Zur Berechnung verankerter Hängebrücken

Autor(en): **Stüssi, Fritz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **4 (1936)**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5098

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ZUR BERECHNUNG VERANKERTER HÄNGEBRÜCKEN.

CONTRIBUTION AU CALCUL DES PONTS SUSPENDUS ANCRÉS.

THE CALCULATION OF ANCHORED SUSPENSION BRIDGES.

Dr. sc. techn. FRITZ STÜSSI, Privatdozent an der E. T. H., Zürich.

1. Das Tragverhalten verankerter Hängebrücken ist besonders in den letzten Jahren durch eine Reihe von Veröffentlichungen, die bekanntlich von einer Arbeit J. Melans [1]) ihren Ausgang nehmen, weitgehend abgeklärt worden. So wertvoll die meisten dieser Untersuchungen für die Förderung unserer Erkenntnisse über die Formänderungseinflüsse bei solchen Tragwerken sind, so können sie doch als praktische Bemessungsverfahren, vom Konstruktionstisch aus beurteilt, nicht voll befriedigen. Die in den bisher bekannten Veröffentlichungen bevorzugte mathematische Darstellung des Problems ist normalerweise

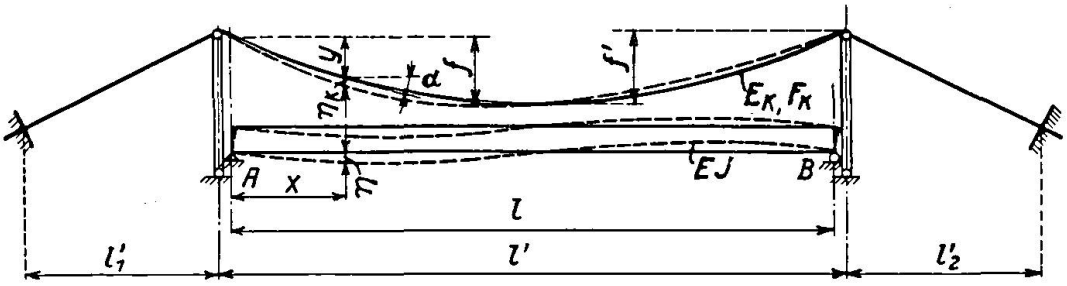

Fig. 1.

für den Konstrukteur ein ungewohntes und deshalb auch unbequemes Mittel, das ihm direkte Vergleiche und Analogien mit seiner baustatisch orientierten Denkweise und mit den bei andern Tragwerksformen gebräuchlichen und zweckmäßigen Methoden nur schwer gestattet.

Nachfolgend wird versucht, die Berechnung verankerter Hängebrücken mit Berücksichtigung der elastischen Formänderungen der üblichen Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Elastizitätslehre und damit der baustatischen Denkweise des Konstrukteurs anzugleichen. Dabei wird sich zeigen, daß eine solche baustatische Darstellungsweise des Problems für den Konstrukteur nicht nur die allgemeine Forderung ökonomischen Denkens befriedigt,

[1]) J. Melan: Theorie der eisernen Bogenbrücken und Hängebrücken. 2. Aufl., 1888.
L. S. Moisseif: The deflection theory as applied to suspension bridges with suspended trusses. (The bridge over the Delaware river connecting Philadelphia Pa. and Camden N. J., Final report of the Board of engineers.) 1927.
S. Timoshenko und S. Way: Suspension bridges with a continuous stiffening truss. Abhandlungen I. V. B. H., 2. Band, 1933/34.
D. B. Steinmann: Deflection theory for continuous suspension bridges. Abhandlungen I. V. B. H., 2. Band, 1933/34.
Ähnliche Arbeit in Proc. Am. Soc. C. E. 1934, mit aufschlußreicher anschließender Diskussion.
Hans H. Bleich: Die Berechnung verankerter Hängebrücken. Wien, Springer, 1935.

sondern daß sie auch eine einfache Berücksichtigung einer beliebigen Veränderlichkeit der Querschnitte des Versteifungsträgers ermöglicht. Auch wird so eine Überprüfung der zur Vereinfachung der Berechnung nach der Formänderungstheorie üblicherweise getroffenen Voraussetzungen verhältnismäßig einfach durchführbar.

2. In Fig. 1 ist der einfachste Fall einer einfeldrigen verankerten Hängebrücke skizziert. Als statisch bestimmtes Grundsystem führen wir den einfachen Balken $A - B$ (Versteifungsträger) ein. Damit wird die Horizontalkomponente H des Kabelzuges zur überzähligen Größe X_1. Bezeichnen wir die Momente infolge der äußern Belastungen im Grundsystem mit M_0, so ergeben sich die Versteifungsträgermomente im wirklichen Tragwerk zu

$$M = M_0 - H \cdot (y + \eta_K). \tag{1}$$

Es ist üblich, die Verlängerung der Hängestangen zu vernachlässigen. Damit werden die Durchbiegungen von Kabel, η_K, und Versteifungsträger, η, gleich groß und die Differentialgleichung der elastischen Linie liefert die Beziehung

$$M_0 - H \cdot (y + \eta) = - EJ \cdot \eta''. \tag{2}$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Differentialgleichung eines Versteifungsträgers, der außer den Momenten M_0 und $-H \cdot y$ durch eine (gedachte)

