Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 4 (1936)

Artikel: Die durchlaufende Balken auf nachgiebigen Stützen
Autor: Ritter, M.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5096

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DER DURCHLAUFENDE BALKEN AUF NACHGIEBIGEN STÜTZEN.

LA POUTRE CONTINUE SUR APPUIS COMPRESSIBLES.

CONTINUOUS BEAMS ON COMPRESSIBLE SUPPORTS.

Prof. Dr. M. RITTER, Zürich.

Im Folgenden wird die Berechnung des in Fig. 1 skizzierten Tragwerkes vorgeführt, das im Eisenbetonbau überaus häufig zur Anwendung gelangt. Ein vollwandiger Balken ruht auf beliebig vielen, mit ihm biegungsfest verbundenen Stützen oder Säulen und wird derart beansprucht, daß sich die Formänderung in der Ebene des Systems vollzieht. Wir berücksichtigen in der Untersuchung sowohl den Biegungswiderstand der Stützen, als auch elastische und unelastische

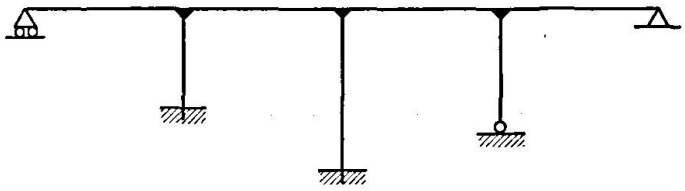

Fig. 1.

Stützensenkungen; der meist sehr geringe Einfluß der Normalkräfte im Balken selbst werde vernachlässigt. Ferner wird vorausgesetzt, daß ein festes Endauflager vorhanden ist, die Stützenköpfe somit keine wagrechten Verschiebungen erleiden. Die Darlegungen vermeiden analytische oder geometrische Betrachtungen am Seileck der Momentenfläche, wie sie in den klassischen Studien von O. Mohr, W. Ritter u. a. zu finden sind; als rein statische Grundlage dient die Theorie des elastisch eingespannten Balkens, die in einfachster Weise mit Hilfe des Gesetzes der Superposition entwickelt wird.

1. Der elastisch eingespannte Balken auf festen Stützen.

Wir beginnen mit einer kurzen Darstellung der Theorie des elastisch eingespannten Balkens auf festen Stützen, soweit sie für die Behandlung des durchlaufenden Balkens benötigt wird.

Als statisch bestimmtes Grundsystem wählen wir den einfachen Balken von der Stützweite l, an dem die Einspannmomente M_1 und M_2 als überzählige Größen wirken, vergl. Fig. 2. Die elastische Linie bildet an den Auflagern mit der Wagrechten die Winkel α und β, die wir positiv rechnen, wenn sie wie in Fig. 2 geöffnet sind. Das Gesetz der Superposition liefert für diese Auflagerdrehwinkel die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + M_1\,\alpha_1 + M_2\,\alpha_2\,, \\ \beta &= \beta_0 + M_1\,\beta_1 + M_2\,\beta_2\,; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

darin bezeichnen am frei aufliegenden Balken

α_0, β_0 die Winkel infolge der Belastung,
α_1, β_1 die Winkel infolge $M_1 = 1$,
α_2, β_2 die Winkel infolge $M_2 = 1$.

Als elastische Einspannung eines Auflagers definieren wir den Fall, wo der Auflagerdrehwinkel einzig vom Einspannmoment abhängt, das vom Balken in das Auflager übergeleitet wird und ihm proportional ist. Wir unterscheiden drei verschiedene Fälle:

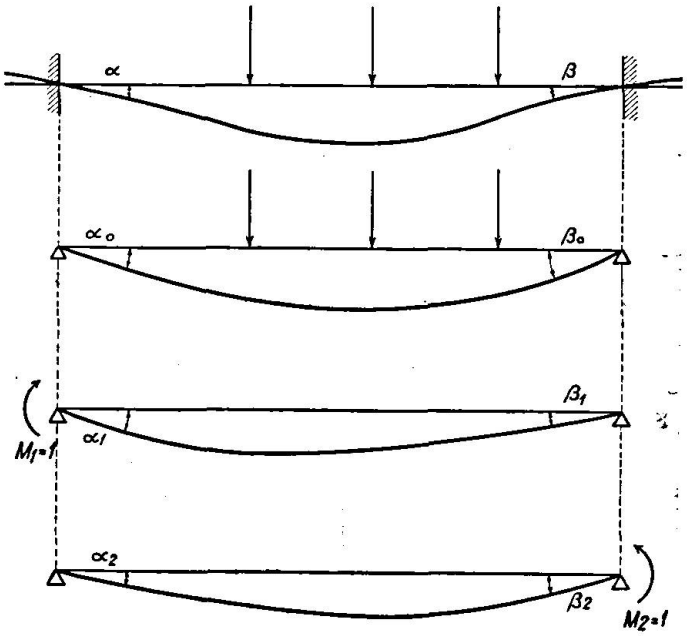

Fig. 2.

