \Theta_2(\alpha) = \int_0^\alpha \Theta_1(\alpha)\, d\alpha, \quad \Theta_3(\alpha) = \int_0^\alpha \Theta_2(\alpha)\, d\alpha.$$

On constate aisément, en intégrant deux fois par parties, que

$$\Gamma_1 = \frac{\cos\varphi}{2p} [\alpha^2\, \Theta_1(\alpha) - 2\, \Theta_3(\alpha)]$$

ou encore

$$\Gamma_1 = \beta \cos\varphi \left(\Theta_1(\alpha) - \frac{2\, \Theta_3(\alpha)}{\alpha^2}\right)$$

Cherchons maintenant la position sur $M_1 M$ du point de passage $P$ de la résultante des efforts appliqués le long de $OM$, ainsi que les composantes $U$ et $V$ de cette résultante suivant $o\alpha$ et $o\beta$. On a évidemment

$$U = \Theta_1(\alpha)$$

et

$$V = \int_0^\alpha \vartheta(\alpha') \frac{\alpha'}{p}\, d\alpha'$$

soit en intégrant par parties

$$V = \frac{\alpha\, \Theta_1(\alpha) - \Theta_2(\alpha)}{p}$$

ou en remarquant que $\beta = \dfrac{\alpha^2}{2p}$

$$V = 2\beta \frac{\alpha\Theta_1(\alpha) - \Theta_2(\alpha)}{\alpha^2}.$$

D'autre part on a évidemment:

$$\Gamma_1 = V \cdot M_1 P \cdot \cos\varphi$$

d'où

$$M_1 P = \beta \left(1 - \frac{2\, \Theta_3(\alpha)}{\alpha^2\, \Theta_1(\alpha)}\right)$$

et

$$PM = 2\beta \frac{\Theta_3(\alpha)}{\alpha^2\, \Theta_1(\alpha)}.$$

Quand $\alpha$ varie entre zéro et $\alpha_0$ le point $P$ décrit ce que nous appellerons la ligne des pressions dans le tympan. La connaissance au droit d'une section quelconque $M_1 M$ du point de passage $P$ de la ligne des pressions et des ré-

sultantes $U$ et $V$ détermine complètement les efforts dans le tympan au droit de la section considérée.

Dans le cas où $\vartheta(\alpha)$ est de la forme $\vartheta_n \alpha^n$, $\vartheta_n$ étant une constante on a:

$$U = \frac{\vartheta_n}{n+1} \alpha^{n+1}, \qquad V = \frac{2\,\Theta_n}{n+2} \alpha^n \beta, \qquad PM = \frac{2\beta}{(n+2)(n+3)}.$$

La courbe des pressions est une parabole tangente en $o$ au voile, dont le paramètre est $\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+4)}$ fois celui de la parabole $DE$. En particulier si $\vartheta(\alpha)$ est constant et égal à $\vartheta_0$, on a:

$$U = \vartheta_0 \alpha, \qquad V = \vartheta_0 \beta, \qquad PM = \frac{\beta}{3}$$

Si $\vartheta(\alpha)$ est de la forme $\vartheta_1 \alpha$, $\vartheta_1$ étant une constante, on a:

$$U = \frac{1}{2} \vartheta_1 \alpha^2, \qquad V = \frac{2}{3} \vartheta_1 \alpha \beta, \qquad PM = \frac{\beta}{6}.$$

S'il s'agit de déterminer le point de passage $P$ dans les cas où $(\alpha)$ est exprimé par un polynôme de la forme:

$$\vartheta_0 + \vartheta_1 \alpha + \vartheta_2 \alpha^2 + \cdots\cdots$$

on cherchera les points de passage relatifs à chacun des monômes composants ainsi que les valeurs des composantes $U$ et $V$ correspondantes et on en déduira par une composition de forces parallèles le point de passage cherché ainsi que les valeurs des composantes $U$ et $V$ de la résultante des forces. Supposons par exemple

$$\vartheta(\alpha) = \vartheta_0 + \vartheta_1 \alpha$$

on trouve

$$PM = \frac{\beta}{3}\left(1 - \frac{1}{2 + \frac{4\,\vartheta_0}{\vartheta_1 \alpha}}\right).$$

Si en particulier $\vartheta_0 + \vartheta_1 \alpha = 0$ pour une valeur de $\alpha$, on a alors

$$PM = \frac{\beta}{2}.$$

### Calcul complet d'un élément de tympan quelconque.

Soit (fig. 98) un élément de tympan correspondant à un arc de parabole $AB$ et limité à deux sections verticales $AA_1$ et $BB_1$. Supposons ce tympan non seulement soumis aux efforts tangentiels du voile suivant $AB$, mais encore à des forces verticales ou non appliquées entre les sections $AA_1$ et $BB_1$, ainsi qu'à des réactions au droit des sections $AA_1$ et $BB_1$. Pour calculer les efforts au droit d'une section quelconque $MM_1$, on déterminera tout d'abord la résultante des efforts tangentiels dus au voile au droit de cette section ainsi que son point de passage, en appliquant la méthode précédemment exposée. Puis on composera cette résultante avec la résultante des efforts appliqués au droit de $AA_1$ et entre $AA_1$ et $MM_1$.

Nous passerons en revue quelques cas particuliers qui se rencontrent fréquemment.

1° *Les efforts tangentiels sont constants en projection horizontale, et les autres forces appliquées se réduisent à une résultante verticale agissant dans*

*la section* $AA_1$. La courbe des pressions des efforts tangentiels est une parabole telle que $AC$ (fig. 99), la résultante correspondante est une fonction linéaire et homogène de l'abscisse comptée à partir de la section $A$, et le moment par rapport à la tangente au voile en $A$ est proportionnel au cube de cette abscisse. Le moment de la réaction appliquée en $A$ est d'autre part proportionnel à la même abscisse. Il en résulte que la courbe résultante des pressions, c'est-à-dire le lieu des points où le moment total est nul, se déduit de la parabole $AC$ par une simple translation verticale. C'est une parabole $A'C'$ facile à tracer. Sa connaissance donne immédiatement les efforts au droit d'une section quelconque.

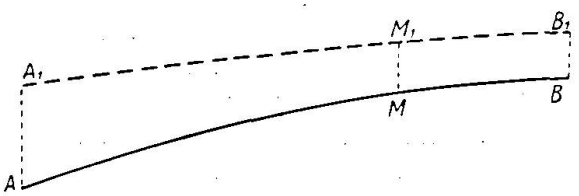



Fig. 98.

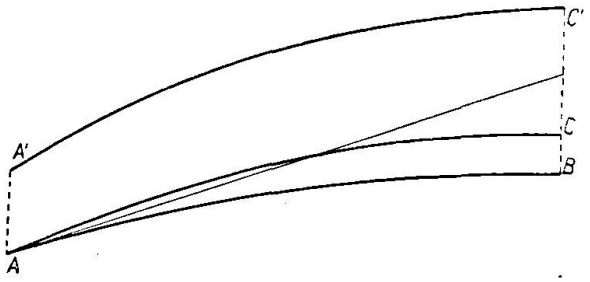



Fig. 99

2° *Les efforts tangentiels sont constants en projection horizontale, les forces appliquées le long de AB étant verticales et uniformément réparties en projection.*

Soit (fig. 100) $AC$ la parabole des pressions dues aux efforts tangentiels. Le moment par rapport à la tangente en $A$ est proportionnel au cube de l'abscisse

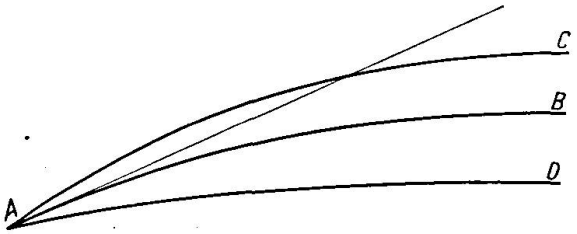



Fig. 100.

comptée à partir de $A$ et la résultante correspondante en projection proportionnelle à l'abscisse. Le moment des forces verticales est par ailleurs proportionnel au carré de l'abscisse. Il en résulte immédiatement que la distance à la tangente comptée verticalement du point de passage de la résultante générale est un binôme du second degré sans terme constant par rapport à l'abscisse considérée. La courbe résultante des pressions est ainsi un arc de parabole $AD$ passant par le point $A$ et faisant en ce point un angle non nul avec l'arc de parabole $AB$.

## Chapitre C. Voiles limités à des triangles curvilignes.

### § 1. Généralités.

Les voiles définis au chapitre A § 3 et ceux étudiés au chapitre B présentent la particularité d'être limités à leur pourtour par des quadrilatères rectilignes gauches (sauf le cas de quatre voiles avec appui central) ou par des quadrilatères de paraboles principales. Il peut être plus intéressant dans les applications d'envisager des voiles limités à des quadrilatères plans et en particulier à des

rectangles. Pour parvenir à ce résultat on peut associer des voiles limités à des triangles curvilignes dont deux côtés sont formés par des génératrices et le troisième côté par une parabole.

## Propriétés des voiles busqués.

Nous allons étendre aux voiles les plus généraux en paraboloïde hyperbolique la définition et les propriétés des voiles busqués définis au chapitre B § 4 pour les voiles limités à des paraboles principales et busqués suivant l'une de ces paraboles. A cet effet considérons (fig. 101) un voile quelconque en paraboloïde hyperbolique à axe vertical et traçons sur le voile une parabole quelconque $AB$. Cette parabole divise le voile en deux parties $P_1$ et $P_2$. Faisons correspondre à tout point $M$ de $P_2$ un point $M'$ sur la même verticale de façon que le vecteur $MM'$ soit égal à sa distance au plan de la parabole $AB$ multipliée par un coefficient constant $k$, que nous appellerons coefficient de busquage. Quand le point $M$ décrit le demi-voile $P_2$ le point $M'$ décrit un demi-voile $P_2'$ qui est également un paraboloïde hyperbolique. Par définition l'ensemble des deux demi-voiles $P_1$ et $P_2'$ formera un voile busqué dont la parabole $AB$ sera la parabole de busquage.

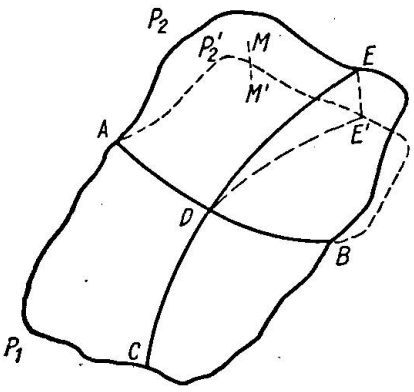


Fig. 101.

On constate facilement que si l'on suppose les deux voiles $P_1 P_2$ et $P_1 P_2'$ chargés au droit des points situés sur une même verticale avec la même densité en projection horizontale, c'est-à-dire si deux éléments pris dans chaque voile et projetés horizontalement suivant un même élément sont soumis d'une part à des efforts tangentiels ayant même projection horizontale, d'autre part à des efforts verticaux identiques, les voiles subissent les mêmes contraintes réduites aux points correspondants situés sur une même verticale. En outre, suivant l'arc de parabole $AB$ s'exercent des efforts verticaux, dont la densité en projection horizontale est égale au produit de la contrainte normale réduite s'exerçant sur l'arc de parabole $AB$ par le coefficient de busquage.

Si dans le voile primitif $P_1 P_2$ le voile exerce des efforts sur un tympan vertical défini par un arc de parabole $CDE$, le voile busqué $P_1 P_2'$ exercera des efforts sur le tympan vertical défini par les arcs de parabole $CD$ et $DE'$. Les efforts développés suivant l'arc de parabole $CD$ et leur résultante sont les mêmes dans les deux voiles. Suivant les arcs de parabole $DE$ et $DE'$, les efforts exercés sur les tympans sont les mêmes en projection horizontale aux points se correspondant sur une même verticale. Les résultantes de ces efforts ont donc même projection horizontale et comme elles passent évidemment par un même point du tympan de busquage, il suffit pour les définir complètement, de connaître au droit de chaque verticale leur point de passage. Or on constate immédiatement que les lieux décrits par ces points de passage dans leurs tympans respectifs, qui sont les lignes des pressions de ces tympans, se déduisent l'un de l'autre suivant la même loi que celle permettant de passer du demi-voile $P_2$ au demi-voile $P_2'$. En d'autres termes, la ligne des pressions relative au tympan $DE'$ se déduit de la ligne des pressions relative au tympan $DE$, en portant à partir de chaque point de celle-ci un vecteur égal au produit par le coefficient de busquage $k$ de la distance du point considéré au tympan de busquage. En

résumé, on passe facilement pour chaque demi-tympan $CD$ et $DE$ d'une part, $CD$ et $DE'$ d'autre part, du cas du voile primitif à celui du voile busqué, aussi bien en ce qui concerne la valeur de la résultante qu'en ce qui concerne le tracé de la ligne des pressions.

On peut aller plus loin dans certains cas particuliers et établir une correspondance identique entre les résultantes et les lignes des pressions du tympan $CDE$ d'une part et du tympan $CDE'$ d'autre part, les résultantes ayant même projection horizontale au droit d'une même verticale, et les lignes des pressions étant identiques entre les verticales de $C$ et $D$ et se déduisant l'une de l'autre comme les demi-voiles $P_2$ et $P_2'$ entre les verticales de $D$ et $E$. Il suffit pour qu'il en soit ainsi que dans le cas du voile busqué il soit appliqué au point $D$ une réaction verticale égale au produit du coefficient de busquage par la projection horizontale de la résultante en $D$.

