

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 4 (1936)  
  
**Artikel:** Beitrag zur Berechnung von Zweigelenkbogen-Rippenkuppeln mit elastischem Fussring  
**Autor:** Pohl, K.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-5094>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BEITRAG ZUR BERECHNUNG VON ZWEIGELENKBOGEN-RIPPENKUPPELN MIT ELASTISCHEM FUSSRING.

CONTRIBUTION AU CALCUL DES COUPOLES À NERVURES À DEUX  
ARTICULATIONS AVEC ANNEAU DE BASE ÉLASTIQUE.

ON THE CALCULATION OF TWO-HINGED RIBBED DOMES WITH  
ELASTIC RING AT BASE.

Dr. Ing. K. POHL, a. o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin.

## A. Einleitung.

Über einem regelmäßigen Vieleck von  $2n$  Seiten seien  $n$  gleiche Zweigelenkbogen oder Rahmen gespannt, die im Scheitel miteinander verbunden sind. Wir setzen voraus, daß alle Bogenrippen, der Eigenart des Stahlbaues entsprechend, hohe schmale Querschnitte haben, die nur in der Stegebene Lasten übertragen können. Wir vernachlässigen also die Biegesteifigkeit in Bezug auf die lotrechte Schwerlinie der Rippenquerschnitte und ebenso die Verdrehungssteifigkeit, wie wenn die Querschnitte nur aus einem dünnen Stehblech bestünden. Die statischen Voraussetzungen der Anordnung im Scheitel kann man sich nach Figur 1 in der Weise verwirklicht denken, daß alle Rippen mit Augenlaschen einen gemeinsamen lotrechten Gelenkbolzen umfassen. Beide Laschen übertragen die Horizontalkraft und das Biegemoment auf die  $2n - 1$  anderen Rippen, während die Querkraft etwa durch Bunde übertragen wird. Der Bolzen bewirkt demnach, daß alle Rippen im Scheitelpunkt zunächst dieselbe lotrechte Verschiebung ausführen. Außerdem verschiebt sich der Scheitelpunkt in waagerechter Ebene und der Bolzen nimmt eine gewisse Neigung an, beide Bewegungen bestimmen zugleich die Scheitelverschiebungen und -Verdrehungen der einzelnen Bogenrippen. Diese gedachte Anordnung erlaubt, daß die Winkel zwischen den Rippen sich um kleine Beträge ändern können.

Alle auf die Rippen wirkenden Lasten liegen in lotrechten (Durchmesser-) Ebenen und schneiden die Kuppelachse.

Denkt man sich zunächst jeden Fußpunkt fest gelagert, so läßt sich der Kämpferdruck, der in die Ebene der Rippe fällt, in eine lotrechte Komponente  $V$  und eine waagerechte, radial gerichtete Komponente  $H$  zerlegen. Es sind also bei  $2n$  Fußpunkten  $4n$  Auflagerkräfte vorhanden. Diesen stehen nur 5 Gleichgewichtsbedingungen gegenüber, da die Bedingung: Summe der Momente aller Kräfte um die Kuppelachse gleich Null, durch die Voraussetzung ohnehin erfüllt ist. Das Tragwerk mit ebenen Rippen und festen Fußpunkten ist

$4n - 5$  fach

statisch unbestimmt.

Es werden nun die Stützpunkte durch einen Fußring verbunden und jedem eine Verschiebungsmöglichkeit, z. B. in radialer Richtung, erteilt. Senkrecht

dazu, also tangential, wirkt dann eine Führungskraft oder ein Lagerwiderstand  $W$ , den man sich auch durch einen waagerechten Stützstab  $\perp$  Verschiebungsrichtung ersetzt denken kann. Es sind dann wieder  $4n$  Auflagerkomponenten vorhanden, denen jetzt aber 6 Gleichgewichtsbedingungen gegenüberstehen, da die Momentengleichung in Bezug auf die Kuppelachse diesmal anwendbar ist. Die äußere statische Unbestimmtheit ist demnach nur  $4n - 6$ . Es ist aber dafür eine innere Unbestimmtheit hinzugekommen, da ein Fußbringstab überzählig ist. Die Rippen bilden nämlich in der Horizontalprojektion mit dem Fußbring ein ebenes Fachwerk, das auch bei statisch bestimmter Stützung durch nur drei Führungskräfte  $W$  einen Stab zu viel hat, weil  $4n$  Stäbe und nur  $2n + 1$  Knotenpunkte vorhanden sind, den  $4n + 3$  Unbekannten also nur  $4n + 2$  Gleichgewichtsbedingungen gegenüberstehen. Im ganzen ist daher die statische Unbestimmtheit wieder

$$4n - 6 + 1 = 4n - 5 \text{ fach,}$$

wie bei der Kuppel mit festen Fußpunkten.

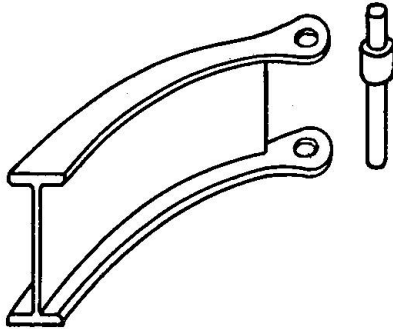


Fig. 1.

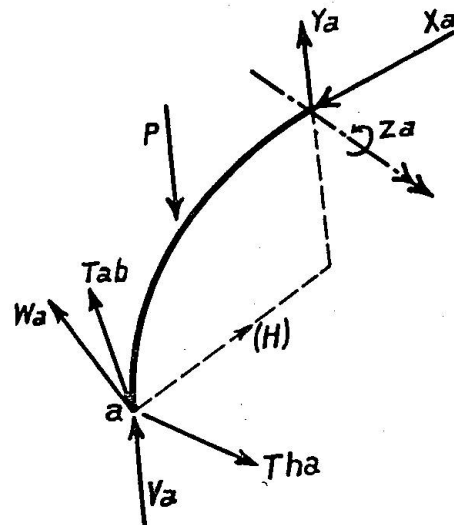


Fig. 2.