Erster Fall: Die Ursache der Winkeldrehung α liege rechts vom linken Auflager. Der Balken selbst sei unbelastet. Dann ist α eine lineare Funktion von M_1, was man sofort erkennt, wenn man das linke Widerlager unmittelbar rechts vom Einspannquerschnitt wegschneidet und für sich betrachtet. Es wird — sofern keine Senkung durch die Querkraft erfolgt — einzig durch M_1 deformiert; somit ist, wenn das Superpositionsgesetz gilt,

$$\alpha = -\varepsilon_1 M_1, \tag{2a}$$

worin ε_1 die Drehung des Widerlagers infolge $M_1 = -1$ bezeichnet. Die erste der Gl. (1) lautet darnach

$$M_1(\alpha_1 + \varepsilon_1) + M_2 \alpha_2 = 0.$$

Die Momentenlinie ist eine Gerade; der Momentennullpunkt J ist ein Festpunkt, d. h. sein Abstand a ist unabhängig von der Größe der Momente. Aus obiger Beziehung und Fig. 3a ergibt sich

$$\frac{M_1}{M_2} = -\frac{a}{l-a} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \varepsilon_1},$$

somit

$$a = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon_1} l. \tag{2b}$$

Der Drehwinkel am rechten Auflager läßt sich jetzt als Funktion von M_2 allein darstellen; indem M_1 eliminiert wird, findet man

$$\beta = M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2 = M_2 \left(\beta_2 - \frac{a}{l-a} \beta_1\right).$$

Wir benötigen später den Winkel für $M_2 = 1$, der mit ε_a bezeichnet sei,

$$\varepsilon_a = \beta_2 - \frac{a}{l-a} \beta_1. \tag{2c}$$

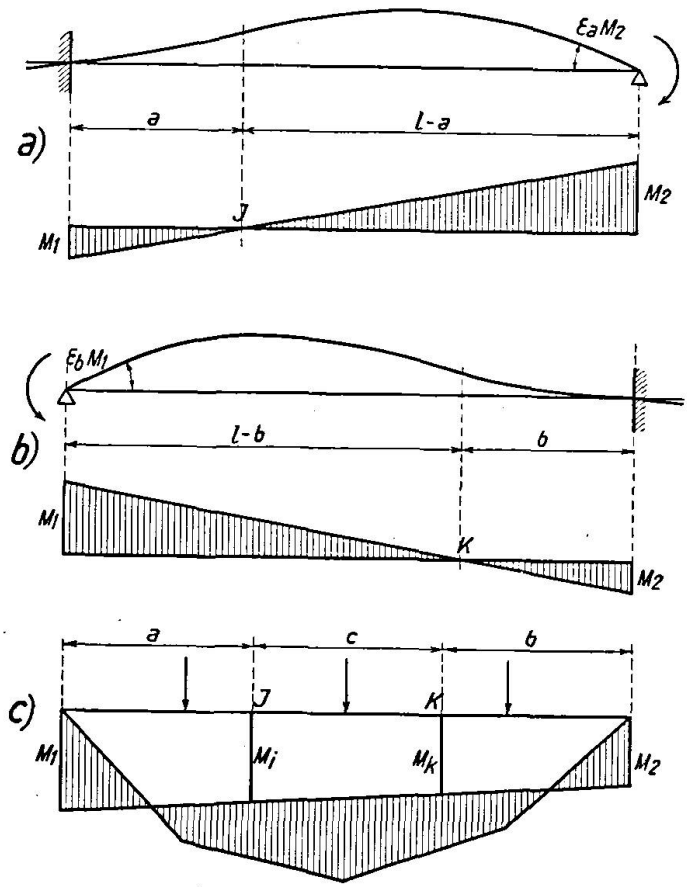

Fig. 3.

Zweiter Fall: Die Ursache der Winkeldrehung β liege links vom rechten Auflager, der Balken sei wieder unbelastet. Dann ist β proportional M_2,

$$\beta = -\varepsilon_2 M_2, \tag{3a}$$

worin ε_2 die Drehung des rechten Widerlagers infolge $M_2 = -1$ bezeichnet. Die zweite der Gl. (1) lautet

$$M_1 \beta_1 + M_2 (\beta_2 + \varepsilon_2) = 0.$$

Die Momentenlinie ist eine Gerade; der Wendepunkt K ist wieder ein Festpunkt. Aus obiger Beziehung und Fig. 3b folgt

$$\frac{M_2}{M_1} = -\frac{b}{l-b} = -\frac{\beta_1}{\beta_2 + \varepsilon_2}.$$

somit beträgt der Abstand b vom rechten Auflager

$$b = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_2} l. \tag{3b}$$

Für den Drehwinkel α läßt sich schreiben

$$\alpha = M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 = M_1 \left(\alpha_1 - \frac{b}{l-b} \alpha_2\right).$$

