

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 4 (1936)  
  
**Artikel:** Étude expérimentale des contraintes produites dans une poutre par des charges concentrées  
**Autor:** Tesa, V.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-5099>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES CONTRAINTES PRODUITES DANS UNE POUTRE PAR DES CHARGES CONCENTRÉES.**

EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG DES SPANNUNGSZUSTANDES  
IN EINEM BALKEN INFOLGE VON EINZELLASTEN.

EXPERIMENTAL RESEARCH ON THE FLOW OF STRESSES  
IN A BEAM SUBJECTED TO POINT LOADS.

V. TESAR, Ingénieur, Docteur ès-Sciences techniques, Paris.

L'étude des phénomènes produits par les charges concentrées a fait déjà l'objet de nombreuses recherches théoriques et expérimentales, dûes notamment à Boussinesq, C. Wilson, Stokes, Pigeaud, Mesnager, Coker, Filon, Miura, Seewald, Bay, Dischinger; on trouvera la bibliographie correspondante à la fin de cette étude.

Ce problème se présente très fréquemment dans les constructions, et dans des circonstances très variées; aussi, nous estimons utile de présenter ci-dessous les résultats des recherches photoélasticimétriques que nous avons pu faire récemment au Laboratoire de l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées à Paris.

## **Objet des recherches.**

On sait que les règles de la Résistance des matériaux sont basées sur certaines hypothèses grâce auxquelles les méthodes de calcul sont assez simples; la plus fondamentale concerne la répartition linéaire des tensions normales dans chacune des sections transversales des poutres. Cette hypothèse, déduite de la solution du problème de St-Venant, est en effet exacte, ou tout au moins ne s'écarte qu'assez peu de la réalité tant que l'élément considéré:

- 1° a la forme d'une poutre dont la section transversale ne varie que très lentement d'un point à un autre;
- 2° ne présente aucune discontinuité de forme, et ne supporte que des charges continues;
- 3° n'a qu'une section transversale relativement faible par rapport à sa longueur.

Il résulte de ces restrictions que, en pratique, dans tous les cas, même les plus simples, on rencontre certaines zones dans lesquelles les méthodes classiques de la Résistance des matériaux se trouvent en défaut.

La théorie de l'élasticité permet cependant, dans certains problèmes, en nombre d'ailleurs encore assez limité, d'obtenir des solutions analytiques qui ne se prêtent généralement pas à une utilisation aisée.

Il est donc d'un grand intérêt de recourir à des procédés qui permettent d'obtenir les solutions correctes lorsque les méthodes de calcul sont soit impuissantes, soit inutilisables en raison de la complexité de leurs résultats.

La Photoélasticimétrie due à A. Mesnager, qui, en partant des travaux de ses précurseurs (Brewster, Carus Wilson, Wertheim) a réussi non seulement à créer les bases d'une méthode complète, mais aussi à réaliser les premières applications pratiques (17), (18)<sup>1)</sup>, permet précisément de résoudre ces problèmes par la voie expérimentale.

### Conditions générales de l'exécution des recherches.

La photoélasticimétrie est une méthode optique qui n'utilise actuellement que la lumière des sources lumineuses courantes visibles pour l'oeil; aussi, les recherches doivent être faites sur des modèles réduites transparents. Cette circonstance provoque parfois l'objection suivante: l'état des tensions relevées sur les modèles transparents n'est-il pas différent de l'état des tensions des constructions réelles en bois, en acier, en duralumin, etc...? Elle est pratiquement sans fondement, car la similitude de l'état des tensions dans les modèles réduits et dans les ouvrages réels est complètement réalisée, moyennant certaines précautions que l'on doit prendre dans l'exécution des essais.

En effet, les études comparatives faites sur les constructions et les modèles semblables exécutés avec des matériaux et à des échelles très différents confirment parfaitement, comme l'indique d'ailleurs la théorie de l'élasticité, que, tant que les taux de fatigue ne dépassent pas les limites élastiques et tant que le coefficient de Poisson des matériaux utilisés n'est pas trop différent, l'état d'équilibre élastique est pratiquement indépendant de la nature du matériau.

En outre, un très grand nombre de problèmes peut être interprété en élasticité plane, et dans la plupart des cas, l'état des tensions élastiques est alors indépendant de ce coefficient.

Ajoutons enfin que la photoélasticimétrie peut être utilisée également pour l'étude des phénomènes qui se produisent dans le domaine plastique; dans ce cas, il convient alors de faire un choix plus particulier des matériaux d'essai et de la grandeur des charges.

### Solutions expérimentales de quelques problèmes.

Nous envisagerons successivement quatre problèmes.

1° *Poutre rectangulaire droite, de section constante, simplement posée et chargée, au milieu de la portée, égale à 5 fois la hauteur de la poutre, par une force répartie sur une longueur égale au huitième de la hauteur.*

Nous avons pris pour premier exemple ce cas simple, qui, à première vue, ne présente aucune difficulté pour la détermination théorique des tensions intérieures.

Mais si on le considère de plus près, on constate qu'il est impossible de calculer les tensions à l'aide des règles de la Résistance des matériaux, dans les zones avoisinant les points d'application de la charge et des réactions des appuis (surfaces hachurées sur la fig. 1).

Ce n'est que dans les parties restant en dehors de ces zones que les résultats des calculs usuels concordent avec la réalité.

Ce problème est résolu par la théorie d'élasticité (v. 19 bis), p. 183—205. Mais les expressions analytiques correspondantes sont des séries de fonctions hyperboliques, difficilement susceptibles d'être utilisées dans la pratique.

Par contre, l'étude expérimentale est facile à réaliser.

<sup>1)</sup> Les chiffres entre parenthèses renvoient à la bibliographie à la fin de l'article.

La figure 2 représente les lignes isostatiques des deux familles. Soient  $\nu_1$  et  $\nu_2$  les contraintes principales orientées suivant les tangentes aux courbes dessinées respectivement en traits discontinus et en traits pleins.

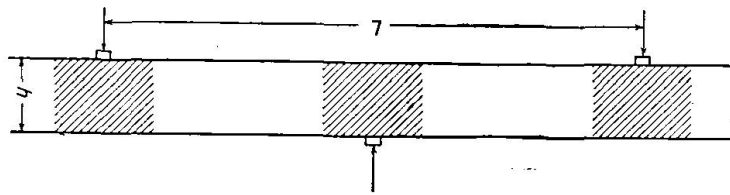


Fig. 1.

On voit immédiatement, à l'aspect de ces lignes, que c'est seulement entre les sections I—I' et II—II' où elles sont symétriques par rapport à l'axe longitudinal de la poutre, que les règles de la Résistance des matériaux sont applicables; et l'on vérifie que l'effet des perturbations causées par les charges concentrées est pratiquement insensible à une distance de ces charges égale à la hauteur de la section transversale.

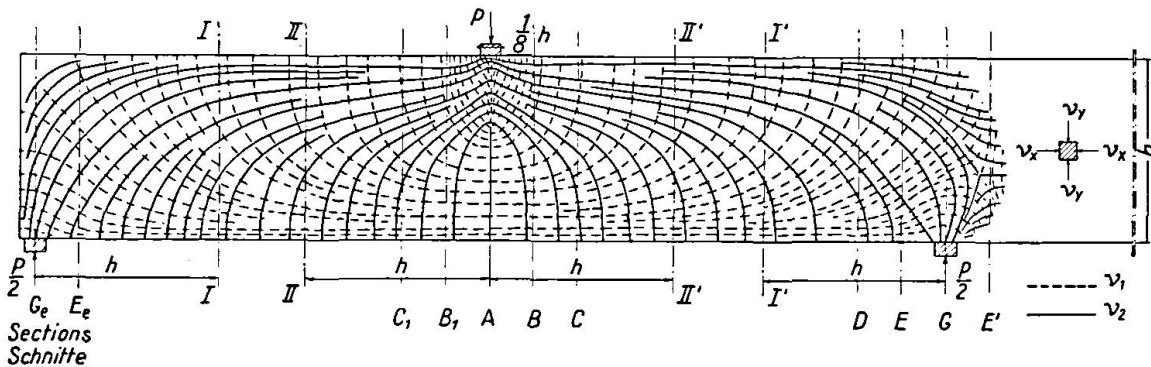


Fig. 2.

Pour pouvoir mieux apprécier le caractère de ces perturbations nous avons déterminé les contraintes dans les sections verticales passant:

A par la charge centrale  $P$ .

G et  $G_e$  par les axes des appuis de droite et de gauche.

B et C;  $B_1$  et  $C_1$ , à des distances égales à  $\frac{h}{4}$  et  $\frac{h}{2}$  à droite et à gauche de la section médiane A.

D, E et  $D_e$ ,  $E_e$  à des distances égales à  $\frac{h}{2}$  et  $\frac{h}{4}$ , comptées à partir des appuis de droite et de gauche, vers le milieu de la portée.

E' symétrique de la section E, par rapport à l'appui de droite.

Nous avons représenté les résultats des mesures relatives à ces sections dans les figures suivantes:

fig. 3: sections A, B;

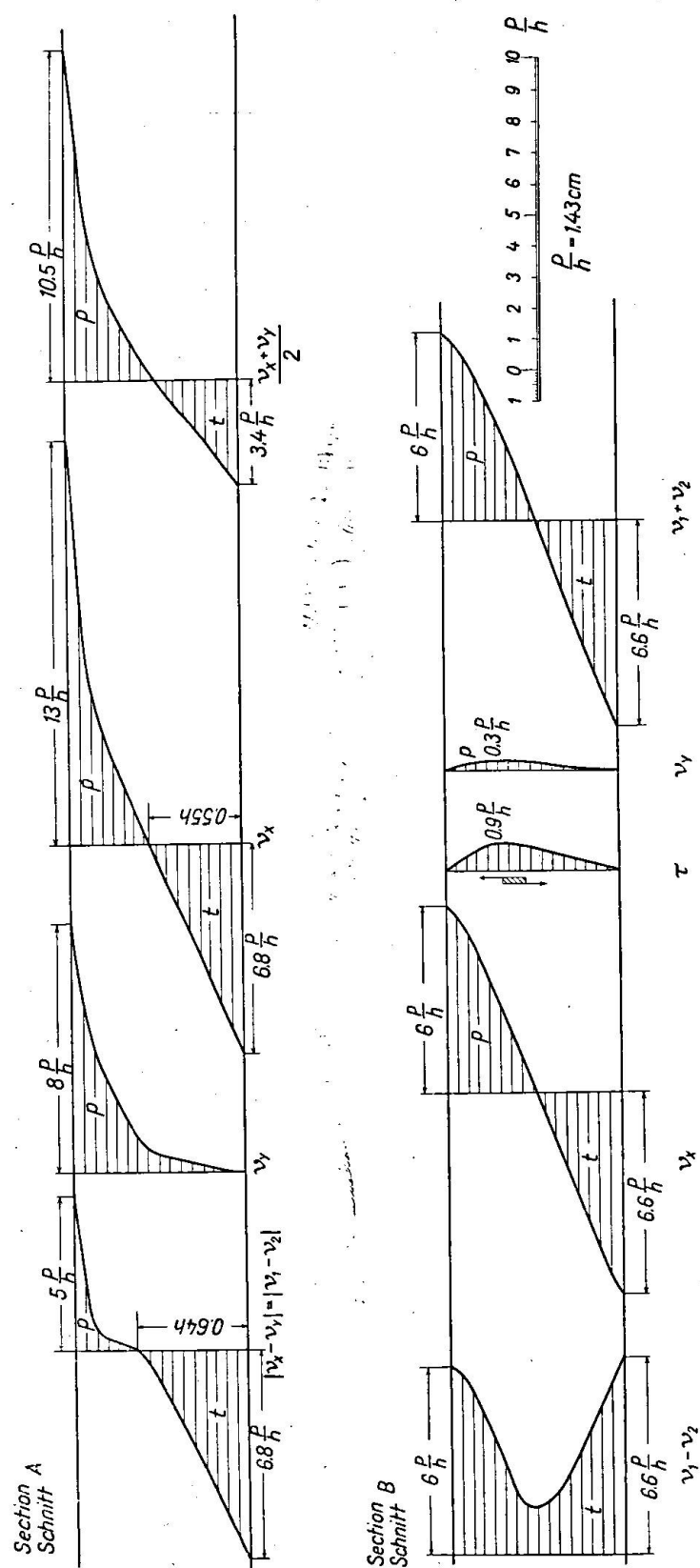
fig. 4: sections C, D, E, G;

fig. 5: sections  $E_e$ ,  $G_e$ ;

fig. 6: sections E'.

Le premier diagramme relatif à chaque section figurant sur ces dessins est le relevé des différences des contraintes principales ( $\nu_1 - \nu_2$ ) qui sont déterminées directement par les mesures des biréfringences sur le modèle.