Jede Rippe überträgt auf den Scheitelnknoten eine waagerechte Kraft  $X$  (Horizontalschub), eine lotrechte  $Y$  (Querkraft) und ein Biegemoment  $Z$  in lotrechter Ebene, dessen Achse waagerecht und  $\perp$  Rippenebene gerichtet ist. Von jeder Art sind  $2n$  vorhanden, die sich am Scheitelnknoten das Gleichgewicht halten müssen. Reiht man also alle  $Y$  aneinander, so bilden sie eine gerade Linie, deren Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen oder einen Abstand haben, der einer etwa vorhandenen lotrechten Knotenlast im Scheitel entspricht. Die  $2n$  Werte  $X$  bilden ein geschlossenes Polygon in waagerechter Ebene, und dasselbe gilt von den Vektoren der Scheitelmomente  $Z$ .

Die weiteren Erläuterungen sollen sich auf das A c h t e c k beziehen ( $n = 4$ ), die Übertragung des Berechnungsverfahrens auf andere Seitenzahlen bietet keine Schwierigkeiten. Die Stützpunkte seien mit  $a b c \dots h$  bezeichnet, die lotrechten Auflagerkräfte mit  $V_a, V_b, \dots$ , die Horizontalschübe der Rippen am Fußpunkt mit  $H_a, H_b, \dots$ , die Führungskräfte mit  $W_a, W_b, \dots$ , die Spannkkräfte im Fußbring seien  $T_{ab}, T_{bc}, \dots T_{ha}$ . Am Scheitelnknoten greifen an

- die Querkräfte  $Y_a, Y_b, \dots$
- „ Horizontalkräfte  $X_a, X_b, \dots$  und
- „ Scheitelmomente  $Z_a, Z_b, \dots$

Wir greifen einen ganzen Bogen, z. B.  $a - e$ , heraus. Die von den Seitenrippen  $b c d$  einerseits,  $f g h$  andererseits übertragenen Querkräfte  $Y$  setzen wir zu

einer Summenkraft  $Y_{ae}$  zusammen, die gleich  $Y_a + Y_e$  ist mit umgekehrtem Vorzeichen und den Bogen  $ae$  im Scheitel lotrecht belastet. Ebenso ergibt die Zusammensetzung der Horizontalkraft  $X_{bcd}$  und  $X_{fgh}$  der Seitenrippen eine Summenkraft  $X_{ae} = X_a + X_e$  mit umgekehrtem Vorzeichen, die im Scheitel vom Bogen  $ae$  waagrecht angreift. Endlich kann man auch die Momentenvektoren von  $Z_{bcd}$  einerseits und  $Z_{fgh}$  andererseits zu einem Summenvektor  $Z_{ae}$  zusammensetzen, dessen Moment als Lastmoment im Scheitel vom Bogen  $ae$  angreift. Bogen  $ae$  muß sich dann unter der Wirkung der Lasten  $P$ , der Scheitellasten  $X_{ae}$   $Y_{ae}$   $Z_{ae}$ , der Auflagerkräfte  $V_a$   $V_e$  und der Horizontalschübe  $H_a$   $H_e$  im Gleichgewicht befinden.

Was wir hier für den Bogen  $ae$  nachgewiesen haben, gilt natürlich genau so auch für  $bf$ ,  $cg$  und  $dh$ . Es wird also darauf ankommen, die Scheitellasten der Bogen zu berechnen. Hierzu werden außer den Gleichgewichtsbedingungen die Formänderungsbedingungen im Scheitelpunkt dienen, wonach die beiden Verschiebungskomponenten  $\xi$  und  $\eta$  sowie die Verdrehung  $\zeta$  der Tangentialebene — oder des gedachten Gelenkbolzens — für alle 4 Bogen dieselbe sein muß. Außerdem müssen die radial erfolgenden Verschiebungen der Auflagerpunkte mit den Dehnungen der Fußringstäbe verträglich sein.

Wir wollen uns auf lotrecht wirkende Lasten  $P$  beschränken und untersuchen die Wirkung einer auf einem beliebigen Punkt des Bogens  $ae$  stehenden Einzellast. Wegen der achsensymmetrischen Anordnung lassen sich die Rechnungsergebnisse auf die Belastung jedes anderen Bogens übertragen und damit auf jede beliebig zusammengesetzte lotrechte Belastung der Kuppel.

Die Berechnung vereinfacht sich bedeutend, wenn wir den gegebenen Belastungszustand durch zwei Teilbelastungszustände ersetzen,

- I mit 2 symmetrisch wirkenden Lasten  $P$ ,  
 II „ 2 antimetrisch „ „ „  $P$

in denselben Punkten. Jede statische Größe  $M$  des gegebenen Belastungsfalles ist dann

$$M = \frac{1}{2} (M_I + M_{II}).$$

## B. Symmetrischer Belastungsfall I.

### 1. Gleichgewicht der äußeren Kräfte.

$$V_a = V_e, V_b = V_d = V_f = V_h, V_c = V_g.$$

$$\Sigma V = 2P.$$

$$W_a = W_e = W_c = W_g = 0.$$

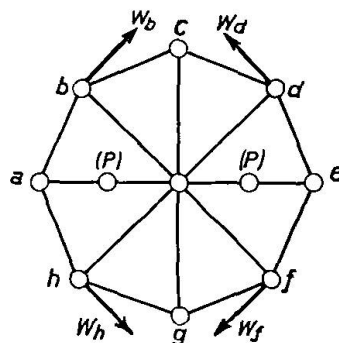


Fig. 3.

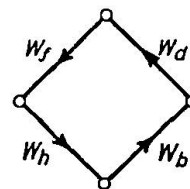


Fig. 4.

Da  $\Sigma W_{bdfh} = 0$  sein muß, bilden sie im Kräfteplan ein Quadrat von der Seitenlänge  $W$ , Figur 4.



## 2. Gleichgewicht am Scheitelknoten.

$$\begin{aligned} Y_b &= Y_d = Y_f = Y_h, \\ Y_a &= Y_e, \quad Y_c = Y_g. \end{aligned}$$

Aus  $\Sigma Y = 0$  folgt (Figur 5)

$$Y_c = Y_a - 2 Y_b.$$

Die Scheitellasten sind

$$\left. \begin{aligned} \text{am Bogen } a e: Y_{ae} &= 2 Y_a, \text{ aufwärts pos.,} \\ \text{„ „ } b f: Y_{bf} &= 2 Y_b, \text{ abwärts „} \\ \text{„ „ } c g: Y_{cg} &= 2 Y_a - 4 Y_b, \text{ abwärts pos.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

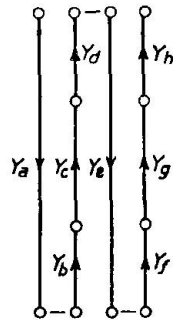


Fig. 5.