Für $M_1 = 1$ ergibt sich die später benötigte Formel

$$\varepsilon_b = \alpha_1 - \frac{b}{l-b} \alpha_2 . \tag{3c}$$

Dritter Fall: Die Ursache der Winkeldrehungen α und β liege zwischen der Auflagerquerschnitten, beide Widerlager sind elastisch eingespannt. Dieser Fall ist nur denkbar, wenn der Balken belastet ist. Die Grundgleichungen (1) liefern in Verbindung mit den Gleichungen (2a), (3a) die Elastizitätsgleichungen, die sich nach M_1 und M_2 auflösen lassen. Die Gleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 + M_1 (\alpha_1 + \varepsilon_1) + M_2 \alpha_2 &= 0 , \\ \beta_0 + M_1 \beta_1 + M_2 (\beta_2 + \varepsilon_2) &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Um die Auswertung zu vereinfachen, empfiehlt sich die Einführung der sog. Festpunktsmomente M_i und M_k nach Fig. 3c, aus der sich ergibt, daß

$$M_i = M_1 \frac{l-a}{l} + M_2 \frac{a}{l},$$

$$M_k = M_1 \frac{b}{l} + M_2 \frac{l-b}{l} .$$

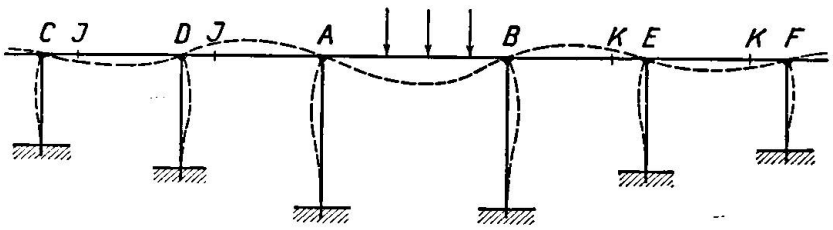

Fig. 4.

Daraus erhält man umgekehrt

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= M_i \frac{l-b}{c} - M_k \frac{a}{c}, \\ M_2 &= M_k \frac{l-a}{c} - M_i \frac{b}{c}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

worin $c = l - a - b$ die Distanz der Festpunkte bezeichnet.

Die erste der Gl. (4) lautet daher

$$\alpha_0 + M_i \frac{\alpha_2}{c} \left[\frac{(l-b)(l-a)}{a} - b\right] - M_k \frac{\alpha_2}{c} \left[\frac{a(l-a)}{a} - (l-a)\right] = 0 .$$

Das letzte Glied fällt weg, sodaß für M_i ein sehr einfacher Ausdruck entsteht. In gleicher Weise läßt sich aus Gl. (4b) M_k berechnen. Man findet

$$M_i = -\frac{a}{l} \cdot \frac{\alpha_0}{\alpha_2}, \qquad M_k = -\frac{b}{l} \cdot \frac{\beta_0}{\beta_1} . \tag{6}$$

Hat man M_i und M_k berechnet, so gewinnt man M_1 und M_2 leicht mit den Gl. (5) oder graphisch, indem man die Schlußlinie aufträgt. Bei konstantem Trägheitsmoment und einfachen Belastungszuständen lassen sich mit Hilfe der

Gl. (6) die bekannten graphischen Konstruktionen zur Bestimmung der Schlußlinie (nach O. Mohr und Wilhelm Ritter) ableiten, die in den Lehrbüchern zu finden sind und von den praktisch tätigen Statikern bevorzugt werden.

2. Der durchlaufende Balken auf elastisch drehbaren, festen Stützen [1]).

Die Öffnung AB des in Fig. 4 skizzierten Balkens auf starr mit ihm verbundenen Stützen sei lotrecht beliebig belastet, während alle andern Felder von Lasten frei seien. Von Stützensenkungen werde zunächst abgesehen. Ausgehend von der eben behandelten Theorie des elastisch eingespannten Balkens, läßt sich über den Momentenverlauf in den verschiedenen Feldern folgendes aussagen.

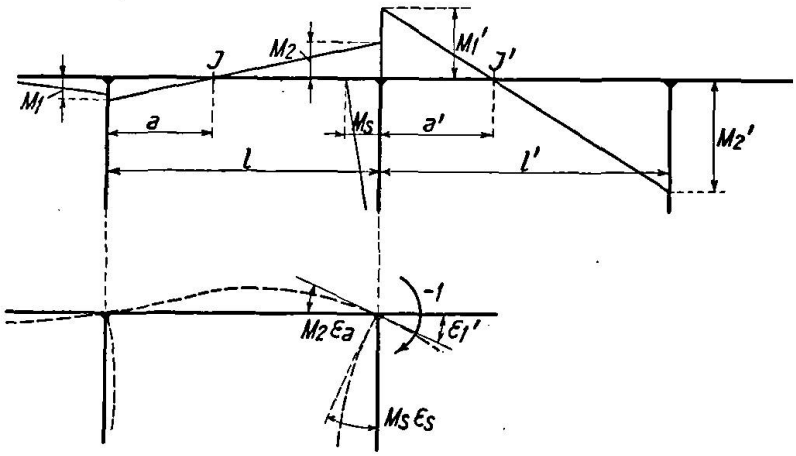

Fig. 5.

Die belastete Öffnung verhält sich wie ein beidseitig elastisch eingespannter Balken, da die Ursache der Deformation zwischen A und B liegt, somit der in Abschnitt 1 als dritter Fall gekennzeichnete Zustand gilt. Kennt man die Festpunkte J und K in dieser Öffnung, so findet man mit den Formeln (6) oder den bekannten Konstruktionen leicht die Schlußlinie der Momentenfläche und damit die Einspannmomente M_1 und M_2.