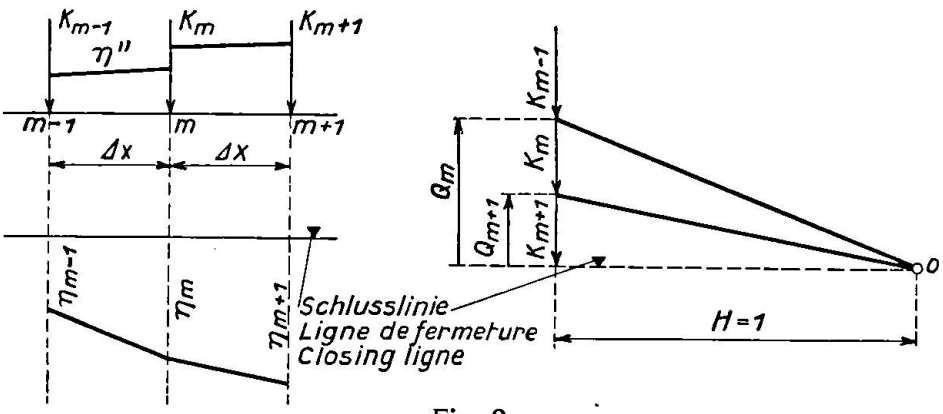

Fig. 2.

axiale Zugkraft $N = H$ belastet ist, wobei N nur die Momente $N \cdot \eta$, aber keine Längsspannungen $N : F$ erzeugt. Nehmen wir nun für die Untersuchung eines bestimmten Belastungsfalles einen bestimmten Festwert von N an, so gilt dafür wieder das Superpositionsgesetz, das für Gleichung (2) sonst nicht zutrifft. Wir können somit in der statt Gl. (2) angeschriebenen Beziehung

$$M_0 - H \cdot y - N \cdot \eta = - EJ \cdot \eta''. \tag{3}$$

eine Trennung in die Einzeleinflüsse M_0 und $-H : y$ vornehmen:

$$\eta = \eta_0 - H \cdot \eta_{H=1}. \tag{4}$$

Für jeden der Einzeleinflüsse M_k gilt nun statt Gl. (3) die Beziehung

$$M_k - N \cdot \eta_k = - EJ \cdot \eta_k''. \tag{5}$$

Die Durchbiegungen η_k des Grundsystems infolge M_k bei gleichzeitiger Wirkung von N ergeben sich aus der Auflösung der nun linearen inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung Gl. (5). In der Baustatik ist der Zusammenhang zwischen einer Funktion η und ihrer zweiten Ableitung η'' durch das Seilpolygon dargestellt. Nach Fig. 2 ist bei Unterteilung der Spannweite l

in n gleiche Teile Δx

$$\frac{\eta_{m-1} - 2\eta_m + \eta_{m+1}}{\Delta x} = K_m, \tag{6}$$

wobei K_m die Knotenlast in m der Belastungsfläche η'' bedeutet. Nehmen wir wie üblich, trapezförmigen Verlauf der Belastungsfunktion

$$\eta_k'' = -\frac{1}{EJ}(M_k - N \cdot \eta_k) = -\frac{1}{EJ} \cdot \bar{M}_k \tag{5a}$$

an, und setzen wir ferner feldweise konstantes Trägheitsmoment voraus, so erhalten wir mit

$$K_m = \frac{\Delta x}{6 EJ_c}\left[\frac{J_c}{J_m}(\bar{M}_{k_{m-1}} + 2\bar{M}_{k_m}) + \frac{J_c}{J_{m+1}}(2\bar{M}_{k_m} + \bar{M}_{k_{m+1}})\right] \tag{7}$$

und mit den Abkürzungen

$$U = \frac{6 EJ_c}{\Delta x^2}, \qquad i_m = \frac{J_c}{J_m}$$

für jeden Zwischenknotenpunkt die Gleichung

$$-(U - i_m \cdot N) \cdot \eta_{m-1} + 2(U + (i_m + i_{m+1})N) \cdot \eta_m - (U - i_{m+1} \cdot N) \cdot \eta_{m+1}$$
$$= i_m(M_{m-1} + 2M_m) + i_{m+1}(2M_m + M_{m+1}) \tag{8}$$

Für die Auflagerpunkte A und B fallen wegen $\eta_A = 0$, $\eta_B = 0$ die Gleichungen weg. Die Auflösung des dreigliedrigen Gleichungssystems Gl. (8), die ja jedem Statiker geläufig ist und mit minimalem Zeitaufwand durchgeführt werden kann, liefert somit die Teildurchbiegungen η_k des Grundsystems infolge der Teilmomente M_k. Die Momente

$$\bar{M}_k = M_k - N \cdot \eta_k \tag{9}$$

besitzen für die Berechnung des Tragwerks nach der Formänderungstheorie dieselbe Bedeutung wie die M_0-Momente in der Elastizitätstheorie, in dem Sinne nämlich, daß sich nun die Momente im wirklichen Tragwerk aus der einfachen Superposition ergeben:

$$M = \bar{M}_0 - H \cdot \bar{M}_{H=1} \tag{10}$$

Wir haben nun die Elastizitätsbedingung zur Bestimmung des überzähligen Horizontalschubes H einzuführen. Diese hat auszusagen, daß sich die Summe der Horizontalprojektionen der Kabelverlängerungen von Verankerung zu Verankerung nicht ändern darf. Nach H. Bleich[2]) stellt sich diese Bedingung in der Form dar:

$$H \cdot \frac{L}{E_k \cdot F_k^0} \pm \alpha_t \cdot t \cdot L_t + \int y'' \cdot \eta \cdot dx = 0. \tag{11}$$

Dabei bedeuten: F_k^0 einen beliebigen Festwert des Kabel- oder Kettenquerschnittes F_k,

$$L = \int \frac{F_k^0 \cdot dx}{F_k \cdot \cos^3 \alpha} \qquad \text{(Abkürzung)}$$

$$L_t = \int \frac{dx}{\cos^2 \alpha} \qquad \text{"}$$

Die Längen L und L_t erstrecken sich von Verankerung zu Verankerung, während

[2]) Hans H. Bleich: a. a. O.

das Integral in Gleichung (11) nur für die am Kabel aufgehängten Teile des Versteifungsträgers zu bilden ist.