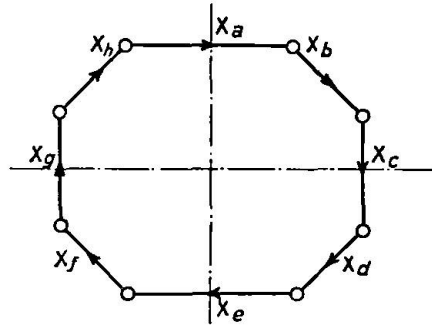


Fig. 6.

Figur 6 zeigt die Zusammensetzung der Horizontalkräfte im Scheitel mit

$$\begin{aligned} X_b &= X_d = X_f = X_h, \\ X_c &= X_g, \\ X_a &= X_e. \end{aligned}$$

Die Scheitellasten  $X_{ae}$   $X_{bf}$   $X_{cg}$  sind gleich Null, weil nach Herausnehmen der Kräfte  $X_a$  und  $X_e$  die übrigen wieder ein geschlossenes Polygon bilden mit der Summenkraft Null, ebenso bleibt ohne  $X_b$  und  $X_f$  ein geschlossenes Polygon usw.

Für das Polygon der Momentenvektoren  $Z_a \dots$  gilt dasselbe, wenn man Figur 6 um  $90^\circ$  herumdreht, daher sind auch die Scheitellastmomente

$$Z_{ae} = 0, \quad Z_{bf} = 0, \quad Z_{cg} = 0.$$

Auf die drei Bogen wirken nur lotrechte Scheitellasten. Daher gilt für alle Seitenrippen  $V = Y$  und  $H = X$ .

## 3. Gleichgewicht am Fußring.

Am Fußring halten sich die Horizontalschübe der Bogen  $H_a \dots$  mit den 4 Lagerwiderständen  $W$  das Gleichgewicht, bilden also ein geschlossenes Polygon, Figur 7. Zerlegt man  $H_a$  nach  $T_{ab}$  und  $T_{ha}$ ,  $H_c$  nach  $T_{bc}$  und  $T_{cd}$ , entsprechend  $H_e$  und  $H_g$ , so entsteht der vollständige Kräfteplan. Durch  $T_{ab}$  und  $T_{bc}$  sind alle Punkte des Kräfteplans bestimmt, es lassen sich daher die  $H$  und  $W$  durch diese beiden Größen ausdrücken. Mit dem halben Zentriwinkel  $\varepsilon$  findet man

$$H_a = 2 T_{ab} \sin \varepsilon, \quad (2a)$$

$$H_c = 2 T_{bc} \sin \varepsilon, \quad (2b)$$

und aus

$$T_{ab} - T_{bc} = \frac{W}{\cos \varepsilon},$$

und

$$H_b + W \operatorname{tg} \varepsilon = 2 T_{ab} \sin \varepsilon$$

folgt

$$H_b = (T_{ab} + T_{bc}) \sin \varepsilon, \quad (2c)$$

$$W = (T_{ab} - T_{bc}) \cos \varepsilon. \quad (2d)$$

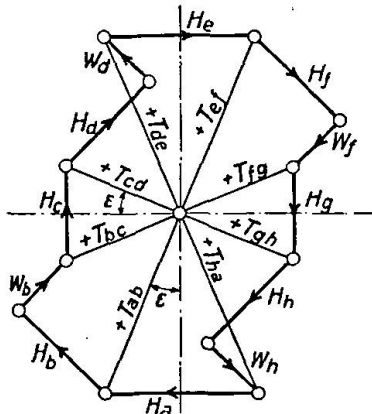


Fig. 7.

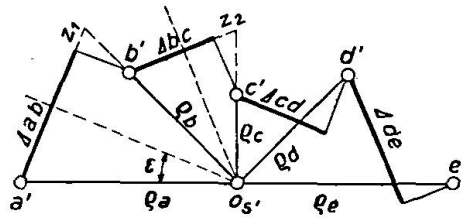


Fig. 8.

#### 4. Verschiebungsplan des Fußrings.

Die Punkte  $a' b' c' d' e'$  des Verschiebungsplanes Figur 8 sind durch die radial gerichteten Lagerverschiebungen  $q_a = 0 - a'$ ,  $q_b = 0 - b'$  usw. und durch die Längenänderungen der Ringstäbe

$$\Delta ab, \Delta bc, \Delta cd = \Delta bc \text{ und } \Delta de = \Delta ab$$

gegeben. Die Lage aller Punkte ist durch  $q_a$  und die  $\Delta$  bestimmt. Mit den Hilfsstrecken  $z_1$  und  $z_2$  wird

$$q_b = q_a - \frac{z_1}{\sin \varepsilon}, \quad z_1 = 2q_a \sin \varepsilon - \Delta ab,$$

hieraus

$$q_b = \frac{\Delta ab}{\sin \varepsilon} - q_a. \quad (3a)$$

$$q_c = q_b - \frac{z_2}{\sin \varepsilon}, \quad z_2 = 2q_b \sin \varepsilon - \Delta bc,$$

hieraus

$$q_c = \frac{\Delta bc}{\sin \varepsilon} - q_b \text{ oder } q_c = \frac{\Delta bc - \Delta ab}{\sin \varepsilon} + q_a. \quad (3b)$$

#### 5. Hilfsbelastungszustände am einfachen Balken.

Der Bogen oder Rahmen, dessen Gestalt noch beliebig sein kann, wird als einfacher Balken gestützt und mit  $H = 1$ ,  $Y_{ae} = 1$  und den Lasten  $P = 1$  be-

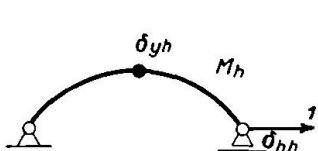


Fig. 9.

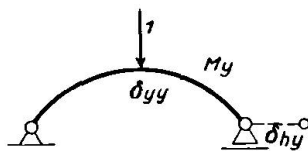


Fig. 10.