Eine unbelastete Öffnung CD, links von der belasteten Öffnung gelegen, deformiert sich in der in Fig. 4 angedeuteten Weise; da die Ursache dieser Deformation rechts der Öffnung CD liegt, so handelt es sich hier um den in Abschnitt 1 als ersten Fall beschriebenen Zustand, für den die Beziehungen (2) gelten. Entsprechend verhält sich eine unbelastete Öffnung EF, die rechts der belasteten Öffnung liegt, im Sinne des in Abschnitt 1 definierten zweiten Falles mit den Beziehungen (3).

Um den Momentenverlauf zu ermitteln, sind zunächst die Festpunkte J und K in allen Öffnungen zu ermitteln. Wir bezeichnen mit l und l' die Stützweiten zweier aufeinander folgender Öffnungen, die links von der belasteten Öffnung liegen, vergl. Fig. 5. Nach Gl. (2b) hat der Festpunkt J' in der Öffnung l' vom linken Auflager den Abstand

$$a' = \frac{\alpha_2'}{\alpha_1' + \alpha_2' + \varepsilon_1'}\, l,$$

[1]) M. Ritter: Der kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Stützen. Schweizer. Bauzeitung, 1911. In dieser Arbeit sind Stützensenkungen nicht behandelt, dagegen der Einfluß wagrechter Kräfte bei fehlendem Endwiderlager, sowie die Wirkung von Temperaturänderungen mit Hilfe der Festpunkte berechnet.

darin bezeichnet ε_1' den Drehwinkel des linken Auflagers der Öffnung l', wenn diese weggeschnitten und das Moment $M_1' = -1$ am Knoten angebracht wird. Um denselben Winkel drehen sich bei dieser Formänderung sowohl die Säule, als auch die Öffnung l. Wir bezeichnen in der Folge die Einspannmomente der Öffnung l mit M_1 und M_2, die der Öffnung l' mit M_1' und M_2'; dann ist

$$M_s = M_1' - M_2 \tag{7}$$

das Moment, das in die Säule übergeht.

Bezeichnet ε_s die Drehung des Stützenkopfes für $M_s = 1$, so gilt mit Benützung der Formel (2c) für die Drehung ε_a des Balkens l infolge $M_2 = 1$

$$M_1' \varepsilon_1' = M_2 \varepsilon_a = (M_1' - M_2) \varepsilon_s;$$

daraus folgt

$$M_2 = M_1' \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s + \varepsilon_a} = M_s \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_a}, \tag{8a}$$

somit

$$\varepsilon_1' = \frac{\varepsilon_s \cdot \varepsilon_a}{\varepsilon_s + \varepsilon_a} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\varepsilon_1'} = \frac{1}{\varepsilon_s} + \frac{1}{\varepsilon_a}. \tag{8b}$$

Die Gleichung für a' lautet darnach

$$a' = \frac{\alpha_2' \cdot l'}{\alpha_1' + \alpha_2' + \frac{\varepsilon_s \cdot \varepsilon_a}{\varepsilon_s + \varepsilon_a}}. \tag{9a}$$

Diese Beziehung ermöglicht die einfache Berechnung aller Festpunkte J. Man beginnt am linken Trägerende, berechnet zunächst aus a (dieser Wert ist entweder gleich Null oder aus der Einspannung des linken Endauflagers zu ermitteln) den Wert

$$\varepsilon_a = \beta_2 - \frac{a}{l - a} \beta_1$$

und darauf nach Gl. (9) den Abstand a' des Festpunktes J' in der zweiten Öffnung. Alsdann wird die zweite und die dritte Öffnung mit l und l' bezeichnet und in gleicher Weise a' aus a bestimmt, usw.

Über den Stützen ändert sich das Moment sprungweise, indem der Anteil $M_1' - M_2 = M_s$ in die Stützen geleitet wird. Gemäß Gl. (8a) ist das Moment M_1' beim Überschreiten einer Stütze von rechts nach links mit der Übergangszahl

$$\mu = \frac{M_2}{M_1'} = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s + \varepsilon_a} \tag{10a}$$

zu multiplizieren.

In entsprechender Weise lassen sich die Festpunkte K berechnen. Man beginnt am rechten Trägerende und findet aus dem Abstand b' einer Öffnung l' den Abstand b der links benachbarten Öffnung l nach der Beziehung

$$b = \frac{\beta_1 \cdot l}{\beta_2 + \beta_1 + \frac{\varepsilon_s \cdot \varepsilon_b'}{\varepsilon_s + \varepsilon_b'}}, \tag{9b}$$

worin $\varepsilon_b' = \alpha_1' - \frac{b'}{l' - b'} \alpha_2'$. Die Ableitung entspricht ganz der Ableitung der Gl. (9). Beim Überschreiten einer Stütze rechts der belasteten Öffnung von links nach rechts ist das Moment M_2' mit der Übergangszahl

$$\mu' = \frac{M_1}{M_2'} = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s + \varepsilon_b'} \tag{10b}$$

zu multiplizieren.