Wir formen die Elastizitätsbedingung Gleichung (11) nun noch um. Das Kabel mit den Ordinaten y stellt das Seilpolygon zu Belastungen y'' dar. Das Integral $\int y'' \cdot \eta \cdot dx$ bedeutet somit die virtuelle Arbeit der Belastungen y'' während der Durchbiegungen η. Bei Vernachlässigung der Hängestangenverlängerungen ist diese Arbeit gleich der virtuellen Formänderungsarbeit des Versteifungsträgers, sodaß sich mit

$$M_{H=1} = -1 \cdot y$$

und mit

$$\overline{M}_0 - H \cdot \overline{M}_{H=1} = -EJ\eta''$$

die Beziehung ergibt

$$\int y'' \cdot \eta \cdot dx = \int y \cdot \eta'' \cdot dx = \int \frac{M_{H=1} \cdot (\overline{M}_0 - H \cdot \overline{M}_{H=1})}{EJ} dx \qquad (12)$$

Führen wir diese Werte in die Elastizitätsbedingung Gleichung (11) ein, so erhalten wir

$$H \cdot \left(\frac{L}{E_k \cdot F_k^0} + \int \frac{M_{H=1} \cdot \overline{M}_{H=1}}{EJ} dx\right) \pm \alpha_t \cdot t \cdot L_t + \int \frac{M_{H=1} \cdot \overline{M}_0}{EJ} \cdot dx = 0 \qquad (13)$$

Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$\left(\frac{L}{E_k \cdot F_k^0} + \int \frac{M_{H=1} \cdot \overline{M}_{H=1}}{EJ}\right) = \alpha_{11}; \qquad \alpha_t \cdot t \cdot L_t = \alpha_{1t};$$

$$\int \frac{M_{H=1} \cdot \overline{M}_0}{EJ} dx = \int \frac{\overline{M}_{H=1} \cdot M_0}{EJ} dx = \alpha_{10}$$

ergibt sich somit die Elastizitätsbedingung in der bei der Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke üblichen Form:

$$X_1 \cdot a_{11} + a_{10} \pm a_{1t} = 0. \qquad (13a)$$

Die Berechnung der verankerten Hängebrücke nach Fig. 1 für einen bestimmten Belastungsfall ist somit auf das in der technischen Elastizitätslehre übliche Rechnungsverfahren zurückgeführt mit dem einzigen Unterschied, daß bei der Superposition nach Gleichung (10) und bei der Berechnung der Verschiebungsgrößen a_{ik} für den Belastungs- oder den Verschiebungszustand die Momente $\overline{M}_k$ nach Gleichung (9) einzuführen sind, wobei N einen zunächst geschätzten Wert des Horizontalschubes H bedeutet und die Durchbiegungen η_k durch Auflösung des dreigliedrigen Gleichungssystems Gl. (8) gewonnen werden. Da die Formänderungen und Schnittkräfte nicht mehr proportional zur Belastung, sondern weniger stark wachsen, ist die Superposition von Einzelwirkungen nur dann zulässig, wenn für N der der Gesamtwirkung entsprechende Wert von H eingeführt wird. Es empfiehlt sich deshalb, alle Wirkungen (ständige Last, Verkehrslast, Temperaturänderungen) gleichzeitig wirkend zu untersuchen. Stimmen der geschätzte Wert N und der berechnete Wert H nicht miteinander überein, so ist eine weitere Rechnung mit $N = H$ durchzuführen. Wenn eine Reihe von verschiedenen Belastungsfällen zu untersuchen ist, was ja gewöhnlich der Fall sein wird, so ist es einfacher, die Rechnung mit zwei verschiedenen Werten von N, etwa mit $N = H_{min.}$ und $N = H_{max.}$, durchzuführen und die Schnittkräfte und Formänderungen durch Interpolation aus der Bedingung $N = H$ zu bestimmen. Bei der Auflösung des Gleichungssystems Gl. (8) kann durch Auf-

teilen der Belastungen in symmetrische und gegensymmetrische Anteile der Arbeitsaufwand merklich gekürzt werden. Bei dicht ausgeteilten Hängestangen dürfen ohne wesentliche Beeinträchtigung der Genauigkeit die Feldweiten Δx für die Berechnung größer als die Hängestangenabstände eingeführt werden, um die Zahl der aufzulösenden η-Gleichungen nicht zu groß werden zu lassen.