### Distinction entre les voiles busqués et les voiles juxtaposés.

Un voile busqué peut évidemment être envisagé comme la juxtaposition de deux voiles suivant une parabole commune. Une différence importante au point de vue des applications existe toutefois entre un voile busqué et deux voiles simplement juxtaposés ne pouvant être considéré comme un même voile busqué. Si l'on suppose les deux types de voiles (voiles busqués et voiles simplement juxtaposés) chargés avec une densité constante en projection horizontale, on constate facilement que pour un voile du premier type la parabole de busquage est soumise à des efforts verticaux uniformément répartis en projection horizontale, et par conséquent la ligne des pressions dans le plan de la parabole de busquage coïncide avec cette parabole; au contraire s'il s'agit de deux voiles simplement juxtaposés suivant une parabole, cette parabole est soumise de la part des deux voiles à des efforts qui ne sont pas tous situés en général dans le plan de la parabole, et dans le cas particulier où il en est ainsi, la ligne des pressions dans ce plan ne coïncide pas avec la parabole de juxtaposition.

### Voiles incomplets et voiles complets.

Considérons une association de voiles à axes verticaux limités à des quadrilatères gauches et busquons ces voiles de manière à remplacer un même voile primitivement limité à un quadrilatère gauche par deux demi-voiles limités chacun à un triangle formé de deux droites et d'une parabole. Nous pouvons obtenir en opérant ainsi des associations de voiles dont le contour extérieur sera dans un même plan.

Les voiles ainsi définis peuvent être classés au point de vue de leur résistance aux charges uniformément réparties en projection horizontale en deux catégories, les voiles incomplets et les voiles complets. Les voiles incomplets sont ceux pour lesquels les poussées s'exerçant suivant les paraboles de busquage ne sont pas compensées à l'intérieur du voile, mais sont équilibrées par des éléments spéciaux tels que tympans, tirants ou butons. Les voiles complets sont ceux qui n'exercent aucune poussée sur leurs bords et n'ont besoin d'aucun élément extérieur au voile pour résister aux poussées dues au busquage.

## § 2. Voiles incomplets.

### Voiles simples busqués à bords rectangulaires.

Considérons (fig. 102) un voile en paraboloïde hyperbolique équilatère limité au quadrilatère gauche $OBCA'$ et busquons le en prenant comme para-

bole de busquage la parabole passant par les points $O$ et $C$, de manière que le point $A'$ vienne coïncider avec le quatrième sommet $A$ du rectangle construit sur $BO$ et $BC$. Le voile busqué que nous obtenons ainsi travaille dans les mêmes conditions que le voile initial. Il donne par conséquent en projections sur les côtés du rectangle $OBCA$ les mêmes réactions que le voile initial sur les côtés du quadrilatère gauche $OBCA'$, mais en outre le voile busqué charge la parabole de busquage $OC$ par des efforts appliqués dans le plan de cette parabole, parallèlement à $AA'$.

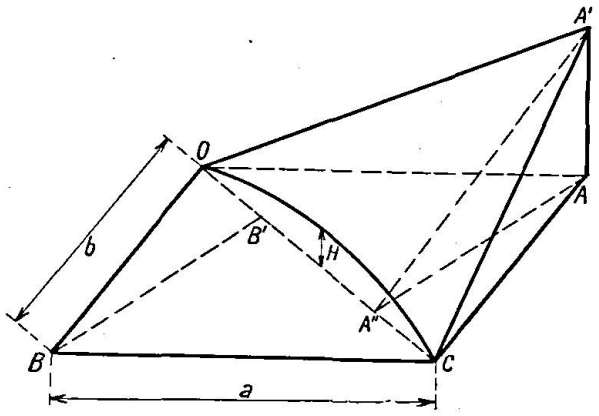


Fig. 102.

Supposons le voile busqué chargé avec une densité $\varpi$ uniforme en projection sur le plan du rectangle. Le voile est soumis à des efforts de cisaillement sivant les génératrices, efforts ayant pour valeur par unité de longueur

$$\vartheta = \frac{\varpi \cdot a \cdot b}{2AA'}$$

en désignant par $a$ et $b$ les longueurs $OA$ et $OB$ du rectangle. Si l'on désigne d'autre part par $H$ la flèche de l'arc de parabole $OC$ on a:

$$AA' = 4H$$

et par conséquent

$$\vartheta = \frac{\varpi \cdot ab}{8H}$$

telle est la formule fondamentale qui donne la valeur du cisaillement dans un voile simple busqué à bords rectangulaires chargé uniformément en projection.

Etudions maintenant dans quelles conditions travaille la parabole de busquage. Elle est soumise à une charge uniforme dont la densité en projection horizontale est égale au produit par le coefficient de busquage de la contrainte normale réduite s'exerçant sur les éléments de $OC$. Cherchons l'expression analytique de cette densité $p$. Pour cela appelons $l$ la longueur des diagonales du rectangle et abaissons la perpendiculaire $AA''$ sur $OC$. Le coefficient de busquage $k$ est

$$k = \frac{AA'}{AA''} = \frac{4H}{\frac{a \cdot b}{l}} = \frac{4Hl}{a \cdot b}$$

La valeur de la composante normale $n$ de la contrainte s'exerçant le long de $OC$ peut se calculer de la manière suivante. La composante normale des efforts agissant sur $OC$ en projection horizontale est égale à la somme des composantes des efforts s'exerçant suivant $BO$ et $BC$ sur la perpendiculaire $BB'$ abaissée de $B$ sur $OC$. On a donc:

$$n\,OC = 2\vartheta BB'$$

d'où

$$n = 2\vartheta \frac{BB'}{OC} = 2\vartheta \frac{a \cdot b}{l^2}$$

soit en tenant compte de la valeur précédemment obtenu pour $\vartheta$

$$n = \frac{\varpi \cdot a^2 b^2}{4Hl^2}.$$

La valeur de la densité cherchée $p$ est donc

$$p = kn = \frac{\varpi \cdot a \cdot b}{l},$$

formule évidente à priori; en effet le voile busqué ne donne que des efforts horizontaux à son pourtour, et par conséquent la résultante des efforts verticaux agissant sur la parabole de busquage, qui est égale à $pl$, doit équilibrer la charge totale $\varpi\, ab$ du voile, d'où la formule précédente.

La parabole de busquage étant soumise à la charge uniforme de densité $p$, la courbe des pressions dans le plan de busquage coïncide avec la parabole de busquage, et l'arc de busquage n'est soumis en chacun de ses points qu'à un effort normal tangent à l'arc de parabole dont la valeur en projection horizontale, que nous appellerons poussée de l'arc de busquage, est donnée par la formule:

$$Q = \frac{\varpi abl}{8H}.$$

Le voile busqué considéré est un voile incomplet puisqu'il donne aux extrémités $O$ et $C$ de l'arc de busquage deux poussées ayant la valeur commune précédente qui ne peuvent évidemment pas s'équilibrer par l'intermédiaire du voile. L'existence de ces deux poussées en $O$ et $C$ rend donc obligatoire, lorsque le voile considéré est utilisé seul, l'emploi d'un tirant suivant $OC$ ou de tout autre dispositif mécanique équivalent.

Voiles simples busqués limités à un quadrilatère gauche.

Nous allons étudier en détail un autre voile simple busqué qui entre dans la composition de voiles plus complexes, à savoir le voile simple busqué formé de paraboloïdes équilatères et limité à un quadrilatère gauche. Ce voile est une généralisation du voile précédemment considéré. Pour le définir nous partirons encore d'un voile limité à un quadrilatère gauche $OBCA'$ (fig. 103). Nous busquerons ce voile suivant la parabole de busquage $OC$ de manière à amener le point $A'$ en un point A tel que

$$AA' = 2H + h.$$

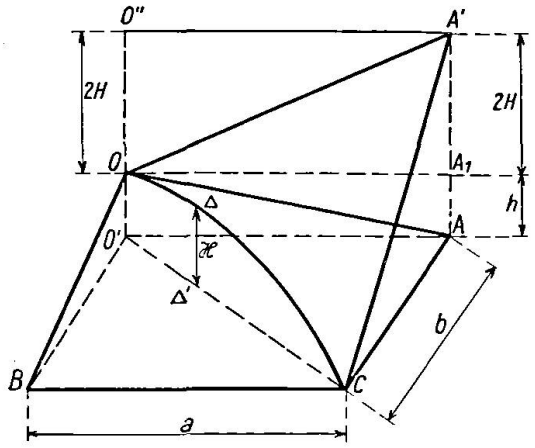


Fig. 103.

Soit $O'$ le quatrième sommet du rectangle dont les trois autres sommets sont $ACB$. Posons

$$O'A = a$$
$$O'B = b$$
$$O'O = h$$

les longueurs $a$, $b$, $h$, $H$ définissent complètement le voile busqué considéré. $OO'$ qui est à l'intersection des plans menés par deux génératrices parallèlement aux plans directeurs est parallèle à l'axe de chaque paraboloïde donc à $AA'$.

Supposons tout d'abord le voile chargé avec une densité uniforme en projection et parallèlement à la direction des axes des paraboloïdes. Désignons toujours par $\varpi$ la densité de cette charge et par $\vartheta$ le cisaillement qui en résulte sur les éléments de génératrices. On a

$$\vartheta = \frac{\varpi \cdot ab}{4H},$$

on voit en effet immédiatement que le gauchissement du quadrilatère primitif $OBCA'$ a pour valeur

$$A'A_1 = AA' - AA_1 = AA' - OO' = 2H.$$

Le voile exerce des réactions sur son pourtour dirigées suivant les génératrices du quadrilatère gauche $OACB$ et des réactions parallèles à $OO'$ sur l'arc de busquage $OC$ dont la valeur correspond à une densité constante en projection horizontale que nous appellerons $\delta$. Si $k$ est le coefficient de busquage et $n$ la contrainte normale réduite s'exerçant suivant $O'C$, on aura

$$\delta = kn.$$

Abaissons $AA''$ perpendiculaire sur $O'C$ et posons

$$OC = l.$$

On aura

$$k = \frac{AA'}{AA''} = \frac{2H+h}{\frac{ab}{l}} = \frac{l(2H+h)}{ab}.$$

Abaissons la perpendiculaire $BB'$ sur $O'C$. La composante normale en projection sur $O'BC$ des réactions suivant $OC$ a pour valeur $nl$ et est équilibrée par la somme des projections sur $BB'$ des projections sur le plan $O'BC$ des réactions agissant sur $BC$ et $BO$. On en déduit sans difficulté l'identité

$$nl = 2\vartheta BB' = \frac{2\vartheta ab}{l}$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{2\vartheta ab}{l^2} = \frac{\varpi a^2 b^2}{2Hl^2};$$

on en déduit

$$\delta = \frac{\varpi ab}{2l}\,\frac{2H+h}{H}.$$

L'arc de busquage $OC$ se trouve soumis à un effort normal dont la projection sur le plan $O'BC$ a une valeur constante $Q$ que nous allons déterminer. Pour cela remarquons que la déviation $OO''$ de l'arc de parabole $OC$ mesure le gauchissement du quadrilatère primitif $OBCA'$ et est par suite égal à $2H$. Il en résulte que la flèche de l'arc de parabole $OC$ est égal à $\frac{H}{2}$. On a donc

$$Q = \frac{\delta l^2}{4H} = \frac{\varpi abl(2H+h)}{8H^2}.$$

Calculons d'autre part les composantes verticales aux points $O$ et $C$ dues à l'arc de busquage (fig. 104). Ces réactions se composent de deux réactions dirigées parallèlement à $O'$ et ayant pour valeur $\frac{\delta l}{2}$ et de deux réactions dirigées suivant $OC$ se faisant équilibre et dont la projection sur $O'C$ a pour valeur la poussée $Q$. Par conséquent la réaction en $O$ se compose d'une poussée parallèle à $O'C$ ayant la valeur $Q$ précédemment déterminée et d'une réaction dirigée suivant $OO'$ ayant pour valeur

$$\frac{\delta l}{2} - \frac{Qh}{l} = \frac{\varpi ab(2H+h)}{4H}\left(1 - \frac{h}{2H}\right).$$

La réaction en $C$ se compose de même d'une poussée parallèle à $O'C$ ayant la valeur $Q$ et d'une composante parallèle à $OO'$ ayant pour valeur

$$\frac{\delta l}{2}+\frac{Qh}{l}=\frac{\varpi\cdot ab(2H+h)}{4H}\left(1-\frac{h}{2H}\right).$$

Déterminons le point $\Delta$ de l'arc $OC$ où la tangente est parallèle à $O'C$ et la distance $\mathfrak{H}$ de ce point à la droite $O'C$. Projetons pour cela le point $\Delta$ en $\Delta'$ sur $O'C$. Marquons le point de rencontre $\Delta''$ de $\Delta\Delta'$ sur $O''C$. On a

$$\frac{2\Delta\Delta''}{\Delta''C}=\frac{O'O''}{O''C}$$

et d'autre part

$$\frac{\dfrac{2\Delta\Delta''}{\Delta''C}}{\dfrac{2OO''}{O'C}}=\frac{C\Delta'}{CO'}$$

et par conséquent

$$\frac{C\Delta'}{CO'}=\frac{O'O''}{2OO''}=\frac{2H+h}{4H}$$

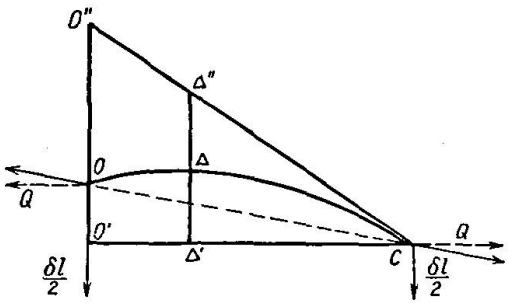



Fig. 104.

la position du point $\Delta$ étant ainsi déterminée, il est facile de calculer $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{H}=\Delta\Delta'=\Delta'\Delta''-\Delta\Delta'';$$

or

$$\Delta'\Delta''=O'O''\frac{C\Delta'}{CO'}=\frac{(2H+h)^2}{4H};$$

d'autre part

$$\Delta\Delta''=OO''\left(\frac{C\Delta'}{CO'}\right)^2=\frac{(2H+h)^2}{8H}.$$

Il en résulte que

$$\mathfrak{H}=\frac{(2H+h)^2}{8H}=H\frac{\left(1+\dfrac{h}{2H}\right)^2}{2}.$$

Un cas particulier intéressant et dont nous reparlerons ultérieurement correspond à la relation

$$2H+h=2H\sqrt{2}$$

soit

$$h=2H(\sqrt{2}-1)$$

on a alors

$$\mathfrak{H}=H.$$

## § 3. Voiles complets.

### Voiles limités à un rectangle avec points d'appuis aux milieux des côtés du rectangle.

Soient (fig. 105) le rectangle $CDC'D'$, $A, B', A', B$ les milieux des côtés, $O$ le centre du rectangle, $2a$ et $2b$ les longueurs des côtés. Les droites $AA'$ et $BB'$ partagent le rectangle donné en 4 rectangles. Imaginons que par chacun d'eux nous fassions passer un voile simple busqué de telle sorte que les para-

boles de busquage soient dirigées respectivement suivant $AB$, $BA'$, $A'B'$, $B'A$ et aient une même flèche $H$. Les paraboloïdes sont supposés tous à axe vertical et le voile est supposé chargé uniformément en projection avec une densité $\varpi$. On voit immédiatement d'une part que les réactions dues au voile suivant les droites $AA'$ et $BB'$ se font équilibre, d'autre part que les réactions aux quatre points $A$, $B$, $A'$, $B'$ dues aux paraboles de busquage ont leurs composantes parallèles au plan du rectangle primitif situées suivant $AA'$ et $BB'$ et se faisant équilibre. Il en résulte que les quatre points $A, B, A', B'$ n'ont besoin que de développer des réactions verticales.