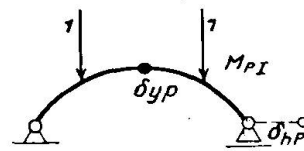


Fig. 11.

lastet. Es entstehen die Momente  $M_h M_y M_{PI}$ . Dann wird die waagerechte Verschiebung  $\delta_h$  des beweglichen Lagers und die lotrechte Verschiebung  $\delta_y$  des Scheitels für alle drei Fälle bestimmt.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{hh} &= \int_0^l M_h^2 \frac{ds}{EJ}, \quad \delta_{yy} = \int_0^l M_y^2 \frac{ds}{EJ}, \quad \delta_{yh} = \delta_{hy} = \int_0^l M_h M_y \frac{ds}{EJ} \\ \delta_{hP} &= \int_0^l M_h M_{PI} \frac{ds}{EJ}, \quad \delta_{yP} = \int_0^l M_y M_{PI} \frac{ds}{EJ}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Meistens wird man auf die sehr geringen Beiträge der Normalkräfte zu diesen Verschiebungsgrößen verzichten können, nur bei sehr flachen Bogen könnte es nötig sein, das Glied

$$\int_0^l N_h^2 \frac{ds}{EF} \quad \text{in } \delta_{hh} \text{ zu berücksichtigen,}$$

es geschieht dies dann in bekannter Weise durch einen Faktor  $\nu > 1$ , der zu dem Momentengliede hinzutritt.

## 6. Aufstellung der Elastizitätsgleichungen.

Die Figuren 12, 13, 14 zeigen die Belastungszustände der drei Bogen. Die Pfeilrichtungen der  $Y_{ae} \dots$  sind positiv eingetragen, wie sie sich aus Fig. 5

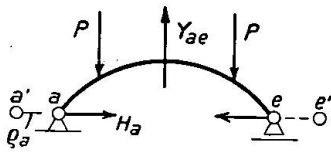


Fig. 12.

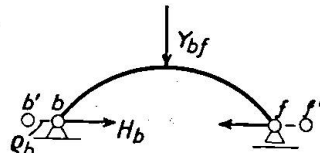


Fig. 13.

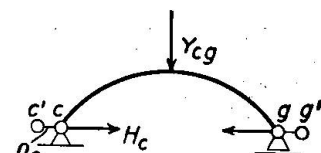


Fig. 14.

ergeben haben. Es wird nun an jedem Bogen die Scheitelsenkung  $\eta_s$  — abwärts positiv — und die Längenänderung der Bogensehne  $\Delta l$  — Zunahme positiv — durch die unter 5. erläuterten Hilfwerte ausgedrückt.

Bogen  $ae$ :

$$\eta_s = P \delta_{yP} - Y_{ae} \delta_{yy} - H_a \delta_{yh}, \quad (5a)$$

$$\Delta l = 2 q_a = P \delta_{hP} - Y_{ae} \delta_{hy} - H_a \delta_{hh}. \quad (5b)$$

Bogen  $bf$ :

$$\eta_s = Y_{bf} \delta_{yy} - H_b \delta_{yh}, \quad (6a)$$

$$2 q_b = Y_{bf} \delta_{hy} - H_b \delta_{hh}. \quad (6b)$$

Bogen  $cg$ :

$$\eta_s = Y_{cg} \delta_{yy} - H_c \delta_{yh}, \quad (7a)$$

$$2 q_c = Y_{cg} \delta_{hy} - H_c \delta_{hh}. \quad (7b)$$

Die Scheitellasten  $Y_{ae} \dots$  werden nach den Gl. (1) durch die Scheitelquerkräfte  $Y_a \dots$  ausgedrückt, die  $H$  nach den Gl. (2) durch  $T_{ab}$  und  $T_{bc}$ . Dann erhält man durch Gleichsetzen von (5 a) und (6 a):

$$P \delta_{yP} - 2 Y_a \delta_{yy} - 2 T_{ab} \sin \varepsilon \delta_{yh} = 2 Y_b \delta_{yy} - (T_{ab} + T_{bc}) \sin \varepsilon \delta_{yh}. \quad (8)$$

(5 a) = (7 a) gibt

$$P \delta_{yP} - 2 Y_a \delta_{yy} - 2 T_{ab} \sin \varepsilon \delta_{yh} = (2 Y_a - 4 Y_b) \delta_{yy} - 2 T_{bc} \sin \varepsilon \delta_{yh}. \quad (9)$$

Die Gleichungen (5 b), (6 b), (7 b) lauten mit Beachtung der Gl. (1), (2), (3) zunächst folgendermaßen:

$$2 q_a = P \delta_{hP} - 2 Y_a \delta_{hy} - 2 T_{ab} \sin \varepsilon \delta_{hh}. \quad (5b)$$

$$\frac{2 T_{ab} a}{EF_t \sin \varepsilon} - 2 q_a = 2 Y_b \delta_{hy} - (T_{ab} + T_{bc}) \sin \varepsilon \delta_{hh}. \quad (6b)$$

$$\frac{2(T_{bc} - T_{ab})a}{EF_t \sin \varepsilon} + 2q_a = (2Y_a - 4Y_b)\delta_{hy} - 2T_{bc} \sin \varepsilon \delta_{hh}. \quad (7b)$$

Hierbei ist die Länge der Ringseiten mit  $a$ , der Querschnitt des Zugrings mit  $F_t$  eingeführt worden.