Das Gesagte genügt, um die Momentenfläche in allen Öffnungen aufzuzeichnen. Sind mehrere Öffnungen belastet, so behandelt man die Belastung jeder Öffnung für sich und addiert zum Schlusse die Momentenordinaten in jedem Schnitte.

Bei konstantem Trägheitsmoment J ist nach bekannten Formeln

$$\alpha_1 = \beta_2 = \frac{l}{3EJ}, \qquad \alpha_2 = \beta_1 = \frac{l}{6EJ}.$$

Man erhält damit

$$\varepsilon_a = \beta_2 - \frac{a}{l-a}\beta_1 = \frac{l}{6EJ}\left(2 - \frac{a}{l-a}\right),$$

$$a' = \frac{l'}{3 + \frac{l}{l'}\,\dfrac{2 - \frac{a}{l-a}}{1 + \frac{l}{6EJ\varepsilon_s}\left(2 - \frac{a}{l-a}\right)}}, \tag{11}$$

$$M_i = -\frac{6a}{l^2}\cdot EJ\alpha_0, \qquad M_k = -\frac{6b}{l^2}\cdot EJ\beta_0. \tag{12}$$

Für gleichmäßige Belastung wird

$$M_i = -\frac{gal}{4}, \qquad M_k = -\frac{gbl}{4}.$$

Auch die Berechnung der Einspanngrößen ε_s der Säulen bietet keine Schwierigkeiten. Man erhält bei konstantem Trägheitsmoment J_s einer Säule von der Höhe h

$\varepsilon_s = \dfrac{h}{3EJ_h}$, Säulenfuß gelenkig,

$\varepsilon_s = \dfrac{h}{4EJ_h}$, „ eingespannt,

$\varepsilon_s = \dfrac{h}{4EJ_h}\,\dfrac{1 + \frac{4EJ_h}{CJ_F h}}{1 + \frac{3EJ_h}{CJ_F h}}$, Säulenfuß auf nachgiebigem Baugrund. (C = Bettungsziffer, J_F = Trägheitsmoment der Fundamentsohle.)

Die Berechnung der Auflagerdrücke bezw. der Normalkräfte in den Säulen erfolgt mit der bekannten Beziehung

$$C = A + \frac{M_1 - M_2}{l} + \frac{M_2' - M_1'}{l'}, \tag{13}$$

worin A den Auflagerdruck bezeichnet, wenn l und l' als einfache Balken gelagert sind.

3. Einfluß gegebener Stützensenkungen.

Der Kopf einer beliebigen Stütze, die die Öffnungen l und l' trennt, senke sich um einen gegebenen Betrag v, während alle andern Stützenköpfe in ihrer

Höhenlage verbleiben. Das System verbiegt sich, wie in Fig. 6 angedeutet. Bei dieser Deformation ist der Balken l links, der Balken l' rechts elastisch eingespannt, doch sind die Grundgleichungen (1) zu ergänzen, da zu den Winkeln, die die elastische Linie mit der Stabsehne bildet, noch der Stabdrehwinkel $\frac{v}{l}$ bezw. $\frac{v}{l'}$ hinzutritt. Versteht man unter α und β die Winkel mit der Wagrechten, so schreiben sich die Gleichungen (1) jetzt

$$\alpha = -\varepsilon_1 M_1 = M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 + \frac{v}{l},$$

$$\beta = M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2 - \frac{v}{l}.$$

Die erste Gleichung liefert mit Gl. (2b)

$$M_1 = -\frac{a}{l-a}\left(M_2 + \frac{v}{\alpha_2 l}\right). \tag{14a}$$

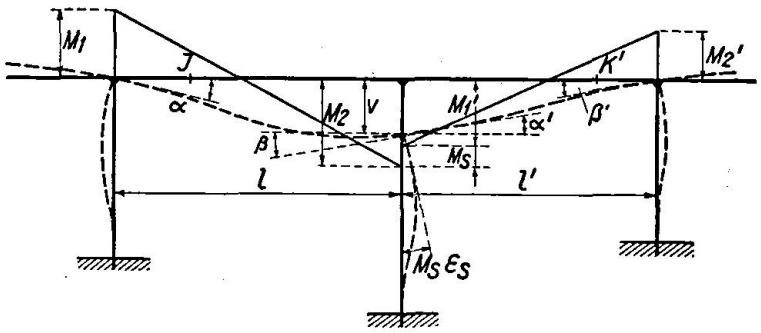

Fig. 6.