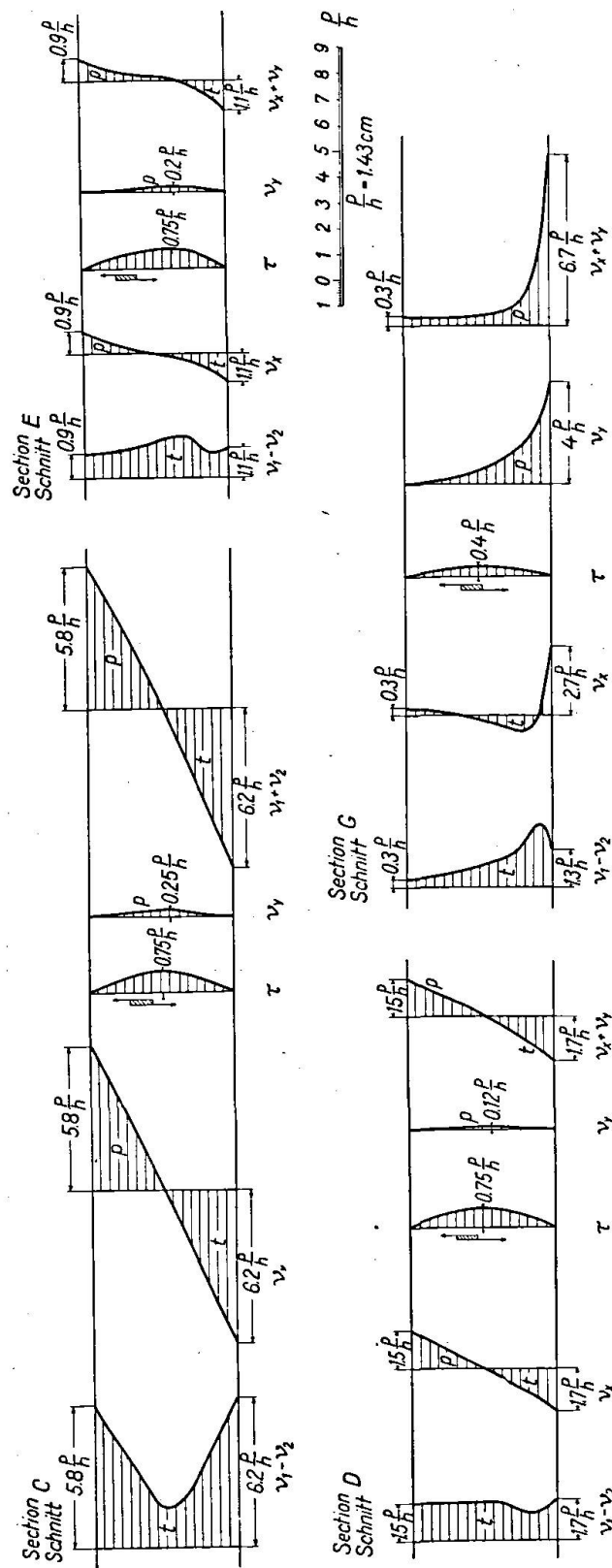


Fig. 4.

Nous avons représenté ensuite pour toutes les sections: les contraintes horizontales  $\nu_x$ , les cisaillements  $\tau$ , les contraintes verticales  $\nu_y$  et la somme des contraintes principales  $(\nu_1 + \nu_2) = (\nu_x + \nu_y)$  valeur qui intervient avec la différence  $(\nu_1 - \nu_2)$  dans la définition de l'état des tensions si l'on se sert de la représentation de Mohr.

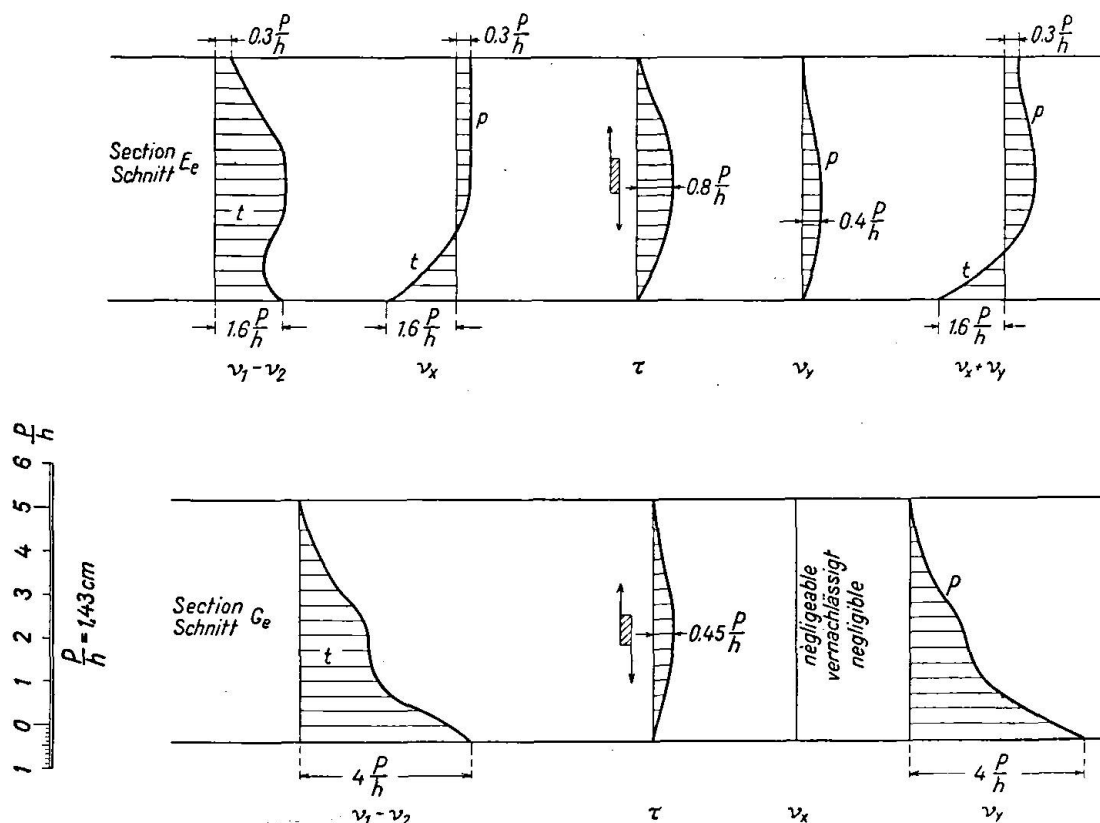


Fig. 5.

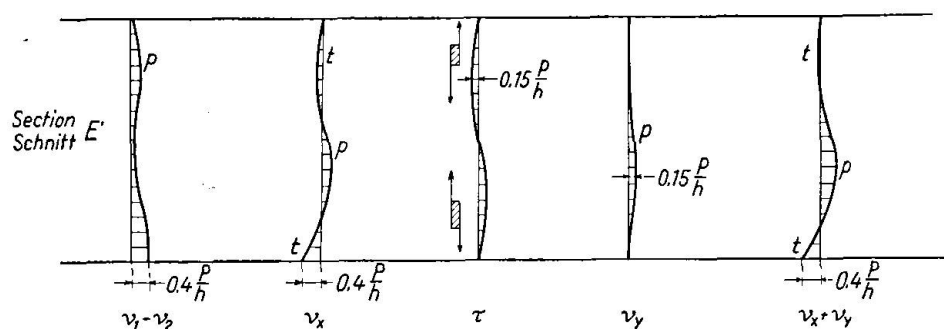


Fig. 6.

En ce qui concerne la section A (fig. 3), on constate que la contrainte  $\nu_y$  qui lui est parallèle a son maximum sur le contour supérieur; en se rapprochant du contour inférieur, elle diminue rapidement pour s'annuler au bord même.

La répartition des contraintes  $\nu_x$  normales à cette section est très loin de celle que l'on aurait si les règles de la Résistance des matériaux étaient encore applicables. Le calcul correspondant donnerait en effet pour valeur des contraintes extrêmes en supposant la charge  $P$  concentrée en un point et les appuis ponctuels:  $\pm \frac{M \cdot h}{2I} = \pm 7,5 \frac{P}{h}$ , le moment étant  $M = \frac{5Ph}{4}$ , et le moment

d'inertie  $I = \frac{h^3}{12}$  (l'épaisseur étant prise égale à l'unité).

L'expérience montre au contraire que le taux de fatigue de la fibre inférieure tendue est un peu plus faible ( $6,8 \frac{P}{h}$  au lieu de  $7,5 \frac{P}{h}$ ), tandis que le taux de fatigue en compression de la fibre supérieure est majoré de 73,4% ( $\nu_x = 13 \frac{P}{h}$  au lieu de  $7,5 \frac{P}{h}$ ).

Mais il importe de souligner que cette compression élevée ne règne que sur la longueur de la zone supportant la charge concentrée, où la contrainte verticale  $\nu_y$  est égale à  $8 \frac{P}{h}$ , la charge  $P$  étant uniformément répartie<sup>2)</sup> sur une longueur égale au  $\frac{1}{8}$  de la hauteur de la poutre.

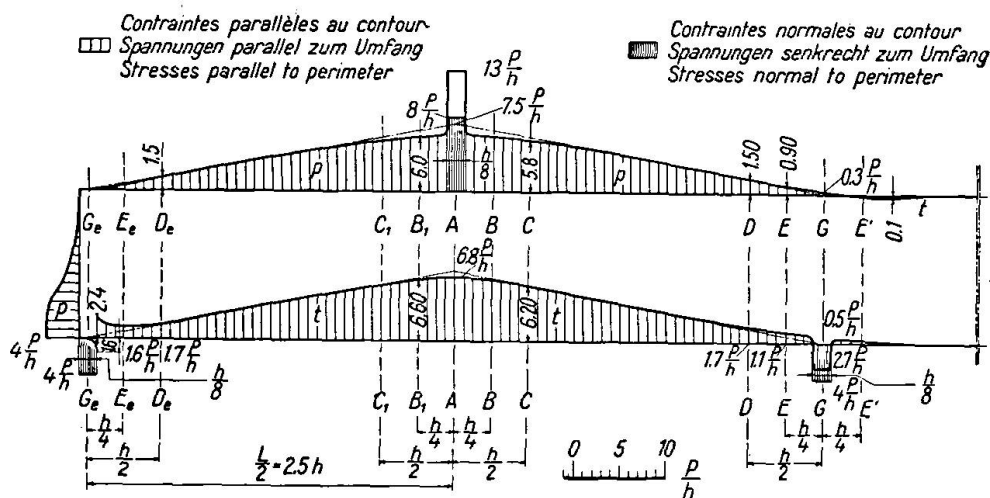


Fig. 7.

Au voisinage immédiat de la charge  $P$ , la compression  $\nu_x$  de la fibre supérieure diminue rapidement; ainsi, à la distance  $\frac{h}{4}$  du milieu de la poutre, soit le vingtième de la portée, elle est réduite de  $13 \frac{P}{h}$  à  $6 \frac{P}{h}$ , valeur déjà inférieure à la valeur qui découlerait du calcul approché, soit  $6,75 \frac{P}{h}$ .

Pour rendre plus sensible l'état des contraintes sur les bords de la poutre, nous avons représenté sur la figure 7 les contraintes tout le long du pourtour du modèle: les surfaces dessinées en hachures serrées sont relatives aux contraintes normales au contour (aux appuis de gauche et de droite  $\nu_y = 4 \frac{P}{h}$ ; à l'aplomb de la charge centrale,  $\nu_x = 8 \frac{P}{h}$ ); les surfaces aux hachures plus espacées sont les contraintes longitudinales sur le contour.

A titre de comparaison, on a tracé en traits mixtes sur les contours supérieur et inférieur la ligne représentative des valeurs des contraintes telles

<sup>2)</sup> Pour assurer cette répartition uniforme dans l'expérience, nous avons utilisé une couche de carton délimitant la zone d'application de la charge concentrée  $P$ .

qu'elles résulteraient du calcul usuel, donnant une répartition linéaire, qui part des valeurs 0 au droit des appuis (section  $G$  et  $G_e$ ) pour atteindre au milieu de la portée la valeur  $7,5 \frac{P}{h}$ .

En raison de la symétrie il n'y a pas de cisaillement dans la section  $A$ .

Sur la figure 3, on trouve également les contraintes relatives à la section  $B$ . On pourrait s'étonner de voir que, dans cette section ainsi que dans les suivantes, les différences des contraintes principales  $(\nu_1 - \nu_2)$  ne changent pas de signe, tandis que dans le cas de la section  $A$ , les différences des contraintes  $(\nu_x - \nu_y) = |(\nu_1 - \nu_2)|$  sont des tractions près du bord inférieur et des compressions près du bord supérieur.

Pour éviter toute interprétation erronée, il est nécessaire de bien distinguer les contraintes  $\nu_1$  et  $\nu_2$  des contraintes  $\nu_x$  et  $\nu_y$ . Ces dernières étant les contraintes horizontales et verticales sont également les contraintes principales dans le cas particulier de la section  $A$ ; mais dans la partie supérieure de la poutre, au-dessus d'un certain point, que l'on appelle point singulier [où s'annule la différence des tensions principales  $(\nu_1 - \nu_2)$ ] on a:  $\nu_x = \nu_2$ ,  $\nu_y = \nu_1$ , tandis que entre le point singulier et le bord inférieur, on a:  $\nu_x = \nu_1$  et  $\nu_y = \nu_2$ .

On s'en rend aisément compte en se reportant au dessin des lignes isostatiques (fig. 2).

On trouve en effet que dans la section  $A$ , au-dessus du point singulier (où, en même temps que la différence des contraintes principales s'annulent également les rayons de courbure des lignes isostatiques), les isostatiques des contraintes verticales sont dessinées en trait discontinu ( $\nu_1$ ), et les isostatiques des contraintes horizontales sont en trait plein, ( $\nu_2$ ), d'après la définition que nous avons choisie plus haut; c'est l'inverse au-dessous du point singulier.

En général, quand on traverse un point singulier suivant la courbe isostatique double qui y aboutit, il y a toujours interversion des familles des isostatiques.

Nous utiliserons dans la suite ces constatations qu'il nous a paru nécessaire de signaler ici, pour faciliter l'interprétation des phénomènes se produisant sous l'action de la charge concentrée.