Wir bilden aus (5 b) + (6 b)

$$\frac{2T_{ab}a}{EF_t \sin \varepsilon} = P\delta_{hP} - 2(Y_a - Y_b)\delta_{hy} - (3T_{ab} + T_{bc}) \sin \varepsilon \delta_{hh}, \quad (10)$$

aus (5 b) - (7 b):

$$\frac{2(T_{ab} - T_{bc})a}{EF_t \sin \varepsilon} = P\delta_{hP} - 4(Y_a - Y_b)\delta_{hy} - 2(T_{ab} - T_{bc}) \sin \varepsilon \delta_{hh}, \quad (11)$$

aus (6 b) + (7 b):

$$\frac{2T_{bc}a}{EF_t \sin \varepsilon} = 2(Y_a - Y_b)\delta_{hy} - (T_{ab} + 3T_{bc}) \sin \varepsilon \delta_{hh}. \quad (12)$$

Wir schreiben Gl. (8)

$$Y_a + Y_b = \frac{1}{2}P \frac{\delta_{yP}}{\delta_{yy}} - \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{bc}) \sin \varepsilon \frac{\delta_{yh}}{\delta_{yy}},$$

und Gl. (9)

$$Y_a - Y_b = \frac{1}{4}P \frac{\delta_{yP}}{\delta_{yy}} - \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{bc}) \sin \varepsilon \frac{\delta_{yh}}{\delta_{yy}}.$$

Dann wird

$$Y_a = \frac{3}{8}P \frac{\delta_{yP}}{\delta_{yy}} - \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{bc}) \sin \varepsilon \frac{\delta_{yh}}{\delta_{yy}}, \quad (13)$$

$$Y_b = \frac{1}{8}P \frac{\delta_{yP}}{\delta_{yy}}. \quad (14)$$

Ebenso lassen sich zwei Gleichungen für  $T_{ab} + T_{bc}$  und  $T_{ab} - T_{bc}$  aufstellen.

Gl. (10) + (12):

$$(T_{ab} + T_{bc}) \left( 2\delta_{hh} + \frac{a}{EF_t \sin^2 \varepsilon} \right) = \frac{P\delta_{hP}}{2 \sin \varepsilon}, \quad (15)$$

und  $Y_a - Y_b$  in Gl. (11) eingesetzt, gibt:

$$(T_{ab} - T_{bc}) \left[ \left( \delta_{hh} + \frac{a}{EF_t \sin^2 \varepsilon} \right) \delta_{yy} - \delta_{yh}^2 \right] = \frac{P}{2 \sin \varepsilon} (\delta_{hP} \delta_{yy} - \delta_{yP} \delta_{hy}) \quad (16)$$

Wir führen alle Verschiebungsgrößen  $EJ_c$ -fach ein und setzen

$$\frac{aJ_c}{F_t \sin^2 \varepsilon} = \kappa. \quad (17)$$

$$T_{ab} + T_{bc} = \frac{P}{2 \sin \varepsilon} \cdot \frac{\delta_{hP}}{(2\delta_{hh} + \kappa)},$$

$$T_{ab} - T_{bc} = \frac{P}{2 \sin \varepsilon} \frac{(\delta_{hP} \delta_{yy} - \delta_{yP} \delta_{hy})}{[(\delta_{hh} + \kappa) \delta_{yy} - \delta_{yh}^2]}.$$

Der Bruch des Ausdrucks für  $T_{ab} - T_{bc}$  erlaubt eine einfache statische Deutung. Der Bogen sei nach Fig. 15 im Scheitel noch durch ein Rollenlager gestützt, die Enden durch ein gerades Zugband von der Länge  $l$  und dem Querschnitt  $F_t \sin \varepsilon$  verbunden. Dann lauten die Elastizitätsgleichungen zur Berechnung von  $Y'$  und  $H'$  bei der gegebenen Belastung:

$$Y' \delta_{yy} + H' \delta_{yh} = P \delta_{yP}$$

$$Y' \delta_{hy} + H' \left( \delta_{hh} + \frac{J_c l}{F_t \sin \varepsilon} \right) = P \delta_{hP}.$$

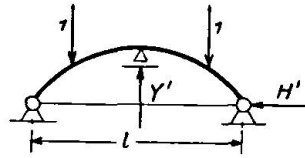


Fig. 15.

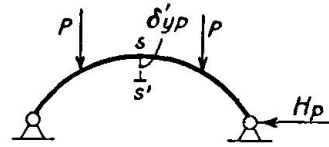


Fig. 16.

Da  $l = a : \sin \varepsilon$ , so ist  $\delta_{hh} + \frac{J_c a}{F_t \sin^2 \varepsilon} = \delta_{hh} + \kappa$ . Die Auflösung ergibt

$$\begin{aligned} Y' &= \frac{\delta_{yP}(\delta_{hh} + \kappa) - \delta_{hP} \delta_{yh}}{\delta_{yy}(\delta_{hh} + \kappa) - \delta_{hy}^2}, \\ H' &= \frac{-\delta_{yP} \delta_{yh} + \delta_{hP} \delta_{yy}}{\delta_{yy}(\delta_{hh} + \kappa) - \delta_{hy}^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Wir können daher schreiben

$$T_{ab} - T_{bc} = \frac{P}{2 \sin \varepsilon} H',$$

$$T_{ab} + T_{bc} = \frac{P}{2 \sin \varepsilon} \cdot \frac{\delta_{hP}}{(2 \delta_{hh} + \kappa)}.$$

$$T_{ab} = \frac{P}{4 \sin \varepsilon} \left( \frac{\delta_{hP}}{2 \delta_{hh} + \kappa} + H' \right), \quad (19a)$$

$$T_{bc} = \frac{P}{4 \sin \varepsilon} \left( \frac{\delta_{hP}}{2 \delta_{hh} + \kappa} - H' \right). \quad (19b)$$

Damit kann man alle übrigen Werte ausdrücken, aus (13)

$$Y_a = \frac{P}{8 \delta_{yy}} (3 \delta_{yP} - 2 H' \delta_{yh}), \quad (20a)$$

$$Y_c = Y_a - 2 Y_b = \frac{P}{8 \delta_{yy}} (\delta_{yP} - 2 H' \delta_{yh}). \quad (20b)$$

Die Horizontalschübe sind nach den Gl. (2)

$$H_a = 2 T_{ab} \sin \varepsilon = \frac{P}{2} \left( \frac{\delta_{hP}}{2 \delta_{hh} + \kappa} + H' \right), \quad (21a)$$

$$H_b = (T_{ab} + T_{bc}) \sin \varepsilon = \frac{P}{2} \frac{\delta_{hP}}{(2 \delta_{hh} + \kappa)}, \quad (21b)$$

$$H_c = 2 T_{bc} \sin \varepsilon = \frac{P}{2} \left( \frac{\delta_{hP}}{2 \delta_{hh} + \kappa} - H' \right), \quad (21c)$$

$$W = (T_{ab} - T_{bc}) \cos \varepsilon = \frac{P}{2} \cotg \varepsilon H'. \quad (21d)$$

Die lotrechten Auflagerkräfte sind, vgl. Fig. 12, 13, 14:

$$V_a = P - Y_a, \quad V_b = Y_b, \quad V_c = Y_c.$$

Damit sind alle äußeren Kräfte an den drei Bogen bekannt und es können alle  $M N Q$  berechnet werden. Die lotrechte Scheitelverschiebung folgt aus einer der Gl. (5 a), (6 a), (7 a), die Lagerverschiebungen kann man aus den Gl. (5 b), (6 b), (7 b) berechnen.