Le taux de travail dans le voile est avec les notations habituelles

$$\vartheta = \frac{\varpi \cdot ab}{8H}$$

les composantes suivant $AA'$ des poussées dues au busquage s'exerçant en $A$ et $A'$ ont pour valeur commune $\frac{\varpi a^2 b}{4H}$; les composantes suivant $BB'$ des poussées dues au busquage s'exerçant en $B$ et $B'$ ont pour valeur commune $\frac{\varpi a b^2}{4H}$.

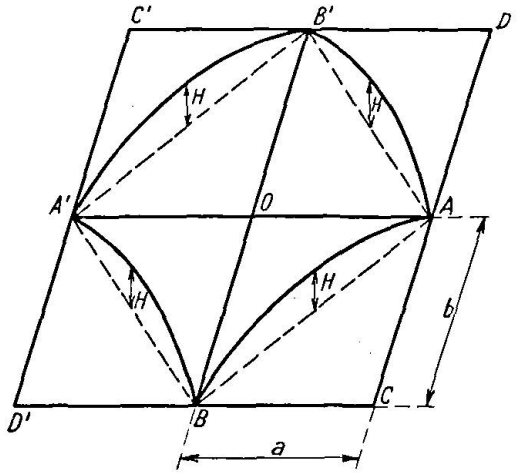



Fig. 105.

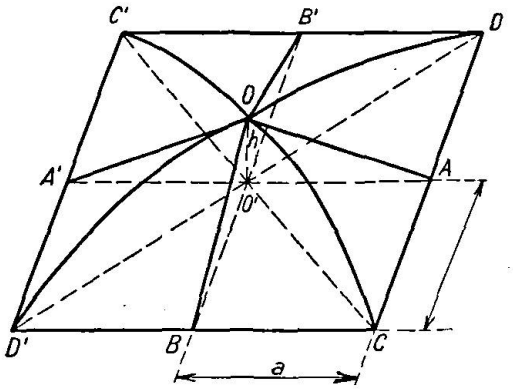



Fig. 106.

Si l'on calcule maintenant en chaque point de $AA'$ et $BB'$ la résultante des efforts on constate qu'elle croît linéairement depuis les extrémités de $AA'$ ou $BB'$ jusqu'en leur milieu $O$, la valeur de la résultante au point $O'$ étant double de sa valeur aux extrémités. Cette remarque permet d'écrire immédiatement la valeur de la résultante puisque sa variation est égale au produit du cisaillement $\vartheta$ par le déplacement de son point d'application.

### Voiles limités à un rectangle avec points d'appuis aux sommets du rectangle.

Soit (fig. 106) le rectangle $CDC'D'$, $A$, $B'$, $A'$, $B$ les milieux des côtés, $O'$ le centre du rectangle, $2a$ et $2b$ les longueurs des côtés. Menons par le point $O'$ le segment $O'O$ ayant pour valeur $h$. Par chacun des quadrilatères gauches $OACB$, $OADB'$, $OB'C'A'$, $OA'D'B$ nous pouvons faire passer un voile simple busqué déterminé comme nous l'avons vu au § 2 par les paramètres $a$, $b$, $h$ et par un paramètre supplémentaire $H$.

Nous allons chercher la condition pour que le voile formé par la réunion des 4 voiles simples busqués précédents soit un voile complet. Pour cela supposons le voile chargé uniformément en projection avec une densité $\varpi$. Par

raison de symétrie les réactions s'équilibrent de part et d'autre des points $A$, $B'$, $A'$, $B$ suivant les côtés du rectangle $C\,D\,C'\,D'$. Par raison de symétrie également les composantes parallèles au plan du rectangle $C\,D\,C'\,D'$ des réactions en $O$ des 4 voiles composants se font équilibre de même. D'autre part les composantes parallèles au plan du rectangle $C\,D\,C'\,D'$ des réactions en $C$, $D$, $C'$, $D'$ dues au busquage se font manifestement équilibre par l'intermédiaire des 4 côtés du rectangle. La condition pour que le voile considéré soit complet est donc que la composante verticale de la résultante des réactions en $O$ des voiles composants soit nulle. Il est d'ailleurs bien évident qu'il faut et il suffit pour cela qu'il en soit ainsi pour chacun des voiles composants. Or nous savons que la réaction dirigée suivant $O\,O'$ due au busquage est pour l'un quelconque de ces voiles,

$$\frac{\bar{\omega}\cdot a\cdot b\,(2H+h)}{4H}\left(1-\frac{h}{2H}\right).$$

Cette réaction doit donc équilibrer la somme des composantes parallèles à $O\,O'$ des réactions s'exerçant suivant deux côtés issus du point $O$ et appartenant à un même voile composant ($O\,A$ et $O\,B$ par exemple). Or chacune de ces composantes a pour valeur le produit de $\vartheta$ par $O\,O'$; par suite la somme des deux composantes a pour valeur

$$\frac{\bar{\omega}\cdot a\,b\,h}{2H},$$

et la condition cherchée s'écrit

$$\frac{\bar{\omega}\cdot a\,b\,(2H+h)}{4H}\left(1-\frac{h}{2H}\right)=\frac{\bar{\omega}\cdot a\,b\,h}{2H}$$

ou

$$\left(1+\frac{h}{2H}\right)\left(1-\frac{h}{2H}\right)=\frac{h}{H}$$

c'est-à-dire

$$1-\frac{h^2}{4H^2}=\frac{h}{H}$$

$$\left(\frac{h}{2H}\right)^2+2\frac{h}{2H}-1=0$$

ou en définitive

$$\frac{h}{2H}=\sqrt{2}-1.$$

Nous savons que cette condition est équivalente à l'identité

$$\mathfrak{H}=H.$$

On peut donc énoncer ce résultat: pour que le voile $O\,C\,D\,C'\,D'$ soit un voile complet, il faut et il suffit que le flèche totale $\mathfrak{H}$ du voile soit égale à la hauteur à la clé $h$ divisée par $2\,(\sqrt{2}-1)$; la déviation de chacune des paraboles de busquage a alors pour valeur $2\,\mathfrak{H}$.

Supposons la condition précédente réalisée. Le cisaillement $\vartheta$ dans le voile sera donné par

$$\vartheta=\frac{\bar{\omega}\,a\,b}{4H}.$$

La poussée dans chacun des arcs $C\,O\,C'$ et $D\,O\,D'$ a pour valeur

$$Q = \frac{\varpi\, a\, b\, l}{2H\sqrt{2}}.$$

Les composantes de cette poussée suivant les directions $A\,A'$ et $B\,B'$ ont respectivement pour valeurs

$$\frac{\varpi\, a^2 b}{2H\sqrt{2}} = \frac{\varpi\, a^2 b}{2H + h} \quad \text{et} \quad \frac{\varpi\, a\, b^2}{2H\sqrt{2}} = \frac{\varpi\, a\, b^2}{2H + h}$$

L'effort total qui s'exerce suivant chaque côté du rectangle limitant le voile varie linéairement depuis les extrémités du côté où il a l'une ou l'autre des valeurs précédentes jusqu'au milieu du côté où il atteint sa valeur maxima laquelle est suivant les cas

$$\frac{\varpi\, a^2 b}{4H}(1 + \sqrt{2}) = \frac{\varpi\, a^2 b}{2h} \qquad \frac{\varpi\, a\, b^2}{4H}(1 + \sqrt{2}) = \frac{\varpi\, a\, b^2}{2h}.$$

Vu l'importance du voile que nous venons de définir au point de vue des applications, nous donnons au chapitre D un calcul détaillé d'un voile de cette espèce limité à un carré.

## § 4. Voiles juxtaposés.

Voiles dont les éléments sont limités par deux droites et une parabole.

Considérons (fig. 107) le voile limité au quadrilatère gauche $O\,P\,R\,P'$ et défini de la manière suivante:

1° Le voile est symétrique par rapport au plan vertical passant par $O$ et $R$.

2° Chacun des éléments triangulaires $O\,P\,R$, $O\,P'\,R$ dont le voile est constitué est un paraboloïde à axe vertical s'appuyant sur les droites $O\,P$ et $P\,R$ pour le premier, $O\,P'$ et $P'\,R$ pour le second et sur la parabole de juxtaposition $O\,R$ dont la déviation $O\,\Omega = \delta$ est donnée.

Menons par le milieu $Q$ du segment horizontal $P\,P'$ la parallèle $Q\,R'\,O'$ à la tangente $R\,\Omega$ à l'arc de parabole $R\,O$ au point $R$, et désignons par $\lambda$ et $\mu$ les projections sur cette droite des segments $Q\,R$ et $R\,O$ effectuées parallèlement à la verticale. Appelons d'autre part $2a$ la distance $P\,P'$. Les paramètres $a$, $\lambda$, $\mu$, $\delta$ ne suffisent pas pour définir complètement le voile considéré. Il faut encore leur adjoindre deux paramètres, par exemple la direction de la tangente $R\,\Omega$ et la distance verticale de cette tangente à sa parallèle menée par $Q$. Mais ces deux paramètres n'interviennent pas dans l'étude des propriétés fondamentales que nous avons en vue.

Supposons chacun des éléments de paraboloïde soumis à une charge de densité constante en projection horizontale. Nous définirons cette charge par sa densité prise non pas par rapport au plan horizontal mais par rapport au plan $P\,O'\,P'$, densité que nous désignerons par $\varpi$. Nous supposerons que l'ensemble du voile est porté par un tympan aménagé dans le plan de la parabole de juxtaposition $R\,O$ et que ce tympan est lui-même encastré suivant la verticale $O'\,O$.

Examinons l'équilibre du voile dans les conditions que nous venons de préciser. Chaque élément dont est constitué le voile est soumis à des efforts se réduisant à des cisaillements suivant les génératrices, cisaillements qui ont pour valeur

$$\vartheta = \frac{\varpi \cdot a\,\mu}{2\,\delta}.$$

En effet si l'on prolonge par exemple l'élément de voile $PRO$ jusqu'aux deux autres côtés du quadrilatère gauche tracé sur le paraboloïde et dont les deux premiers côtés sont $PO$ et $PR$, on constate que l'élément de paraboloïde ainsi formé a pour poids $\varpi \cdot a \cdot \mu$ et pour gauchissement $\delta$.

Les réactions du voile $POP'R$ se composent d'abord d'efforts dirigés suivant les génératrices qui limitent le voile et réparties à raison de $\vartheta$ par unité de longueur, et ensuite d'efforts s'exerçant sur l'arc de parabole $RO$ dans le plan de cette parabole. Les réactions s'exerçant suivant les génératrices $PR$ et $P'R$ ont une résultante appliquée en $R$ dans le plan vertical de l'arc $RO$ et on peut combiner cette résultante avec les réactions directes du voile sur l'arc $RO$. On obtient ainsi un système d'efforts s'exerçant sur le tympan de juxtaposition et dont il est possible de déterminer en chaque point la résultante générale et le moment résultant. Soit $\mathfrak{T}$ ce système d'efforts. Les réactions s'exerçant suivant

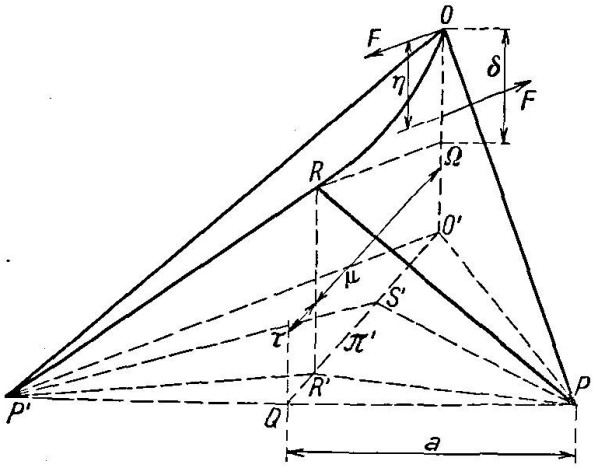



Fig. 107.