La variation des contraintes normales,  $\nu_x$ , dans la section  $B$  (fig. 3) se rapproche déjà beaucoup plus de la loi linéaire du calcul approximatif, qui donnerait pour valeur extrême des contraintes  $\pm 6,75 \frac{P}{h}$ .

La courbe des cisaillements a son maximum  $0,9 \frac{P}{h}$  à une distance de  $0,31 h$  du bord supérieur, contrairement au calcul approché qui fournirait  $\tau = 0,75 \frac{P}{h}$  au milieu de la hauteur de la section.

La contrainte verticale  $\nu_y$  a déjà une valeur relativement très faible, avec un maximum égal à  $0,3 \frac{P}{h}$ .

Les contraintes  $\nu_x$  et  $\tau$  des sections  $C$  et  $D$  (figure 4), relevées expérimentalement, montrent des écarts très faibles par rapport au calcul approximatif.

C'est seulement dans le tracé des différences des contraintes principales  $(\nu_1 - \nu_2)$  de la section  $D$ , que commence à se manifester l'effet de l'appui qui se trouve à une distance  $\frac{h}{2}$  de la section  $D$ .

Les perturbations s'accroissent au fur et à mesure que l'on s'approche de l'appui, ainsi qu'on peut le constater sur les tracés des courbes des contraintes des sections  $E$  et  $G$  de la figure 4 et sur la figure 7.

On constate notamment que, sur le contour inférieur de la poutre à proximité de l'appui (fig. 7) la tension ne diminue pas aussi rapidement que le ferait supposer le calcul approché, et que sur l'appui même, la tension longitudinale devient brusquement une compression sur la longueur entière de la zone de répartition de la charge de l'appui.

Sur les diagrammes des contraintes de la section  $G$  (appui de droite) (fig. 4) on se rend compte en effet que la contrainte  $\nu_x$  est une compression d'une valeur de  $2,7 \frac{P}{h}$  sur le bord inférieur; si l'on s'éloigne de ce bord, en suivant la verticale, la compression se change en traction; elle redevient une compression en s'approchant du bord supérieur.

La courbe de répartition des cisaillements  $\tau$  de la section  $G$  conserve sensiblement une forme parabolique avec une valeur maximum de  $0,4 \frac{P}{h}$ .

La contrainte verticale  $\nu_y$ , nulle sur le bord supérieur, augmente d'abord lentement, puis rapidement, pour aboutir à la valeur  $4 \frac{P}{h}$  au contour inférieur sur l'appui même, en raison de ce que la zone de répartition de la réaction  $\frac{P}{2}$  a une longueur  $\frac{h}{8}$ .

Dans le cas de l'appui de gauche, la répartition des contraintes est considérablement modifiée par le fait que l'extrémité de la poutre se trouve sur le bord extérieur de l'appui, ainsi qu'on peut en juger sur la fig. 5, représentant les contraintes dans les sections  $E_e$  et  $G_e$ , et en la comparant avec les sections  $E$  et  $G$  de la figure 4.

Enfin, nous avons mesuré également les contraintes dans la section  $E'$  située à une distance de  $\frac{h}{4}$  à droite de l'appui de droite (fig. 2 et 7), les résultats de ces mesures étant reportés dans la figure 6.

Dans cette section, qui se trouve en dehors de la portée de la poutre, les contraintes ne sont pas nulles, contrairement à ce que donnerait le calcul approximatif. On vérifie toutefois que la répartition des contraintes dans la section  $E'$  est telle, que l'effort normal, l'effort tranchant et le moment fléchissant sont nuls, conformément aux conditions statiques du problème.

Dans le cas présent, les valeurs absolues des contraintes au voisinage des appuis sont relativement faibles par rapport aux contraintes dans les sections centrales  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , parce que l'effet du moment fléchissant est prédominant. Mais il en serait tout autrement si l'on réduisait la portée de la poutre en augmentant en même temps la charge, ou si la force agissant sur le contour supérieur était placée près de l'un des appuis. Dans ces deux cas, la section la plus fatiguée ne serait plus la section médiane, mais se trouverait dans la zone de l'appui même. Et c'est pour ces cas, en particulier, que l'examen des sections près de l'appui est utile.

Etude détaillée des efforts à l'aplomb de la charge centrale.

Examinons de plus près la variation de l'état des contraintes dans la zone située au-dessous de la charge centrale  $P$  (v. figure 2), en fonction de la

longueur de répartition de la force  $P$  sur le contour, tout en supposant toujours cette répartition uniforme.

Pour nous permettre de comparer les résultats expérimentaux avec la solution analytique, nous assimilerons l'état des contraintes au voisinage immédiat de la charge centrale de la poutre fléchie à celui produit par la superposition de deux états de charges élémentaires (fig. 8 a et 8 b):

a) Un demi-plan indéfini chargé uniformément sur une zone  $AB$ .

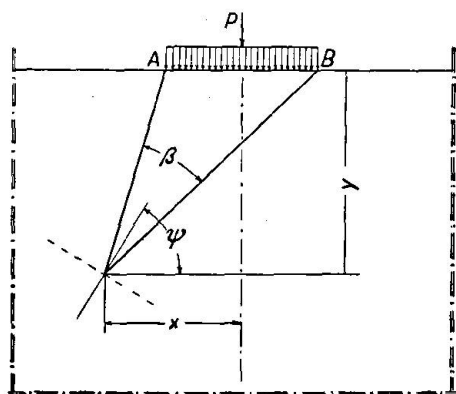


Fig. 8a.

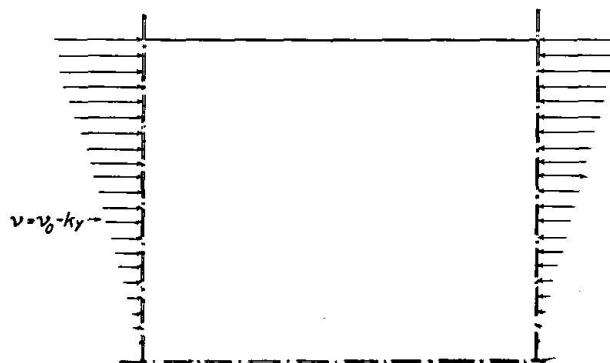


Fig. 8b.

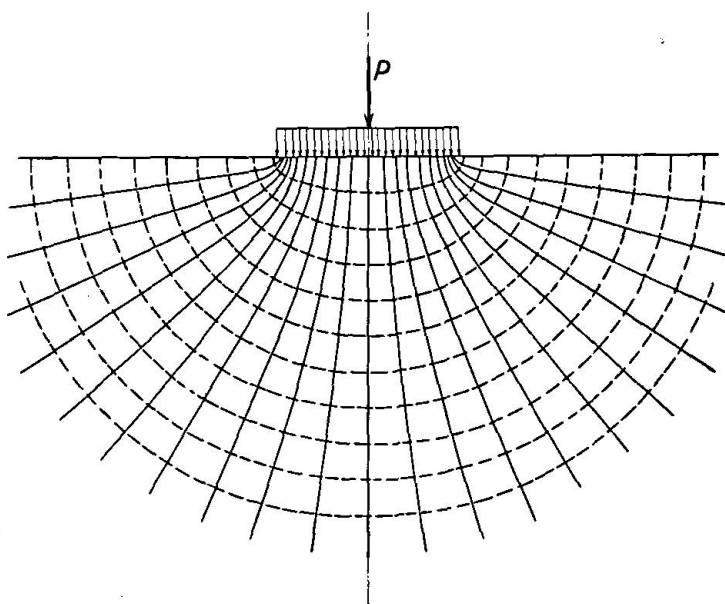


Fig. 9.

On sait que dans ce cas les contraintes  $\nu_x$ ,  $\nu_y$  et  $\tau$  sont définies par les formules suivantes:

$$\left. \begin{matrix} \nu_x \\ \nu_y \end{matrix} \right\} = \frac{p}{\pi} \left[ \beta \pm \frac{2ay(x^2 - y^2 - a^2)}{(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2} \right]$$

$$\tau = \frac{p}{\pi} \frac{4axy^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2}$$

où

$$p = \frac{P}{2a}.$$



Les lignes isostatiques sont des hyperboles et des ellipses homofocales (fig. 9).

b) Le même demi-plan indéfini comprimé dans le sens horizontal suivant la loi  $\nu_x = \nu_0 - k_y$ ; alors  $\nu_y = 0$ ,  $\tau = 0$ .

La superposition des deux états de charges élémentaires conduit à un état élastique qui fait apparaître trois points singuliers sur l'axe vertical de symétrie; sur cet axe on a  $\tau = 0$ , et les contraintes principales sont identiques à  $\nu_x$  et  $\nu_y$ . On aura pour  $x = 0$ :

$$\nu_x - \nu_y = -\frac{p}{\pi} \cdot \frac{4ay}{(y^2 + a^2)} + \nu_0 - ky.$$

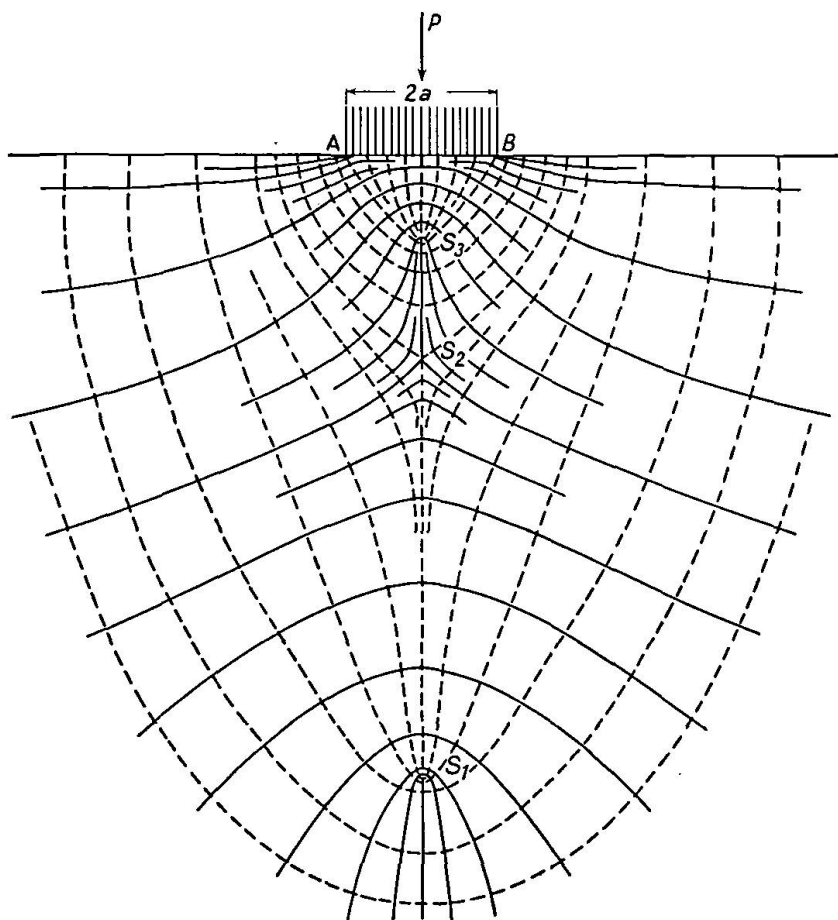


Fig. 10.

Les points singuliers sont caractérisés par la condition  $\nu_1 - \nu_2 = 0$ , c'est-à-dire ici:  $\nu_x - \nu_y = 0$ , ce qui conduit à l'équation de 3ème degré:

$$ky^3 - \nu_0 y^2 + a \left( ak + \frac{4p}{\pi} \right) y - \nu_0 a^2 = 0.$$

Les lignes isostatiques ont alors en général l'allure qui est donnée par la figure 10.

On remarque sur l'axe vertical de symétrie les 3 points singuliers  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ .

Ce dessin représente la disposition des lignes isostatiques dans la zone située au-dessous de la charge centrale, pour une poutre fléchie d'une façon

entièrement analogue à celle de la poutre de la fig. 2, mais avec une légère modification, relative à la longueur de la zone sur laquelle la charge  $P$  est répartie.

Tandis que dans le cas de la fig. 2 la longueur de cette zone était le  $1/8$  de la hauteur, dans le cas de la figure 10, la longueur  $AB$  est seulement égale à  $h/12$ .