Man erhält z. B. aus Gl. (6 a):

$$E J_c \eta_s = Y_{bf} \delta_{yy} - H_b \delta_{yh}.$$

$$Y_{bf} = 2 Y_b = \frac{1}{4} P \frac{\delta_{yP}}{\delta_{yy}}, \quad H_b = \frac{P}{2} \frac{\delta_{hP}}{(2 \delta_{hh} + \kappa)}.$$

Wäre der Zugring starr ( $F_t = \infty$ ), so wäre  $\kappa = 0$  und man erhielte

$$E J_c \eta_s = \frac{P}{4} \delta_{yP} - \frac{P}{4} \frac{\delta_{hP}}{\delta_{hh}} \delta_{yh}.$$

Der Horizontalschub des fest gelagerten Bogens  $a - e$  ist mit Beachtung der Verschiebungsgrößen in Fig. 12 und 14:

$$H_P = P \frac{\delta_{hP}}{\delta_{hh}},$$

daher kann man schreiben:

$$E J_c \eta_s = \frac{P}{4} (\delta_{yP} - H_P \delta_{yh}).$$

Die Klammer stellt die Scheitelsenkung  $\delta_{yP}^{(1)}$  des fest gelagerten, einfach statisch unbestimmten Bogens dar,

$$E J_c \eta_s = \frac{P}{4} \delta_{yP}^{(1)} \quad (22)$$

bedeutet also, daß für starren Zugring die Scheitelsenkung der Kuppel bei Belastung eines Bogens gleich dem vierten Teil der Scheitelsenkung des ebenso belasteten Einzelbogens ist. Dies gilt für jede Laststellung.

Für die Lagerverschiebungen erhält man mit  $\kappa = 0$  aus den Gl. (5 b), (6 b), (7 b) nach Einsetzen von  $Y_{ae}$ ,  $H_a$  usw. aus den Gl. (20) und (21) mit Beachtung von (18)

$$\varrho_a = \frac{P}{8 \delta_{yy}} (\delta_{hP} \delta_{yy} - \delta_{yP} \delta_{hy}) = -\varrho_b = +\varrho_c = -\varrho_d = +\varrho_e \text{ usw.} \quad (22a)$$

Die Lagerverschiebungen werden alle gleich groß mit abwechselnd umgekehrtem Vorzeichen, wie es bei einem radial geführten Fußring von gerader Seitenzahl zu erwarten ist. Bei einem räumlichen Gelenkfachwerk würde dies Beweglichkeit des Fußrings bedeuten, für ein solches ist unsere Lagerung bekanntlich unbrauchbar.

## C. Antimetrischer Belastungsfall II.

### 1. Gleichgewicht der äußeren Kräfte.

An denselben Punkten wie im Falle I wirkt jetzt links wieder eine abwärts, rechts dagegen eine aufwärts gerichtete Kraft  $P$ .

$$V_e = -V_a, \quad V_d = -V_b, \quad V_c = 0, \quad \Sigma V = 0.$$

Die Führungskräfte  $W$  auf jeder Seite halten sich nach Fig. 18 das Gleichgewicht.

$$W_c = W_b \sqrt{2}. \quad (23)$$

## 2. Gleichgewicht am Scheitelknoten.

$$Y_e = -Y_a, Y_d = -Y_b, Y_c = 0.$$

Die Scheitellasten  $Y_{ae}, Y_{bf}, Y_{cg}$  werden sämtlich  $= 0$ , weil die seitlich eines Bogens wirkenden Kräfte  $Y$  sich stets in sich aufheben, Fig. 19. Für die Scheitellkräfte  $X$  gilt

$$X_e = -X_a, X_d = -X_b, X_c = 0.$$

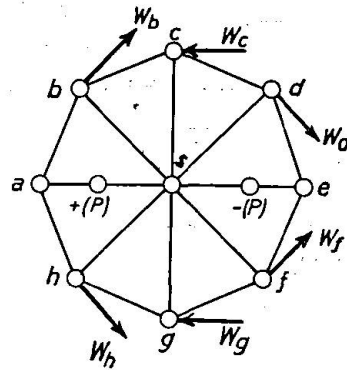


Fig. 17.

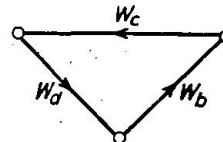


Fig. 18.

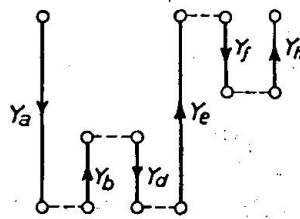


Fig. 19.

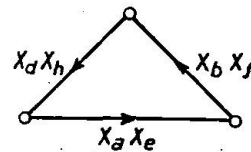


Fig. 20.

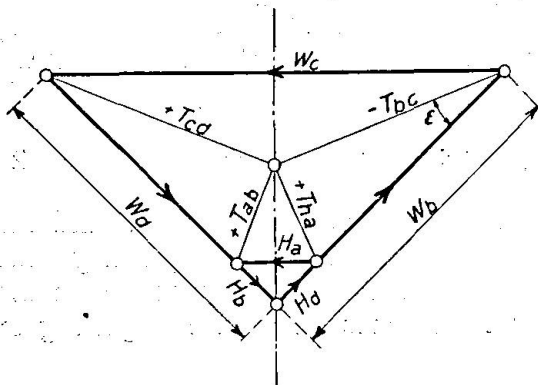


Fig. 21.

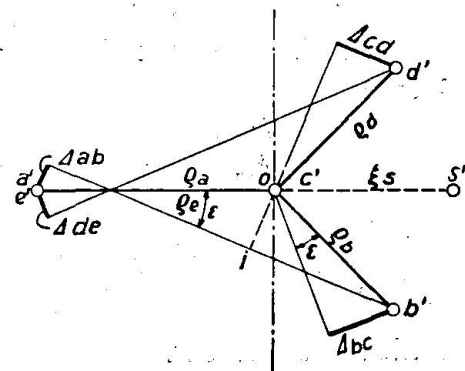


Fig. 21 a.