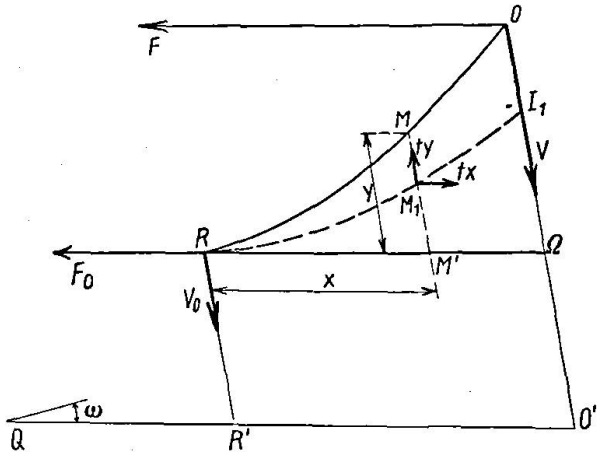



Fig. 108.

les génératrices $PO$ et $P'O$ ont une résultante en $O$, dont nous désignerons la projection suivant $QO'$ par $F$. La résultante des efforts du système $\mathfrak{T}$ au droit de la section $O'O$ passe par un certain point $I$ de $OO'$ situé à une distance $\eta$ de $O$ et cette résultante a $F$ pour projection suivant $QO'$.

Proposons nous de déterminer $F$ et $\eta$. Pour cela prenons les moments par rapport au point $I$. Le moment du système $\mathfrak{T}$ est nul, le moment de réaction suivant $PO$ et $P'O$ a pour valeur $F\eta \sin(O'O, O'Q)$. Ce moment doit donc équilibrer le moment des charges verticales appliquées à l'ensemble du voile $PRP''O$. Nous allons calculer ce moment. Pour cela remarquons que la résultante des charges verticales sur les triangles curvilignes $POR$ et $P'RO$ passe par le point $\pi'$ de la droite $QO'$ defini de la manière suivante; si $S'$ désigne le mileu de $O'R'$, le vecteur $S'\pi'$ a pour valeur algébrique le tiers de la projection $S'Q$ de chacune des médianes $PS'$ et $P'S'$. On a donc

$$O'\pi' = \frac{\mu}{2} + \frac{\lambda + \frac{\mu}{2}}{3} = \frac{\lambda + 2\mu}{3}.$$

Par conséquent

$$F\eta \sin(O'O, O'Q) = \varpi a \mu \frac{\lambda + 2\mu}{3} \sin(O'O, O'Q).$$

Calculons $F$. On voit immédiatement que

$$F = 2\vartheta O'Q = 2\vartheta(\lambda + \mu).$$

Par conséquent

$$\eta = \frac{\varpi a \mu}{6\vartheta} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\delta}{3} \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}.$$

Nous pouvons résumer les considérations qui précèdent de la manière suivante. L'ensemble des deux éléments de voile $PRO$ et $P'RO$ exercent sur le tympan de juxtaposition une action qui se compose:

1° d'une force concentrée s'exerçant au point $R$ qui n'est autre que la résultante des réactions agissant suivant les génératrices $PR$ et $P'R$.

2° d'efforts tangentiels s'exerçant suivant l'arc de parabole $RO$ et de densité constante en projection.

3° d'efforts verticaux agissant suivant l'arc de parabole $RO$ avec une densité variant linéairement depuis le point $R$ jusqu'au point $O$.

4° d'une force concentrée s'exerçant au point $O$ qui n'est autre que la résultante des réactions agissant suivant les génératrices $PO$ et $P'O$.

L'ensemble des forces visées aux numéros 1°, 2°, 3° forment ce que nous avons appelé le système $\mathfrak{T}$. Au droit d'une section droite verticale quelconque du tympan, la résultante des efforts et son point de passage sont uniquement déterminés par les valeurs des différents éléments constituant le système $\mathfrak{T}$, et le lieu de ce point de passage forme la courbe des pressions dans le tympan. Cette courbe aboutit au droit de la section $O'O$ au point $I$ situé à la distance du point $O$ égale à la quantité $\eta$ que nous avons calculée. En ce point la résultante des efforts du système $\mathfrak{T}$ s'exerçant sur le tympan a sa projection parallèle à $OO'$ égale à la quantité $F$ dont nous avons donné l'expression. L'ensemble des réactions du voile au droit de la section $OO'$ se compose de la résultante précédente due au système $\mathfrak{T}$ appliquée au point $I$ et de la résultante appliquée en $O$ des réactions suivant les génératrices $PO$ et $P'O$. Il est remarquable que la position du point $I$ et la valeur de la composante suivant $QO'$ de la résultante agissant au point $I$ ne dépendent que des quantités $\varpi$, $a$, $\lambda$, $\mu$, $\delta$.

Nous allons examiner d'une manière plus complète l'action du système $\mathfrak{T}$ sur le tympan, en cherchant pour chaque section droite de ce tympan la valeur de la résultante et le point de passage. Il est évident à priori en vertu de ce qui précède que la valeur de cette résultante varie linéairement le long du tympan. D'autre part si l'on se rapporte aux considérations développées au § 8 du chapitre B, on constate que le lieu du point de passage de la résultante ou courbe des pressions est la somme d'une parabole à axe vertical et d'une hyperbole à asymptote verticale.

Désignons par $\omega$ l'angle que fait $QO'$ avec l'horizontale et par $\nu$ la distance $R'R$. Soit $F_0$ et $V_0$ les composantes de la force concentrée agissant au point $R$ dirigées suivant $QO'$ et suivant la verticale. On a

$$F_0 = 2\vartheta\lambda \qquad V_0 = 2\vartheta\nu.$$

Les efforts tangentiels qui s'exercent suivant l'arc de parabole $RO$ ont une densité $t$ qu'il est facile de calculer si l'on remarque la composante suivant $QO'$ de la résultante de ces efforts sur l'arc $RO$ tout entier dont la valeur est $t\mu$ doit équilibrer les projections suivant $QO'$ des réactions agissant suivant les droites $PO$, $PR$, $P'O$, $P'R$ qui ont respectivement pour valeurs

$$\vartheta(\lambda + \mu), \qquad \vartheta\lambda, \qquad \vartheta(\lambda + \mu), \qquad \vartheta\lambda.$$

On a ainsi

$$t\mu = 2\vartheta(\lambda + \mu) + 2\vartheta\lambda$$

d'où l'on tire

$$t = 2\vartheta \frac{2\lambda + \mu}{\mu}.$$

Désignons (fig. 108) par $x$ et $y$ les coordonnées d'un point $M$ quelconque de l'arc de parabole $R\,O$ comptée parallèlement à $Q\,O'$ et à la verticale. La courbe des pressions relatives aux efforts tangentiels seuls est l'arc de parabole $R\,I$ tel qu'au point d'abscisse $x$, l'ordonnée $M'\,M_1$ de cet arc soit égal à $\frac{3}{2}\,y$ (voir chapitre B § 8). La résultante des efforts au point $M_1$ a pour composante parallèle à $Q\,O'$ la quantité $t\,x$ et pour composante verticale la quantité $t\,y$.

Calculons les moments $M_0$ et $M_1$ au point $M'$ dus à la force concentrée agissant en $R$ et aux efforts tangentiels. On a

$$M_0 = -V_0 x \cdot \cos\omega = -2\vartheta\nu x \cos\omega,$$

$$M_1 = \frac{2}{3} t \cdot xy \cos\omega = \frac{4}{3}\,\frac{2\lambda + \mu}{\mu}\,xy \cos\omega$$

La densité des charges verticales agissant sur l'arc $R\,O$ au point $M$ est de la forme

$$p + p'x,$$

$p$ et $p'$ étant deux constantes. Le moment $M_2$ de ces charges est:

$$M_2 = -\left(\frac{p x^2}{2} + \frac{p' x^3}{6}\right) \cos\omega.$$

Le moment total $M_0 + M_1 + M_2$ par rapport au point $M'$ est ainsi:

$$\mathfrak{M} = \cos\omega \left[\frac{4}{3}\vartheta\,\frac{2\lambda + \mu}{\mu}\,xy - 2\vartheta\nu x - \frac{p x^2}{2} - \frac{p' x^3}{6}\right]$$

et la résultante générale correspondante a pour composante suivant $Q\,O'$

$$tx - F_0 = 2\vartheta\left[\frac{2\lambda + \mu}{\mu}\,x - \lambda\right]$$

d'ailleurs on a

$$y = \delta\left(\frac{x}{\mu}\right)^2,$$

par conséquent

$$\mathfrak{M} = \cos\omega \left[\frac{4\vartheta}{3}(2\lambda + \mu)\,\delta\,\frac{x^3}{\mu^3} - 2\vartheta\nu x - \frac{p x^2}{2} - \frac{p' x^3}{6}\right]$$

La distance au point $M'$ du point de passage de la résultante a évidemment pour valeur

$$\frac{\mathfrak{M}}{(tx - F_0)\cos\omega} = \frac{\frac{4\vartheta}{3}(2\lambda + \mu)\,\delta\,\frac{x^3}{\mu^3} - 2\vartheta\nu x - \frac{p x^2}{2} - \frac{p' x^3}{6}}{\frac{2\lambda + \mu}{\mu}\,x - \lambda}.$$

Calculons maintenant $p$ et $p'$. Remarquons pour cela que $p$ est proportionnel à $\nu$ et que $p'$ ne dépend pas de $\nu$, comme on le constate facilement du fait que la variation de $\nu$ équivaut à la considération d'un busquage le long de l'arc de parabole $R\,O$. Ecrivons que la résultante de toutes les forces agissant sur le tympan entre $R$ et $O$, le point $O$ y compris, a une composante verticale égale au poids $\bar{\omega}\,a\,\mu$. On a:

$$\varpi a \mu = V_0 - t\delta + p\mu + \frac{p'\mu^2}{2} + V$$

$V$ étant la composante verticale de la résultante des efforts le long des génératrices $P\,O$ et $P'\,O$ soit:

$$V = 2\vartheta\,(\delta + \nu).$$

Par conséquent

$$2\vartheta\delta = 2\vartheta\nu - 2\vartheta\delta\frac{2\lambda+\mu}{\mu} + p\mu + \frac{p'\mu^2}{2} + 2\vartheta(\delta+\nu)$$

et par suite

$$p\mu + \frac{p'\mu^2}{2} = 2\vartheta\delta\frac{2\lambda+\mu}{\mu} - 4\vartheta\nu.$$

On a donc, puisque $p$ est proportionnel à $\nu$ et que $p'$ est indépendant de $\nu$

$$p = -4\vartheta\frac{\nu}{\mu}$$

$$p' = 4\vartheta\delta\frac{2\lambda+\mu}{\mu^3}.$$

On peut donc écrire

$$\mathfrak{M} = \cos\omega\left[\frac{4\vartheta}{3}(2\lambda+\mu)\delta\frac{x^3}{\mu^3} - 2\vartheta\nu x + 2\vartheta\frac{\nu}{\mu}x^2 - \frac{2\vartheta}{3}\delta\frac{2\lambda+\mu}{\mu^3}x^3\right]$$

soit

$$\mathfrak{M} = 2\vartheta\cos\omega\left[(2\lambda+\mu)\frac{\delta}{3}\frac{x^3}{\mu^3} - \nu x\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\right]$$

On vérifie sur cette formule que $\nu$ n'intervient pas dans la section transversale $O\,O'$ comme nous l'avons vu. On vérifie également en faisant $x = \mu$ que la valeur de $\mathfrak{M}$ correspond bien à celle résultant des formules précédemment données pour $F$ et $\eta$.

## Voiles à tympans en croix.

Nous appellerons voiles à tympans en croix des voiles supportés par deux tympans orthogonaux se croisant au droit d'un appui double au centre de symétrie du voile. Nous formerons ces voiles à l'aide de voiles juxtaposés du type précédemment étudié de manière que les tympans de juxtaposition coïncident avec les tympans en croix. Parmi les voiles étudiés nous distinguerons deux catégories, les voiles dont le pourtour extérieur est un rectangle et ceux dont le pourtour extérieur est un octogone gauche projeté suivant un rectangle.