Si l'on réduit encore la longueur  $AB = 2a$  en conservant les autres données caractéristiques du problème, le point singulier  $S_2$  s'éloigne très peu du bord supérieur, tandis que le point  $S_3$  s'en rapproche pour se confondre finalement

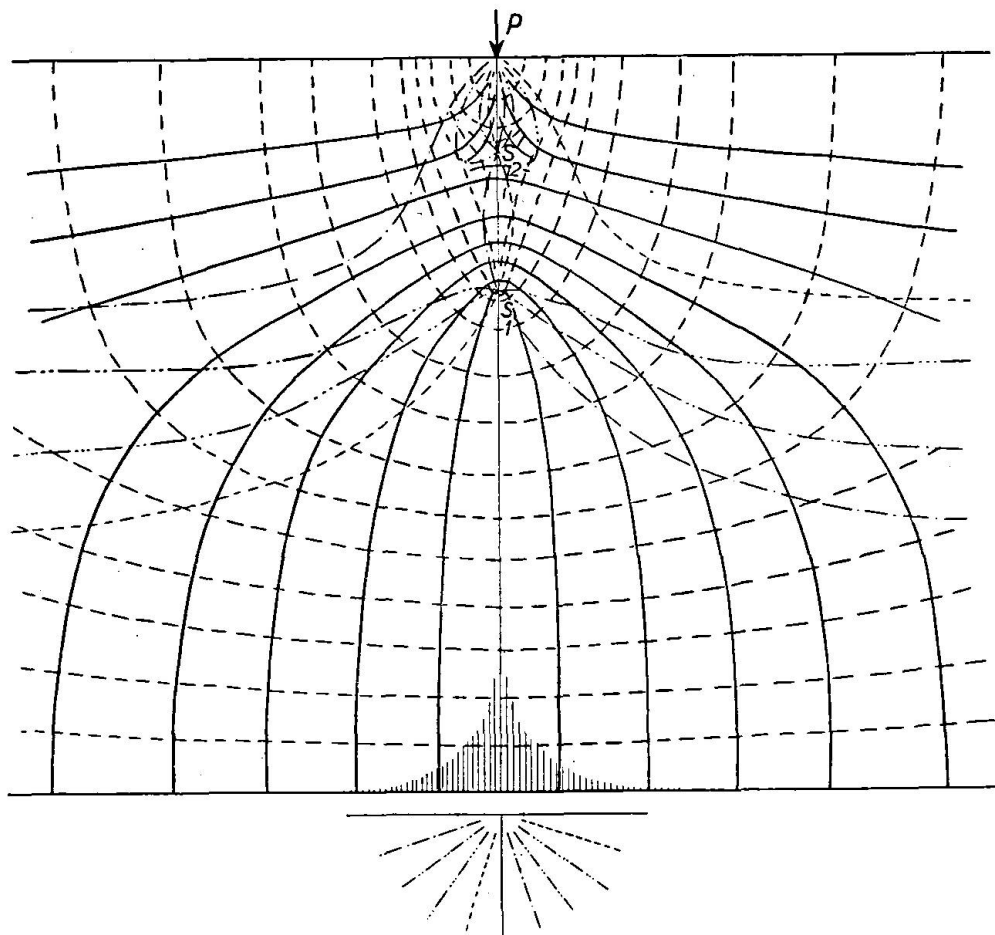


Fig. 11.

avec les points  $A$  et  $B$ , dans le cas limite où la longueur de répartition  $AB$  se réduit à zéro, c. à. d. quand la force  $P$  devient une charge concentrée en un point. Dans ce cas, l'allure des lignes isostatiques est celle qui est représentée sur la fig. 11.

Ce dernier problème a été résolu analytiquement d'une façon rigoureuse par A. Mesnager (19 bis) ainsi que nous l'avons déjà signalé au début.

D'autres savants comme C. Wilson, Stokes, ont cherché des solutions approximatives pour obtenir les expressions des contraintes  $\nu_x$ ,  $\nu_y$ ,  $\tau$  sous formes finies; l'inconvénient de ces dernières solutions consiste en ce qu'elles ne donnent des résultats satisfaisants que dans certains cas particuliers; si l'on voulait en faire usage pour d'autres cas, on se trouverait, quant au degré d'approximation, dans la même incertitude où l'on est lorsque l'on utilise les règles

de la Résistance des matériaux pour résoudre les problèmes dans lesquels les hypothèses simplificatrices correspondantes ne sont pas satisfaites d'une manière suffisamment approchée.

Les solutions analytiques rigoureuses ou approximatives que nous avons signalées, supposent d'ailleurs une poutre de longueur indéfinie. On se heurte à de nouvelles difficultés lorsqu'il s'agit d'étudier l'état des contraintes aux abords des extrémités.

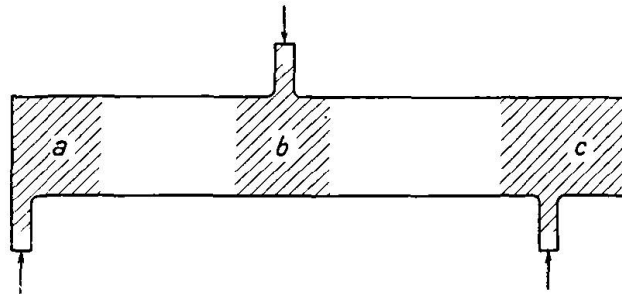


Fig. 12.

Notre étude expérimentale (fig. 2 à 7) a eu pour objet, entre autres, de faciliter la comparaison entre les contraintes qui se produisent au voisinage d'un appui (à gauche) placé à l'extrémité même de la poutre et d'un autre appui (à droite) au-delà duquel la poutre est prolongée jusqu'à une distance telle que l'effet produit par l'extrémité de la poutre ne se fait plus sentir dans la section de l'appui.

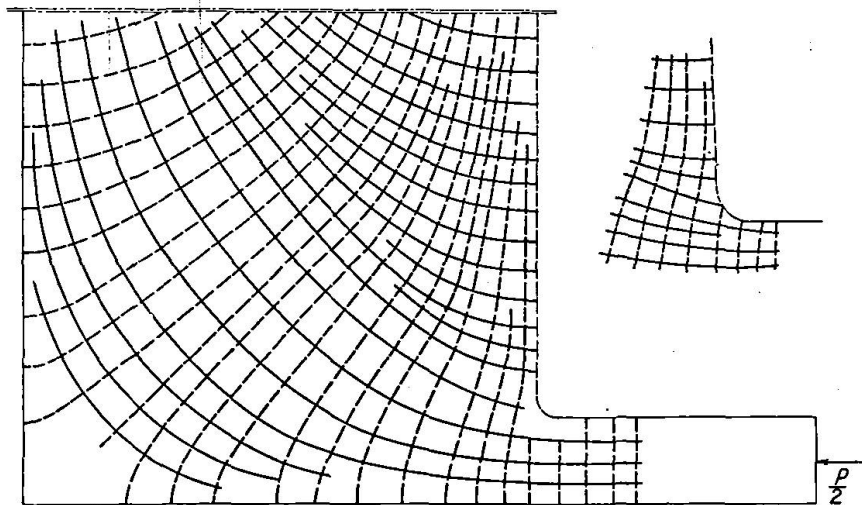


Fig. 13.

Nous avons poursuivi d'autre part les essais comparatifs sur un modèle analogue, présentant des saillies rectangulaires, normales aux faces de la poutre, avec des congés de raccordement d'un rayon égal à  $h/25$  (fig. 12). La largeur des saillies transmettant les charges concentrées a été de  $\frac{h}{6}$  environ.

Les figures 13 à 18 représentent respectivement les lignes isostatiques et les contraintes le long du contour du modèle dans 3 zones désignées sur la figure 12 par les lettres *a*, *b*, *c*.

Parmi les cas particuliers relatifs à l'état général des contraintes sous la charge centrale, représenté sur la figure 10 nous avons examiné jusqu'ici la

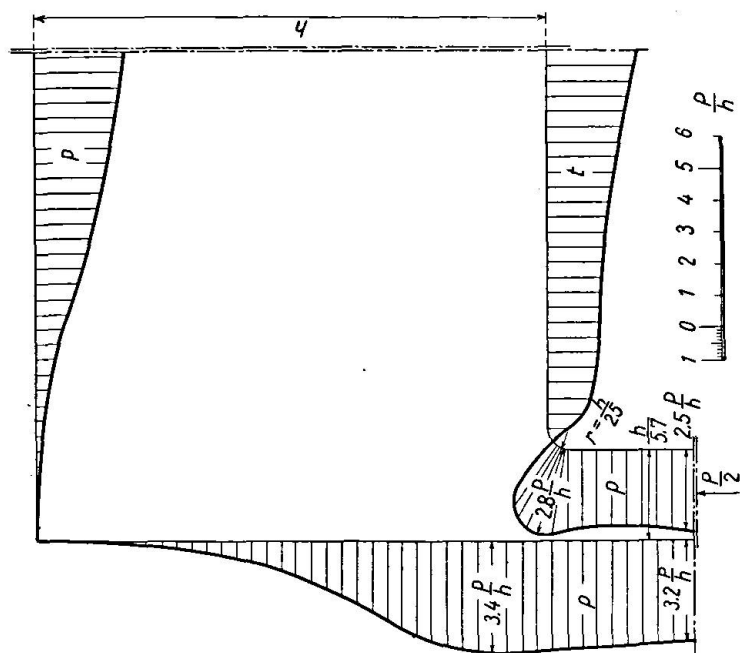


Fig. 14.

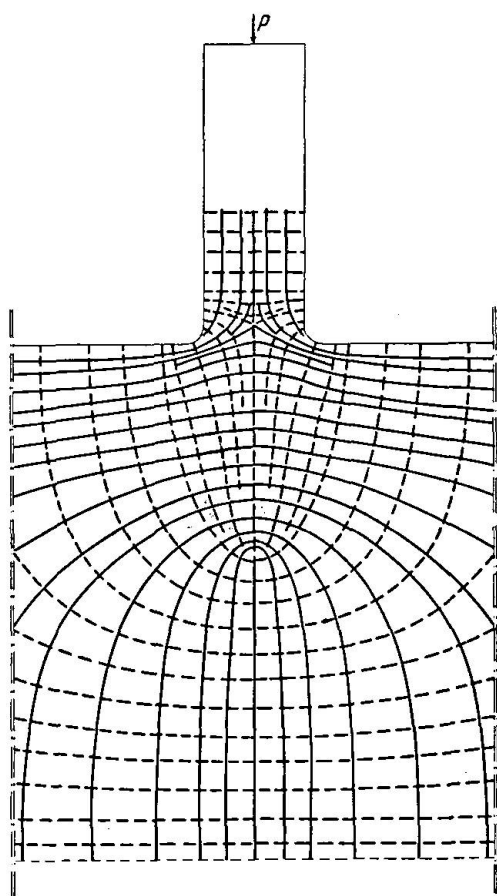


Fig. 15.

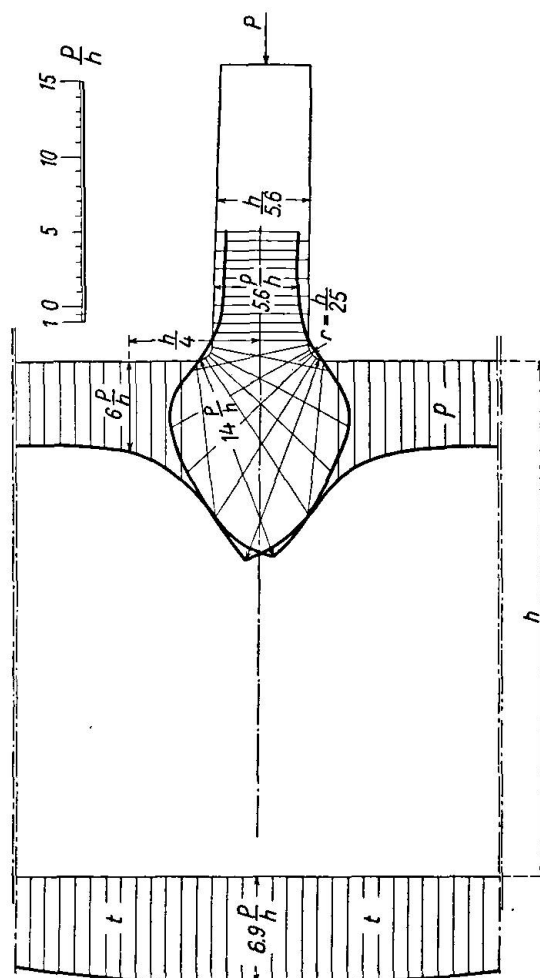


Fig. 16.

modification de l'allure des courbes isostatiques qui se produit quand on resserre la longueur  $AB$  de la zone de répartition de la charge.

Si on la dilate, par contre, on se trouve justement dans le cas étudié sur les figures 2 à 7, où la largeur de répartition est  $h/8$  au lieu de  $h/12$  de la figure 10. En comparant la configuration des lignes isostatiques de cette dernière figure avec leur disposition dans la zone correspondante de la figure 2, on constate qu'au lieu de 3 points singuliers, on a dans le cas où la longueur de la zone de répartition est égale à  $h/8$ , un seul point singulier sous la charge.

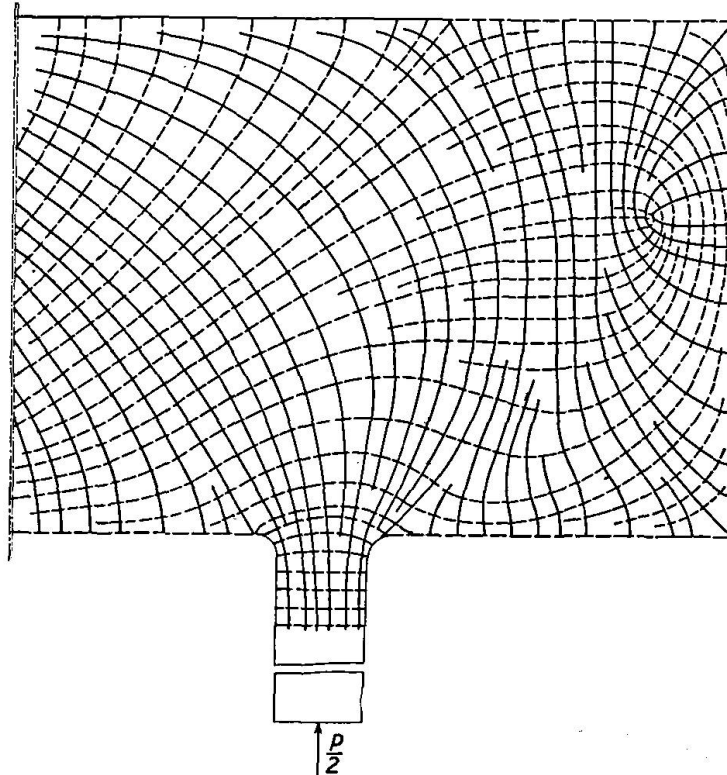


Fig. 17.