Dieser Wert in die zweite Gleichung eingesetzt, gibt mit Gl. (2c)

$$\beta = M_2 \varepsilon_a - \frac{v}{l-a}. \tag{15a}$$

Entsprechend erhält man für den linken Drehwinkel der Öffnung l'

$$\alpha' = M_1' \varepsilon_b' - \frac{v}{l'-b'}. \tag{15b}$$

Wegen der starren Verbindung der Säule mit dem Balken müssen die Winkel β und α' der Drehung des Säulenkopfes entsprechen; daher ist

$$M_2 \varepsilon_a - \frac{v}{l-a} = \varepsilon_s (M_1' - M_2),$$

$$M_1' \varepsilon_b' - \frac{v}{l'-b'} = \varepsilon_s (M_2 - M_1').$$

Daraus folgt

$$M_2 = v \frac{\frac{1+\varepsilon_b'/\varepsilon_s}{l-a} + \frac{1}{l'-b'}}{\varepsilon_a + \varepsilon_b' + \frac{\varepsilon_a \varepsilon_b'}{\varepsilon_s}}, \quad M_1' = v \frac{\frac{1+\varepsilon_a/\varepsilon_s}{l'-b'} + \frac{1}{l-a}}{\varepsilon_a + \varepsilon_b' + \frac{\varepsilon_a \varepsilon_b'}{\varepsilon_s}} \tag{16}$$

Aus M_2 findet man mit Gl. (14a) M_1; die entsprechende Beziehung für M_2' lautet

$$M_2' = -\frac{b'}{l'-b'}\left(M_1' + \frac{v}{\beta_1' l'}\right). \tag{14b}$$

Der Auflagerdruck bezw. die Normalkraft in der Säule berechnet sich aus Gl. (13), in der $A = 0$ zu setzen ist.

Für den Fall einer frei drehbaren Stütze gehen die Beziehungen (16) mit $\varepsilon_s = \infty$ über in

$$M_2 = M_1' = v\frac{\dfrac{1}{l-a} + \dfrac{1}{l'-b'}}{\varepsilon_a + \varepsilon_b'}. \tag{17}$$

Man gelangt in diesem wichtigen Sonderfall zu einer sehr einfachen graphischen Konstruktion, wenn man ε_a durch den Abstand a' des Festpunktes J' in der Öffnung l' ausdrückt; nach Gl. (9a) ist mit $\varepsilon_s = \infty$

$$a' = \frac{\alpha_2' l'}{\alpha_1' + \alpha_2' + \varepsilon_a},$$

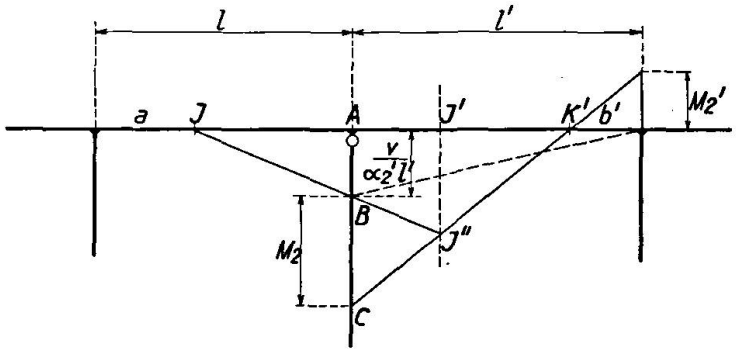

Fig. 7.

woraus

$$\varepsilon_a = \alpha_2' \frac{l'-a'}{a'} - \alpha_1'$$

und weiter

$$\varepsilon_a + \varepsilon_b' = \alpha_2' \frac{l'-a'}{a'} - \alpha_2' \frac{b'}{l'-b'}$$

folgt. Gl. (17) geht damit über in

$$M_2 = M_1' = \frac{v}{\alpha_2' l'} \frac{a(l-a+l'-b')}{(l-a)(l'-a'-b')}.$$

Mit dieser Formel läßt sich leicht die einfache graphische Konstruktion von M_2 beweisen, die Fig. 7 wiedergibt; man trägt an der Stütze $\overline{AB} = v/\alpha_2' l'$ ab, zieht die Linien $J'J''$, JJ'', $K'J''$, worauf sich $\overline{BC} = M_2$ ergibt. Für konstantes Trägheitsmoment und freie Drehbarkeit aller Stützen ist diese Konstruktion auf ganz anderem Wege bereits in der klassischen Literatur abgeleitet.

Ein anderer Sonderfall von Interesse betrifft die starre Stütze, $\varepsilon_s = 0$. Die Gl. (16) lauten hiefür

$$M_2 = \frac{v}{\varepsilon_a(l-a)}, \qquad M_1' = \frac{v}{\varepsilon_b'(l'-b')}. \tag{18}$$

Ausgenommen abnormale Fälle, erhält man bei elastisch drehbaren Stützen keine wesentlich abweichenden Auflagerdrücke, wenn man zur Vereinfachung näherungsweise nach Gl. (17) oder (18) rechnet.

In den Öffnungen, die links von l bezw. rechts von l' liegen, fallen die Nullstellen der Momente infolge der Stützensenkung v in die Festpunkte J bezw. K; ferner gelten die Beziehungen (10) für alle Stützen, ausgenommen die Stütze mit der Senkung v. Die in Abschnitt 2 und 3 enthaltenen Darlegungen genügen also, um die Momentenverteilung im ganzen Tragwerk zu finden und auch die Normalkräfte in allen Stützen zu ermitteln. Wie weiterhin gezeigt wird, dient die Berechnung der Normalkräfte für $v = 1$ als Grundlage bei der Untersuchung elastischer Stützensenkungen.