Le voile le plus simple à pourtour rectangulaire peut être défini de la manière suivante: considérons (fig. 109) un rectangle $C\,D\,C'\,D'$ dont les milieux des côtés sont respectivement $A, B', A'\,B$. Soient $2\,a$ et $2\,b$, les côtes du rectangle. Prenons sur la verticale du centre du rectangle deux points O et $O'$ distants de $\delta$ et construisons les arcs de parabole $A\,O$, $B\,O$, $A'\,O'$, $B'\,O'$, de déviation $\delta$ et joignons par des droites le point $O$ aux sommets $C$, $D$, $C'$, $D'$ du rectangle. Disposons les tympans en croix suivant les plans $A\,O\,A'$ et $B\,O\,B'$ et construisons les paraboloïdes définis par chacun des triangles curvilignes $A\,O\,C$, $B\,O\,C$, $B\,O\,D'$, $A'\,O\,D'$, $A'\,O\,C'$, $B'\,O\,C'$, $B'\,O\,D$, $A'\,O\,D$. Nous aurons formé ainsi 4 voiles juxtaposés, $O\,C\,B\,D'$, $O\,D'\,A'\,C'$, $O\,C'\,B'\,D$, $O\,D\,A\,C$ auxquels la théorie précédemment exposée sera applicable. L'application des formules alors trouvées conduit aux résultats suivants. La couverture travaille au cisaillement

suivant les génératrices lorsqu'elle est chargée uniformément en projection horizontale. Si on appelle $\varpi$ la valeur de la densité de la charge comptée suivant le rectangle de pourtour, et $\vartheta$ la valeur du cisaillement on aura

$$\vartheta = \frac{\varpi \cdot a \cdot b}{2\,\delta}.$$

Le point de passage $I$ de la courbe des pressions dans les tympans au centre du voile se trouve à une distance du point $O$ égale $\frac{2\,\delta}{3}$, et la valeur correspondante pour chaque tympan de la composante de la résultante parallèle aux tangentes aux paraboles de juxtaposition à l'origine des paraboles sur le pourtour est, suivant les cas, $2\,\vartheta\,b'$ ou $2\,\vartheta\,a'$ en posant

$$O'A = a' \qquad O'B = b'.$$

Du voile précédent on peut déduire facilement un voile à pourtour octogonal gauche. Il suffit de remplacer le rectangle de base $C\,D\,C'\,D'$ de la fig. 109 par l'octogone gauche $C_1\,A\,D_1\,B'\,C_1'\,A'\,D_1'\,B$ de la fig. 110, la définition du

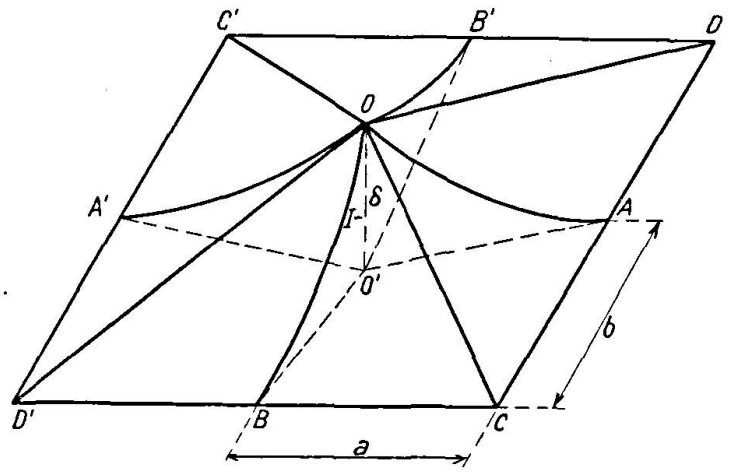



Fig. 109.

voile restant la même. Toutes les propriétés et les résultats précédemment indiqués restent valables sans changement, comme cela résulte de la propriété fondamentale énoncée antérieurement.

Les deux voiles précédents sont composés chacun de quatre voiles à éléments triangulaires juxtaposés. Nous dirons que ce sont des voiles simples en ce sens que chaque bras de la croix des tympans ne porte qu'un seul voile à éléments juxtaposés. Nous allons considérer maintenant des voiles doubles, c'est à dire des voiles pour lesquels chaque bras de la croix des tympans porte deux voiles à éléments juxtaposés.

Considérons (fig. 111) un rectangle $C\,D\,C'\,D'$ de côtés $2\,a$ et $2\,b$ et dont les milieux sont respectivement $A, B', A', B$. Prenons dans les quatre bras de la croix des tympans passant par les milieux des côtés du rectangle quatre points arbitraires symétriquement disposés deux à deux, $E$ et $E'$ d'une part, $F$ et $F'$ d'autre part. Prenons enfin trois points $O, O', O_1$ sur la verticale du centre de symétrie et donnons nous deux longueurs $\delta$ et $\delta_1$ de manière que les arcs de parabole $A\,E$, $B'\,F'$, $A'\,E'$, $B\,F$ aient pour déviation $\delta$ et aient leurs tangentes en $A, B', A', B$ concourant en $O'$ et que les arcs de parabole $O\,E$, $O\,F'$, $O\,E'$, $O\,F$ aient pour déviation $\delta_1 = O\,O_1$. Le contour $C\,A\,D\,E$ définit un voile à élé-

ments juxtaposés suivant $AE$, le contour $CODE$ un voile à éléments juxtaposés suivant $OE$. On peut définir de même par des rotations de $\frac{\pi}{2}$, $\pi$ et $\frac{3\pi}{2}$ six autres voiles à éléments juxtaposés suivant les tympans en croix. L'ensemble

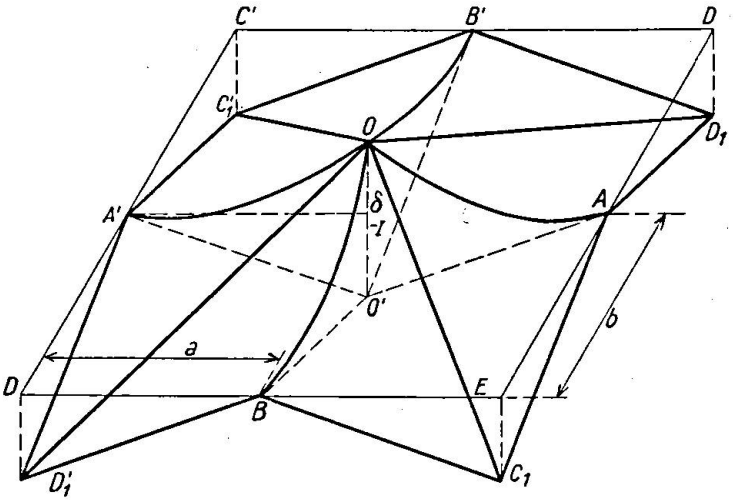



Fig. 110.

formera un voile double à tympans en croix. A chacun des voiles constituants, à éléments juxtaposés, on peut appliquer les résultats précédemment obtenus. Mais il y a lieu de remarquer, que dans un même tympan il y a interférence des réactions dues aux deux voiles à éléments juxtaposés correspondants, d'où il

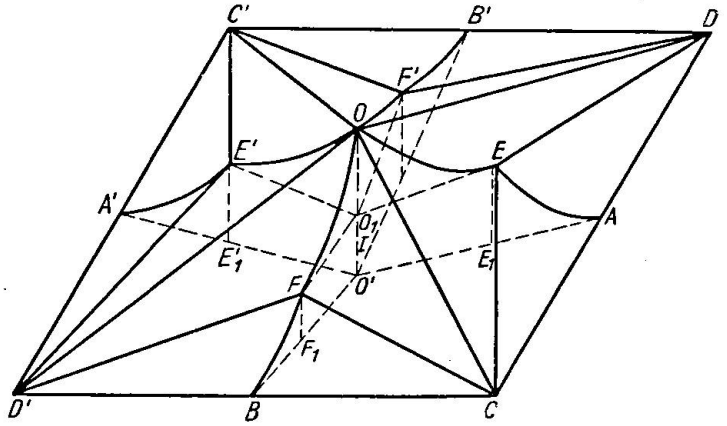



Fig. 111.

résulte en particulier que le point de passage $I$ de la courbe des pressions au droit de la section d'encastrement $OO'$ ne sera pas en général le même que dans le cas d'un voile simple s'appuyant sur le même rectangle $CDC'D'$ et le même point $O$ ce qui peut permettre d'améliorer le tracé de la courbe des pressions. Toutefois dans le cas où les tangentes $EO_1$ et $AO'$ sont parallèles et les points $O$, $E$ et $A$ sont en ligne droite, on a $\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{O_1O'}{O_1O}$ et il n'y a pas de variation du point $I$. Dans ce cas il n'y a pas alors d'avantage au point de vue de l'amélioration de la courbe des pressions, à remplacer les voiles simples par des voiles multiples.

Les mêmes considérations sont applicables aux voiles multiples à pourtour octogonal gauche. Il suffit de partir d'un voile à pourtour rectangulaire et à déplacer les sommets du rectangle comme dans le cas des voiles simples.

## § 5. Voile en forme de coupole.

Considérons (fig. 112), dans le plan horizontal par exemple, un rectangle $CD\bar{C}\bar{D}$ ayant pour côtés $\bar{D}C = 2a$, $DC = 2b$. Soient $A'$, $\bar{B}'$, $\bar{A}'$, $B'$ les milieux des côtés et $O'$ le centre. Portons sur les verticales de ces cinq points les points $A$, $\bar{B}$, $\bar{A}$, $B$ et $O$ tels que $A'A = \bar{B}'\bar{B} = \bar{A}'\bar{A} = B'B = H'$ et que $O'O = h$. Construisons les arcs de parabole $OEC$, $OFD$, $O\bar{E}\bar{C}$, $O\bar{F}\bar{D}$ à axes verticaux dont les sommets $E$, $F$, $\bar{E}$, $\bar{F}$ sont à une distance verticale $H$ du plan de base $CD\bar{C}\bar{D}$. Ces arcs de parabole et les segments $OA$, $O\bar{B}$, $O\bar{A}$, $OB$, $AC$, $AD$, $\bar{B}D$, $\bar{B}C$, $\bar{A}\bar{C}$, $\bar{A}\bar{D}$, $B\bar{D}$, $BC$ déterminent huit éléments triangulaires en paraboloïde hyperbolique dont l'ensemble forme le voile que nous allons étudier.

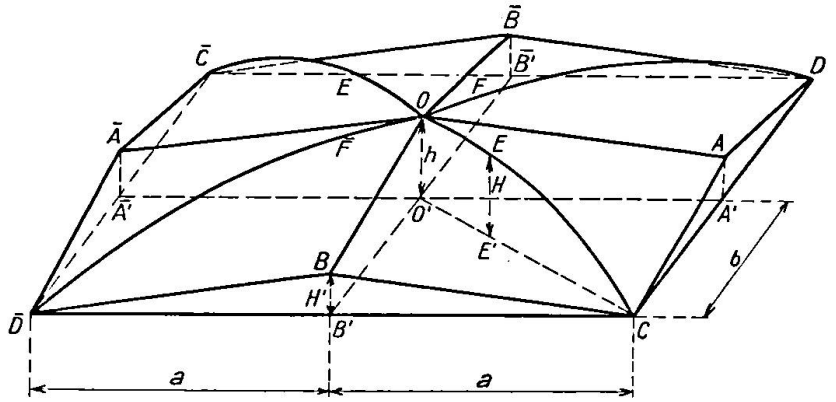



Fig. 112.

Supposons le voile chargé avec une densité $\varpi$ constante en projection horizontale. Si l'on remarque que les huit éléments de paraboloïdes peuvent être groupés deux à deux, chaque groupe comprenant les deux voiles adjacents à un même arc de parabole et pouvant être considéré comme un voile busqué, les réactions des voiles sur leurs bords se réduisent à ces cisaillements suivant les quatre noues $OA$, $O\bar{B}$, $O\bar{A}$, $OB$ et suivant les membrures de bord $AC$, $AD$, $\bar{B}D$, $\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}\bar{C}$, $\bar{A}\bar{D}$, $BC$, $B\bar{D}$ et à des efforts verticaux suivant les quatre arcs de parabole issus de $O$. Nous allons calculer la valeur de ces cisaillements et de ces efforts verticaux, puis nous déterminerons la relation qui doit exister entre $H$, $H'$ et $h$ pour que les réactions des noues et des arcs au point $O$ s'équilibrent.

Appelons $K$ le rapport $\frac{CO'}{CE'}$, où $E'$ désigne la projection du point $E$ sur $O'C$. La déviation de l'arc $OEC$ est égale à $K^2H$. Si nous complétons (fig. 113) le quadrilatère gauche du paraboloïde $OBCE$ ayant pour sommets $O$, $B$ et $C$, nous obtenons l'élément de paraboloïde $OBCA_1$. La parabole $BIA_1$ a même déviation $A_1'A_1$ que la parabole $CEO$ soit $K^2H$; d'autre part $A_1'$ est l'intersection de la verticale de $A'$ avec le plan $OBC$ et par suite $A'A_1' = h - H'$. Donc $A'A_1 = K^2H - H' + h$ et $AA_1 = K^2H - 2H' + h$. Si $I$ est l'inter-

section de la parabole $B I A_1$ et de la parabole $O E C$, le coefficient de busquage $B$ a pour valeur:

$$B = \frac{A A_1}{I' A' \sin C I' A'}.$$

$I'$ étant le milieu de $A' B'$. Par conséquent si nous appelons $l$ la longueur $\sqrt{a^2 + b^2}$ des diagonales du rectangle de base, on a:

$$B = l \cdot \frac{K^2 H - 2H' + h}{ab} = \frac{K^2 H l}{ab}\left(1 - \frac{2H' - h}{K^2 H}\right).$$

Le cisaillement $\vartheta$ suivant les génératrices a d'ailleurs la valeur

$$\vartheta = \frac{\bar{\omega} a b}{2 K^2 H}. \tag{1}$$

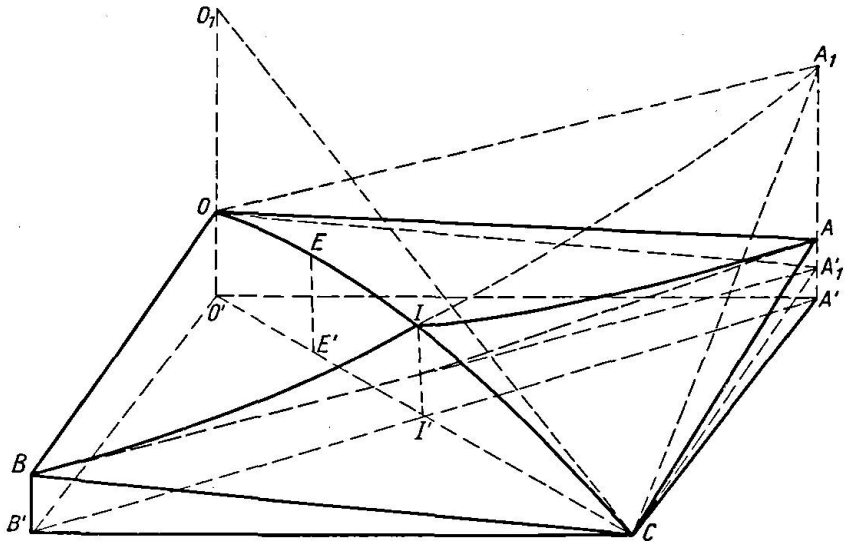



Fig. 113.