Cette disparition des points singuliers  $S_2$  et  $S_3$  (figure 10) correspond, dans l'interprétation analytique du phénomène à ce que deux des trois racines de l'équation du 3<sup>ème</sup> degré qui détermine les ordonnées des points singuliers sont devenues imaginaires.

On remarque sur la figure 10 que les points singuliers  $S_1$  et  $S_3$  sont du même caractère, que nous avons désigné dans notre communication antérieure (36) comme positif, contrairement à celui du point  $S_2$  qui est négatif:

Nous rappelons que nous considérons un point singulier comme „positif“ ou „négatif“ suivant que la rotation des lignes isoclines autour de ce point a lieu dans le même sens que la rotation des directions des tensions principales ou dans le sens contraire<sup>3)</sup>.

En dehors des points singuliers isolés, ou de premier ordre, qui sont traversés par une seule isocline de paramètre déterminé, il

<sup>3)</sup> Cette désignation a pour but d'éviter les confusions entre les points singuliers de première et de deuxième espèce. M. Föppl (7 bis) appelle en effet point singulier de „erster Art“ ce que M. Friedel (11) et A. Mesnager (20), (21) appellent point singulier de deuxième espèce et inversement.

La figure 22 est une récapitulation de la définition relative au point singulier isolé.

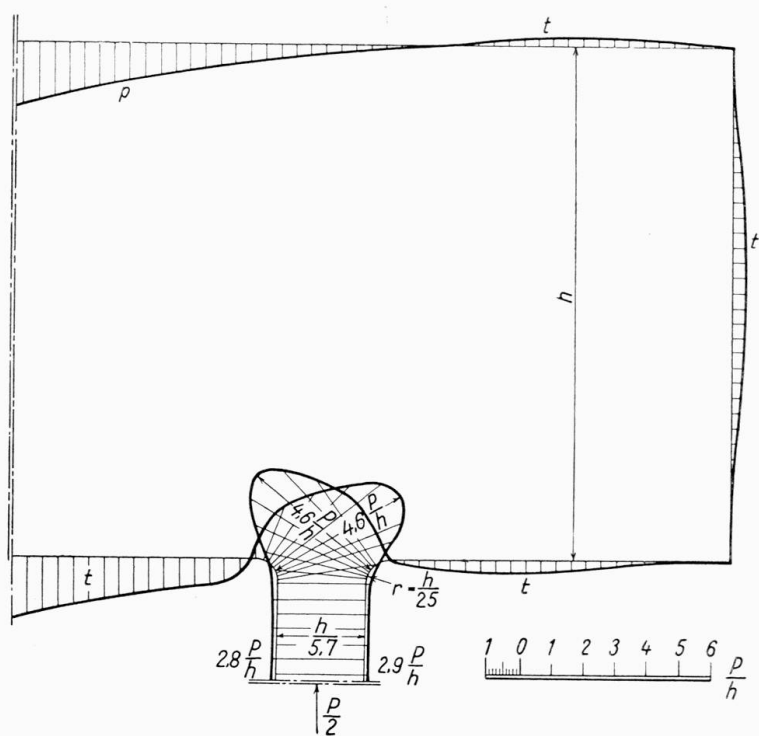


Fig. 18.

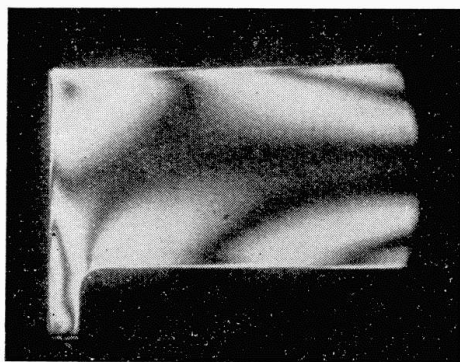


Fig. 19.

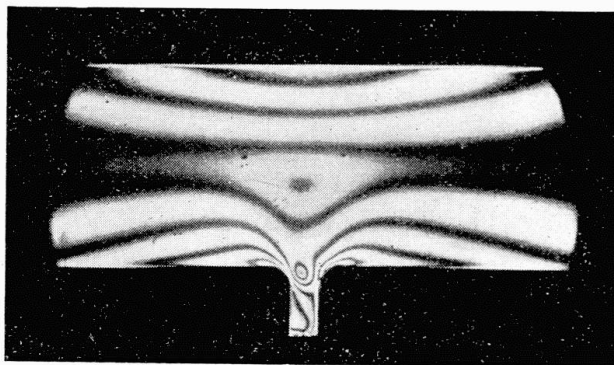


Fig. 20.

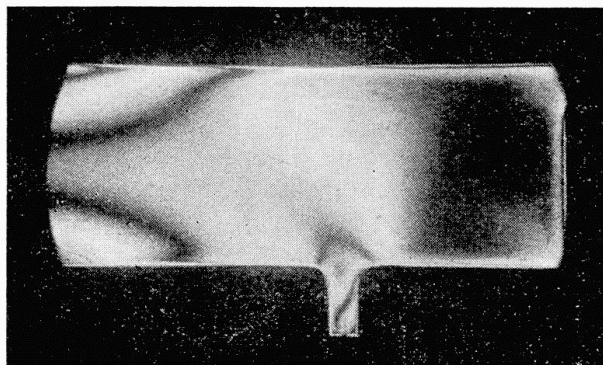


Fig. 21.

existe des points singuliers du deuxième ordre ou du troisième ordre ou encore d'ordre plus élevé, suivant qu'ils sont traversés par 2, 3, etc... lignes isoclines de même paramètre.

Un point singulier du premier ordre (ou isolé) ne peut être en partie positif et en partie négatif, ainsi que l'a déjà signalé A. Mesnager [(21) p. 25, (20) p. 102].

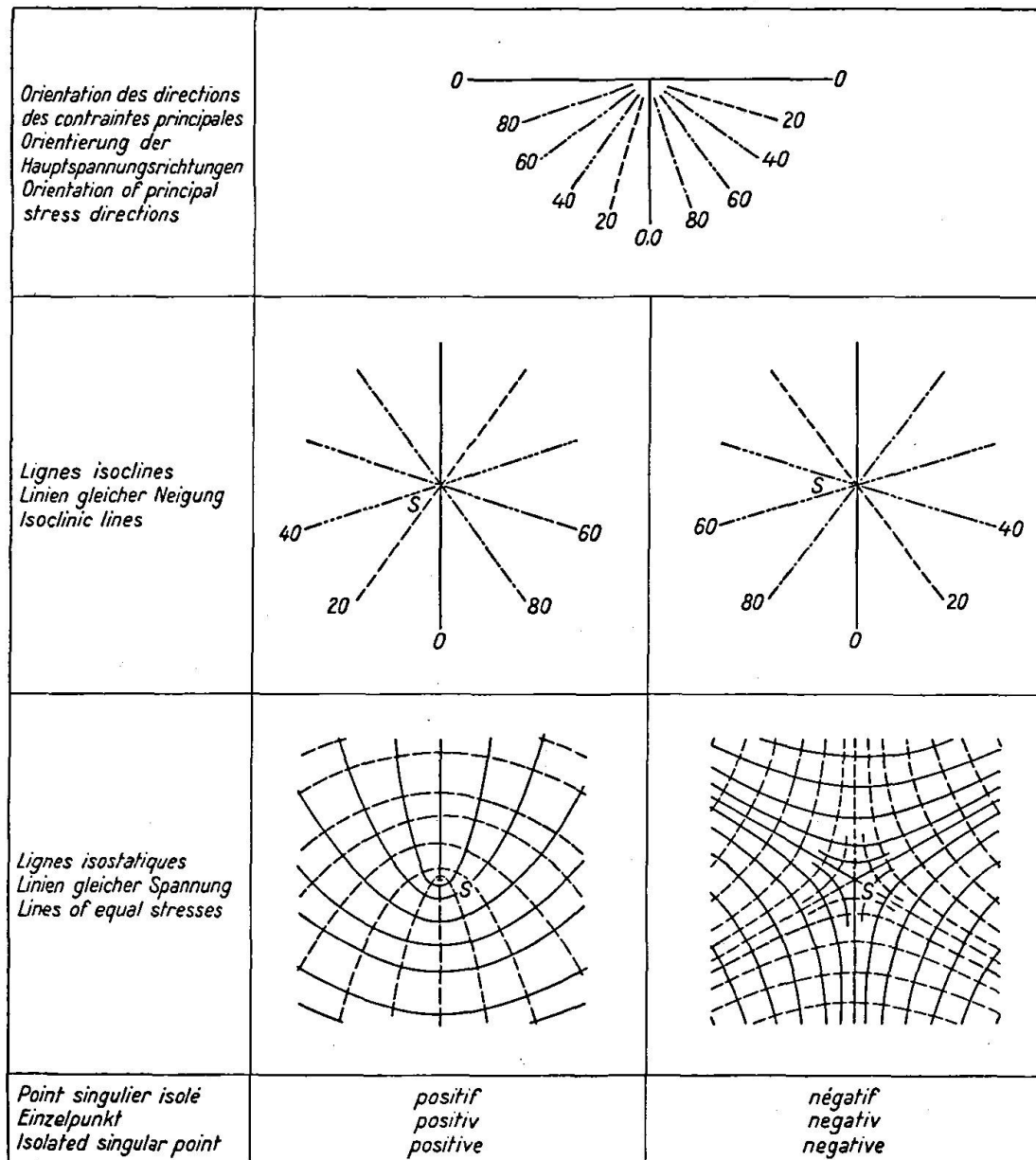


Fig. 22.

Mais les points singuliers d'ordre supérieur à un peuvent être de caractère mixte c. a. d. en partie positif et en partie négatif.

De tels cas se présentent sur les surfaces des ouvrages, partout où il y a une discontinuité dans les distributions des charges; par exemple ici, aux extrémités des zones supportant les charges concentrées. Dans le cas de la figure 10, les points A et B sont des points singuliers de caractère mixte.



L'équation des lignes isoclines, — lieu géométrique des points où les contraintes principales sont parallèles à une direction fixe, définie par un paramètre donné, — s'exprime en fonction des contraintes  $\nu_x$ ,  $\nu_y$ , et  $\tau$  par la relation

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2\tau}{\nu_x - \nu_y}.$$

On l'obtiendra donc en coordonnées cartésiennes en substituant dans cette équation les valeurs de  $\tau$  et  $(\nu_x - \nu_y)$  précédemment indiquées.

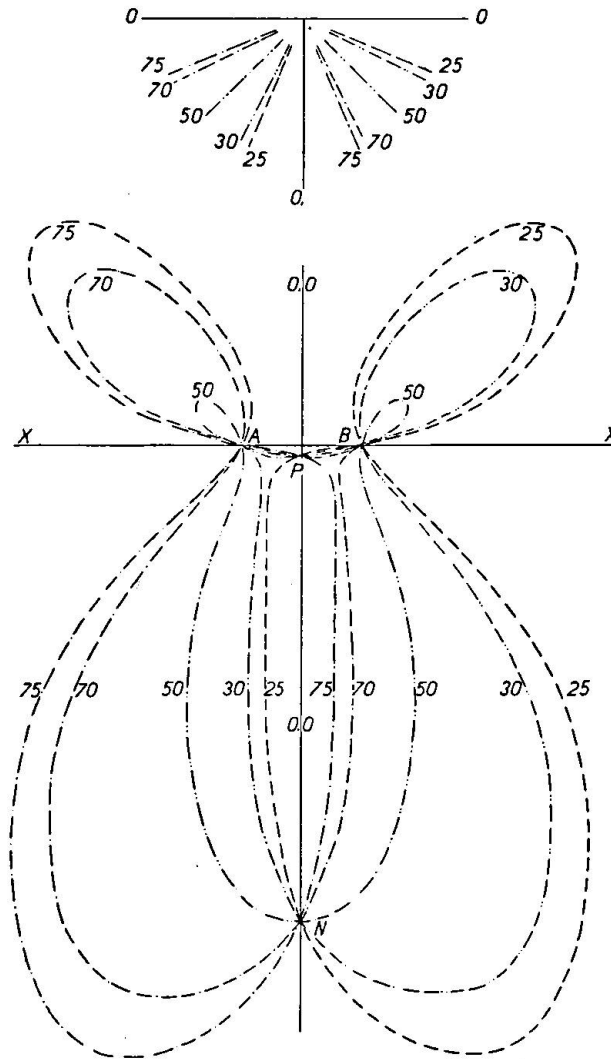


Fig. 23.

Dans le but de simplifier autant que possible les calculs, et comme il ne s'agit que d'étudier le caractère des courbes au voisinage immédiat des points  $A$  et  $B$  (fig. 10), nous pouvons supposer  $k = 0$ , ce qui aura pour conséquence de rejeter à l'infini le point singulier  $S_1$ , sans changer le caractère des phénomènes que nous désirons étudier aux points  $A$  et  $B$ .

Dans ces conditions, on aura:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{4xy^2}{\frac{\pi\nu_0}{P}[(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2] + 2y(x^2 - y^2 - a^2)}.$$

La figure 23 représente les lignes isoclines correspondant aux directions 0, 25, 50 et 75 grades, calculées à l'aide de l'équation précédente dans le cas particulier où  $\nu_0 = \frac{P}{4\pi a}$ .