4. Einfluß elastischer Stützensenkungen.

Wir behandeln nachstehend den Fall, daß die lotrechte Verschiebung jedes Stützenkopfes nur von dem in dieser Stütze herrschenden Auflagerdruck abhängig und ihm direkt proportional ist; die Senkung kann die Folge der Elastizität der Stütze oder auch der (elastischen) Nachgiebigkeit des Baugrundes sein. Dieser klassische Fall hat für frei drehbare Stützen in der Literatur mehrere umfassende Darstellungen gefunden. F. Engesser und E. Winkler stellten als Elastizitätsgleichungen die sog. „Fünfmomentengleichungen" auf, mit deren Auflösung sich später u. a. H. Müller-Breslau und A. Ostenfeld befaßten; der letztere gibt in seinem Lehrbuch [2]) eine besonders ausführliche Darstellung der analytischen Theorie. Im Falle elastisch drehbarer Stützen dürfte diese Theorie zu sehr verwickelten Beziehungen führen. Das klassische Werk von Wilhelm Ritter [3]), „Anwendungen der graphischen Statik, nach C. Culmann bearbeitet", brachte eine andere, zum Teil graphische Berechnungsweise, indem hier nicht sofort die Stützenmomente, sondern zunächst die Nullstellen einzelner Seiten der Momentenlinie ermittelt wurden. Das Studium dieser hochwertigen, mit Tabellen und wichtigen Anwendungen durchsetzten Arbeit stellt an den Leser hohe Anforderungen, da die Beweisführung stellenweise nur angedeutet ist und stark auf das Gebiet der Geometrie übergreift. Gestützt auf die Darstellung Wilhelm Ritters, aber unter Beschränkung auf statische Hilfsmittel, hat später L. Vianello [4]) eine rein graphische Behandlung der Aufgabe durchgeführt. Auch bei diesen Lösungen entstehen indessen große Schwierigkeiten, sobald man versucht, sie auf den Balken mit elastisch drehbaren Stützen zu erweitern.

Als Grundlage zur Berechnung des durchlaufenden Balkens auf elastisch senkbaren Stützen kann auch die Theorie des elastisch eingespannten Balkens dienen, die sich auf den Fall elastisch senkbarer Widerlager erweitern läßt [5]). Die Auflagerdrehwinkel α und β der elastischen Linie sind in diesem Falle nicht nur von den betreffenden Einspannmomenten abhängig, sondern wegen der Auflagersenkungen auch von den Querkräften. Für die Elastizitätsbedingungen ist daher an Stelle der Gl. (2a) und (3a) allgemeiner zu schreiben

$$\alpha = \varepsilon_{10} - M_1 \varepsilon_{11} + M_2 \varepsilon_{12},$$
$$\beta = \varepsilon_{20} - M_2 \varepsilon_{22} + M_1 \varepsilon_{21},$$

[2]) A. Ostenfeld: Teknisk Statik, II (in dänischer Sprache). Kopenhagen 1925.

[3]) Wilhelm Ritter: Der kontinuierliche Balken. Zürich 1900.

[4]) L. Vianello: Der durchgehende Träger auf elastisch senkbaren Stützen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1904. Eine kurze Darstellung enthält das Lehrbuch von Müller-Breslau.

[5]) Der Verfasser: Allgemeine Theorie des elastisch eingespannten Balkens. Abhandlungen der I. V. B. H., Band II, 1934.

dazu kommen die Einsenkungen

$$v_1 = v_{10} - M_1 v_{11} + M_2 v_{12},$$
$$v_2 = v_{20} - M_2 v_{22} + M_1 v_{21}.$$

Die Anwendung auf den durchlaufenden Träger auf elastisch drehbaren und elastisch senkbaren Stützen bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, ist jedoch insofern etwas mühsam, als in jeder Öffnung acht verschiedene Einspanngrößen, nämlich die Werte ε_{11}, ε_{12}, v_{11}, v_{12}, ε_{22} usw. auftreten; zu ihrer Berechnung lassen sich Rekursionsformeln aufstellen.

Das nachstehend beschriebene Verfahren löst die Aufgabe auf anderem, besonders einfachen Wege, indem es die in Abschnitt 3 der vorliegenden Arbeit gegebenen Hilfsmittel verwertet. Für die Darstellung nummerieren wir die Stützen des durchlaufenden Balkens in ihrer Reihenfolge und bezeichnen die Auflagerdrücke bezw. die Normalkräfte in den Säulen mit C_1, C_2, C_3 ..., die entsprechenden Verschiebungen der Stützenköpfe mit v_1, v_2, v_3... Nach dem Gesetze der Superposition können wir schreiben

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= C_{10} + v_1 C_{11} + v_2 C_{12} + v_3 C_{13} + \cdots \\ C_2 &= C_{20} + v_1 C_{21} + v_2 C_{22} + v_3 C_{23} + \cdots \\ C_3 &= C_{30} + v_1 C_{31} + v_2 C_{32} + v_3 C_{33} + \cdots \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Darin bezeichnen