D'autre part l'effort vertical unitaire sur l'arc $O E C$ est égal à $\frac{2 a b B \vartheta}{l^2}$

$$\delta = \frac{\bar{\omega} a b}{l}\left(1 - \frac{2H' - h}{K^2 H}\right) = \frac{2 \bar{\omega} a b}{l} \cdot \frac{(KH - H')}{K^2 H}.$$

La poussée qui en résulte dans l'arc $O E C$ est en projection horizontale

$$Q = \frac{\delta l^2}{2 K^2 H}$$

soit

$$Q = \frac{\bar{\omega} a b l}{2 K^2 H}\left(1 - \frac{2H' - h}{K^2 H}\right) = \frac{\bar{\omega} l a b}{K^4 H^2}(KH - H').$$

La composante verticale de cette poussée est en $O$

$$V = \frac{Q(K^2 H - h)}{l} = \frac{\bar{\omega} a b}{2}\left(1 - \frac{2H' - h}{K^2 H}\right)\left(1 - \frac{h}{K^2 H}\right) = \frac{2 \bar{\omega} a b}{K^3 H}(KH - H')(K - 1).$$

Pour que cette composante équilibre la composante verticale des efforts qui se propagent suivant les noues il faut et il suffit que

$$\frac{2 \bar{\omega} a b (KH - H')(K - 1)}{K^3 H} = 2 \vartheta (h - H') = \frac{\omega a b}{K^2 H}(h - H').$$

Or on a

(2) $$h = K(2-K)H.$$

La condition précédente s'écrit donc successivement

$$2(KH-H')(K-1) = K(2KH-K^2H-H')$$

$$\left(K-\frac{H'}{H}\right)\cdot\frac{2(K-1)}{K} = K(2-K)-\frac{H'}{H}$$

d'où l'on tire

(3) $$\frac{H'}{H} = K\frac{2-K^2}{2-K}.$$

Les relations (2) et (3) définissent la condition cherchée, à laquelle doivent satisfaire $H$, $H'$ et $h$. Les valeurs de $\delta$, $Q$, $V$ sont d'ailleurs en fonction de $K$ et $H$

(4) $$\delta = \frac{K-1}{2-K}\cdot\frac{2\varpi ab}{l}$$

(5) $$Q = \frac{K-1}{K^2(2-K)}\cdot\frac{\varpi abl}{H}$$

(6) $$V = \frac{(K-1)^2}{K(2-K)}\cdot 2\varpi ab$$

et celle du coefficient de busquage $B$

(7) $$B = \frac{2K^2(K-1)}{2-K}\cdot\frac{Hl}{ab}.$$

## Chapitre D. Calcul d'une coque octopartite à ceinture carrée.

### § 1. Définition de la coque étudiée.

Donnons-nous (fig. 114) un carré de côté $2a$ dont nous prendrons le plan pour plan horizontal. Ce carré formera la ceinture de la coque étudiée. Considérons deux arcs formant croisées d'ogives se projetant suivant les diagonales du carré. Chaque arc est composé de deux arcs de parabole symétriquement disposées par rapport à la verticale du centre du carré. Les extrémités de chaque arc de parabole coïncident respectivement avec un sommet du carré et le point de la verticale du centre du carré situé à une distance $h$ au-dessus de ce centre. La distance $H$ entre le sommet d'un arc de parabole et le plan du carré est liée à $h$ par la relation

(1) $$h = 2H(\sqrt{2}-1)$$

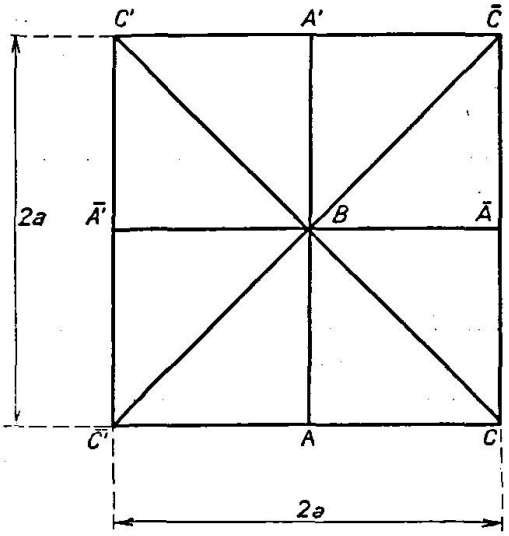


Fig. 114.

Le point de concours des arcs de parabole sera le sommet de la coque étudiée. Les droites joignant ce sommet aux milieux des côtés du carré formeront les noues des coques étudiées. Chaque triangle curviligne dont les côtés se composent d'un arc de parabole d'une noue et d'un demi-côté de la ceinture

définit un élément de paraboloïde hyperbolique. La coque étudiée sera composée de huit éléments ainsi définis.

En vue d'assurer la stabilité d'une pareille coque, nous supposons que la ceinture, les noues, et la croisée d'ogives sont renforcées, de manière à pouvoir résister aux efforts que ces éléments ont à supporter. Ces efforts sont:

1° Sur la ceinture des efforts principaux axiaux et des efforts secondaires de flexion horizontale et verticale.

2° Sur chaque noue des efforts axiaux.

3° Sur chaque arc de parabole des efforts situés dans le plan vertical de la parabole.

## § 2. Charges appliquées.

Nous diviserons les charges appliquées en quatre catégories. La première catégorie comprendra des charges verticales réparties avec une densité constante en projection horizontale. Dans la seconde catégorie nous rangerons tous les systèmes de charges à répartition symétrique par rapport aux plans verticaux des arcs et aux plans verticaux des noues. La troisième catégorie sera constituée par ce que nous appellerons des charges symétriques gauches, c'est-à-dire par des charges telles que l'une quelconque d'entre elles soit égale et de sens contraire à celle appliquée au point symétrique par rapport au plan de l'arc de parabole adjacent à l'élément de paraboloïde sur lequel elle agit. La quatrième catégorie ne comprendra que des charges tangentielles.

Nous verrons que les quatre catégories de charges précédentes permettent de traiter les principaux cas à envisager pratiquement.

Les charges de la première catégorie ne donnent que des efforts axiaux dans les noues, les arcs et la ceinture à l'exclusion d'efforts de flexion.

Les charges de la deuxième catégorie ne donnent que des efforts axiaux dans les noues et la ceinture; sur les arcs, elles provoquent des efforts de flexion composée dans les plans de ces arcs.

Les charges de la troisième catégorie ne donnent que des efforts axiaux dans les noues et donnent des efforts de flexion composée dans la ceinture; les réactions sur les arcs sont nulles. Toutefois, suivant les cas, on peut envisager ou non l'utilisation de la raideur des arcs dans leur plan vertical pour transmettre aux appuis les efforts axiaux propagés par les noues, afin de soulager la ceinture.

Les charges de la quatrième catégorie ne donnent que des efforts axiaux dans les noues et provoquent des efforts de flexion composée dans la ceinture et dans les arcs.

## § 3. Action des charges de première catégorie.

Ces charges sont constituées par des charges verticales réparties uniformément en projection horizontale avec une densité constante égale à $\varpi$.

L'action locale de ces charges se réduit à deux cisaillements suivant les génératrices ayant pour valeur commune

$$\vartheta = \frac{\varpi a^2}{4H}. \tag{2}$$

Il en résulte sur les noues des efforts axiaux répartis avec une densité égale à $\vartheta$ de chaque côté de la noue. Chaque noue transmet donc au sommet de la coque un effort axial ayant en projection horizontale la valeur

$$N = 2\vartheta a = \frac{\varpi a^3}{2H}. \tag{3}$$

L'action de la coque sur la ceinture donne de même des efforts axiaux répartis avec une densité égale à $\vartheta$. Les résultantes de ces efforts s'exerçant d'un même côté d'une noue se font équilibre sur la ceinture au droit de cette noue, la valeur commune de ces résultantes étant

$$C = \vartheta a = \frac{\varpi a^3}{4H}. \tag{4}$$

Les réactions de la coque sur un arc de parabole sont des charges verticales réparties avec une densité constante en projection horizontale, densité dont la valeur $\delta$ est égale au produit du coefficient de busquage $\frac{4H}{a}$ par la valeur commune de la contrainte réduite horizontale normale au plan vertical de l'arc de parabole, s'exerçant de part et d'autre de cet arc et dont la valeur est $\vartheta$, soit

$$\delta = \frac{4H}{a}\vartheta = \varpi a. \tag{5}$$

Les charges $\delta$ produisent sur chaque arc de parabole des efforts axiaux ayant en projection la valeur constante

$$A = \frac{\delta a^2}{2H} = \frac{\varpi a^3}{2H}. \tag{6}$$

On vérifie facilement que le sommet de la coque est en équilibre sous l'action des efforts axiaux des noues et des efforts axiaux des arcs; cela résulte du fait que quatre efforts égaux s'exerçant sur le sommet de la coque tangentiellement aux arcs sont équivalents à quatre efforts égaux s'exerçant suivant les noues si les projections horizontales de chaque série d'efforts sont égales. Les poussées sur les sommets de la ceinture dues aux arcs dont la valeur commune est $A$ s'équilibrent par des efforts axiaux suivant la ceinture ayant pour valeur

$$\Gamma = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{\varpi a^3}{2H\sqrt{2}}. \tag{7}$$

## § 4. Action des charges de deuxième catégorie.

Commençons par étudier les réactions sur son pourtour d'un élément de paraboloïde projeté (fig. 115) suivant $ABC$, ($B$ est la projection du sommet de la coque et $BC$ la projection d'un arc de parabole). L'élément de paraboloïde considéré a son sommet $O$ dans le prolongement de $CA$ au-delà de $A$ à une distance de $A$ égale à $(\sqrt{2}-1)$. Adoptons les notations des §§ 4 et 5 du chapitre A. Prenons pour axes de coordonnées $O\gamma$ et $O\gamma'$. $O\gamma$ étant dirigé suivant $CA$ dans le sens de $C$ vers $A$, $O\gamma'$ étant parallèle à $BA$ et dirigé dans le sens de $B$ vers $A$. Le gauchissement unitaire $k$ est ici négatif et a pour valeur absolue $\frac{2H}{a^2}$, soit:

$$k = -\frac{2H}{a^2}. \tag{8}$$

Les coordonnées réduites $g, g'$, liées aux coordonnées que nous venons de définir par les relations

$$g = k\gamma, \qquad g' = k\gamma' \tag{9}$$

correspondent aux axes de coordonnées $Og$ et $Og'$ respectivement opposées à $O\gamma$ et $O\gamma'$. Avec ce système d'axes le point $B$ a pour coordonnées

$$(10) \qquad \begin{cases} g = g_0' (\sqrt{2}-1) \\ g' = g_0' \end{cases}$$

en posant

$$(11) \qquad g_0' = -ka = \frac{2H}{a}.$$

Considérons deux génératrices de systèmes différents se coupant sur l'arc projeté en $BC$. Soit $UV$ la projection du segment de la première génératrice compris entre la noue et l'arc et $VW$ la projection du segment de la seconde génératrice compris entre l'arc et la ceinture. Nous appellerons $\vartheta$ la valeur commune des cisaillements suivant les génératrices en un point, $\nu_1$ l'intégrale indéfinie des contraintes réduites s'exerçant parallèlement à $Og$, et $\nu_2$ l'intégrale indéfinie des contraintes réduites s'exerçant parallèlement à $Og'$. Nous

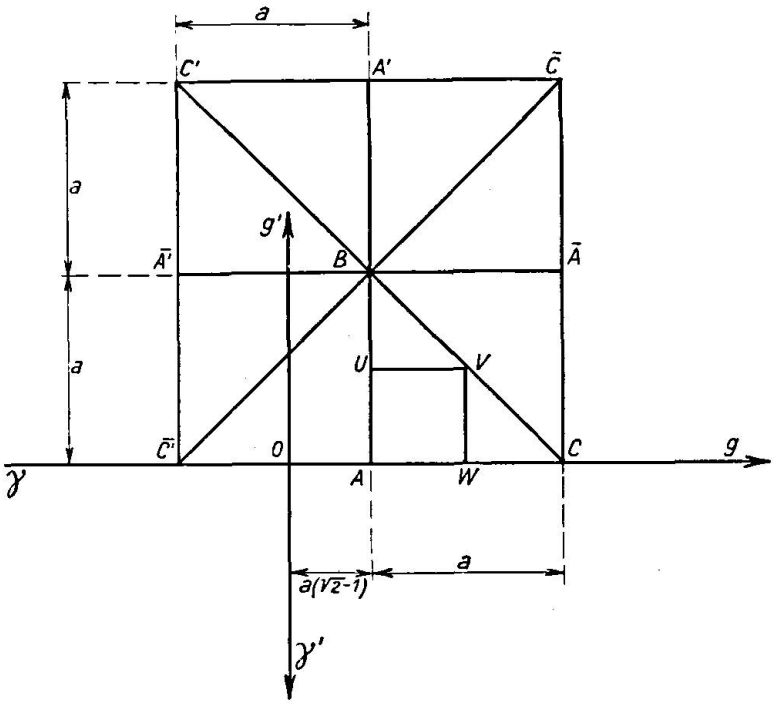



Fig. 115.

désignerons par $\vartheta'$, $\nu_1'$, $\nu_2'$ les valeurs prises par les fonctions $\vartheta$, $\nu_1$, $\nu_2$ au point $U$, par $\vartheta''$, $\nu_1''$, $\nu_2''$, les valeurs prises par ces mêmes fonctions au point $V$, et par $\vartheta'''$, $\nu_1'''$, $\nu_2'''$ les valeurs prises par ces fonctions au point $W$.

Si l'on suppose que le voile considéré n'exerce suivant la noue et suivant la ceinture que des efforts tangentiels, les réactions du voile sur son pourtour seront les suivantes:

1° Sur la noue projetée en $AB$ un effort tangentiel égal à $\vartheta'$ et dirigé de $B$ vers $A$.