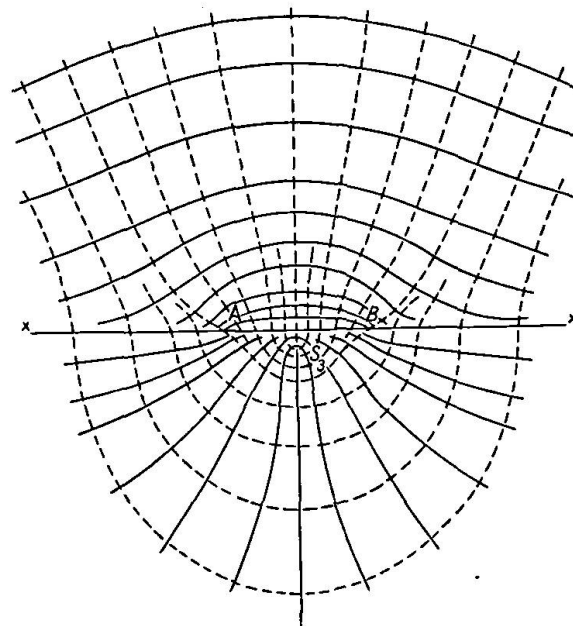


Fig. 24.

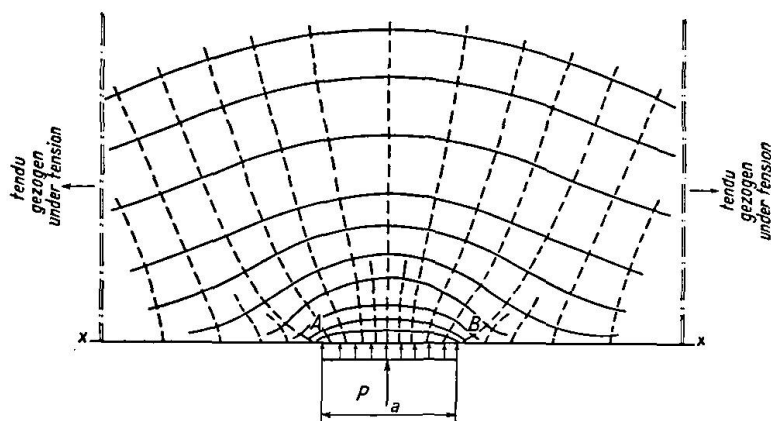


Fig. 24 b.

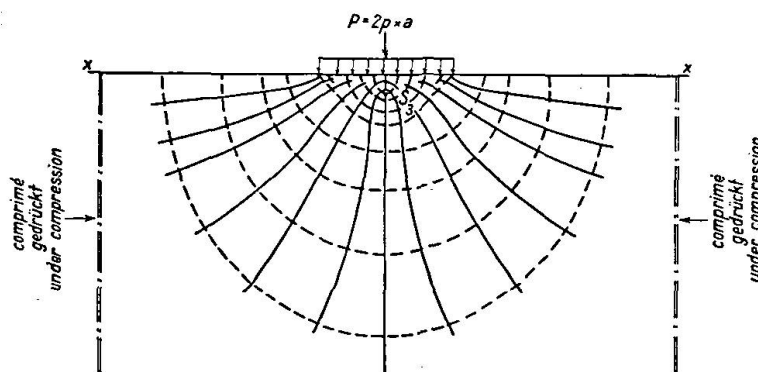


Fig. 24 a.

Les lignes isostatiques dessinées à l'aide de ces isoclines sont données sur la fig. 24.

Pour le cas que nous avons voulu étudier, il suffit de conserver seulement la moitié inférieure de la figure 24, ainsi que nous l'avons fait dans les fi-

gures 24 a, 24 b. Cette dernière correspond à un corps chargé par une force verticale  $P$ , uniformément répartie sur une longueur  $2a$ , et comprimé uniformément dans le sens horizontal par la contrainte  $\nu_0 = \frac{P}{4\pi a}$ .

La moitié supérieure correspondrait à un corps semblable, qui, au lieu d'être comprimé, serait tendu dans le sens horizontal.

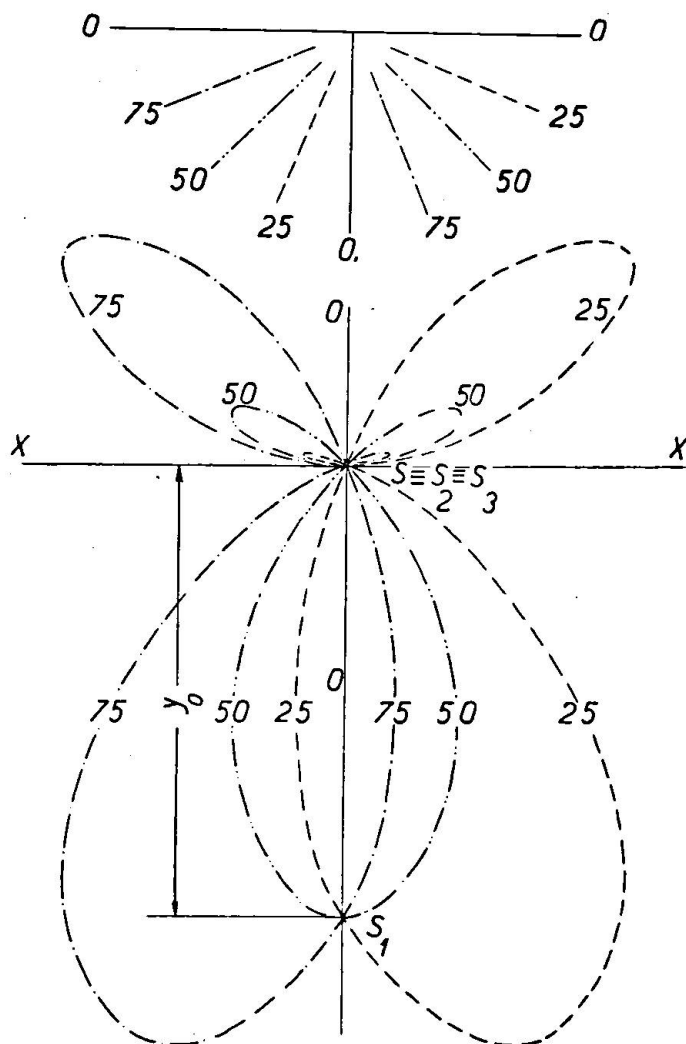


Fig. 25.

Pour en revenir à l'examen des points  $A$  et  $B$ , nous constatons sur le dessin des lignes isoclines, fig. 23, que ces points sont toujours traversés deux fois par l'isocline relative à un paramètre donné, tandis que chaque isocline ne passe qu'une seule fois par le point singulier  $S_3$ .

$S_3$  est donc un point singulier du premier ordre, tandis que les points  $A$  et  $B$  sont du 2<sup>ème</sup> ordre.

On remarque, en outre, sur le dessin des lignes isostatiques 24 a que le point  $S_3$  est positif, suivant la définition donnée plus haut.

Si l'on réduit la zone d'application  $AB = 2a$  à zéro, l'équation précédente définira les isoclines dans le cas d'une charge verticale concentrée en un point, appliquée au contour d'un corps comprimé ou tendu dans le sens horizontal; elle deviendra

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{4xy^2}{\frac{\pi v_0}{P}(x^2 + y^2)^2 + 2y(x^2 - y^2)}.$$

La figure 25 représente les lignes isoclines correspondant au cas où  $v_0 = \frac{2P}{\pi y_0}$ .

La figure 26 représente les lignes isostatiques dont la partie inférieure (fig. 26 a) ou supérieure (26 b) à l'axe  $X-X$  donne la direction des contraintes principales au voisinage du bord horizontal d'un solide comprimé dans le sens vertical par une force  $P$  concentrée en un point, et comprimé ou tendu dans le sens horizontal par une charge uniforme.

Sur la figure 25, on peut constater que le point  $S$  d'application de la charge est traversé trois fois par chaque courbe isocline; c'est donc un point singulier du troisième ordre.

Si l'on compare la figure 26 a à la figure 11, on voit sur cette dernière que le point d'application de l'effort concentré est de caractère absolument analogue à celui du point  $S$ .

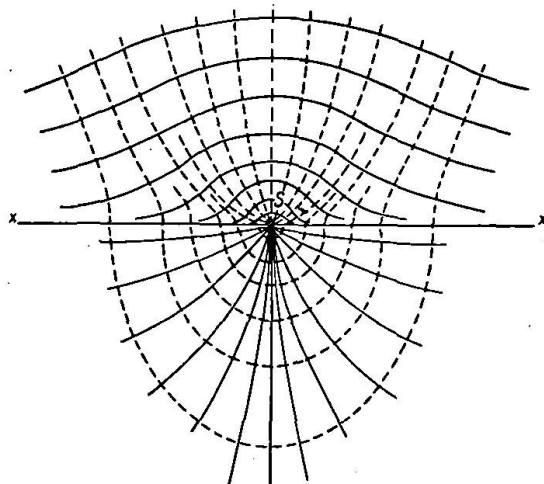


Fig. 26.

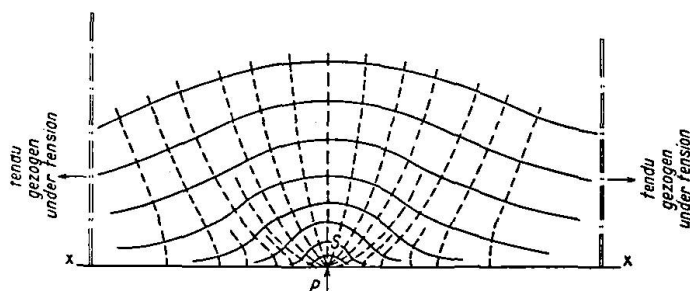


Fig. 26 b.

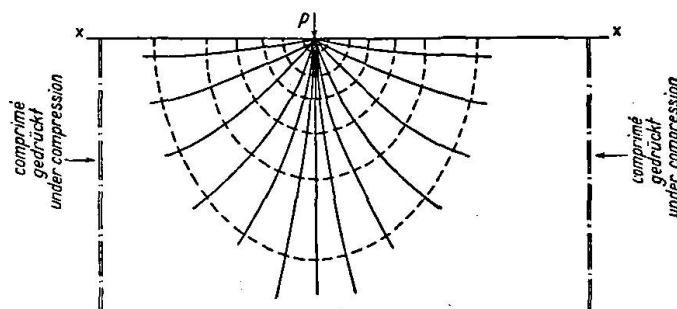


Fig. 26 a.

2° Poutre droite, simplement posée et chargée par une force isolée placée au 1/10<sup>ème</sup> de sa portée, la hauteur de la poutre étant égale au 1/5<sup>ème</sup> de sa portée.

L'écart entre les contraintes relevées expérimentalement dans le cas de l'étude dont les résultats sont représentés sur les figures 2 à 7, et celles qui sont déterminées par le calcul usuel approximatif, est, on le voit, assez con-

sidérable; il l'est davantage encore dans le cas d'une poutre chargée par une force placée dissymétriquement par rapport aux appuis.

Nous avons représenté sur la figure 27 les lignes isostatiques relevées expérimentalement.

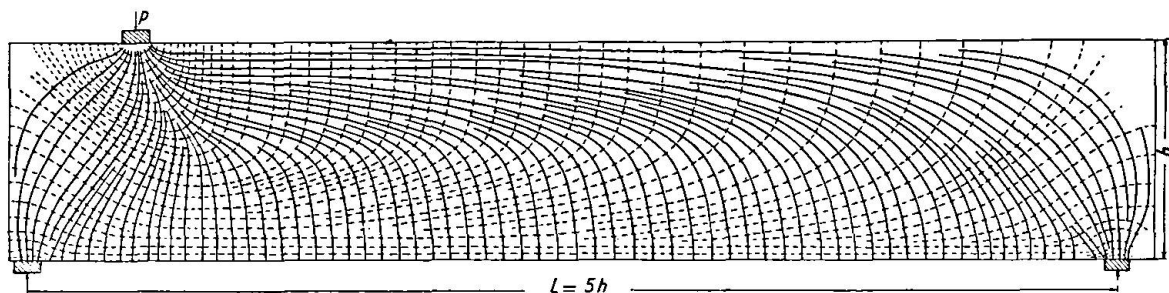


Fig. 27.

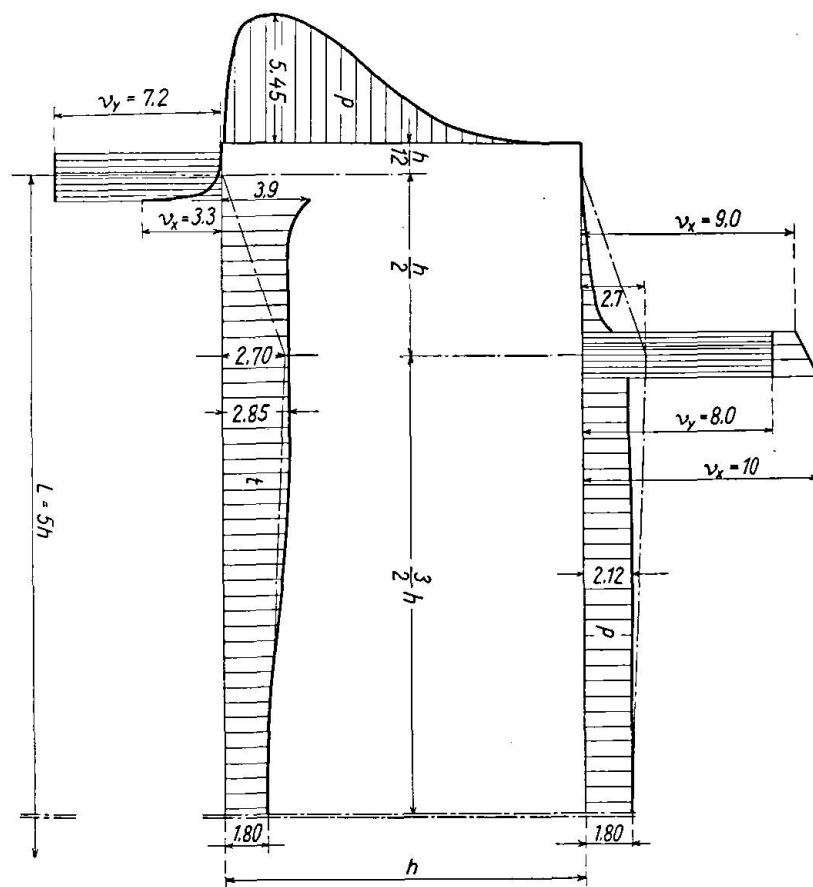


Fig. 28.