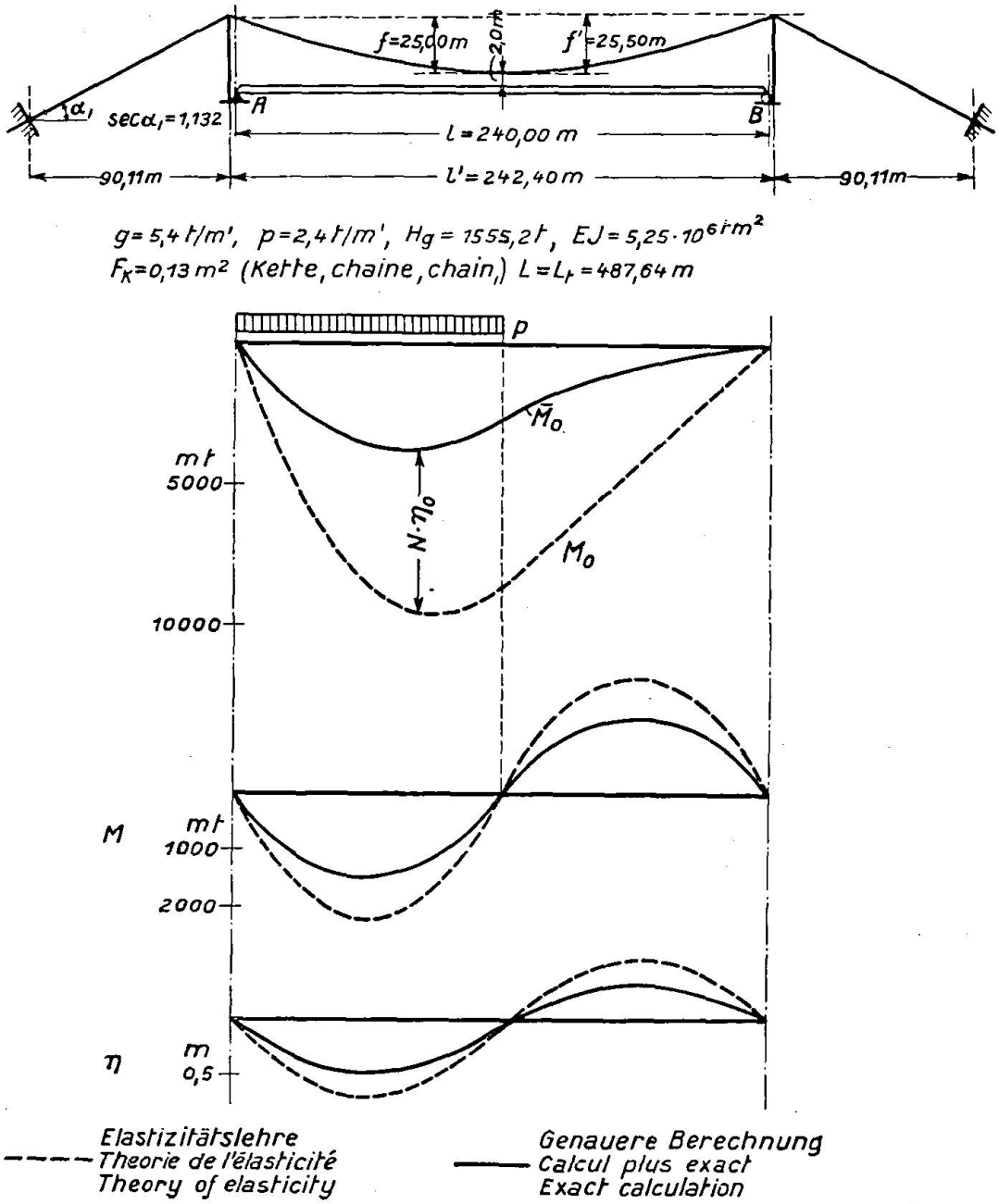

Fig. 3.

Das angegebene Rechnungsverfahren deckt den ganzen Bereich der möglichen Steifigkeitsverhältnisse: setzen wir in Gleichung (8) $U = 0$, so erhalten wir die Berechnung der unversteiften Hängebrücke (Montagezustände); während mit $N = 0$ die Resultate der Elastizitätstheorie mit am unverformten System angreifenden Kräften erhalten werden. Dieser letztere Umstand zeigt, daß für alle zwischen O und H liegenden Werte von N die Berechnung genauer

ist als nach der Elastizitätstheorie, sodaß man sich mit praktisch genügender Genauigkeit auch mit einer nur angenäherten Übereinstimmung von N und H begnügen kann.

Die Hängestangenkräfte q, je Längeneinheit, ergeben sich zu

$$q = H \cdot y'' + N \cdot \eta'' \tag{14}$$

wobei die Werte η'' am einfachsten aus der Beziehung $\eta'' = -M : E J$ ermittelt werden. Damit können die Versteifungsträgerbelastungen $p - q$ bestimmt werden, aus denen sich die Querkräfte Q ergeben, sofern man nicht die einfachere Beziehung

$$Q = \frac{\Delta M}{\Delta x}$$

verwenden will.

In Fig. 3[3]) sind die Momente und Durchbiegungen einer einfeldrigen Hängebrücke nach Fig. 1 für den Fall halbseitiger Nutzlast skizziert. Dabei wurde angenommen, daß die ständige Last vom Kabel allein getragen werde, was ja dem Normalfall entsprechen dürfte. Hierbei äußert sich die ständige Last g nur im Wert von $N = H_g + H_{p+t}$, während keine M_0-Momente infolge g einzuführen sind. Es dürfte aber auch die Ausnahme von diesem Normal-

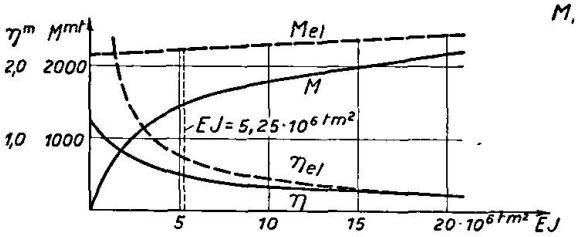

Fig. 4.

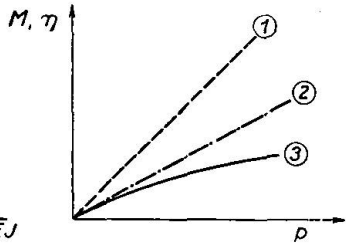

Fig. 5.

fall vorkommen, indem man durch stärkeres Anziehen der Hängestangen dem Versteifungsträger eine Vorspannung durch negative Momente zu geben sucht, um dadurch die minimalen und maximalen Momentengrenzwerte auszugleichen. Hier hätte die Berechnung von diesem Vorspannungszustand auszugehen.

In Fig. 4 ist für das gleiche Tragwerk der Unterschied in den größten Momenten und Durchbiegungen zwischen Elastizitätstheorie und genauerer Berechnung ebenfalls für halbseitige Nutzlast bei veränderlicher Steifigkeit des Versteifungsträgers dargestellt.