$C_{10}, C_{20}, C_{30} \cdots$ die Stützendrücke für feste Stützen,
$C_{11}, C_{21}, C_{31} \cdots$ „ „ „ $v_1 = 1,\ v_2 = v_3 = \cdots = 0$,
$C_{12}, C_{22}, C_{32} \cdots$ „ „ „ $v_2 = 1,\ v_1 = v_3 = \cdots = 0$,
$C_{13}, C_{23}, C_{33} \cdots$ „ „ „ $v_3 = 1,\ v_1 = v_2 = v_4 = \cdots = 0$, usw

Diese, mit Doppelzeiger versehenen Werte, lassen sich nach dem in Abschnitt 3 vorgeführten Verfahren leicht berechnen. Um z. B. die Drücke C_{12}, C_{22}, C_{32} ... zu finden, ermittelt man die Einspannmomente in allen Öffnungen für $v_2 = 1$ ($v_1 = v_3 = \ldots = 0$) und berechnet nach Gl. (13) mit $A = 0$ alle Stützendrücke. Als Kontrolle dient die Gleichgewichtsbedingung

$$C_{12} + C_{22} + C_{32} + \cdots = 0,$$

die erfüllt sein muß, weil diese Drücke die Reaktionen infolge $v_2 = 1$, also nicht infolge einer Belastung, darstellen.

Die elastische Nachgiebigkeit der Stützenköpfe kommt zum Ausdruck durch die Bedingungen

$$v_1 = k_1 C_1, \qquad v_2 = k_2 C_2, \qquad v_3 = k_3 C_3 \cdots; \tag{20}$$

darin sind k_1, k_2, k_3 ... die Senkungsmasse der Säulen, d. h. die durch den Stützendruck 1 (auf die vom Balken losgelösten Säulen) erzeugten Verschiebungen der Säulenköpfe. Nach Einsetzen der Beziehungen (20) in (19) entsteht das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= C_{10} + k_1 C_1 C_{11} + k_2 C_2 C_{12} + k_3 C_3 C_{13} + \cdots \\ C_2 &= C_{20} + k_1 C_1 C_{21} + k_2 C_2 C_{22} + k_3 C_3 C_{23} + \cdots \\ C_3 &= C_{30} + k_1 C_1 C_{31} + k_2 C_2 C_{32} + k_3 C_3 C_{33} + \cdots \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

usw., dessen Auflösung alle Stützendrücke C_1, C_2, C_3 ... liefert. Daraus folgen nach Gl. (20) die Verschiebungen v, mit deren Hilfe man nun nach Abschnitt 3 die endgültigen Momente bestimmt; man hat nur die Momentenordinaten für $v = 1$ mit v zu multiplizieren und die Einflüsse aller Stützensenkungen mit den nach Abschnitt 2 bestimmten Momenten für feste Stützen zu superponieren.

Die Auflösung der Gleichungen (21) gestaltet sich sehr einfach, wenn man das Verfahren der Iteration benützt. Da die Drücke mit gleichem Doppelzeiger, wie man leicht einsieht, stets überwiegen, so werden im ersten Rechnungsgang nur diese Drücke berücksichtigt, und man findet aus den Gl. (21) die angenäherten Werte

$$C_1' = \frac{C_{10}}{1 - k_1 C_{11}}, \qquad C_2' = \frac{C_{20}}{1 - k_2 C_{22}}, \qquad C_3' = \frac{C_{30}}{1 - k_3 C_{33}}.$$

Mit diesen Näherungswerten berechnet man aus den Gl. (21) in einem zweiten Rechnungsgang die verbesserten Werte

$$\begin{aligned} C_1''(1 - k_1 C_{11}) &= C_{10} + k_2 C_2' C_{12} + k_3 C_3' C_{13} + \cdots \\ C_2''(1 - k_2 C_{22}) &= C_{20} + k_1 C_1' C_{21} + k_3 C_3' C_{23} + \cdots \\ C_3''(1 - k_3 C_{33}) &= C_{30} + k_1 C_1' C_{31} + k_2 C_2' C_{32} + \cdots \end{aligned}$$

Die Rechnung kann beliebig fortgesetzt werden. Das Verfahren konvergiert rasch; in der Regel liefern bereits der erste und zweite Rechnungsgang wenig abweichende Werte. Sobald die Zahl der Stützen ein bescheidenes Maß übersteigt, ist für die praktische Anwendung das Gleichungssystem (21) dem System der klassischen Fünfmomentengleichungen bei weitem vorzuziehen, abgesehen davon, daß letztere nur für frei drehbare Stützen gelten. Man erkennt leicht, daß die Rechnung um so besser konvergiert, je kleiner die Verhältniszahlen $E J k/l^3$ ausfallen, d. h. je elastischer der Balken im Vergleich zu den Säulen ist. Im Falle relativ wenig nachgiebiger Stützen genügt schon der erste Rechnungsgang.

Zusammenfassung.

Ausgehend von der Theorie des elastisch eingespannten Balkens, wird die statische Berechnung des durchlaufenden Balkens auf elastisch drehbaren und senkbaren Stützen vorgeführt.

Résumé.

En partant de la théorie de la poutre élastiquement encastrée l'auteur expose le calcul statique de la poutre continue sur appuis élastiques et compressibles.

Summary.

Starting from the theory of elastically restrained beams, the static calculation of continuous beams on supports subjected to elastic turning and depression is demonstrated.