La poutre a été chargée sur la face supérieure par une force  $P$  agissant à une distance de  $h/2$  de l'appui gauche. Les efforts dûs à la charge  $P$  et aux deux appuis ont été transmis au modèle par l'intermédiaire des plaquettes de répartition de longueur  $h/8$  chacune.

Etant donné que la poutre est sur appuis simples, les réactions des appuis ont les valeurs suivantes: appui de gauche:  $0,9 P$ , appui de droite:  $0,1 P$ .

Nous avons tracé sur la figure 28 les contraintes mesurées le long du contour; à titre de comparaison la répartition des contraintes calculées d'après

les règles de la Résistance des matériaux, en supposant la charge ponctuelle, ainsi que les appuis, est indiquée en traits mixtes.

Les contraintes  $\nu_x$ ,  $\nu_y$ ,  $\tau$  dans les trois sections:

A: sous la charge  $P$ ;

C: dans l'axe de l'appui de gauche;

B: au milieu de la distance entre A et C, sont données par la figure 29.

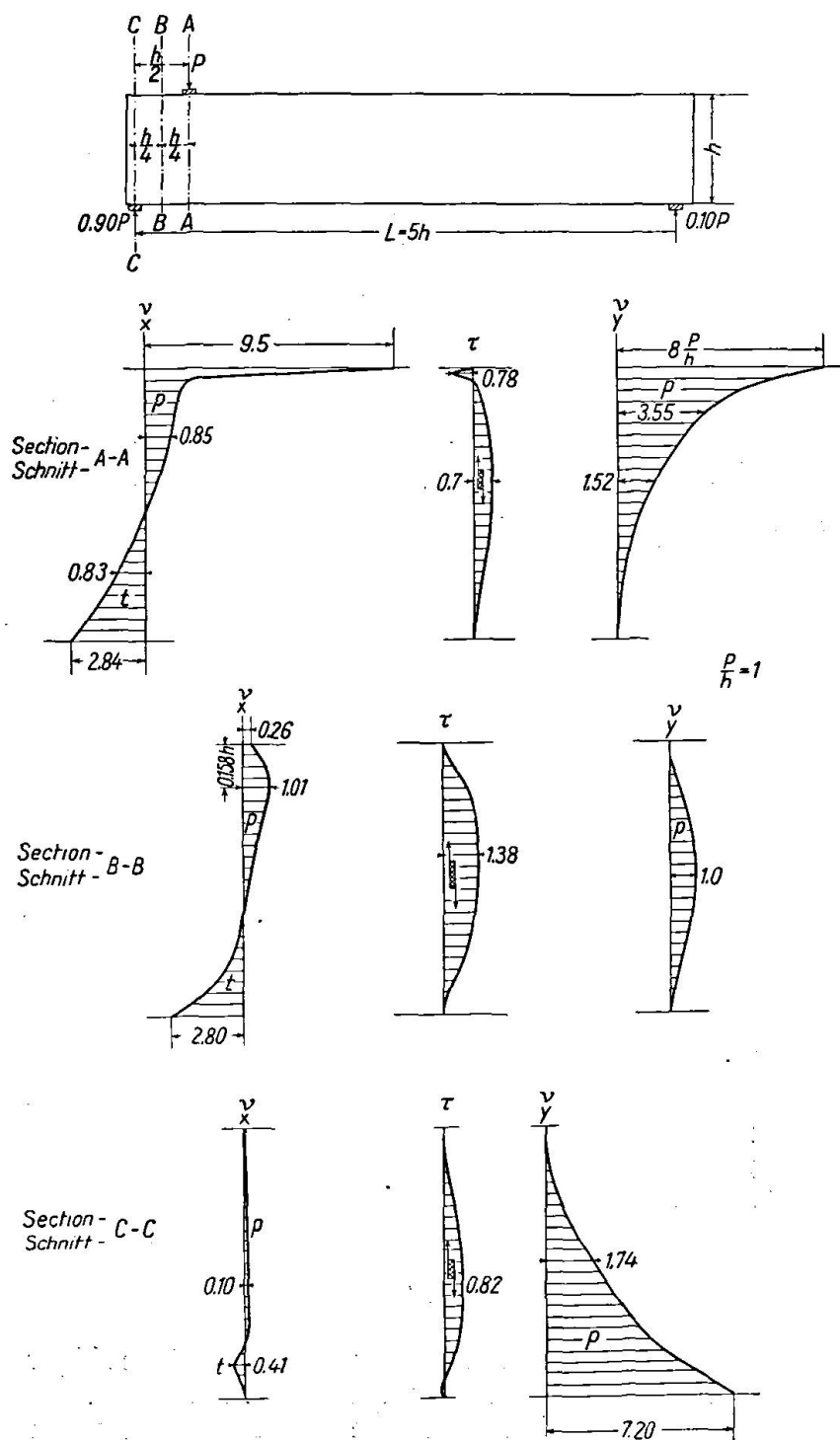


Fig. 29.

On remarque notamment que la contrainte  $\nu_x$  mesurée sur la fibre inférieure tendue dans la section  $B$  est supérieure au double de la contrainte calculée.

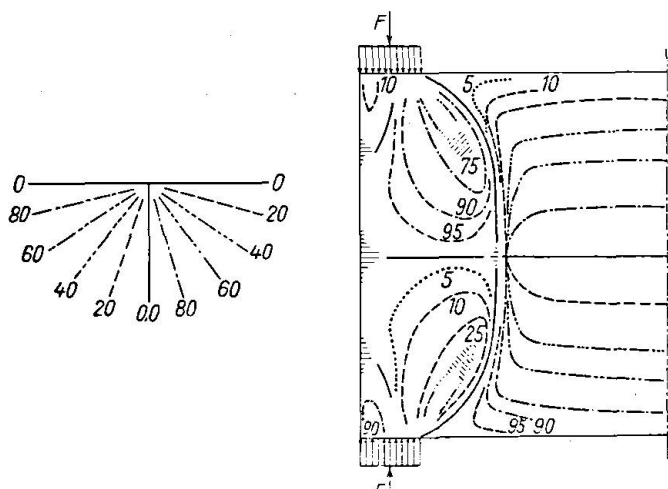


Fig. 30 a.

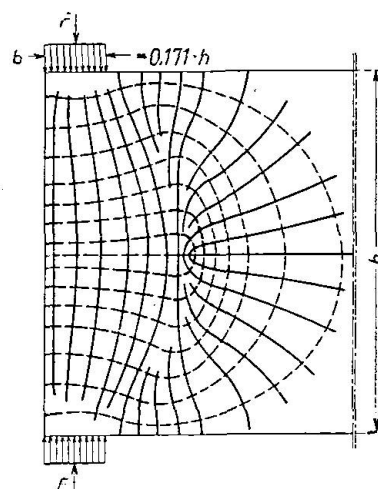


Fig. 30 b.

La contrainte de la partie comprimée de la même section n'est pas maximum sur le contour supérieur ainsi que le suppose le calcul approché, mais à une distance de  $0,158 h$  au-dessous de celui-ci.

Dans la section  $A$ , on constate une brusque augmentation locale de  $\nu_x$ , sous la charge, que nous avons trouvée aussi dans la section  $A$  de la première étude (v. fig. 3).

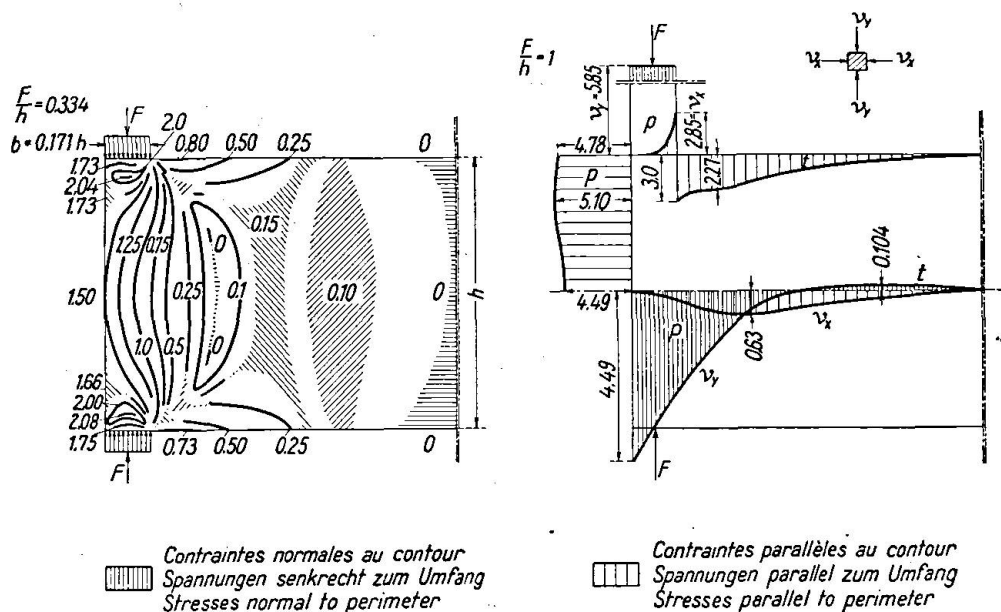


Fig. 31.

L'effet des perturbations cesse pratiquement à une distance légèrement supérieure à  $h$ , comptée horizontalement à partir de la section  $A$ ; dans toute la partie restante de la poutre, à l'exception de la zone de perturbation voisine de l'appui de droite, l'expérience confirme la validité des calculs de la Résistance des matériaux.



Les perturbations causées par l'appui de droite dans le cas présent sont sensiblement celles qui ont été étudiées dans le cas de la poutre examinée au début (fig. 2 et 5).

3° *Poutre droite chargée par deux forces opposées, dirigées normalement à l'axe longitudinal de la poutre, et placées à son extrémité* (fig. 30 et 31).

La longueur de la zone de répartition de la charge extérieure  $F$  a été dans cet essai:  $b = 0,171 h$ . Le modèle a été observé tout d'abord en lumière polarisée rectilignement, ce qui a permis de relever les lignes isoclines (fig. 30 a) à l'aide desquelles on a tracé ensuite les lignes isostatiques (fig. 30 b).

La deuxième phase expérimentale (mesure des biréfringences en lumière polarisée circulairement), nous a fourni le réseau des lignes d'égales différences des contraintes principales ( $\nu_1 - \nu_2$ ) (fig. 31 a).

La graduation des courbes portée sur cette figure représente le résultat direct des mesures, avec une légère dissymétrie par rapport à l'axe longitudinal qui est due à de petits défauts, d'ailleurs inévitables, du système expérimental.

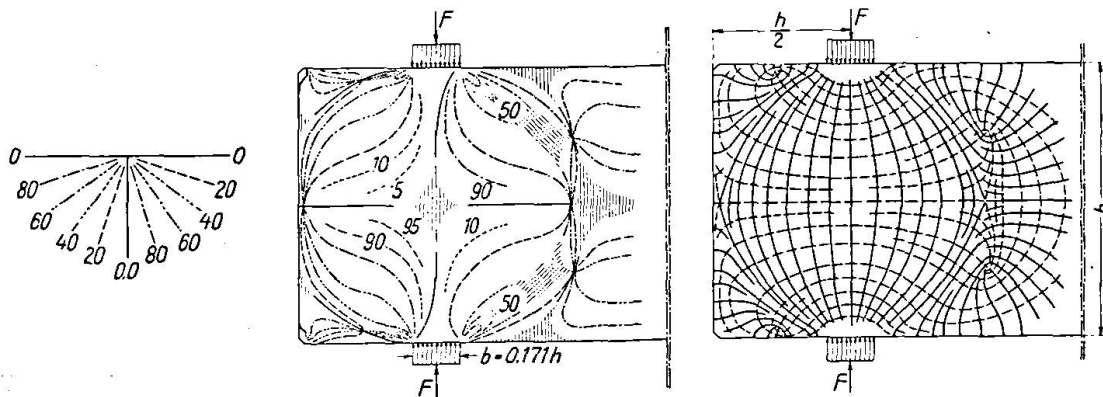


Fig. 32a.

Fig. 32b.

L'unité de graduation est définie par la valeur relative de la charge extérieure  $\frac{F}{h} = 0,334$ .

A l'aide de ce dessin, en prenant les valeurs moyennes des deux moitiés et en utilisant quelques mesures complémentaires, il est facile de tracer les lignes représentant les contraintes le long du contour (fig. 31 b). Pour faciliter l'utilisation de ces résultats, nous avons exprimé dans cette figure les contraintes en prenant pour unité le rapport  $\frac{F}{h}$ .