2° Sur la ceinture $AC$ un effort tangentiel égal à $\vartheta'''$ et dirigé de $C$ vers $A$.

3° Sur l'arc projeté en $BC$ un effort tangentiel $t''$ dirigé dans le sens de $B$ vers $C$ et une contrainte normale réduite $n''$ dirigé vers l'extérieur de l'élément $ABC$, les valeurs algébriques de $t''$ et $n''$ étant respectivement

$$(12) \qquad \begin{cases} t'' = \dfrac{\nu_1'' - \nu_1'}{2} - \dfrac{\nu_2'' - \nu_2'''}{2} \\ n'' = \vartheta'' + \dfrac{\nu_1'' - \nu_1'}{2} + \dfrac{\nu_2'' - \nu_2'''}{2}. \end{cases}$$

Les conventions de signes adoptées sont les suivantes: $\vartheta$ sera positif quand il tendra à ouvrir l'angle $g\,o\,g'$, $\nu_1$ et $\nu_2$ seront considérés comme positifs quand ils représenteront des charges dirigées dans le même sens que les coordonnées.

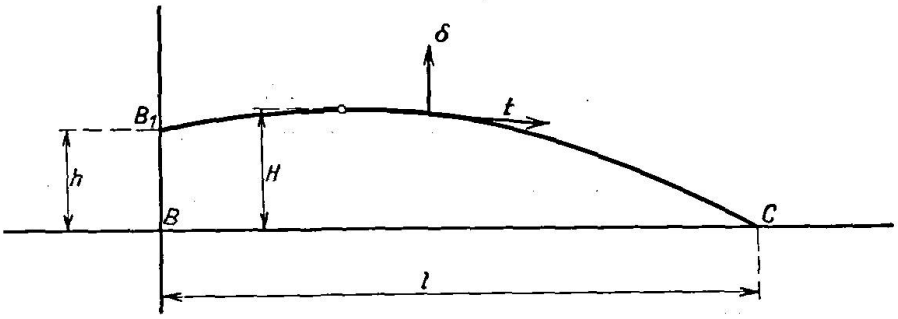
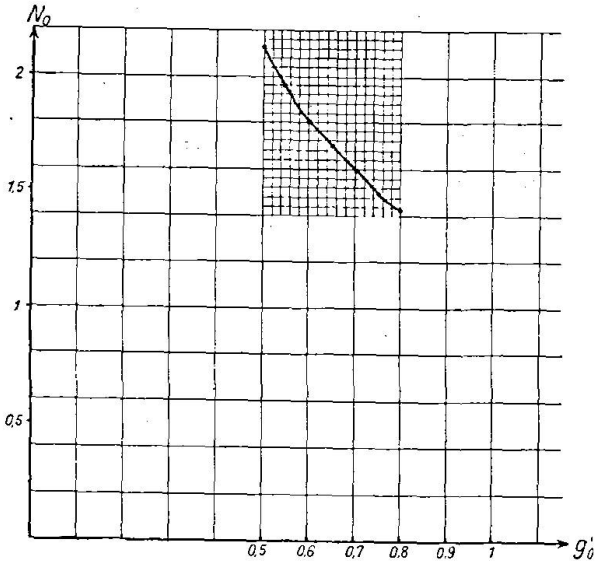



Fig. 116.

Fig. 117.




$N_0$, $S_0$ et $C_0$ sont des fonctions de $g_0'$ données par les fig. 117, 118 et 119.

$N_0$, $S_0$ und $C_0$ sind Funktionen von $g_0'$ und durch die Fig. 117, 118 und 119 gegeben.

$N_0$, $S_0$ and $C_0$ are functions of $g_0'$ given by the fig. 117, 118 and 119.

Valeur approximative
Angenäherter Wert
Approximate value

$$N_0 = 0{,}3\,\frac{0{,}9}{g_0'}$$

Valeurs de $N_0$
Werte von $N_0$
Values of $N_0$

$$N_0 = \frac{\sqrt{1 + 1{,}1716\,g_0'^2}}{2\,g_0'} + \left(\frac{0{,}5}{g_0'^2} + 0{,}0858\right) L\,\frac{g_0' + \sqrt{1 + 1{,}1716\,g_0'^2}}{\sqrt{1 + 0{,}1716\,g_0'^2}}$$

Faisons maintenant intervenir l'hypothèse relative à la symétrie des charges appliquées. Sur chaque noue se propagent des efforts axiaux dont la résultante au sommet de la coque a pour valeur en projection horizontale

$$N = -\frac{2a}{g_0'}\int_0^{g_0'} \vartheta'\,dg', \tag{13}$$

le sens positif adopté étant celui de $A$ vers $B$. L'effort vertical correspondant s'exerçant sur chaque arc d'ogive au sommet de la coque est

$$S = 2g_0'\,(\sqrt{2} - 1)\,N \tag{14}$$

le sens positif adopté étant celui de la verticale ascendante. L'action de la coque sur la ceinture donne des efforts axiaux dont les résultantes s'équilibrent de part et d'autre de la noue. La valeur commune de ces résultantes est, en prenant pour sens positif le sens de $A$ vers $C$

$$C = -\frac{a}{g_0'}\int_{g_0'(\sqrt{2}-1)}^{g_0'\sqrt{2}} \vartheta'''\,dg, \tag{15}$$

Les réactions de la coque sur un arc de parabole se composent (fig. 116) d'une charge verticale de densité $\delta$ en projection horizontale et d'une charge tangentielle de densité $t$ en projection horizontale, $\delta$ et $t$ ayant pour valeurs

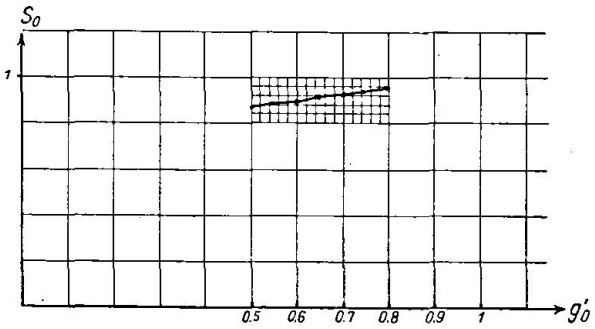
$$(16) \qquad \begin{cases} \delta = 2 g_0' n'' \\ t = 2 t'' \end{cases}$$

en adoptant pour sens positif des $\delta$ le sens de la verticale ascendante et pour sens positif des $t$ le sens de $B$ vers $C$. Les formules (16) se déduisent des formules (12) en remarquant que le coefficient de busquage $\frac{4H}{a}$ a pour valeur $2g'_0$ en vertu de (11).

Fig. 118.

Valeurs de $S_0$ / Werte von $S_0$ / Values of $S_0$ $\Big\}$ $S_0 = 0{,}8284\, g_0' N_0$

Valeur approximative / Angenäherter Wert / Approximate value $\Big\}$ $S_0 = \frac{3 + g_0'}{4}$

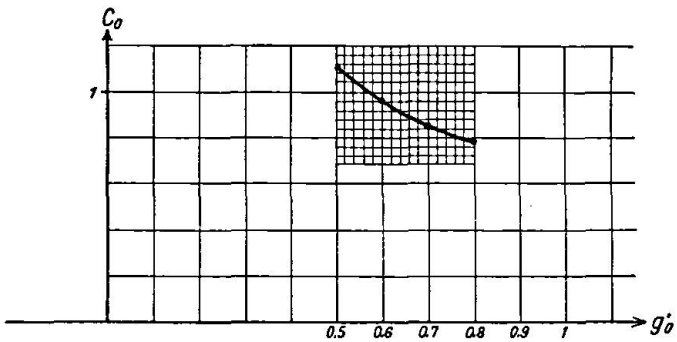



Nous allons faire l'application des formules précédentes aux principaux cas de charges de deuxième catégorie que l'on rencontre dans la pratique. A cet effet nous repérerons un point courant sur un arc de parabole par sa distance horizontale au sommet de la coque, nous appellerons $l$ la valeur de $r$ aux sommets de la ceinture et nous désignerons par $\varrho$ le rapport $\frac{r}{l}$.

Fig. 119.

Valeur approximative
Angenäherter Wert
Approximate value

$$C_0 = 0{,}2428 + \frac{0{,}4223}{g_0'}$$




Valeurs de $C_0$ — Werte von $C_0$ — Values of $C_0$

$$C_0 = \frac{0{,}3536}{g_0'} \sqrt{1 + 2 g_0'^2} - \frac{0{,}1036}{g_0'} \sqrt{1 + 0{,}1716\, g_0'^2} + \frac{1}{4 g_0'^2} L \frac{1{,}4142 g_0' + \sqrt{1 + 2 g_0'^2}}{0{,}4142 g_0' + \sqrt{1 + 0{,}1716\, g_0'^2}}$$

$\delta_0$ et $t_0$ sont des fonctions de $\varrho$ et $g_0'$ données par les fig. 120 et 121.
$\delta_0$ und $t_0$ sind Funktionen von $\varrho$ und $g_0'$ und durch die Fig. 120 und 121 gegeben.
$\delta_0$ and $t_0$ are functions of $\varrho$ and $g_0'$ given by the fig. 120 and 121.

1° *Cas d'une charge verticale descendante P appliquée au sommet de la coque.* La charge considérée donne sur chaque arc d'ogive une réaction verticale descendante concentrée au sommet de l'ogive ayant une valeur $\frac{P}{2}$. Il n'y a aucune réaction sur les noues et la ceinture.

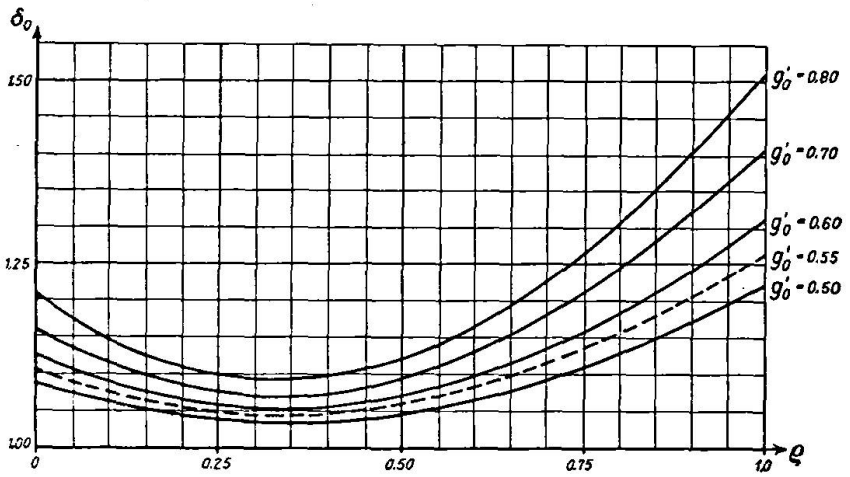
2° *Cas d'une charge verticale descendante de densité constante p en projection horizontale et appliquée uniformément sur les arcs de parabole.* La charge considérée donne sur chaque arc d'ogive une réaction verticale descendante de densité $p$ en projection horizontale.

3° *Cas de charges verticales descendantes appliquées sur les noues avec une densité variant linéairement depuis zéro sur la ceinture jusqu'à la valeur p' au sommet de la coque.* Si l'on décompose chaque charge élémentaire appliquée suivant les deux génératrices se croisant sur la noue, on constate que les efforts qui se propagent suivant les génératrices sont des efforts de

Fig. 120. Valeurs de $\delta_0$ — Werte von $\delta_0$ — Values of $\delta_0$

$$\delta_0 = g_0' \sqrt{\frac{1}{g_0'^2} + 1{,}1716 - 1{,}1716\,\varrho + 2\,\varrho^2} - \frac{(1-\varrho)\,g_0'}{2} L \frac{0{,}4142 + \varrho + \sqrt{\frac{1}{g_0'^2} + 1{,}1716 - 1{,}1716\,\varrho + 2\,\varrho^2}}{0{,}4142 + \sqrt{\frac{1}{g_0'^2} + 1{,}1716 - 2\,\varrho + \varrho^2}} -$$

$$- \frac{(0{,}4142 + \varrho)}{2} g_0' L \frac{1 - \varrho + \sqrt{\frac{1}{g_0'^2} + 1{,}1716 - 1{,}1716 + 2\,\varrho^2}}{\sqrt{\frac{1}{g_0'^2} + 0{,}1716 + 0{,}8284\,\varrho + \varrho^2}}$$




Valeur approximative — Angenäherter Wert — Approximate value

$$\delta_0 = 0{,}980 + 0{,}107\,g_0' + 0{,}216\,g_0'^2 + (0{,}144 - 0{,}711\,g_0' - 0{,}357\,g_0'^2)\,\varrho + (-0{,}234 + 1{,}091\,g_0' + 0{,}515\,g_0'^2)\,\varrho^2.$$

traction ayant pour valeur, par unité de longueur de noue en projection horizontale, la quantité constante $\frac{p'}{2\,g'o}$. Il en résulte que chaque arc de parabole est soumis d'une part à des charges verticales descendantes ayant en projection une densité constante égale à $\frac{p'}{2}$, d'autre part à des charges tangentielles dirigées de $C$ vers $B$ ayant pour valeur par unité de longueur en projection horizontale la quantité constante $\frac{p'}{2\,g'o}$.

4° *Cas d'une charge verticale descendante de densité constante $\varpi$ par unité de surface.* En appliquant les formules données §§4 et 5 du chapitre A, on trouve les valeurs suivantes des quantités

$$
(17) \qquad \begin{cases} N = \bar{\omega}\, a^2 N_0, \\ S = \bar{\omega}\, a^2 S_0, \\ C = \bar{\omega}\, a^2 C_0, \\ \delta = -\bar{\omega}\, a\, \delta_0, \\ t = -\bar{\omega}\, a\, t_0. \end{cases}
$$

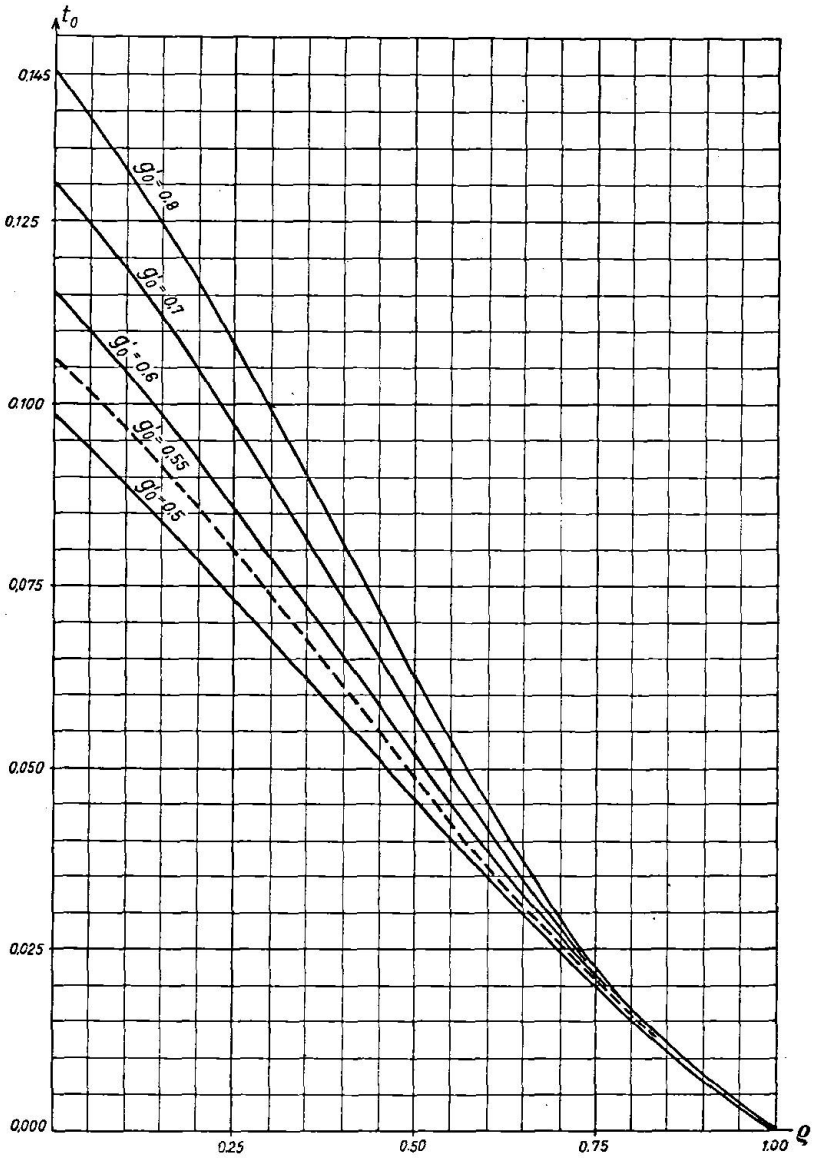



Fig. 121. Valeurs de $t_0$ — Werte von $t_0$ — Values of $t_0$

$$
t_0 = -\frac{(1-\varrho)}{4} L \frac{0{,}4142 + \varrho + \sqrt{\frac{1}{g_0'^2} + 1{,}1716 - 1{,}1716\,\varrho + 2\,\varrho^2}}{0{,}4142 + \sqrt{\frac{1}{g_0'^2} + 1{,}1716 - 2\,\varrho + \varrho^2}} + \frac{(0{,}4142 + \varrho)}{4}
$$

$$
L \frac{1 - \varrho + \sqrt{\frac{1}{g_0'^2} + 1{,}1716 - 1{,}1716\,\varrho + 2\,\varrho^2}}{\sqrt{\frac{1}{g_0'^2} + 0{,}1716 + 0{,}8284\,\varrho + \varrho^2}}
$$

5° *Cas d'une pression uniforme $P_1$ appliquée normalement et au-dessus de la coque.* En appliquant les formules données aux §§ 4 et 5 du chapitre A on trouve les valeurs suivantes des quantités

$$
\begin{aligned}
N &= P_1 a^2 \left(\frac{1}{g_0'} + 0{,}5049\, g_0'\right) \\
S &= P_1 a^2 (0{,}8284 + 0{,}4181\, g_0'^2) \\
C &= P_1 a^2 \left(\frac{0{,}5}{g_0'} + 0{,}4596\, g_0'\right) \\
\delta &= -P_1 a\, [1 + g_0'^2 (0{,}3432 - 4{,}3432\, \varrho + 6\, \varrho^2)] \\
t &= -P_1 a\, [g_0' (0{,}8284 - 0{,}8284\, \varrho)] .
\end{aligned}
$$

## § 5. Action des charges de troisième catégorie.

Les considérations du début du § 4 et en particulier les formules (12) sont applicables au cas actuel de charges symétriques gauches. Si l'on dé-

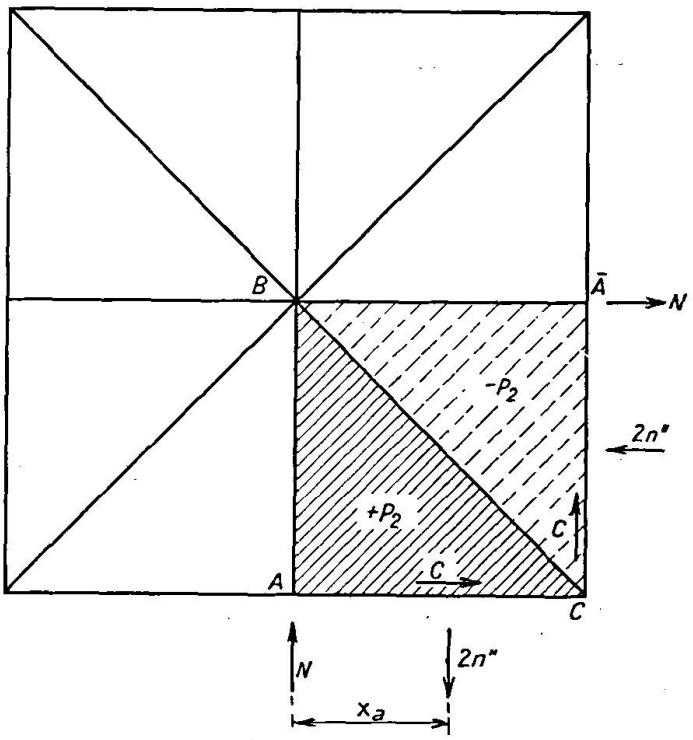



Fig. 122.

compose la contrainte normale réduite $n''$ suivant $BC$ et $VW$ et si on transporte la contrainte ainsi obtenue suivant $VW$ au point $W$, on constate:

1° Que l'effort tangentiel exercé par un voile sur un arc de parabole fait rigoureusement équilibre à l'effort tangentiel exercé par le voile adjacent sur le même arc de parabole, et qu'en conséquence les arcs de parabole ne sont soumis à aucune charge.

2° Que les noues ne sont soumises qu'à des efforts axiaux dont la résultante s'obtient par l'intégration des contraintes $\vartheta'$ le long de la noue

$$N = \frac{a}{g_0'} \int_0^{g'} \vartheta'\, dg'$$

3° Que la ceinture est soumise d'une part à des efforts axiaux résultant des contraintes $\vartheta'''$ dont la résultante le long de $AC$ a pour valeur

$$C = \frac{a}{g_0'} \int_{g_0'(\sqrt{2-1})}^{g_0'\sqrt{2}} \vartheta''' \, dg$$

et d'autre part à des efforts de flexion dus aux charges transmises par les génératrices et s'appuyant sur la ceinture avec une densité égale à $2n''$ par unité de longueur de ceinture, $n''$ étant donné par la formule (12).

Appliquons ces résultats au cas (fig. 122) d'une pression uniforme $P_2$ appliquée normalement à l'élément $ABC$ au dessus de la coque et d'une dépression uniforme égale appliquée normalement à l'élément adjacent $\bar{A}BC$ au dessus de la coque. On a:

$$N = P_2 a^2 \left(\frac{0{,}5}{g_0'} + 0{,}2525\, g_0'\right)$$

$$C = P_2 a^2 \left(\frac{0{,}5}{g_0'} + 0{,}4596\, g_0'\right)$$

$$2n'' = P_2 a \left[\frac{1}{g_0'} + g_0'(0{,}3432 - 4{,}3432\,\chi + 6\,\chi^2)\right]$$

le sens positif choisi pour le charges $2n''$ appliquées sur la ceinture $AC$ étant celui de $B$ vers $A$, et $\chi$ désignant l'abscisse sur $AC$, en prenant $A$ pour origine et $AC$ pour unité.

## Résumé.

L'étude statique des voiles minces en paraboloïde hyperbolique travaillant sans flexion est faite successivement géométriquement et analytiquement. Des formules simples permettent de faire le calcul des contraintes dans tous les cas de charge. Pour le calcul des couvertures les formules sont traduites en abaques.

Les voiles limités à des paraboles principales peuvent être étudiés géométriquement. Ces voiles se classent en voiles normaux, semi-normaux, tronqués, hyponormaux, sexqui-normaux, busqués, voûtes paraboloïdes, suivant la disposition des tympans. Ceux-ci se calculent d'une manière simple en faisant usage d'une remarque générale sur la propriété de la parabole. L'étude du type de voile dépend du genre de construction et l'étude géométrique faite a pour but d'analyser d'une façon intuitive les efforts principaux permettant de faire un choix rationnel du type de voile.

Les voiles limités à des triangles curvilignes peuvent être étudiés d'une façon semblable et se déduisent des voiles limités à des génératrices rectilignes par busquage. Au point de vue de l'emploi que l'on en peut faire il y a lieu de distinguer entre les voiles busqués et ceux simplement juxtaposés. Une distinction importante au point de vue de la construction est celle des voiles incomplets et des voiles complets. On peut ainsi construire des voiles limités à un rectangle avec points d'appuis, soit au milieu des côtés, soit aux sommets. On peut également construire des voiles limités à deux droites et à une parabole et effectuer plusieurs juxtapositions de ces voiles, par exemple les voiles à tympans en croix. On peut également construire des voiles en forme de coupoles.

Un type de couverture donnant lieu à des applications intéressantes est constitué par la coque octopartite à ceinture carrée formée de huit éléments tri-

angulaires identiques ou symétriques. Le calcul complet de cette coque est facilité par la construction d'abaques.

L'étude est faite uniquement au point de vue statique et la question des déformations n'est pas traitée.

## Summary.

The statical investigation of thin shells, stiff against bending, of parabolic-hyperboloidal shape, is carried out by geometrical and analytical methods. The stress calculation for all cases of loading can be effected by simple formulae and by means of diagrams.

Shells with parabolic boundaries can be examined geometrically. Such shells can be divided up into plates. The calculation in such cases follows the general remarks given concerning the properties of a parabola. The investigation of shells depends on the nature of execution. The geometrical treatment consists in elucidating the main effects and rendering a suitable choice of the type of shell possible.

The investigation of shells ending in curved-line triangles can be done in a similar way. These shells are derived by kinking from shells terminating in straight line genetrices.

A separation into incomplete and complete shells is necessary as regards application. Thus it is possible to form shells of rectangular border with points of support in the middle of the sides as well as at the highest points. The same is possible for shells where two straight lines and one parabola form the border and give repeated juxtaposition, as e. q. with cross panel shells. Shells in cupola form can also be constructed.

A special kind of covering which leads to interesting applications is represented by the shell of eight sections with quadratic plan, composed of eight equal-sided or symmetrical triangles. The full calculation can be simplified by use of tables.

The investigation is purely statical and does not consider deformations.

## Zusammenfassung.

Die statische Untersuchung der dünnen biegungslosen Schalen in der Form von hyperbolischen Paraboloiden wird geometrisch und analytisch durchgeführt. Einfache Formeln erlauben die Spannungsberechnung in allen Belastungsfällen, die auch mit Hilfe der Diagramme erfolgen kann.

Die parabolisch begrenzten Schalen können geometrisch untersucht werden. Diese Schalen lassen sich nach der Form der Scheiben einteilen. Sie lassen sich einfach berechnen mit Hilfe einer allgemeinen Bemerkung über die Parabeleigenschaften. Die Untersuchung der Schalenart hängt von der Ausführungsart ab; die geometrische Behandlung soll die Hauptwirkungen auf anschauliche Weise entwickeln und eine zweckmäßige Wahl der Schalenart ermöglichen.

Die durch krummlinige Dreiecke begrenzten Schalen können ähnlich untersucht werden; sie leiten sich durch Knickung von den mit geradlinigen Erzeugenden begrenzten Schalen ab. Im Hinblick auf die Verwendung muß zwischen geknickten und einfach überlagerten Schalen unterschieden werden. Eine wichtige Trennung für die Ausführung ist die in vollständige und unvollständige Schalen. Man kann so rechteckig begrenzte Schalen mit Auflagerpunkten sowohl in den Seitenmitten als auch dem höchsten Punkt herstellen. Dasselbe ist für

Schalen mit zwei Geraden und einer Parabel als Begrenzung und mehrere Überlagerungen möglich, wie z. B. die Kreuzscheibenschalen. Auch Schalen in Kuppelform können hergestellt werden.

Eine Abdeckungsart, die zu interessanten Anwendungen Anlaß gibt, stellt die achtgeteilte Schale auf quadratischem Grundrisse mit acht gleichen oder symmetrischen Dreieckteilen dar. Die vollständige Berechnung ist mit Rechentafeln erleichtert.

Die Untersuchung ist rein statisch; die Verformungen werden nicht behandelt.