3. Zur Bestimmung der maßgebenden Laststellungen hat H. Bleich das Verfahren der quasilinearen Einflußlinien entwickelt. Nach der hier skizzierten Berechnungsweise ergeben sich diese Einflußlinien äußerst einfach durch Einführung von $N = H_g$. Durch die Einführung des Festwertes N wird nicht nur die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes, sondern auch des Maxwell'schen Reziprozitätsgesetzes wieder hergestellt, sodaß sich die Verschiebungsgrößen a_{10} infolge einer wandernden Einzellast $P = 1$ auch als Ordinaten der lotrechten Biegungslinie infolge $\bar{M}_{x1=1}$ berechnen lassen. Damit ist auch für die Bestimmung der Einflußlinien die Analogie zur Elastizitätslehre hergestellt.

In Fig. 5 ist der Verlauf einer Schnittgröße bei wachsender Belastung nach der Elastizitätslehre, dem quasilinearen Verfahren ($N = H_g$) und der genaueren

[3]) Die Abmessungen der Anwendungsbeispiele Fig. 3 und Fig. 6 sind dem erwähnten Buche von Hans H. Bleich entnommen.

Berechnung in der von H. Bleich skizzierten Form dargestellt. Es liegt nun nahe, zur Berechnung der quasilinearen Einflußlinien nicht $N = H_g$, sondern

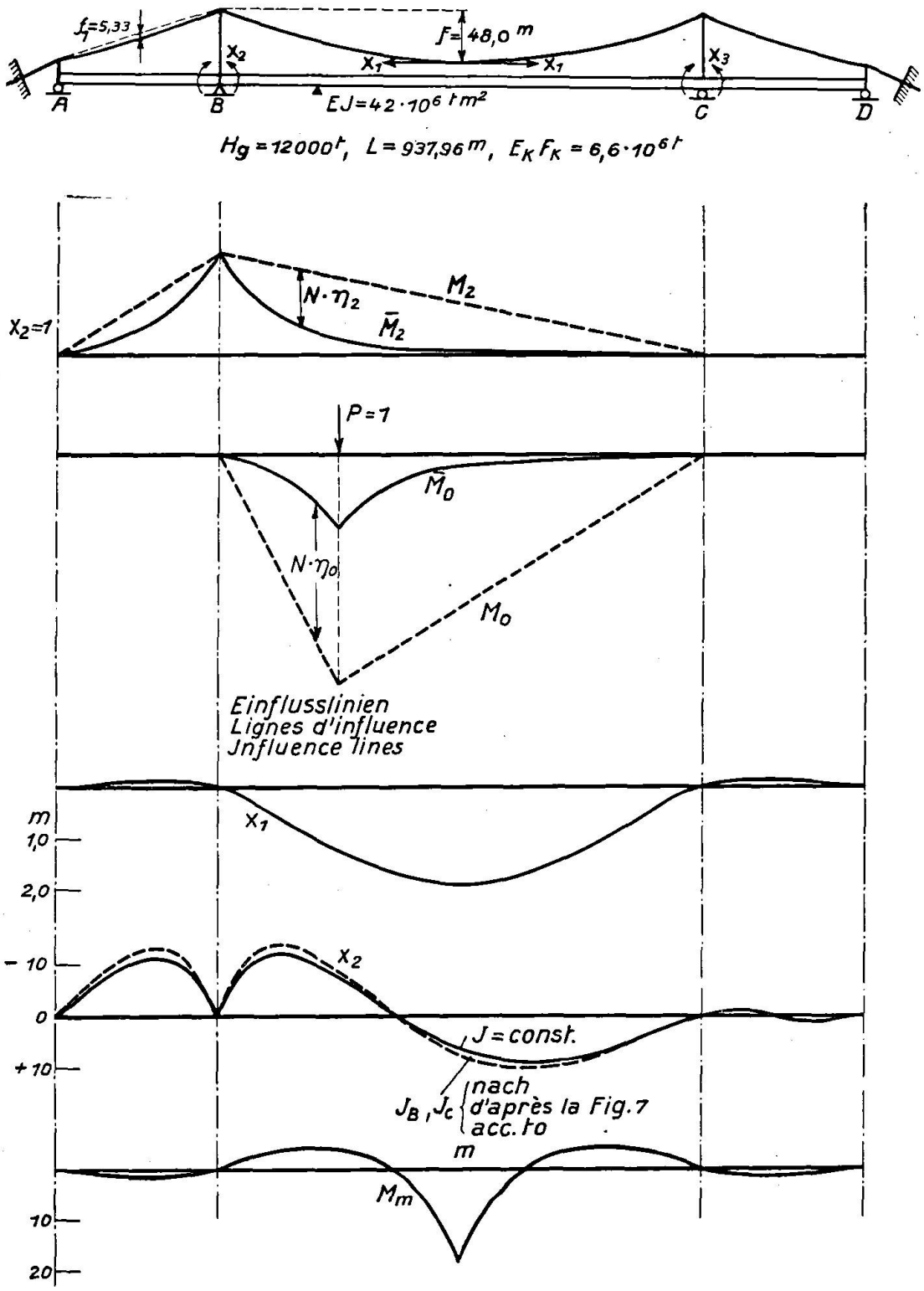

Fig. 6.

einen Durchschnittswert, $N = H_g + H_{p/2}$, einzuführen. Damit können die Einflußlinien nicht nur zur Bestimmung der Lastscheiden Verwendung finden,

sondern sie liefern direkt angenäherte Werte der Schnittgrößen, die mindestens in einer Vorberechnung den Arbeitsaufwand wesentlich abzukürzen gestatten.

4. Bei verankerten Hängebrücken mit durchlaufenden Versteifungsträgern treten neben dem Horizontalschub als weitere überzählige Größen die Stützenmomente des Versteifungsträgers auf. Zu ihrer Bestimmung stehen als Elastizitätsbedingungen die Kontinuitätsbedingungen über den Stützen zur Verfügung, die sich wie in der Elastizitätslehre anschreiben lassen, wenn gleichzeitig der Einfluß der Momente $N \cdot \eta_k$ berücksichtigt, der Einfluß der Momente auf die Verschiebungsgrößen also mit

$$a_{ik} = \int \frac{M_i \cdot \bar{M}_k}{EJ} dx = \int \frac{\bar{M}_i \cdot M_k}{EJ} dx \tag{15}$$

eingeführt wird. Im übrigen ist auch die Berechnung dieser Tragwerksform unter Beachtung der über die Hängebrücke mit gelenkig gelagerten Versteifungsträgern geäußerten Bemerkungen analog zur Elastizitätslehre durchzuführen.

In Fig. 6 sind für eine dreifeldrige Hängebrücke einige Momentenflächen M_k und $\bar{M}_k$, sowie quasilineare Einflußlinien dargestellt.

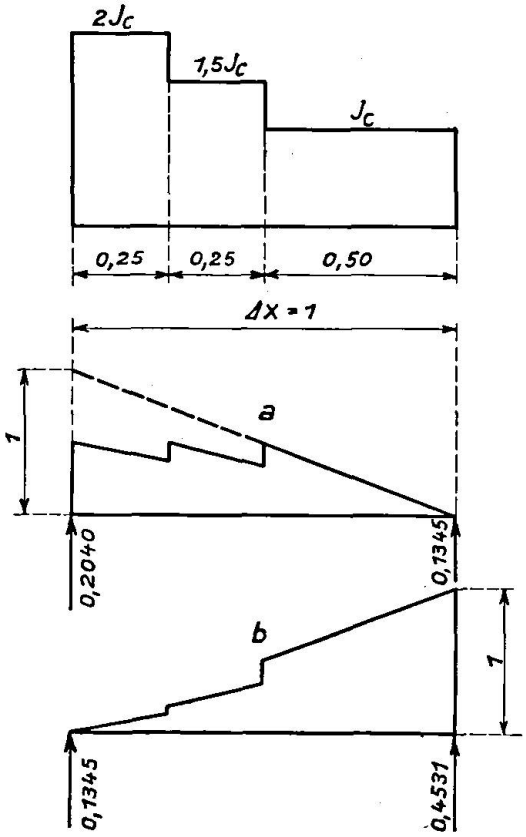

Fig. 7.

Die absolut größten Momente im durchlaufenden Versteifungsträger treten über den Zwischenstützen auf und zwar ist bei der genaueren Berechnung der Unterschied zwischen den größten Feld- und Stützenmomenten noch stärker ausgeprägt als bei der Berechnung nach der Elastizitätslehre. Eine wirtschaftliche Bauausführung wird deshalb ausgesprochen lokale Verstärkungen der Querschnitte in Stützennähe vorsehen. Auch eine derartige sprunghafte Änderung der Steifigkeit EJ innerhalb der für die Berechnung eingeführten Feldweite Δx kann einfach berücksichtigt werden. In Abb. 7 sind die Grundlagen dazu skizziert: Man berechnet die Auflagerkräfte der reduzierten dreieckförmigen Momentenflächen a und b über die Feldweite $\Delta x = 1$ und mit der Höhe 1. Die Werte dieser Auflagerkräfte sind in Gleichung (8) statt der entsprechenden Werte i und analog bei der Berechnung der Verschiebungsgrößen einzuführen. In Fig. 6 ist die quasilineare Einflußlinie des Stützenmomentes X_2 für symmetrisch zu den Stützen nach Fig. 7 ($\Delta x = 40$ m) verstärkte Versteifungsträger ebenfalls eingezeichnet, wobei für beide Fälle der Durchschnittswert des Trägheitsmomentes über die Brückenlänge gleich groß angenommen wurde. Der Vergleich der beiden Einflußlinien für konstantes und veränderliches Trägheitsmoment zeigt deutlich die Notwendigkeit, den Einfluß solcher Steifigkeitsveränderungen bei der Bemessung berücksichtigen zu können.

5. Es sei noch kurz auf die eingeführten Vereinfachungen der Berechnung hingewiesen:

In der der Elastizitätsbedingung Gleichung (11) zu Grunde liegenden Ableitung, die auf der Betrachtung eines Kabelelementes in unverformtem und verformtem Zustand beruht, wurden die kleinen Größen $d\xi$ gegen dx, Δds gegen ds und $d\eta$ gegen dy vernachlässigt. Während die beiden ersten Vernachlässigungen ohne weiteres gegeben sind, ist die dritte, $d\eta$ gegen dy, an sich nicht gerechtfertigt, weil wir ja gerade den Einfluß der Formänderungen η auf die Schnittgrößen als wesentlich untersuchen. Wenn wir diese Vernachlässigung nicht einführen, erhalten wir folgende Elastizitätsbedingung:

$$H \cdot \frac{L}{E_k \cdot F_k^0} \pm \alpha_t \cdot t \cdot L_t + \int \left(y'' + \frac{\eta''}{2}\right) \cdot \eta \cdot dx = 0 \tag{16}$$

wobei das Integral auch durch

$$\int \left(y'' + \frac{\eta''}{2}\right) \cdot \eta \cdot dx = \int \left(y + \frac{\eta}{2}\right) \cdot \eta'' \, dx \tag{17}$$

ersetzt werden kann. Eine direkte Berechnung mit dieser genaueren Elastizitätsbedingung ist nun in üblicher Weise nicht mehr möglich. Es wird sich aber auch nur darum handeln, die Größe des durch die Anwendung der vereinfachten Elastizitätsbedingung verursachten Fehlers für einen bestimmten Belastungsfall zu untersuchen. Dann ist aber die Biegungslinie η näherungsweise bekannt. Die genauere Elastizitätsbedingung wird nun dadurch erhalten, daß wir in Gleichung (13) für $M_{H=1}$ statt $-1 \cdot y$ den Wert

$$M_{H=1} = -1 \cdot \left(y + \frac{\eta}{2}\right) \tag{18}$$

einsetzen. Die Fehler infolge der in Gleichung (13) eingeführten Vereinfachung sind im allgemeinen recht klein. So wird im Beispiel der Fig. 3 bei Verwendung der genaueren Elastizitätsbedingung das größte Moment um rd. ½ %, die größte Durchbiegung um rd. 2 % kleiner erhalten als mit Gleichung (13).

Wir haben, wie üblich, die Längenänderung der Hängestangen vernachlässigt. Die Berücksichtigung dieser Längenänderungen Δh (wieder bei der Nachrechnung eines bestimmten Belastungsfalls, für den die Hängestangenkräfte angenähert als Knotenlasten zur Belastung q (Gl. (14)) und damit die Längenänderungen Δh bekannt sind) ergibt die Momente im Versteifungsträger zu

$$M = M_0 - H \cdot y - N(\eta - \Delta h) = -EJ \cdot \eta''. \tag{19}$$

Das Zusatzmoment $+N \cdot \Delta h$ ist wie ein M_0-Moment zu behandeln. Ferner ist in der Verschiebungsgröße a_{11} der Elastizitätsbedingung noch der in der Regel sehr geringe Beitrag dieser Längskräfte einzubeziehen. Im Beispiel der Fig. 3 verursachen die Längenänderungen Δh bei Annahme von Hängern aus Drahtseil mit $\sigma_{zul} = 4$ t/cm² und $E = 1400$ t/cm² eine Zunahme des größten Momentes um rd. 1 %. Größer ist der Einfluß auf die Querkräfte in unmittelbarer Auflagernähe, der jedoch stark von der Größe der Hängestangenabstände abhängig ist. Immerhin handelt es sich dabei um einen ausgesprochen lokalen Einfluß.

Wir haben bisher nur den Einfluß der lotrechten Durchbiegungen η von Kabel und Versteifungsträger untersucht. Daneben treten aber auch horizontale Verschiebungen ξ der einzelnen Kabelpunkte auf, deren Größe sich in Analogie zur Ableitung der Elastizitätsbedingung Gleichung (11) für einen Schnitt x ergibt zu

$$\xi = H \cdot \sum_0^x \frac{\Delta L}{E_k \cdot F_k^0} - \frac{8f \cdot \Delta x}{l^2} \sum_0^x \eta + \alpha_t t \cdot \sum_0^x \Delta L_t, \tag{20}$$

wobei die Längen ΔL und ΔL_t mit der angegebenen Bedeutung sich auf die einzelnen Kabelelemente Δs beziehen. Infolge dieser Verschiebungen ξ tritt eine Schiefstellung der Hängestangen ein, sodaß die Hängestangenkräfte Z neben den lotrechten auch wagrechte Kräfte Z_h von der Größe

$$Z_h = Z \cdot \frac{\xi}{h} \tag{21}$$

auf das Kabel ausüben. Z bedeutet die Hängestangenkräfte infolge ständiger und Verkehrslast, während mit h die Länge der einzelnen Hängestangen bezeichnet ist. Wenn wir nun die Zusatzmomente ΔM_0 infolge der Horizontalkräfte Z_h wie für einen Zweigelenkbogen mit gleicher Form wie das Kabel be-

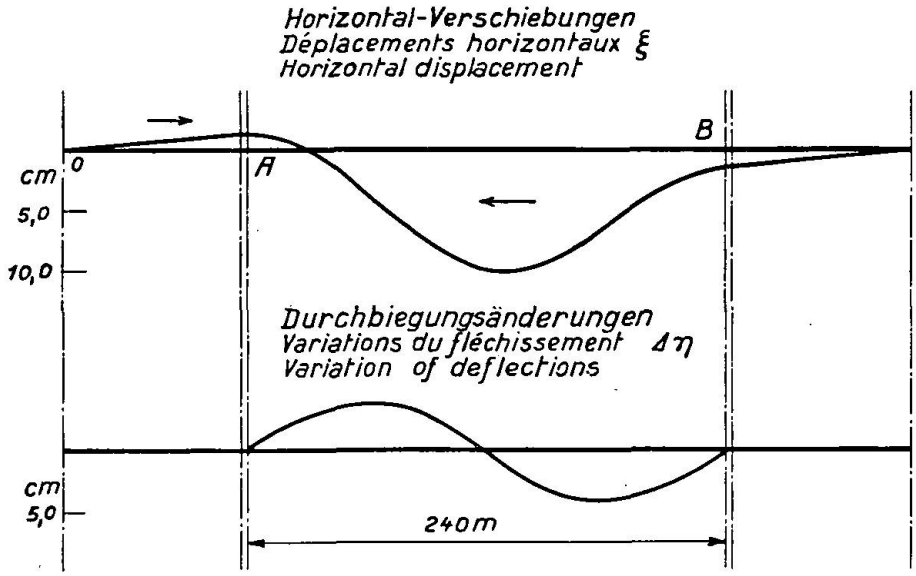

Fig. 8.

rechnen, so ergibt sich die Verkleinerung der lotrechten Durchbiegungen, $\Delta\eta_0$, zunächst zu

$$\Delta\eta_0 = \frac{\Delta M_0}{N} \tag{22}$$

Aus diesen Verschiebungen ist nun mit Hilfe der Elastizitätsbedingung die Änderung ΔH des Horizontalschubes zu berechnen, wobei das Belastungsglied mit

$$a_{10} = \int y'' \cdot \Delta\eta_0 \cdot dx$$

einzuführen ist. Dann ergibt sich die Änderung der Versteifungsträgermomente zu

$$\Delta M = N \cdot \Delta\eta - \Delta H \cdot y$$

und die Änderung der Durchbiegungen zu

$$\Delta\eta = \Delta\eta_0 - \Delta H \cdot \eta_{H=1} \cdot$$

Genau genommen wären nun die Verschiebungen ξ usw. auf Grund der korrigierten Durchbiegungen $\eta - \Delta\eta$ neu zu berechnen. Solange die Änderungen $\Delta\eta$ aber klein sind, wird diese Wiederholung der Berechnung die Resultate der ersten Rechnung nicht mehr merklich ändern. Die am Beispiel der Fig. 3 durchgeführten Berechnungen ergeben, daß infolge der Horizontalverschiebungen ξ

die Momente um rd. 5 %, die größten Durchbiegungen um rd. 8 % verkleinert werden. In Fig. 8 sind die Horizontalverschiebungen ξ und die Änderungen $\Delta\eta_0$, die hier wegen der annähernden Gegensymmetrie praktisch gleich den Änderungen $\Delta\eta$ sind, für das Beispiel der Fig. 3 skizziert.

Falls die Türme, im Gegensatz zu den hier getroffenen Voraussetzungen, keine freie Verschieblichkeit der Kabelauflagerpunkte erlauben, so wird für die Berechnung der durch die Türme aufgenommenen Anteile des Horizontalschubes die horizontale Ausbiegung e der Turmspitzen benötigt. Auch hier ist der Einfluß der Formänderungen zu berücksichtigen, da die an der ausgebogenen Turmspitze angreifende lotrechte Auflagerkraft V die Momente und damit die Ausbiegungen vergrößert. Die gesuchten Ausbiegungen sind durch Auflösungen eines dreigliedrigen Gleichungssystems Gl. (8) recht einfach zu berechnen, nur ist hier statt N ein Mittelwert des Auflagerdruckes V und zwar mit negativem Vorzeichen einzuführen. Werden für die Berechnung die Ausbiegungen von der Lotrechten durch die ausgebogene Turmspitze aus gemessen, so fällt die oberste Gleichung Gl. (8) aus, während für den Einspannquerschnitt eine Symmetriebedingung anzuschreiben ist.

Für kleinere Hängebrücken werden wohl in der Regel die in diesem Abschnitt skizzierten zusätzlichen Untersuchungen, mit Ausnahme etwa des Einflusses der Horizontalverschiebungen ξ, unterbleiben können. Bei großen Bauwerken oder bei extremer Biegsamkeit des Versteifungsträgers dagegen dürften auch die übrigen Fehlereinflüsse der vereinfachten Berechnung wenigstens für die ungünstigste Laststellung zu untersuchen sein.

Zusammenfassung.

Die Berechnung verankerter Hängebrücken unter Berücksichtigung der elastischen Formänderungen wird dadurch auf die in der Konstruktionspraxis zur Untersuchung statisch unbestimmter Tragwerke übliche Berechnungsform zurückgeführt, daß das den Formänderungseinfluß auf die Momente darstellende Glied $H \cdot \eta$ durch $N \cdot \eta$ ersetzt wird, wobei N einen gedachten Festwert des Horizontalschubes darstellt. Dadurch werden Superpositionsgesetz und Reziprozitätsgesetz wieder gültig. Das angegebene Berechnungsverfahren ist auf Hängebrücken mit einfachen und mit durchlaufenden Versteifungsträgern gleich gut anwendbar, wobei über die Form des Kabels oder der Kette keine einschränkende Voraussetzung zu treffen ist. Die Berücksichtigung einer beliebigen Veränderlichkeit der Steifigkeit des Versteifungsträgers ist einfach möglich; ebenso können die gewöhnlich vernachlässigten Auswirkungen der Hängestangenverlängerungen, der Horizontalverschiebungen der Kabelpunkte usw. überprüft werden.

Résumé.

Le calcul des ponts suspendus ancrés, en tenant compte des déformations élastiques, est ramené à la forme de calcul usuelle dans la pratique pour l'étude des systèmes hyperstatiques, en remplaçant par $N \cdot \eta$ le membre $H \cdot \eta$ représentant l'influence de la déformation sur les moments; N représente une valeur imaginaire de la poussée horizontale. De cet fait la loi de la superposition et la loi de la réciprocité sont de nouveau valables. Le procédé de calcul que nous donnons peut être employé aussi bien pour les ponts suspendus avec poutres raidisseuses simples que pour les ponts suspendus avec poutres raidisseuses continues, sans qu'il soit nécessaire d'admettre une hypothèse restrictive sur la forme du câble ou de la chaîne. Il est possible de tenir compte

d'une façon simple de la variation de la rigidité de la poutre raidisseuse; de même on peut contrôler l'influence généralement négligée des allongements des barres de suspensions, des déplacements horizontaux des points du câble, etc.

Summary.

The calculation of anchored suspension bridges under consideration of elastic deformations can be brought back to the usual mode of calculating statically indeterminate systems as employed in ordinary practice, if the term $H \cdot \eta$ representing the influence of deformation on the moments is replaced by $N \cdot \eta$. The quantity N represents an assumed fixed value of the horizontal thrust. This makes the laws of superposition and reciprocity become applicable again. The procedure of calculation given in the paper can be employed in the same easy manner to suspension bridges with simple or with continuous stiffening girder, without making restrictive assumptions as to the types of cables or chains. Any variability of stiffness of the stiffening girder can be allowed for in a simple manner. The effects of the elongation of hangers, which are usually neglected, and the horizontal displacements of cable points, etc., can also be checked.