Sur cette même figure, nous avons représenté aussi les contraintes relatives à l'axe longitudinal, où  $\nu_x$  et  $\nu_y$  sont les contraintes horizontale et verticale. Les lettres  $p$  et  $t$  désignent une compression et une traction pour éviter toute erreur dans l'interprétation des résultats.

4° *Poutre droite chargée par deux forces opposées, dirigées normalement à l'axe longitudinal de la poutre et placées à une distance de  $h/2$  de son extrémité,  $h$  étant la hauteur de la poutre* (fig. 32, 33).

L'état des contraintes varie assez rapidement si l'on change la position des forces  $F$ .

L'étude qui fait l'objet des figures 32 a et b, 33 a et b, a été exécutée dans les conditions entièrement analogues à celles de l'étude précédente.

Figures 32 a: lignes isoclines;

Figures 32 b: lignes isostatiques;

Figures 33 a: lignes d'égales différences des contraintes principales pour  $\frac{F}{h} = 0,429$ ;

Figures 33 b: contraintes le long du contour et le long de l'axe longitudinal, le rapport  $\frac{F}{h}$  étant pris égal à l'unité.

Ici encore, les lettres  $p$  et  $t$  désignent une compression et une traction.

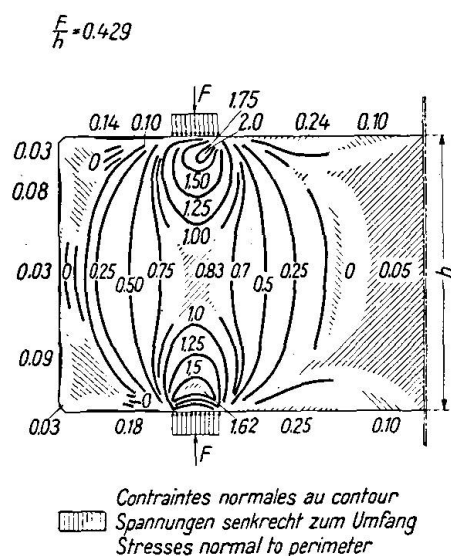


Fig. 33 a.

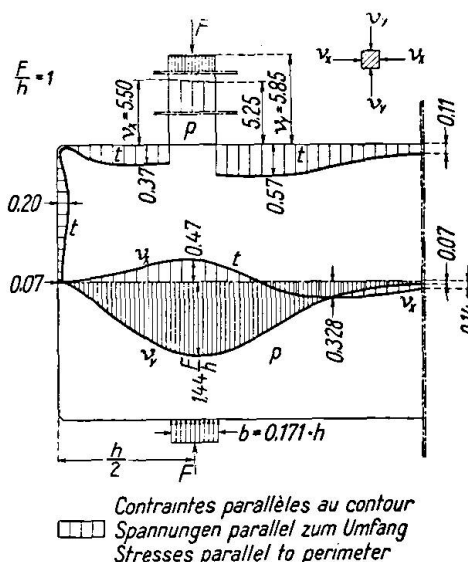


Fig. 33 b.

Il est intéressant de constater que, dans le cas où la charge  $F$  se trouve à l'extrémité de la poutre, la contrainte horizontale  $v_x$  relative à l'axe longitudinal est une compression (fig. 31 b), tandis que si la charge  $F$  est éloignée de l'extrémité (fig. 33 b) la même contrainte  $v_x$  est une traction sur une partie assez grande de l'axe longitudinal de la poutre; ce n'est alors que dans la zone plus éloignée de l'extrémité de la poutre, qu'elle devient une compression, avant de s'annuler à une distance égale à  $1,5 h$  comptée horizontalement à partir du point d'application des charges  $F$ .

Nota. Le modèle qui nous a servi pour l'exécution des recherches relatives à la position des points singuliers sous la charge a été découpé dans une lame de parilithe, matière fabriquée par les Etablissement Kuhlmann à Paris, qui ont bien voulu en mettre gracieusement à notre disposition. Cette matière a une sensibilité optique très élevée, environ 20 fois plus forte que le verre; mais malheureusement, elle présente à peu près des inconvénients semblables à ceux de la bakélite ou phénolithe, c. à d. une hystérésis élastique assez prononcée, et des contraintes initiales, en particulier le long du contour découpé. L'avantage d'une plus grande sensibilité se trouve réduit en grande partie par la nécessité de faire deux séries de mesures, l'une sur le modèle non chargé, l'autre sur le modèle chargé, dans le but d'éliminer les contraintes pré-existantes. On remarque sur les photographies 19, 20 et 21 et sur les autochromes 19 bis, 20 bis et 21 bis, qui représentent les franges d'égales biréfringences, ou d'égales différences des contraintes principales, dans les trois zones intéressées  $a - b - c$ , une certaine perturbation de ces franges sur le contour du modèle, ces perturbations étant dues aux contraintes consécutives au découpage.

Un recuit convenablement exécuté peut améliorer ces défauts, mais non pas d'une façon durable, car, généralement, au bout de deux ou trois jours, les contraintes initiales réapparaissent. Mais dans beaucoup de cas, le recuit même reste impuissant, si l'état initial de la matière n'est pas suffisamment bon.

Quand il s'agit de mesures très exactes, surtout sur le contour, ce sont les modèles en verre qui donnent incontestablement, au moins jusqu'à présent, les meilleurs résultats.

Néanmoins, au Japon, M. *Tuzi*, et aux Etats-Unis, MM. *Frocht* et *Solakian* ont obtenu des résultats remarquables sur des modèles en phénolithe et bakélite.

### Bibliographie.

1. *Bay*: Spannungszustand in hohen Trägern. Stuttgart, 1931.
2. *Boussinesq*: Application des Potentiels. Gauthier-Villars, 1885.
3. *Coker-Filon*: Treatise on Photoelasticity. Cambridge University Press, 1931.
4. *Delanghe*: Génie Civil, 10, 17, 24 Sept. 1927; Revue d'Optique, 1928, p. 237 à 265, 285—313.
5. *Dischinger*: Mémoires Ass. Int. P. C., I, 1932, p. 70—91.
6. *Favre*: Schweizerische Bauzeitung, 3, 10 Déc. 1927.
7. — Revue d'Optique, 1929.
- 7 bis. *Föppl*: Mitteil. Mech. Tech. Lab. München, fasc. 34 (1930), 35 (1931).
8. *Frenkel*: Science et Industrie, Travaux, Janv., mars, avril 1935.
9. *Filon*: Philosoph. Magazine, Ser. VI, vol. 23, 1912.
10. *Flamant*: A. sc. 20/VI/1892; Annales P. C., Juillet 1893, p. 258.
11. *Friedel*: Bul. Soc. Fr. Minéral. 1924, Mars, Avril 1924, p. 60 à 117.
12. *Goodier*: Trans. Am. Soc. Mech. Eng., Appl. Mech., vol. 54, n° 18, p. 173, 1932.
- 12 bis. *Hennig*: Forschung (VDI), Mars-Avril, 1933.
13. *Heymans*: Bul. Soc. Belge des Ingénieurs et Industriels, t. II, n° 2, 1921, Bruxelles.
14. *Marcotte*: Arts et Métiers, Février-Mars, 1927, p. 49—56, 78—84.
15. — La revue industrielle, Mai-Juin, 1934.
16. — Annales P. C. 1934/VI.
17. *Mesnager*: Annales P. C. 1901/IV.
18. — Annales P. C. 1913/IV.
19. — La Technique Moderne, 6, 15 Mars 1924.
- 19 bis. — Bulletin Technique de l'A. I. Br., n° 2, 1926, Bruxelles.
20. — Cours de Résistance des matériaux. Dunod, 1928.
21. — Mémorial des Sciences Physiques, fasc. X. Gauthier-Villars, 1929.
22. *Miura*: Spannungskurven in rechteck. u. keilförm. Trägern. Springer, Berlin, 1928.
23. *Oberti*: Indagini sperimentali sulle Costruzioni. La Photo-Elasticità, Milan, 1932.
24. *Pigeaud*: A. Sc. vol. 161, p. 673, 1915.
25. *Seewald*: Abh. Aerod. Inst. Techn. Hochschule, Aachen, vol. 7, p. 11, 1912.
- 25 bis. *Siebel, Kopf*: Forschungsheft 369 (VDI).
26. *Solakian*: Amer. Soc. Civ. Eng., Transactions, vol. 99 (1934), p. 1196.
27. — Journal Amer. Welding Society, Fev. 1934, p. 22—29.
28. — Product Engineering 1933—34.
29. *Stokes*: Mathematics and Physics Papers, vol. 5, p. 528.
30. *Suquet*: Annales P. C. 1934/IV.
31. *Tesár*: Technický Obzor, 1925, n° 15; 1928, n° 21, 22, 23.
32. — Ac. Sc. 23/3/1931.
33. — Le Génie Civil, 20/6, 20/6/1931.
34. — Fotoelasticimetrie, Ottův slovník naučný, Dodatky, Prague.
35. — Technický slovník naučný: Fotoelasticimetrie, Izoklonné, Izochromatické, Iso-statické křivky, Kompenzace, Latometr, Optická metoda měř. napětí. Prague, 1928—32.
36. — Mémoires de l'Assoc. Int. des Ponts et Charpentes, 1<sup>er</sup> vol., p. 497—506.
37. — Revue d'Optique, Mars 1932.
38. — Rapport final du 1<sup>er</sup> Congrès Int. des Ponts et Charpentes 1932, p. 333—336.
39. — La Science Aérienne, Septembre-Octobre 1933, p. 372—394.
40. — A graphical representation of two dimensional Stress Distributions. Journal of the Franklin Institute, Philadelphia; August, 1933.
41. — La Technique Aéronautique, 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> trimestre 1934, p. 159—176, 213—225.

42. *Timpe*: Zeitschrift Math. Physik, vol. 55, p. 149, 1907.
43. *Tuzi*: Scientific Papers of the Institute of Physical and Chemical Research in Tokio, 1927, p. 79—96, 104—120.
44. — Bulletin of the Inst. Phys. Chem. Research, Vol. XII, n° 11.
45. *Wilson*, C.: Philosophical Magazine, Déc. 1891.
46. *Wyss*: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern. Springer, Berlin, 1926.

### Résumé.

Le calcul sommaire suivant les règles de la résistance des matériaux laisse échapper souvent les zones de fatigues importantes auxquelles les constructions sont exposées par effet des charges concentrées. Les calculs précis ayant pour base la théorie d'élasticité sont en général beaucoup trop compliqués, si non entièrement inabordables pour les besoins de l'art de l'ingénieur.

Les recherches expérimentales à l'aide de la lumière polarisée sur les modèles réduits offrent les moyens rationnels de solutions exactes de tels problèmes.

Dans les recherches, qui font l'objet de la présente étude, l'auteur a traité le problème d'une poutre simplement posée et chargée d'une force concentrée agissant, dans un cas, au milieu de la portée, et dans le second cas, à proximité de l'un des appuis.

Les considérations théoriques relatives aux „points singuliers“ font suite aux définitions des caractéristiques expérimentales des zones aux voisinages immédiats des charges concentrées.

L'étude se termine par l'exposé des résultats expérimentaux d'une poutre chargée par deux forces normales et opposées, appliquées, d'une part, sur les faces longitudinales à l'extrémité même de la poutre, et d'autre part à une distance, de l'extrémité, égale à la demi-hauteur de la poutre.

### Zusammenfassung.

Bei der gewöhnlichen Berechnung nach der Festigkeitslehre werden oft die Zonen übersehen, wo infolge der Wirkung von Einzellasten bedeutende Beanspruchungen auftreten können. Die genauen Berechnungen auf Grund der Elastizitätstheorie sind im allgemeinen zu verwickelt, wenn nicht gänzlich unlösbar, für die Zwecke des Ingenieurs.

Die Versuchsforschungen mit polarisiertem Licht an verkleinerten Modellen bieten die zweckmäßigen Mittel für die genaue Lösung solcher Probleme.

Der Verfasser behandelt in den Versuchen dieser Studie die Frage eines einfach aufgelagerten Balkens, der durch eine Einzellast in einem Falle in der Mitte und im andern Falle bei einem Auflager belastet wird.

Nach Bezeichnung der Versuchsmerkmale an den Teilen neben der Einzellast werden theoretische Betrachtungen über die singulären Punkte angestellt.

Die Untersuchung schließt mit der Angabe von Versuchsergebnissen bei einem durch zwei senkrechte und entgegengesetzte Kräfte belasteten Balken; diese Kräfte wirken in einem Falle auf die Längsseiten am Ende des Balkens, im andern Falle in einem Abstand gleich der halben Höhe vom Ende entfernt.

### Summary.

The usual method of calculation, based on the theory of strength of material, often overlooks those zones where considerable stresses are set up due to effects of point loads. The exact methods of calculation as offered by the theory of elasticity are in most cases by far too intricate, if not fully insoluble, for the purpose of engineers.

Experimental investigation with polarised light on reduced scale models supplies a suitable means of accurately solving such problems.

The author studies by means of tests the behaviour of a simply supported beam loaded in one case in midspan by a point load, and alternatively by a point load and placed over the point of support.

The necessary explanations of the characteristics of the tests are given for places near the point of application of the concentrated load, followed by theoretical considerations on singular points.

The investigation concludes with a statement of test results obtained from a beam loaded with two forces acting in opposite directions. In one case these forces, placed at the ends of the beam, act on its longitudinal faces; in the other case at a distance equal to half the depth.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide