Erddruck auf elastisch eingebettete Rohre

Autor(en): **Voellmy, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **4 (1936)**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5101

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ERDDRUCK AUF ELASTISCH EINGEBETTETE ROHRE.

POUSSÉES DES TERRES SUR DES TUYAUX PLACÉS DANS DES TERRAINS ÉLASTIQUES.

EARTH PRESSURE ON PIPES EMBEDDED IN ELASTIC GROUND.

A. VOELLMY, Abteilungschef der Eidg. Materialprüfungsanstalt.

Bezeichnungen.

Zur grundsätzlichen Bezeichnung der Dimensionen werden die Einheiten cm und kg gewählt, obschon die abgeleiteten Formeln auch bei einheitlicher Einführung anderer Maßeinheiten gelten.

γ: Raumgewicht des Schüttungsmaterials in kg/cm³.
ϱ: Reibungswinkel des Schüttungsmaterials.
ε: Spezifische Zusammendrückung bei behinderter Querdehnung.
E_1: Dimensionslose Konstante der Erdelastizität.
c: „Anfangskompression", zur Charakterisierung der anfänglichen Dichte des unbelasteten Schüttungsmaterials.
k: Bettungsziffer in kg/cm³ (spezifischer Druck, welcher die Einheit der Eindrückung hervorruft).
$\varkappa$: Faktor der Druckkonzentration, infolge Zusammendrückbarkeit der Schüttung.
σ_1: Vertikale Spannung der Schüttung in kg/cm².
σ_2: Horizontale „ „ „ „ „ .
σ_0: Aktiver Radialdruck, in kg/cm², der inkompressibeln Schüttung auf die obere Rohrhälfte.
σ_u: Aktiver Radialdruck, in kg/cm², der inkompressibeln Schüttung auf die untere Rohrhälfte.
R: Vertikalkomponente der aktiven Erdlast in kg/cm'.
σ_a: Auflagerdruck in kg/cm².
y_0: Radiale Zusammendrückung des verdrängten Erdkerns in cm.
p_0: Zusatzdruck in kg/cm², infolge Zusammendrückbarkeit der Schüttung.
s: Index für die Bezeichnung: „Starres Rohr".
e: „ „ „ „ : „Elastisches Rohr".
t: Variable Tiefe in cm, von der Schüttungsoberfläche aus gemessen.
t_0: Mittlere Überschüttungshöhe der Rohraxe in cm.
r: Mittlerer Radius des eingebetteten Rohres in cm.
r_a: Außenradius des eingebetteten Rohres in cm.
φ_0: Auflagerwinkel des eingebetteten Rohres.
G: Rohrgewicht in kg/cm'.
δ: Wandstärke des Rohres in cm.
J: Trägheitsmoment $\frac{\delta^3}{12}$ der Rohrwandung, in cm⁴/cm'.
E: Elastizitätsmodul des Rohrmaterials in kg/cm².

$B = \frac{m^2}{m^2 - 1} E J \sim E J$: Biegesteifigkeit der Rohrwandung in kgcm²/cm'. (Der Faktor $\frac{m^2}{m^2 - 1}$ rührt davon her, daß die sekundären Biegedeformationen in Längsrichtung der Wandung des Rohres infolge dessen beträchtlichen Länge verhindert sind. Für Eisen ist $m \sim 3$, für Beton $m \sim 6$.)

y: Radiale Verschiebung der Rohrwandung in cm. (Positiv nach außen.)

p: Durch die radiale Verschiebung y der Rohrwandung hervorgerufener Bettungswiderstand in kg/cm². (Druck positiv.)

P: Äußere Radialkraft in kg/cm'. (Druck positiv.)

Q: Querkraft in kg/cm'.

N: Normalkraft in kg/cm'. (Druck positiv.)

M: Biegemoment in cmkg/cm'. (Positiv, wenn die Krümmung der Rohrwandung vergrößert wird.)

$sh\,\varphi$: sinus hyperbolicus φ.

$ch\,\varphi$: cosinus hyperbolicus φ.

$'$: Index für die erste Ableitung nach φ: $\frac{d}{d\varphi}$.

$''$: „ „ „ 2te „ „ „: $\frac{d^2}{d\varphi^2}$.

$'''$: „ „ „ 3te „ „ „: $\frac{d^3}{d\varphi^3}$.

$^{(4)}$: „ „ „ 4te „ „ „: $\frac{d^4}{d\varphi^4}$.

Weitere Bezeichnungen folgen aus den Figuren. Die Vorzeichenregel ist aus Fig. 2 ersichtlich.

I. Bettungswiderstand.

Die Berechnung unterirdischer Bauwerke begegnet besonderen Schwierigkeiten, da hierfür nicht nur die aktiven äußeren Kräfte maßgebend sind, sondern auch die infolge der Deformationen des Bauwerks hervorgerufenen Erdwiderstände. Die das Bauwerk umgebende Erde erhöht dessen statische Unbestimmtheit. Während die Elastizität des Materials der eingebetteten Konstruktion als bekannt gelten darf, ist der Einfluß des elastischen Verhaltens der Erde schwer zu erfassen und kann nur mit vereinfachenden Annahmen berücksichtigt werden. In diesem Sinne wird der Begriff der „Bettungsziffer" angewendet, welcher bekanntlich keine Materialkonstante kennzeichnet, sondern verwickelte Zusammenhänge physikalischer Eigenschaften und äußerer Einflüsse vereinfachend zusammenfaßt. Wird der durch die radiale Verschiebung y der Rohrwandung hervorgerufene Druck pro Flächeneinheit mit p bezeichnet, so beträgt die Bettungsziffer

$$k = \frac{p}{y}. \tag{1}$$

Die Erde verhält sich nicht elastisch im Sinne einer Rückbildung der Deformationen nach der Entlastung, sondern günstigstenfalls nur insofern, als die durch eine anfängliche Deformation hervorgerufenen Pressungen bei Bestand dieser Deformation ebenfalls dauernd erhalten bleiben. Diese den nachfolgenden Betrachtungen zu Grunde liegende Annahme ist nicht immer zutreffend: durch

Erschütterungen und wechselnde Feuchtigkeit können die inneren Reibungsspannungen der Erde ausgelöst und dadurch die passiven Drücke verändert werden, ferner erfordert das Verhalten der Feuchtigkeit in Lehmböden besondere Untersuchung. Auch die Art und Weise des Einbaues von Rohrleitungen ist für das elastische Verhalten der Bettung von Einfluß, beispielsweise kann an Rohren, welche in sehr enge Gräben verlegt werden, gewöhnlich kein großer, passiver Seitendruck auftreten[1]), da genügendes Einstampfen der Schüttung in einem sehr engen Zwischenraum zwischen Rohr und Grabenwandung normalerweise nicht gewährleistet werden kann, und dementsprechend an diesen Stellen der Bettungswiderstand gering ist. Der Einfluß einer längs des Rohrumfanges veränderlichen Elastizität der Bettung (mit der Tiefe stetig zunehmende oder sprungweise veränderliche Bettungsziffer, z. B. bei teilweiser Einbettung oder Betonsohle) kann berechnet werden; ebenso ist die Auswirkung einer bei zunehmenden und abnehmenden Pressungen verschiedenen Bettungsziffer, oder ein teilweises Abheben der Rohrwandung, mit einigem mathematischen Aufwand erfaßbar[2]). Um jedoch hier das Prinzip der Berechnung in einfacher Weise darzulegen, beschränke ich mich auf die Annahme der Einbettung in einer weiten, horizontal begrenzten Schüttung mit unveränderlicher Bettungsziffer. Obschon die Bettungsziffer selbst in einem vollkommen elastischen Material nicht konstant sein kann, da für die Deformationen eines Elementes, außer dessen Belastung, auch noch die Belastung seiner Umgebung, d. h. die Druckverteilung maßgebend ist, haben zahlreiche Versuche gezeigt, daß die Annahme der Proportionalität zwischen spezifischer Pressung und Eindrückung auf die einfachste Art zu einem gut zutreffenden Bild der Wirkungsweise elastischer Bettungen führt.

Die Verdichtung der Schüttung ist von großem Einfluß auf die Größe der Bettungsziffer. In Fig. 1 ist das Ergebnis eines Druckversuches des Schüttungsmaterials bei behinderter Querdehnung dargestellt. Der Einfluß der Seitenreibung wurde anhand der Ergebnisse der Druckversuche d e s s e l b e n Schüttungsmaterials, ausgeführt in dickwandigen Versuchsbehältern von v e r s c h i e d e n e m Durchmesser, eliminiert. Die Neigung der Kurve, welche die bezogene Zusammendrückung ε in Abhängigkeit von der spezifischen Pressung σ_1 darstellt, ist umso größer, je größer dieser Druck σ_1 ist, und umso größer die durch die „Anfangskompression" c charakterisierte anfängliche Dichte des Materials ist. Wird als einfachster Ansatz der lineare Zusammenhang angenommen, so folgt

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon} = E_1(\sigma_1 + c) \tag{2}$$

oder nach Integration, mit Berücksichtigung der Bedingung: $\varepsilon = 0$ für $\sigma_1 = 0$,

$$\varepsilon = \frac{1}{E_1} \ln \frac{\sigma_1 + c}{c} \tag{3}$$

Für $\sigma_1 + c = 1$ wird E_1 gleich dem bei dieser Spannung gültigen „Elastizitätsmodul" der totalen Zusammendrückungen. Für einen einmaligen, statischen Belastungsfall ist Gleichung (3) für die bezogene, totale Zusammendrückung ε maßgebend, das durch diese Gleichung ausgedrückte Gesetz wird, wie Fig. 1 zeigt, durch die Versuche gut bestätigt. Für die Deformationen, welche sich

[1]) Vergl. W. J. Schlick: Loads on Pipe in wide Ditches. Iowa State College of Agriculture and Mechanic Art. Official Publication N⁰ 45, 1932.

[2]) A. Voellmy: Eingebettete Rohre. Diss. E. T. H. Zürich 1936.

elastisch zurückbilden, ist ein ähnliches Gesetz gültig[3]), das aber hier von geringerem Interesse ist.

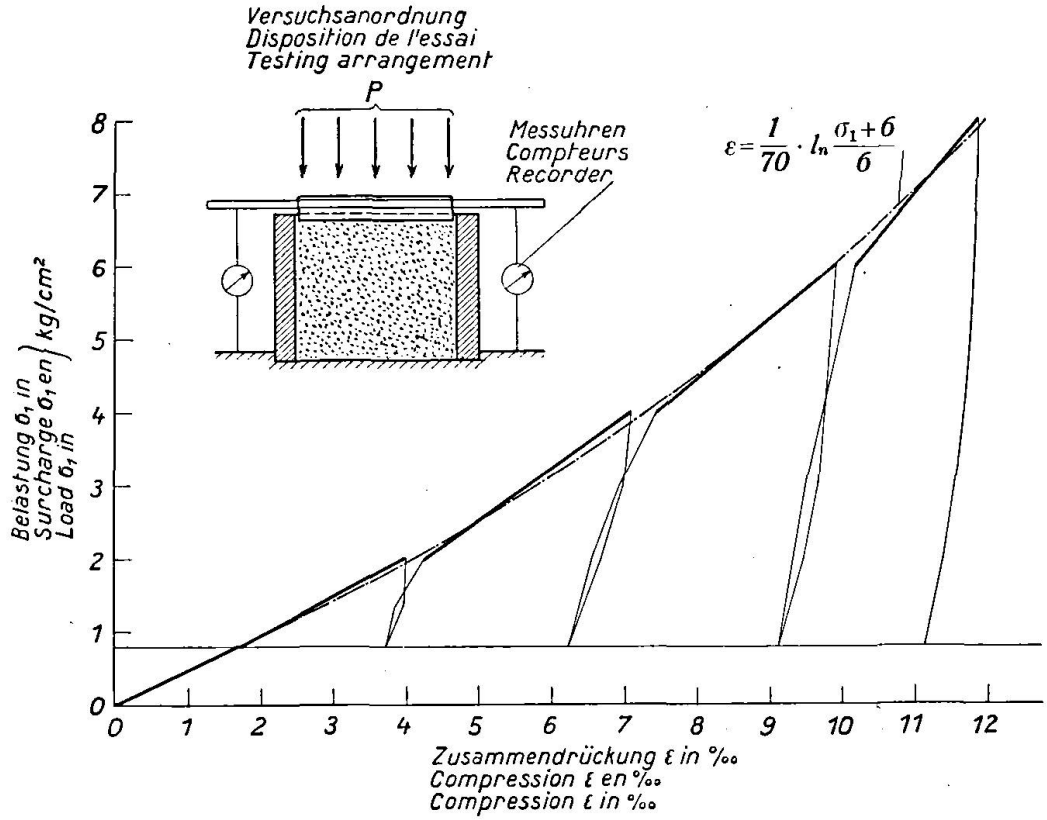


Fig. 1.
Druckversuche bei behinderter Querdehnung.
Essais à la compression, extension transversale empêchée.
Compression tests, under prevention of transverse expansion.

Mit Hilfe des Druckdiagrammes [Gleichung (3)] kann die für ein eingebettetes Rohr maßgebende, minimale Belastungsziffer angenähert bestimmt werden:

Die Axe eines Rohres mit dem Außenradius r_a liege in der Tiefe t_0 unter der horizontalen Oberfläche der Schüttung vom Raumgewicht γ. Denkt man sich das Rohr durch einen Erdzylinder ersetzt, welcher die gleiche Beschaffenheit aufweist wie die umgebende Schüttung, und nimmt man, zur Vereinfachung, die Werte $\sigma_1 \sim \gamma\, t_0$ und $\frac{d\,\sigma_1}{d\,\varepsilon} \sim E_1\,(\gamma\, t_0 + c)$ im Bereich des Rohres als konstant an, so ergibt sich für die maximalen Radialverkürzungen des Erdzylinders

$$y_{0\,max} = -\frac{\gamma \cdot t_0 \cdot r_a}{E_1\,(\gamma \cdot t_0 + c)} \tag{4}$$

Befindet sich an Stelle des Erdzylinders ein starres Rohr, so sind die negativen Deformationen y_0 des verdrängten Erdkerns als positive Deformationen der Rohrwandung in Bezug auf die unberührte Erde aufzufassen. Sie verursachen eine zusätzliche Erhöhung des auf den Erdzylinder wirkenden Radialdrucks um

$$p_0 = k \cdot y_0 \tag{5}$$

[3]) K. v. Terzaghi: Erdbaumechanik. Wien 1925.

Andrerseits ergibt sich, bei Vernachlässigung der Querdehnung $\left(\frac{1}{m} = 0\right)$, nach der Elastizitätstheorie[4]), daß die maximale Druckerhöhung an einem kreiszylindrischen, starren Einschluß, welcher in einem elastischen, auf einaxigen Druck σ_1 beanspruchten Material eingebettet ist, den Wert erreicht:

$$p_{0\,max} = \tfrac{2}{3}\,\sigma_1 \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (4), (5) und (6) ergibt sich für die minimale Bettungsziffer am eingebetteten Rohr

$$k = \frac{2E_1}{3r_a}(\gamma \cdot t_0 + c) \tag{7}$$

Wenn der Ableitung dieses Ausdrucks nicht die Maximalwerte von y_0 und p_0 zu Grunde gelegt würden, so würden sich größere Werte für die Bettungsziffer ergeben, deren Verwendung die Berechnung einer geringeren Rohrbeanspruchung zur Folge hätte.

Durch Formel (7) kommt, neben dem Einfluß der Materialdichte, auch der Einfluß der Größe der belasteten Fläche zum Ausdruck: Während unter einer Fundamentsohle, im Bereich der normalen Abmessungen, die Bettungsziffer bekanntlich umgekehrt proportional zur Fundamentbreite wird[5]), ergibt sich bei eingebetteten Rohren eine Bettungsziffer, welche dem Rohrradius umgekehrt proportional ist.

Die obige Rechnung ist als Schätzung zu bewerten, welche, mit Hilfe der bei Deformationsmessungen an eingebetteten Rohren gewonnenen Erfahrungen, verbessert werden kann. Zum Vorteil der nachfolgend dargestellten Berechnungsmethode sei darauf hingewiesen, daß eine Veränderung der Bettungsziffer eine verhältnismäßig geringere Beeinflussung der Rechnungsergebnisse zur Folge hat.

Beispiel.

Zur Erläuterung der in diesem und in den nächsten Abschnitten entwickelten Berechnungsmethode wird dieselbe auf Grund folgender Zahlenwerte auf einen praktischen Fall angewendet:

1. Schüttungsmaterial:
   Druckdiagramm nach Fig. 1: $E_1 = 70$, $c = 6$ kg/cm².
   Raumgewicht $\gamma = 1{,}85$ t/m³ $= 0{,}00185$ kg/cm³.
   Reibungswinkel $\varrho = 35^0$.
2. Eisenrohr:
   Überschüttungshöhe bis zur Rohraxe: $t_0 = 600$ cm.
   Mittlerer Radius $r = 33$ cm.
   Außenradius $r_a = 33{,}5$ cm.
   Elastizitätsmodul $E = 2\,000\,000$ kg/cm².
   Auflagerwinkel $\varphi_0 = 45^0$.

Nach Gleichung (7) ergibt sich mit Verwendung der obigen Zahlenwerte für die Bettungsziffer:

$$k = \frac{2 \cdot 70}{3 \cdot 33{,}5}(0{,}00185 \cdot 600 + 6) = 10 \text{ kg/cm}^3.$$

---

[4]) H. Craemer: Störungen von ebenen Spannungs- und Biegungszuständen durch eingeschlossene Fremdkörper. Ingenieur-Archiv 1933.

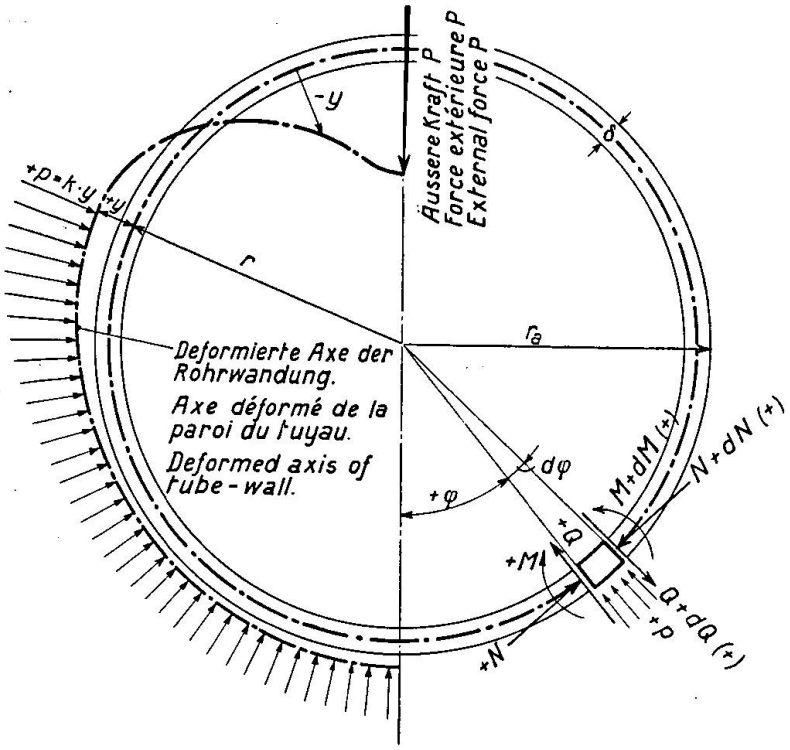
[5]) Loc. cit. 2.

II. Einflußlinien für die Wirkung radialer Kräfte.

A. Allgemeine Lösung für den elastisch eingebetteten Kreisring.

Die Wirkung der elastischen Bettung kann für beliebige Belastungsfälle untersucht werden, sofern die Einflußlinien für die radialen Deformationen und für die inneren Kräfte bekannt sind.

Die Untersuchung beschränkt sich auf Belastungen durch radiale Kräfte, die längs dem Rohr unverändert bleiben, d. h. auf das ebene Problem. Der Betrachtung wird ein Kreisring zu Grunde gelegt, welcher durch zwei Rohrquerschnitte herausgetrennt wird, deren Abstand gleich der Längeneinheit ist. Gleichung (1) gelte sinngemäß für positive, sowie für negative radiale Verschiebungen der Rohrwand. Diese Annahme ist berechtigt, wenn die durch den einen Belastungsfall hervorgerufenen Zugspannungen durch die Druckspannungen eines anderen Belastungsfalles aufgehoben werden, was bei den meisten praktischen Anwendungen der Fall ist.



Der elastisch eingebettete Kreisring.

Anneau circulaire appuyé élastiquement.

The elastically embedded circular ring.

Fig. 2.

Aus der Betrachtung des Gleichgewichtszustandes des in Fig. 2 dargestellten Ringelementes von den Dimensionen $1/\delta/r\,d\varphi$ ergeben sich, bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen höherer Ordnung, die folgenden Beziehungen:

Gleichgewichtsbedingung in radialer Richtung:

$$p \cdot r \cdot d\varphi - N \cdot d\varphi = dQ \tag{8}$$

Momentengleichung:

$$dM = Q \cdot r \cdot d\varphi \tag{9}$$

Gleichgewichtsbedingung in tangentialer Richtung:

$$dN = Q \cdot d\varphi \tag{10}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt, nach Integration, die für beliebige radiale Belastungen kreisförmig gekrümmter Stäbe allgemein gültige Beziehung

$$N = \frac{M}{r} + c_1 \tag{11}$$

welche bei praktischen Berechnungen gute Dienste leistet.

In den folgenden Formeln bedeuten die Indizes $'$, $''$, $'''$, $^{(4)}$ etc. die erste, zweite, dritte, vierte etc. Ableitung nach φ.

Aus den Gleichungen (8) und (9) folgt

$$p = \frac{N}{r} + \frac{M''}{r^2}.$$

Mit Verwendung von Gleichung (11) gibt dieser Ausdruck

$$p = \frac{c_1}{r} + \frac{M}{r^2} + \frac{M''}{r^2}. \tag{12}$$

Aus der bekannten Differentialgleichung[6]) der Biegelinie eines dünnen, kreisförmig gekrümmten Stabes ergibt sich

$$M = -\frac{B}{r^2}(y + y''). \tag{13}$$

Nach Gleichung (9) folgt aus obigem Ausdruck

$$Q = \frac{M'}{r} = -\frac{B}{r^3}(y' + y'''), \tag{14}$$

und nach Gleichung (8)

$$N = p \cdot r - Q' = r\left[p + \frac{B}{r^4}(y'' + y^{(4)})\right]. \tag{15}$$

Werden die Ableitungen nach φ der Gleichung (13) in die Gleichung (12) eingesetzt, und wird zugleich berücksichtigt, daß nach Gleichung (1) der Bettungswiderstand $p = k \cdot y$ ist, so ergibt sich schließlich als

Differentialgleichung der elastischen Linie der Rohrwandung:

$$y^{(4)} + 2y'' + \left(1 + \frac{r^4 \cdot k}{B}\right) y = \frac{c_1 \cdot r^2}{B}. \tag{16}$$

Setzt man in dieser linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zur Abkürzung

$$a^2 = 1 + \frac{r^4 \cdot k}{B},$$

so lautet, mit dem Ansatz $y = e^{n\varphi}$, ihre charakteristische Gleichung:

$$n^4 + 2n^2 + a^2 = 0$$

und ergibt die folgenden Wurzeln:

$$n_{1,2,3,4} = \pm\left(\sqrt{\frac{a-1}{2}} \pm i\sqrt{\frac{a+1}{2}}\right).$$

Mit den Bezeichnungen

$$u = \sqrt{\frac{a-1}{2}}, \qquad v = \sqrt{\frac{a+1}{2}}$$

[6]) J. Boussinesq, Comptes Rendus, Paris 1883.

läßt sich, nach Berücksichtigung der Beziehungen zwischen den Exponentialfunktionen und den Kreis- und Hyperbelfunktionen, somit die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (16) in der Form schreiben[7]):

$$y = \frac{c_1 \cdot r^3}{a^2 B} + [c_2 \cdot sh\, u\varphi + c_3 \cdot ch\, u\varphi] \sin v\varphi + [c_4 \cdot sh\, u\varphi + c_5 \cdot ch\, u\varphi] \cos v\varphi. \tag{17}$$

Für die Berechnung der inneren Kräfte, nach den Gleichungen (13) bis (15), werden die Differentialquotienten der allgemeinen Lösung (17) verwendet:

$$\begin{aligned} y' = {} & v(c_2 \cdot sh\, u\varphi + c_3 \cdot ch\, u\varphi) \cos v\varphi + u(c_2 \cdot ch\, u\varphi + c_3 \cdot sh\, u\varphi) \sin v\varphi \\ & - v(c_4 \cdot sh\, u\varphi + c_5 \cdot ch\, u\varphi) \sin v\varphi + u(c_4 \cdot ch\, u\varphi + c_5 \cdot sh\, u\varphi) \cos v\varphi \end{aligned} \tag{18}$$

$$y'' = \frac{c_1 \cdot r^3}{a^2 \cdot B} - y + 2uv[(c_2 \cdot ch\, u\varphi + c_3 \cdot sh\, u\varphi) \cos v\varphi - (c_4 \cdot ch\, u\varphi + c_5 \cdot sh\, u\varphi) \sin v\varphi] \tag{19}$$

$$\begin{aligned} y''' = {} & -y' - 2u \cdot v^2 [(c_2 \cdot ch\, u\varphi + c_3 \cdot sh\, u\varphi) \sin v\varphi + (c_4 \cdot ch\, u\varphi + c_5 \cdot sh\, u\varphi) \cos v\varphi] \\ & + 2u^2 \cdot v[(c_2 \cdot sh\, u\varphi + c_3 \cdot ch\, u\varphi) \cos v\varphi - (c_4 \cdot sh\, u\varphi + c_5 \cdot ch\, u\varphi) \sin v\varphi] \end{aligned} \tag{20}$$

$$y^{(4)} = \frac{c_1 \cdot r^3}{B} - a^2 \cdot y - 2y''. \tag{21}$$

B. Die Konstanten der Lösung für die radiale Belastung längs einer Erzeugenden.

Zur Ermittlung der fünf Konstanten c_1 bis c_5 der allgemeinen Lösung (17) gelten mit Bezug auf Fig. 2, im Falle einer in der Richtung $\varphi = \pi$ wirkenden Radialkraft P kg/cm', die folgenden fünf Bedingungen:

1. $y' = 0$ für $\varphi = 0$ (Biegelinie stetig und symmetrisch)
2. $y' = 0$ für $\varphi = \pi$ („ „ „ „)
3. $Q = -\frac{B}{r^3}(y' + y''') = 0$ für $\varphi = 0$ (Symmetrie der inneren Kräfte)
4. $Q = -\frac{B}{r^3}(y' + y''') = -\frac{P}{2}$ für $\varphi = \pi$ („ „ „ „)
5. $\frac{1}{B}\int_0^\pi M\, d\varphi = -\frac{1}{r^2}\int_0^\pi (y + y'')\, d\varphi = 0$ (Keine gegenseitige Verdrehung von Scheitel und Sohle).

Zur Auswertung der obigen Bedingungen werden die Funktionen y [Gl. (17)] und deren Ableitungen [Gl. (18) bis (20)] sinngemäß eingesetzt, wodurch sich die folgenden Gleichungen ergeben:

Bedingung 1: $v \cdot c_3 + u \cdot c_4 = 0$

Bedingung 3: $2u^2 \cdot v \cdot c_3 - 2u \cdot v^2 \cdot c_4 = 0$

Hieraus folgt: $c_3 = c_4 = 0$ (22)

Bedingung 2:

$$c_2(u \cdot ch\, u\pi \cdot \sin v\pi + v \cdot sh\, u\pi \cdot \cos v\pi) + c_5(u \cdot sh\, u\pi \cdot \cos v\pi - v \cdot ch\, u\pi \cdot \sin v\pi) = 0$$

Bedingung 4:

$$c_2(u \cdot sh\, u\pi \cdot \cos v\pi - v \cdot ch\, u\pi \sin v\pi) - c_5(u \cdot ch\, u\pi \cdot \sin v\pi + v \cdot sh\, u\pi \cdot \cos v\pi) = \frac{P \cdot r^3}{4B \cdot u \cdot v}$$

[7]) Eine ähnliche, allgemeine Lösung wurde auf andere Weise gefunden von A. Francke: Einiges über Grundbögen. Schweiz. Bauzeitung 1900, und K. Hayashi: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. Berlin 1921.

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen ergibt nach einigen Umformungen:

$$c_2 = \frac{P \cdot r^3}{4 \cdot B \cdot u \cdot v} \cdot \frac{u \cdot sh\, u\pi \cdot \cos v\pi - v \cdot ch\, u\pi \cdot \sin v\pi}{a\,(sh^2\, u\pi + \sin^2 v\pi)} \tag{23}$$

$$c_5 = -\frac{P \cdot r^3}{4 \cdot B \cdot u \cdot v} \cdot \frac{u \cdot ch\, u\pi \cdot \sin v\pi + v \cdot sh\, u\pi \cdot \cos v\pi}{a\,(sh^2\, u\pi + \sin^2 v\pi)} \tag{24}$$

Bedingung 5:

Mit Verwendung der oben gewonnenen Konstanten ergibt sich für das Moment:

$$M = -\frac{B}{r^2}(y + y'') = -\frac{B}{r^2}\left[\frac{c_1 \cdot r^3}{a^2 \cdot B} + 2\,u \cdot v\,(c_2 \cdot ch\, u\varphi \cdot \cos v\varphi - c_5 \cdot sh\, u\varphi \cdot \sin v\varphi)\right].$$

Die Bedingung 5 läßt sich somit in folgender Form schreiben:

$$\int_0^\pi \left[(c_2 \cdot ch\, u\varphi \cdot \cos v\varphi - c_5 \cdot sh\, u\varphi \cdot \sin v\varphi) + \frac{c_1 \cdot r^3}{2\,u \cdot v \cdot a^2 \cdot B}\right] d\varphi = 0$$

oder nach Integration und Einsetzen der Grenzen:

$$\frac{c_2}{a}(u \cdot sh\, u\pi \cdot \cos v\pi + v \cdot ch\, u\pi \cdot \sin v\pi) -$$

$$-\frac{c_5}{a}(u \cdot ch\, u\pi \cdot \sin v\pi - v \cdot sh\, u\pi \cdot \cos v\pi) + \frac{c_1 \cdot r^3 \cdot \pi}{2 \cdot u \cdot v \cdot a^2 \cdot B} = 0.$$

Nach Einsetzen der Konstanten aus den Gleichungen (23) und (24) ergibt sich aus obigem Ausdruck, mit Anwendung von algebraischen und goniometrischen Umformungen, schließlich der Wert

$$c_1 = \frac{P}{2\pi}. \tag{25}$$

Für den Fall einer Radialbelastung P pro Längeneinheit der Erzeugenden ergibt sich, nach Einsetzen der oben ermittelten Konstanten in Gleichung (17), die Biegelinie der Rohrwandung, während die Gleichungen (13) bis (15), bei Berücksichtigung der Differentialquotienten (18) bis (21), zu geschlossenen Formeln für die inneren Kräfte führen.

C. Einflußlinien für radiale Verschiebungen der Rohrwandung, für den Bettungsdruck und die inneren Kräfte.

Wirkt in der Richtung $\varphi = \pi$ die Radialkraft 1 pro Längeneinheit der Erzeugenden, so ergibt sich, durch Einsetzen der Ausdrücke (22) bis (25) in Gleichung (17), die Gleichung der Biegelinie der Rohrwandung:

$$y_1 = \frac{r^3}{4 \cdot B \cdot u \cdot v}\left(\frac{2\,u \cdot v}{a^2 \cdot \pi} + U \cdot sh\, u\varphi \cdot \sin v\varphi - V \cdot ch\, u\varphi \cdot \cos v\varphi\right) = r^3 \cdot \eta_0 \tag{26}$$

wo $a = \sqrt{1 + \frac{r^4 \cdot k}{B}}$, $B = \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot E \cdot J$, $u = \sqrt{\frac{a-1}{2}}$, $v = \sqrt{\frac{a+1}{2}}$.

$$U = \frac{u \cdot sh\, u\pi \cdot \cos v\pi - v \cdot ch\, u\pi \cdot \sin v\pi}{a\,(sh^2\, u\pi + \sin^2 v\pi)}, \qquad V = \frac{u \cdot ch\, u\pi \cdot \sin v\pi + v \cdot sh\, u\pi \cdot \cos v\pi}{a\,(sh^2\, u\pi + \sin^2 v\pi)}$$

Bettungswiderstand [Gl. (1)]

$$p_1 = k \cdot y = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2r}\left(\frac{2\,u \cdot v}{a^2 \cdot \pi} + U \cdot sh\, u\varphi \cdot \sin v\varphi - V \cdot ch\, u\varphi \cdot \cos v\varphi\right) = k \cdot r^3 \cdot \eta_0 \tag{27}$$

Moment [Gl. (13)]

$$M_1 = -\frac{r}{2}\left(\frac{1}{a^2\pi} + U \cdot ch\, u\varphi \cdot \cos v\varphi + V \cdot sh\, u\varphi \cdot \sin v\varphi\right) = r \cdot \eta_1 \tag{28}$$

Querkraft [Gl. (14)]

$$Q_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{sh\, u\pi \cdot \cos v\pi}{sh^2 u\pi + \sin^2 v\pi} \cdot sh\, u\varphi \cdot \cos v\varphi + \frac{ch\, u\pi \cdot \sin v\varphi}{sh^2 u\pi + \sin^2 v\pi} \cdot ch\, u\varphi \cdot \sin v\varphi\right) = \eta_2 \tag{29}$$

Normalkraft [Gl. (11)]

$$N_1 = \frac{1}{2\pi} + \frac{M}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2-1}{a^2\pi} - U \cdot ch\, u\varphi \cdot \cos v\varphi - V \cdot sh\, u\varphi \cdot \sin v\varphi\right) = \eta_3 \tag{30}$$

Die obigen Gleichungen (26) bis (30) stellen die Einflußlinien der statischen Größen für den Schnitt $\varphi = \pi$ dar. Die Einflußlinie für einen beliebigen Schnitt $\varphi = \alpha$ ergibt sich durch Drehung der ganzen Einflußlinie für $\varphi = \pi$ um den Winkel $\alpha - \pi$. Für die Berechnung des elastisch eingebetteten Rohres sind die ermittelten Einflußlinien, Gl. (26) bis (30), für die Erdbelastung des zunächst als starr vorausgesetzten Rohres auszuwerten, und zwar sind hierbei die über den ganzen Rohrumfang wirkenden Kräfte zu berücksichtigen, inbegriffen Auflasten und Auflagerreaktionen.

Allgemein gültige Einflußlinien für die Rohrberechnung bei beliebiger Radialbelastung:

Ist keine elastische Stützung des Rohres vorhanden ($k = 0$) oder ist das Rohr starr ($B = \infty$), so wird

$$a = \sqrt{1 + \frac{r^4 k}{B}} = 1, \quad u = \sqrt{\frac{a-1}{2}} = 0, \quad v = \sqrt{\frac{a+1}{2}} = 1.$$

Aus den Gleichungen (26) bis (30) ergibt sich durch Grenzwertbildung:

$$y_1 = \frac{1}{r \cdot k \cdot \pi} \cdot \cos\varphi \tag{26a}$$

$$p_1 = \frac{1}{r\pi} \cos\varphi \tag{27a}$$

$$M_1 = \frac{r}{2\pi}\left(\varphi \cdot \sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{2} - 1\right) = r \cdot \eta_1 \tag{28a}$$

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\varphi \cdot \cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{2}\right) = \eta_2 \tag{29a}$$

$$N_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\varphi \cdot \sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{2}\right) = \eta_3. \tag{30a}$$

Werden die obigen Einflußlinien für ein Gleichgewichtssystem von radialen Kräften ausgewertet, und wird angenommen, daß im übrigen keine Bettungswiderstände wirken ($k = 0$), so ergibt sich für y [Gl. (26a)] eine unbestimmte Form $\infty - \infty$, die Bettungskräfte p [Gl. (27a)] heben sich gegenseitig auf, und für M [Gl. (28a)], Q [Gl. (29a)] und N [Gl. (30a)] resultieren die effektiven, inneren Kräfte des durch das angenommene Gleichgewichtssystem beanspruchten Rohres. Die einmalig ermittelten Ordinaten der Einflußlinien [Gl. (28a) bis Gl. (30a)] genügen für die Berechnung der Rohre aller Durchmesser unter den verschiedensten, radialen Belastungen, wie diese letzteren infolge Erd-

druck oder äußerem und innerem Wasserdruck stets auftreten. Die Annahme einer radialen Wirkung des aktiven Erddrucks ist berechtigt, da die Berücksichtigung der an sich unsicheren Wandreibung geringere Erddrücke und Rohrbeanspruchungen ergeben würde. Infolge dem Deformationszustand der Rohre wird die radiale Richtung der Auflagerreaktionen meist gut zutreffen, diese können im übrigen beliebig verteilt sein und sind bei Auswertung der Einflußlinien als äußere Kräfte zu berücksichtigen. Durch die gefundenen Einflußlinien [Gl. (28a) bis (30a)] ist es möglich, die Berechnung der Rohre bei beliebig verteilter Radialbelastung in einem Bruchteil der für die üblichen Berechnungsmethoden erforderlichen Zeit zu erledigen.

Die für die Auswertung der Einflußlinien notwendige Grundlage, die Erdbelastung des starren Rohres, wird im nächsten Abschnitt besprochen.

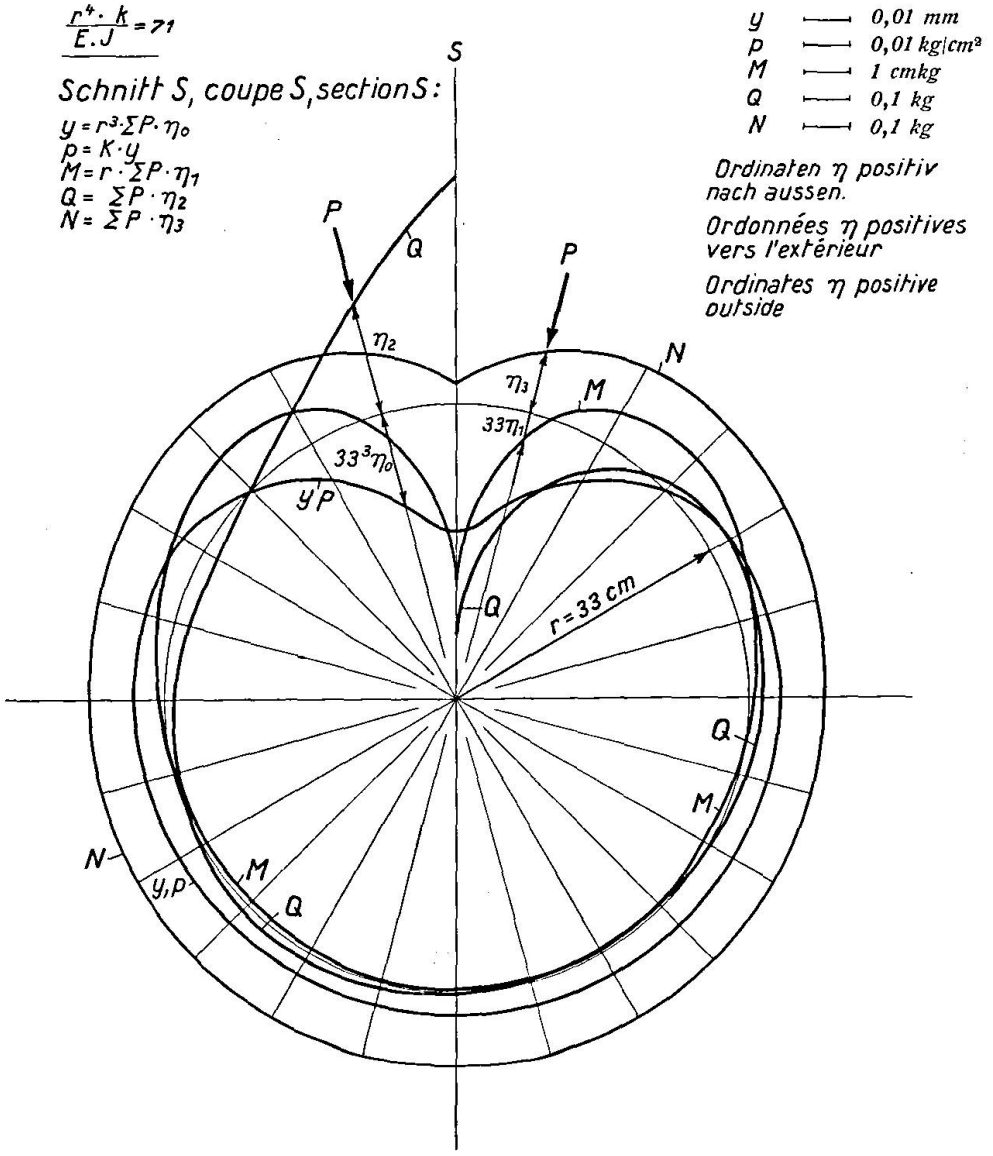


Fig. 3.

Einflußlinien für die Wirkung radialer Kräfte an einem elastisch eingebetteten Eisenrohr.
Lignes d'influence pour les effets de forces radiales sur un tuyau métallique appuyé élastiquement.
Influence lines for the effects of radial forces acting on an elastically embedded steel tube.

Beispiel.

Die abgeleiteten Gleichungen für die Einflußlinien gelten für Rohre von beliebigem Durchmesser, sofern der Wert $\frac{r^4 k}{B} \sim \frac{r^4 k}{EJ}$, welcher die Verformbarkeit der elastisch gebetteten Rohrwandung charakterisiert, konstant bleibt. In den Figuren 3 und 4 wurden direkt die Einflußwerte für den im Beispiel zu Abschnitt I angegebenen Rohrradius $r = 33$ cm dargestellt: $y_1 = r^3 \cdot \eta_0$, $M_1 = r \cdot \eta_1$. Für die Auswertung der Einflußlinie wird der in den Figuren 3 und 4 bezeichnete Schnitt s in den Rohrschnitt gelegt, für den die statischen Größen y, p, M, N, Q zu bestimmen sind; die gesuchten Werte ergeben sich dann durch Summierung: $\Sigma P \cdot \eta$.

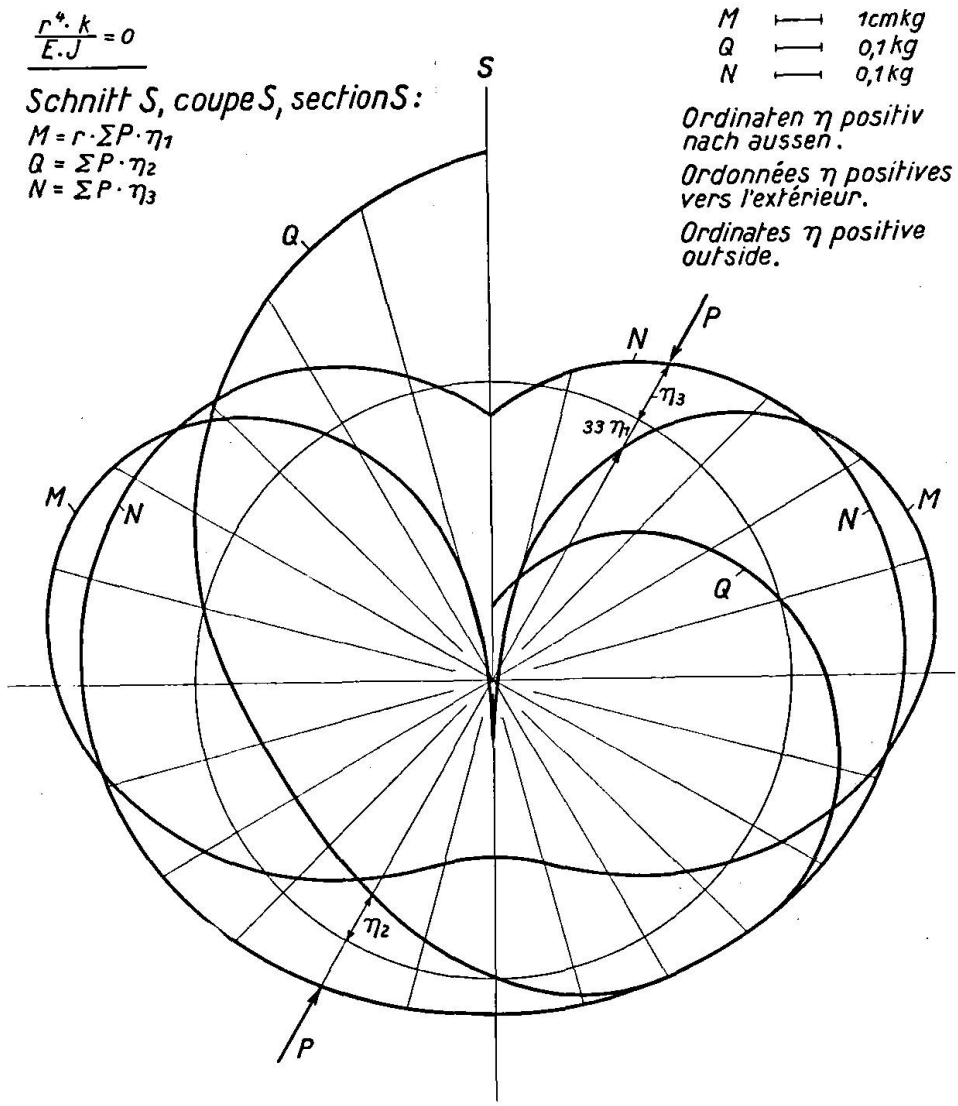


Fig. 4.

Einflußlinien für die Wirkung radialer Kräfte am starren, eingebetteten Rohr ($EJ = \infty$) bezw. am elastischen, statisch bestimmt gelagerten Rohr ($K = O$).

Lignes d'influence pour les effets de forces radiales sur le tuyau rigide, appuyé élastiquement ($EJ = \infty$) ou sur le tuyau élastique sous forces extérieures invariables ($K = O$).

Influence lines for the effects of radial forces acting on a rigid, embedded tube ($EJ = \infty$), elastically or isostatically supportet, respectively ($K = O$).

$$1.\ \text{Verformbarkeit}\ \frac{r^4 k}{EJ} = 71.$$

Auf Grund der im Beispiel zu Abschnitt I aufgeführten Zahlenwerte wurden die Einflußlinien für das elastisch eingebettete Rohr nach den Gleichungen (26) bis (30) berechnet und in Fig. 3 dargestellt.

$$2.\ \text{Verformbarkeit}\ \frac{r^4 k}{EJ} = 0.$$

Für das starre Rohr ($B = \infty$), bezw. für das elastische, jedoch nicht elastisch gebettete Rohr ($k = 0$), wurden die Einflußlinien nach den Gleichungen (28a) bis (30a) berechnet und im gleichen Maßstab wie die Einflußlinien des elastisch gebetteten Rohres (Fig. 3) in Fig. 4 dargestellt. Diese Kurven sind allgemein gültige Einflußlinien für die rasche und genaue Berechnung der inneren Kräfte radial belasteter Kreisringe von beliebiger Größe.

III. Erdbelastung und -Beanspruchung des starren Rohres.

A. Aktiver Erddruck der inkompressibeln Schüttung von horizontaler Oberfläche.

Die Erddruckberechnungen, welche das Prinzip von Coulomb anwenden, ergeben bekanntlich gute Übereinstimmung mit den Versuchsresultaten. Andrerseits erlaubt eine angenäherte Erweiterung der Theorie des unbegrenzten Erdkörpers eine einfache, analytische Darstellung der Normalpressungen, die mit den Ergebnissen der üblichen Methoden der Erddrucktheorie bei kleiner Wandreibung in befriedigender Weise übereinstimmt, und welche die Übersicht über die funktionellen Zusammenhänge erlaubt, die hier vornehmlich angestrebt wird.

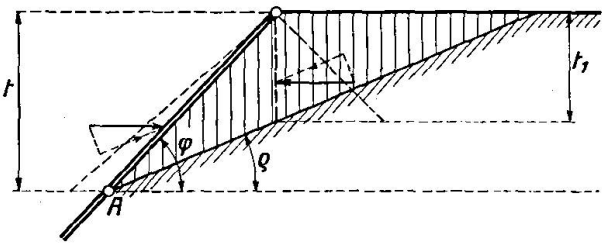


Fig. 5.

Im ungestörten Erdkörper mit horizontaler Oberfläche ruft das Eigengewicht in der Tiefe t eine Vertikalspannung $\sigma_1 = \gamma \cdot t$ hervor. Da der Seitendruck bei allen praktischen Anwendungen die Beanspruchung des Rohres ermäßigt, wird als möglicher, ungünstigster Fall der untere Grenzwert desselben in Rechnung gesetzt, dieser beträgt nach Rankine:

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{1 - \sin \varrho}{1 + \sin \varrho}.$$

Diese Annahme wurde durch die amerikanischen Versuche (Anmerkung 1) gerechtfertigt. Der Rankine'sche Spannungszustand ist auch im begrenzten Erdkörper, in Nähe einer stützenden Wand möglich, wenn die von oben auf das betrachtete Randelement wirkende, maximale Hauptspannung innerhalb des gestützten Erdkörpers liegt. Wenn sich jedoch die stützende Wand, wie Fig. 5 zeigt, gegen den Erdkörper neigt, ist der Rankine'sche Spannungszustand unterhalb der überkragenden Mauer nicht mehr möglich, weil die Erdteile, deren hydro-

statischer Druck den Rankine'schen Spannungszustand herbeiführt, beseitigt wurden. Es erscheint nun für den Spannungszustand am Fußpunkt A der natürlichen Böschungsfläche die größte, vorkommende Überschüttungshöhe t_1 derselben maßgebend zu sein. Da sich längs der Böschungsfläche ϱ das Erdgewicht mit dem Reibungswiderstand gerade das Gleichgewicht hält, und deshalb jede Druckwirkung in Richtung der Böschung in unveränderter Größe längs derselben weitergeleitet wird, muß Gleichgewicht bestehen zwischen den Druckkomponenten dieser Richtung, die in der maximalen Böschungsüberschüttung t_1 und in der Wandfläche wirken. Wird vorausgesetzt, daß sich die dem Rankineschen Spannungszustand entsprechende Richtung der Hauptspannungen nicht ändere, und daß in den beiden betrachteten Schnitten gleichartige und linear mit der Tiefe wachsende Spannungen wirken, so ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung, daß die Spannungen in der Wandfläche aus dem Rankineschen Spannungszustand durch Multiplikation mit folgendem Faktor hervorgehen:

$$\frac{t_1^2}{t^2} = \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\operatorname{tg}\varphi}\right)^2.$$

Der Einfluß der zur Rohrwandung normalen Druckkomponenten ist für die Rohrberechnung ausschlaggebend, diese ergeben sich aus der bekannten Gleichgewichtsbedingung eines Elementes:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi.$$

Der radiale, aktive Erddruck auf das eingebettete Rohr ergibt somit bei Berücksichtigung der letzten vier Gleichungen für die obere Rohrhälfte: $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$:

$$\sigma_0 = \frac{\gamma}{1 + \sin\varrho}(t_0 + r_a \cdot \cos\varphi)(1 + \sin\varrho \cdot \cos 2\varphi) \tag{31}$$

für die untere Rohrhälfte: $\varrho < \varphi < \frac{\pi}{2}$:

$$\sigma_u = \sigma_0 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\operatorname{tg}\varphi}\right)^2 \tag{32}$$

B. Auflagerreaktionen.

Das Rohr vom Gewicht G pro Längeneinheit werde auf ein Bett von feinkörnigem Sand verlegt, das die untere Rohrlaibung über den Bogen $2r\varphi_0$ umschließt (vergl. Fig. 6). Infolge dem Gewicht des Rohres wird dasselbe um einen kleinen Betrag Δ_u einsinken und dadurch radiale Verschiebungen $y = \Delta_u \cos\varphi$ hervorrufen. Versuche (Anmerkung 2) haben gezeigt, daß für die oberflächlichen Schichten des Sandbettes eine mit der Tiefe z linear zunehmende Bettungsziffer $k_u = k_1 \cdot z$ angenommen werden kann, so daß die radialen Pressungen dargestellt werden durch

$$\sigma_a = k_1 \cdot y = \Delta_u \cdot k_1 \cdot r_a (\cos\varphi - \cos\varphi_0) \cos\varphi.$$

Soll Gleichgewicht bestehen, so wird

$$G = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sigma_a \cdot r_a \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi,$$

woraus

$$\sigma_a = \frac{3\,G(\cos\varphi - \cos\varphi_0)\cos\varphi}{r_a(3\sin\varphi_0 + \sin^3\varphi_0 - 3\varphi_0 \cdot \cos\varphi_0)}. \tag{33}$$

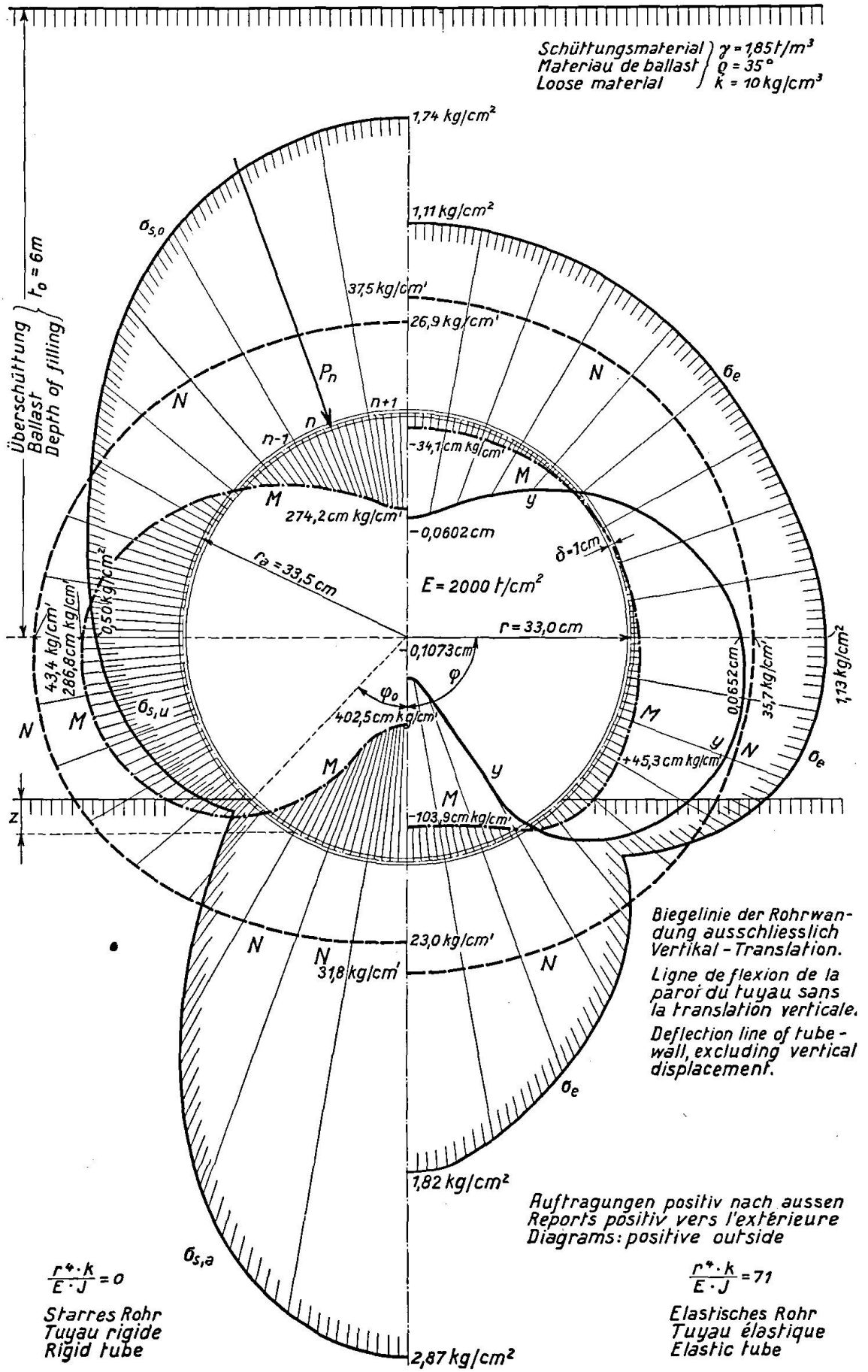


Fig. 6. Erdbelastung und -Beanspruchung eines Rohres von 66 cm Durchmesser unter einer Ueberschüttung von 6 m Höhe. — Sollicitations d'un tuyau de 66 cm de diamètre, couvert de 6 m de remblai. — Loading and stressing effects on a tube of 66 cm diam. covered by 6 m filling.

Die folgende, bei allen bisherigen Versuchen (siehe z. B. Anmerkungen 1 und 2) bestätigte Beobachtung ist für die Berechnung der eingebetteten Rohre von grundlegender Bedeutung: Das Verteilungsgesetz der Auflagerpressungen, welches sich während dem Verlegen eines starren Rohres ergibt, bleibt während der späteren Überschüttung erhalten. Die zunehmende Belastung des starren Rohres hat eine proportionale Vergrößerung der Auflagerdrücke zur Folge. Die Schüttung kann praktisch nicht derart in die Zwickel unter dem Rohr eingestampft werden, daß eine Entlastung der ursprünglichen Auflagerfläche eintritt. Die Auflagerpressungen am überschütteten, starren Rohr ergeben sich demnach durch Einsetzen der totalen Vertikalkomponente von Erdlast und Gewicht an Stelle von G in Gleichung (33). In der nachfolgenden Berechnung wird nur die Erdbelastung berücksichtigt:

Die vertikale Komponente R der Erdauflast folgt aus der Integration der Gleichungen (31) und (32):

$$R = -2\, r_a \int_{\varrho}^{\pi} \sigma \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi .$$

Hierbei kann bei Schüttungen von normalem Reibungswinkel ($\varrho > 25^0$) die vertikale Komponente des auf die untere Rohrhälfte wirkenden Erddrucks vernachlässigt werden, so daß an Stelle der unteren Grenze ϱ in obigem Integral der Wert $\frac{\pi}{2}$ tritt. Mit dieser Vereinfachung ergibt das obige Integral:

$$R = \frac{2 \cdot r_a \cdot \gamma}{1 + \sin\varrho} \left[t_0 \left(1 + \frac{\sin\varrho}{3} \right) - \frac{r_a \cdot \pi}{8} (2 + \sin\varrho) \right]. \tag{34}$$

Ungenauigkeiten im Gleichgewicht der äußeren Kräfte werden bei Berechnung der inneren Kräfte vermittelst den Einflußlinien, Gleichungen (28) bis (30 a), automatisch ausgeglichen.

C. Zusatzdruck infolge Zusammendrückbarkeit der Schüttung.

Denkt man sich an Stelle des Rohres einen Erdzylinder von gleicher Beschaffenheit wie die umgebende Schüttung, so kann dessen vertikale Zusammendrückung infolge dem Eigengewicht der Schüttung mit Hilfe von Gleichung (2) berechnet werden zu

$$\Delta = \int \frac{\gamma \cdot t \cdot dt}{E_1 (\gamma \cdot t + c)} = \frac{1}{E_1} \left[t - \frac{c}{\gamma} \ln (\gamma t + c) \right]_u^o . \tag{35}$$

Je nach den Grenzen o, u, zwischen welchen das obige Integral ausgewertet wird, ergibt sich die Setzung eines Punktes des Umfangs des Erdzylinders gegenüber einer als fest betrachteten Ebene des Untergrundes, oder die Zusammendrückung der vertikalen Sehnen des Erdzylinders. Aus den letzteren Werten lassen sich die radialen Deformationen y_0 leicht berechnen.

Befindet sich an Stelle des Erdzylinders ein starres Rohr, so müssen die Verformungen rückgängig gemacht werden, hierbei verhält sich die Hebung des Rohrscheitels zur Senkung der Rohrsohle umgekehrt wie die Bettungsziffern an den betrachteten Stellen.

Ist die Bettungsziffer k über dem ganzen Rohrumfang konstant, und wird im Bereich der Rohrhöhe die Variation der Vertikalspannungen vernachlässigt ($\sigma_1 \sim \gamma \cdot t_0$), so beträgt die Druckzunahme infolge der Zusammendrückbarkeit der Schüttung:

$$p_0 = k \cdot y_0 = k \cdot \frac{\gamma \cdot t_0 \cdot r_a}{E_1 (\gamma t_0 + c)} \cos^2 \varphi . \tag{36}$$

In der obigen Rechnung wurde die für die Rohrbeanspruchung ungünstige Annahme gemacht, daß die radiale Druckerhöhung nur die Komponente einer Erhöhung des Vertikaldrucks darstelle, und hierbei der Horizontaldruck unverändert bleibe.

Dagegen folgt aus den Untersuchungen der Elastizitätstheorie (vergl. Anmerkung 4), daß der Seitendruck bei den in der Erde vorkommenden Verhältnissen von $\sigma_1 : \sigma_2$ mindestens im gleichen Verhältnis erhöht wird wie der Vertikaldruck. Das minimale Verhältnis des Zusatzdrucks p_0 infolge Kompressibilität zum Druck σ der inkompressibeln Schüttung beträgt

$$\frac{p_0}{\sigma} = \frac{2}{3} \tag{37}$$

Auf Grund dieser Feststellung erscheint die vereinfachende Annahme berechtigt, daß der Druck der kompressibeln Schüttung aus dem Druck der inkompressibeln Schüttung einfach durch Multiplikation der Gleichungen (31), (32) und (33) mit einem Konzentrationsfaktor $\varkappa$ hervorgehe, der im Fall der Einbettung in einer weit ausgedehnten, homogenen Schüttung den Wert erreicht:

$$\varkappa = \frac{5}{3} .$$

Bei Lagerung oder teilweiser Einbettung des überschütteten Rohres im festen Baugrund, sowie bei kleiner Überschüttungshöhe kann der Faktor $\varkappa$ aus den zu Beginn dieses Abschnittes mitgeteilten Überlegungen gewonnen werden.

Die Tatsache der Druckkonzentration an überschütteten, starren Rohren wurde durch zahlreiche Versuche [8]) festgestellt und hat schon zu Rohrbrüchen geführt.

D. Totale Erdbelastung des starren Rohres.

Nach den Angaben des Abschnitts II beträgt der aktive Erddruck auf ein starres, eingebettetes Rohr:

1. Obere Rohrhälfte: $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

$$\sigma_{s,0} = \frac{\varkappa \cdot \gamma}{1 + \sin \varrho} (t_0 + r_a \cdot \cos \varphi)(1 + \sin \varrho \cdot \cos 2\varphi) \tag{31a}$$

2. Untere Rohrhälfte: $\varrho < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

$$\sigma_{s;u} = \sigma_{s,0} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg} \varphi}\right)^2 \tag{32a}$$

Die Auflagerpressungen des über dem Winkel $2\varphi_0$ aufgelagerten Rohres betragen:

$$\sigma_{s,a} = \frac{3 \cdot \varkappa \cdot R \cdot (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \cos \varphi}{r_a (3 \sin \varphi_0 + \sin^3 \varphi_0 - 3 \varphi_0 \cos \varphi_0} \tag{33a}$$

Hierin ist nach Gleichung (34)

$$R = \frac{2 r_a \cdot \gamma}{1 + \sin \varrho} \left[t_0 \left(1 + \frac{\sin \varrho}{3}\right) - \frac{r_a \cdot \pi}{8} (2 + \sin \varrho) \right].$$

[8]) Vergl. Publikationen der Iowa Engineering Experiment Station, 1913 bis 1933.

In einer weit ausgedehnten, homogenen Schüttung kann der Konzentrationsfaktor $\varkappa = \frac{5}{3}$ gesetzt werden.

Beispiel.

Auf Grund der am Schluß des I. Abschnittes angegebenen Zahlenwerte wurden die obigen Funktionen für eine praktische Anwendung berechnet und in Fig. 6 über der linken Rohrhälfte aufgetragen.

Der Rohrumfang wurde in 36 Teile λ eingeteilt, und der stetig verteilte Erddruck nach der Trapezformel zu Einzelkräften P zusammengefaßt, welche in den Teilpunkten wirken. Beispielsweise beträgt die Einzelkraft im Punkte n

$$P_n = \frac{\lambda}{6}(\sigma_{n-1} + 4\,\sigma_n + \sigma_{n+1}).$$

Für diese Einzelkräfte wurden die in Fig. 4 dargestellten, nach den Gleichungen (28a) bis (30a) berechneten Einflußlinien ausgewertet und für die 36 Teilpunkte das Moment und die Normalkraft bestimmt, wie dies auf der linken Seite der Fig. 6 dargestellt ist. Die Schubkraft Q ist für die Dimensionierung von untergeordneter Bedeutung. Im gefährlichen Schnitt an der Rohrsohle ergibt sich $M = 402{,}5$ cmkg/cm', $N = 23$ kg/cm'. Wenn das Eisenrohr als starr betrachtet wird, so beträgt dessen maximale Beanspruchung 2440 kg/cm². Durch die Nachgiebigkeit des Eisenrohres wird, wie nachfolgend gezeigt wird, diese Beanspruchung stark vermindert.

IV. Erdbelastung und -Beanspruchung des elastischen Rohres.

Sämtliche, für die Berechnung des elastischen Rohres erforderlichen Angaben sind in den vorhergehenden Abschnitten enthalten.

Beispiel:

Auf Grund der Zahlenangaben von Abschnitt I wurden im Abschnitt II die Einflußlinien für ein elastisch eingebettetes Rohr $\left(\frac{r^4 k}{EJ} = 71\right)$ berechnet, während die Erdbelastungen des starren Rohres, für welche diese Einflußlinien auszuwerten sind, im Abschnitt III ermittelt wurden. Für die Auswertung der Einflußlinien wurde der Kreisumfang in 36 Teile geteilt, und, wie im Beispiel zum letzten Abschnitt, der stetig verteilte Erddruck in Einzelkräfte zusammengefaßt, welche in diesen Teilpunkten wirken.

Die Durchbiegung y setzt sich aus zwei Teilen zusammen: der erste, größere Teil $y_s = \Delta_{s,u} \cdot \cos\varphi$ ist die Folge einer vertikalen Verschiebung des ganzen, zunächst als starr betrachteten, Rohres (vergl. Abschnitt III); der zweite, geringere Teil ist die Folge der Verbiegung des unverschieblich gedachten Rohres infolge Elastizität der Rohrwandung. Für die Berechnung des Druckausgleiches infolge Elastizität der Rohrwandung genügt die Kenntnis dieses zweiten Teiles y der radialen Verschiebung der Rohrwandung. Dieser ergibt sich aus der Einflußlinie Fig. 3 für y durch Auswertung für alle am starren Rohr wirkenden aktiven Lasten und Auflagerreaktionen.

Die gefundene Biegelinie y wurde auf der rechten Seite der Fig. 6 eingetragen. Die elastische Verbiegung y der Rohrwandung ist mit einer Veränderung des Bettungsdruckes verbunden: $p = k \cdot y = 10 \cdot y$. Diese Druckänderungen p werden zum ursprünglichen, auf das starre Rohr wirkenden

Druck σ_s (Abschnitt III) algebraisch addiert, und ergeben die resultierende Belastung σ_e des elastischen Rohres, welche auf der rechten Seite der Fig. 6 ersichtlich ist.

Die weitere Berechnung kann auf zwei Arten erfolgen:

1. Die inneren Kräfte werden mit Hilfe der Einflußlinien Fig. 4 des starren Rohres für die Belastung σ_e des elastischen Rohres berechnet.

2. Für die ursprüngliche Belastung σ_s des starren Rohres werden die Einflußlinien Fig. 3 des elastisch eingebetteten Rohres ausgewertet.

Beide Methoden führen zu dem gleichen Ergebnis. In der Regel wird es einfacher sein, die allgemein gültigen Einflußlinien Fig. 4 zu verwenden, da dann für das elastisch eingebettete Rohr jeweils nur die Einflußlinie des Bettungsdrucks p ermittelt werden muß, die von der Einflußlinie der Durchbiegung y nur im Maßstab abweicht.

Das Resultat der Berechnung ist auf der rechten Seite der Fig. 6 dargestellt. Die Elastizität des Rohres hat einen wesentlichen Druckausgleich zur Folge, wie dies auch bei zahlreichen Versuchen[9]) beobachtet wurde. Im Sohlschnitt beträgt das Moment $M = 103{,}9$ cmkg/cm′ und die Normalkraft 31,8 kg/cm′. Die maximale Beanspruchung im Rohr erreicht 655 kg/cm², d. h. etwa $1/4$ der Beanspruchung des starren Rohres.

V. Zusammenfassung.

Praktische Erfahrungen und Versuche haben gezeigt, daß die Bruchsicherheit der eingebetteten Rohre von der Steifigkeit derselben abhängig ist, und daß insbesondere die Vertikalbelastung eines starren Rohres bedeutend größer, diejenige eines leicht verformbaren Rohres aber wesentlich geringer werden kann als das Gewicht der über dem Rohr lagernden Schüttung. Je nach der Steifigkeit der Versuchsrohre werden sehr verschiedene Druckverteilungen beobachtet: der Seitendruck wächst bei sonst gleichen Verhältnissen mit zunehmender Verformbarkeit der Rohre. Für die Beurteilung dieser praktisch wichtigen Erscheinungen fehlte bisher eine allgemeine, theoretische Grundlage.

Die vorliegende Abhandlung bezweckt die prinzipielle Darlegung einer Berechnungsmethode für den Erddruck auf eingebettete Rohre, mit Berücksichtigung des Einflusses der Nachgiebigkeit des Baugrundes und der Rohrwandungen.

Die Einflußlinien der Deformationen, des Bettungsdruckes und der inneren Kräfte werden in geschlossenen Formeln dargestellt, aus deren Auswertung für die ebenfalls behandelten, auf das starre Rohr wirkenden Kräfte, die endgültige Belastung und Beanspruchung des elastischen Rohres resultiert.

Als Spezialfall ergeben sich die allgemein gültigen Einflußlinien für die rasche und genaue Berechnung der inneren Kräfte von beliebig großen Rohren unter beliebig verteilten Radiallasten.

Um das Prinzip der Berechnung in einfacher Weise darzulegen, beschränken sich die Ausführungen auf die Annahme der Einbettung in einer weit ausgedehnten Schüttung von horizontaler Oberfläche. Hiervon abweichende Verhältnisse, besonders die in Gräben verlegten und die teilweise eingebetteten

---

[9]) *American Railway Engineering Association:* Culvert Load Determination. Bulletin 284, 1926.
G. M. Braune, W. Cain, H. F. Janda: Earth Pressure Experiments on Culvert Pipe. Public Roads Journal 1929.
E. Jaeger: Die Belastung der Rohrleitungen im Erdreich. Mitteilungen der Hannoverschen Hochschulgemeinschaft, Heft 15, 1933.
Versuche des Erddrucklaboratoriums Zürich. Siehe Anmerkung 2.

Rohre, werden in meiner Arbeit (Anmerkung 2) behandelt. Dort werden auch die Grenzwerte des Erddruckes auf überschüttete Bauwerke untersucht. Diese Grenzen können in seltenen Ausnahmefällen durch das Ergebnis der hier dargelegten Theorie des elastisch eingebetteten Rohres überschritten werden, so daß dann für die Rohrberechnung die Grenzwerte selbst maßgebend sind.

Résumé.

L'expérience et les essais ont montré que la sécurité à la rupture des tuyaux placés sous terre dépend de la rigidité des tuyaux et spécialement que la surcharge verticale d'un tuyau rigide peut être beaucoup plus grande et celle d'un tuyau facilement déformable beaucoup plus faible que le poids de la terre placée au-dessus du tuyau. On a observé des répartitions très différentes de la compression, suivant la rigidité du tuyau d'essai: la pression latérale, toutes les conditions restant les mêmes, croît avec la déformabilité croissante du tuyau. Il manquait jusqu'à maintenant une base générale théorique pour l'estimation de ces faits pratiquement importants.

Le présent mémoire a pour but d'exposer une méthode de calcul fondamentale pour la poussée des terres sur un tuyau placé sous terre, en tenant compte de l'influence de l'élasticité du terrain et des parois du tuyau.

Les lignes d'influence des déformations, de la pression du sol et des forces internes sont représentées par des formules explicites. L'évaluation de ces formules permet de calculer la charge et la sollicitation définitives du tuyau élastique, résultant des forces agissant sur le tuyau rigide, cas que nous avons aussi traité.

Comme cas spécial, on obtient les lignes d'influence de validité générale pour le calcul rapide et exact des forces internes de tuyaux de dimensions quelconques, pour des charges radiales réparties d'une façon quelconque.

Afin d'exposer d'une façon simple le principe de calcul, nous limitons nos explications au cas où le tuyau est placé dans un remblais de grande étendue et de surface horizontale. Pour des conditions qui s'écartent de celles-là, spécialement pour les tuyaux qui sont placés dans des fossés ou qui ne sont que partiellement recouverts, nous avons aussi traité dans notre travail (Remarque 2) la méthode de calcul, et nous avons étudié les valeurs limites de la poussée des terres sur des ouvrages placés en terre. Ces limites ne peuvent être dépassées que dans des cas exceptionnels par le résultat de la théorie exposée du tuyau placé élastiquement en terre, de telle sorte que, pour le calcul du tuyau, les valeurs limites elles-mêmes sont déterminantes.

Summary.

Practical experience and tests have shown that the safety against fracture of embedded pipes is dependent on the rigidity of the pipes. In particular the vertical loading of rigid pipes can be considerably greater in value than the weight of the superimposed filling, whilst the reverse is true in the case of easily deformable pipes. According to the stiffness of test pipes various distributions of pressure are observed: the side pressure increases with increasing deformability of the pipes under otherwise equal conditions. Up to new no theoretical method has been available for judging this occurrence of practical importence.

The purpose of the author's treatise is to provide a general exposition of the methods of calculation of earth pressure on embedded pipes, under consideration of the deformability of both sub-soil and pipes.

The influence lines of deformations, bearing pressure, and internal forces are given by explicit formulae. The computation of the influence lines permits of the determination of the final values of loading and the stresses of elastic pipes. The evaluation of the influence lines has to be done with the forces acting on rigid pipes; these forces have also been treated in the present article.

As a special case influence lines of general validity useful for quick and exact calculation of the internal forces of pipes of any diameter, subjected to any distributed radial forces, have been established.

For the purpose of elucidating the principle of calculation in a simple manner, the question was restricted to the assumption that the pipes are embedded in an extensive horizontal surface layer. Conditions deviating from this assumption, such as pipes laid in trenches or only partly covered pipes, have been treated in the author's article mentioned under footnote 2. This treatise examines also the limit of earth pressure on structures covered by filling. These limits can be exceded in very rare cases by the results of the theory, elucidated in the present article, for embedded pipes, in which case these limits would be decisive for the static calculation of pipes.

Leere Seite
Blank page
Page vide