Das Gleichgewicht der Kräfte liefert nach Fig. 20:

$$X_b = X_d = X_f = X_h = X_a \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}. \quad (24)$$

Scheitellasten:

$$X_{ae} = \Sigma X_{bdfh} = 2X_a, \text{ Richtung } ea \quad (25a)$$

$$X_{bf} = \Sigma X_{adeh} = 2X_a \frac{1}{2} \sqrt{2}, \text{ Richtung } bf. \quad (25b)$$

Für die Scheitellbiegungsmomente  $Z_a \dots$  und die Scheitellastmomente  $Z_{ae}, Z_{bf}$  gelten dieselben Beziehungen, da Fig. 20 auch für die Vektoren der  $Z$  gilt, wenn man es um  $90^\circ$  herumdreht, also



$$Z_{ae} = 2 Z_a \quad (26a)$$

$$Z_{bf} = Z_a \sqrt{2}. \quad (26b)$$

### 3. Gleichgewicht am Fußring.

$T_{cd} = -T_{bc}$ ,  $T_{de} = -T_{ab}$ , Fig. 21, zeigt den Kräfteplan. Die äußeren Kräfte  $H_a, H_b, W_b, W_c, W_d, H_d$  bilden ein geschlossenes Polygon, das sich dann für die übrigen wiederholt. Alle Kräfte lassen sich durch eine einzige Größe, z. B.  $H_a$  ausdrücken.

$$\left. \begin{aligned} T_{ab} &= \frac{H_a}{2 \sin \varepsilon}, & T_{bc} &= T_{ab} \cotg \varepsilon = \frac{H_a \cotg \varepsilon}{2 \sin \varepsilon}, \\ H_b &= \frac{H_a}{2} \sqrt{2}, & W_c &= 2 T_{bc} \cos \varepsilon = H_a \cotg^2 \varepsilon, \\ W_b &= \frac{1}{2} W_c \sqrt{2} = \frac{H_a}{2} \cotg^2 \varepsilon \sqrt{2}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Diese Formeln setzen die Pfeilrichtungen in Fig. 21 voraus,  $T_{bc}$  ist diesmal eine Druckkraft.

### 4. Verschiebungsplan des Fußrings.

Die radialen Verschiebungen  $q$  der Fußpunkte sind

$$q_e = -q_a, \quad q_d = -q_b, \quad q_c = 0.$$

Aus der Projektion

$$0 - i = q_a \sin \varepsilon - \Delta ab = q_b \sin \varepsilon$$

folgt

$$q_b = q_a - \frac{\Delta ab}{\sin \varepsilon}$$

$$q_b = q_a - \frac{T_{ab} a J_c}{\sin \varepsilon F_t} = q_a - \frac{H_a}{2} \kappa.$$

Aus  $\Delta_{bc} = q_b \sin \varepsilon$  folgt

$$T_{bc} a \frac{J_c}{F_t} = \left( q_a - \frac{H_a}{2} \kappa \right) \sin \varepsilon$$

und nach Einsetzen von  $T_{bc}$  aus (27):

$$q_a = \frac{H_a}{2} \kappa (1 + \cotg \varepsilon),$$

$$q_b = \frac{H_a}{2} \kappa \cotg \varepsilon \text{ und mit } \cotg \varepsilon = 1 + \sqrt{2},$$

$$q_a = \frac{H_a}{2} \kappa (2 + \sqrt{2}), \quad (28a)$$

$$q_b = \frac{H_a}{2} \kappa (1 + \sqrt{2}) = q_a \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}. \quad (28b)$$

### 5. Hilfsbelastungszustände am einfachen Balken.

Der Bogen oder Rahmen wird nacheinander mit einer waagerechten Scheitellast 1, einem Lastmoment 1 und den Lasten  $P = \pm 1$  belastet. Hierbei entstehen die Momente  $M_x, M_z, M_{PII}$ . Damit der erste Zustand auch anti-

symmetrisch wird, lassen wir die Horizontalschübe  $\pm \frac{1}{2}$  wirken. Mit Beachtung der symmetrischen Belastungszustände nach Fig. 9 und 10 wird

$$\begin{aligned} E J_c \delta_{hx} &= \int M_h M_x ds' = 0 \\ E J_c \delta_{yx} &= \int M_y M_x ds' = 0 \\ E J_c \delta_{hz} &= \int M_h M_z ds' = 0 \\ E J_c \delta_{yz} &= \int M_y M_z ds' = 0, \end{aligned}$$

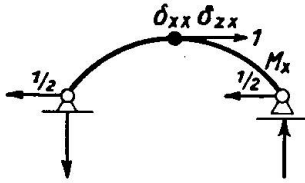


Fig. 22.

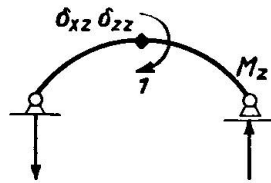


Fig. 23.

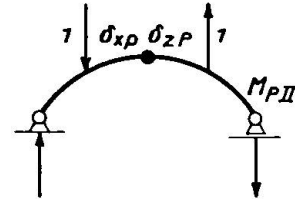


Fig. 24.

es bleibt nur

$$\left. \begin{aligned} E J_c \delta_{xx} &= \int M_x^2 ds' = \text{waagerechte Verschiebung des Scheitels,} \\ E J_c \delta_{zz} &= \int M_z^2 ds' = \text{Verdrehung des Scheitelquerschnittes,} \\ E J_c \delta_{xz} &= \int M_x M_z ds' = \text{Scheitelverdrehung bei (22) oder Scheitelver-} \end{aligned} \right\} (29)$$

schiebung bei (23).

Da der Belastungszustand (24) ebenfalls antisymmetrisch ist, so wird

$$\left. \begin{aligned} E J_c \delta_{hPII} &= \int M_h M_{PII} ds' = 0, \text{ daher auch } H_{PII} = 0, \\ E J_c \delta_{yPII} &= \int M_y M_{PII} ds' = 0, \text{ es bleiben} \\ E J_c \delta_{xP} &= \int M_x M_{PII} ds' = \text{waagerechte Scheitelverschiebung,} \\ E J_c \delta_{zP} &= \int M_z M_{PII} ds' = \text{Scheitelverdrehung bei (24).} \end{aligned} \right\} (30)$$

## 6. Aufstellung der Elastizitätsgleichungen.

Bogen  $a e$ , das Kräftepaar  $P$  erzeugt keinen Horizontalschub, ebensowenig das Lastmoment  $Z_{ab}$ , daher

$$X_{ae} = H_a + H_e, \quad H_a = \frac{1}{2} X_{ae}.$$

Die waagerechte, nach rechts gerichtete Verschiebung des Scheitelpunktes  $s$  ist  $\xi_s$ , die Verdrehung des Scheitelquerschnitts im Uhrzeigersinne  $= \zeta_s$ .

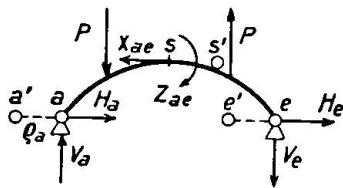


Fig. 25.

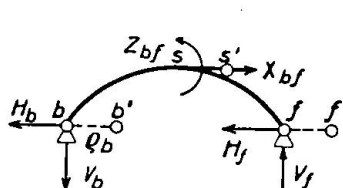


Fig. 26.

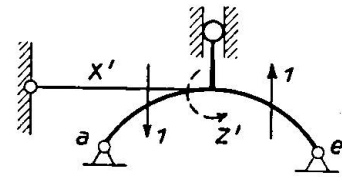


Fig. 27.

Wir bilden eine Arbeitsgleichung aus dem Belastungszustand (22) und dem Formänderungszustand (25):

$$1 \cdot \xi_s + \frac{1}{2} \varrho_a + \frac{1}{2} \varrho_e = \int M_x M ds'$$

und mit

$$\begin{aligned} M &= P M_{PII} - X_{ae} M_x + Z_{ae} M_z, \quad \varrho_e = \varrho_a, \\ \xi_s + \varrho_a &= P \delta_{xP} - X_{ae} \delta_{xx} + Z_{ae} \delta_{xz}. \end{aligned} \quad (31a)$$

Ebenso erhält man aus (23)  $\times$  (25):

$$\begin{aligned} 1 \cdot \zeta_s &= \int M_z (P M_{PII} - X_{ae} M_x + Z_{ae} M_z) ds' \\ \zeta_s &= P \delta_{zP} - X_{ae} \delta_{xz} + Z_{ae} \delta_{zz}. \end{aligned} \quad (31b)$$

Die Verschiebung des Scheitelpunktes  $s$  beim Bogen  $bf$  in seiner Ebene ist

$$s - s' = \xi_s \cdot \cos 45^\circ = \xi_s \frac{\sqrt{2}}{2},$$

in demselben Verhältnis steht die Verdrehung des Scheitelquerschnitts von  $bf$  zu der von  $ae$ .

Die Scheitellasten sind nach Fig. 20:

$$X_{bf} = X_{ae} \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad Z_{bf} = Z_{ae} \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Arbeit (22)  $\times$  (26) gibt

$$1 \cdot \xi_s \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} q_b - \frac{1}{2} q_f = \int M_x M ds',$$

und mit

$$\begin{aligned} M &= X_{bf} M_x - Z_{bf} M_z, \\ q_b &= q_f, \quad q_b = q_a \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}, \\ \xi_s - q_a &= X_{ae} \delta_{xx} - Z_{ae} \delta_{xz}. \end{aligned} \quad (32a)$$

Arbeit (23)  $\times$  (26) gibt

$$\begin{aligned} 1 \cdot \zeta_s \frac{1}{2} \sqrt{2} &= \int M_z \left( X_{ae} \frac{\sqrt{2}}{2} M_x - Z_{ae} \frac{\sqrt{2}}{2} M_z \right), \\ \zeta_s &= X_{ae} \delta_{xz} - Z_{ae} \delta_{zz}. \end{aligned} \quad (32b)$$

Gl. (31 a) — (32 a) liefert

$$P \delta_{xP} - 2 X_{ae} \delta_{xx} + 2 Z_{ae} \delta_{xz} = 2 q_a,$$

und Gl. (31 b) — (32 b)

$$P \delta_{zP} - 2 X_{ae} \delta_{xz} + 2 Z_{ae} \delta_{zz} = 0.$$

Wir setzen ein

$$q_a = \frac{H_a}{2} \kappa (2 + \sqrt{2}) = \frac{X_{ae}}{4} \kappa (2 + \sqrt{2})$$

und erhalten das Gleichungssystem:

$$X_{ae} \left[ \delta_{xx} + \frac{\kappa}{4} (2 + \sqrt{2}) \right] - Z_{ae} \delta_{xz} = \frac{1}{2} P \delta_{xP}, \quad (33a)$$

$$-X_{ae} \delta_{xz} + Z_{ae} \delta_{zz} = -\frac{1}{2} P \delta_{zP}. \quad (33b)$$

$$\text{Mit der Abkürzung} \quad \frac{\kappa}{4} (2 + \sqrt{2}) = \gamma \quad (34)$$

erhält man die Lösungen:

$$X_{ae} = \frac{1}{2} P \cdot \frac{(\delta_{xP} \delta_{zz} - \delta_{zP} \delta_{xz})}{[(\delta_{xx} + \gamma) \delta_{zz} - \delta_{xz}^2]}, \quad (35a)$$

$$Z_{ae} = \frac{1}{2} P \cdot \frac{[\delta_{xP} \delta_{xz} - \delta_{zP} (\delta_{xx} + \gamma)]}{[(\delta_{xx} + \gamma) \delta_{zz} - \delta_{xz}^2]} \quad (35b)$$

Auch diese Ausdrücke erlauben eine einfache statische Deutung. Man denke sich den Zweigelenkbogen  $a - e$  im Scheitel  $s$  durch ein waagerechtes Zugband gehalten und durch einen starren, lotrecht geführten Arm an Verdrehungen

verhindert. Die Spannkraft im Zugband sei  $X'$ , das Einspannungsmoment am Anschluß des Kragarms  $Z'$ . Dann bedeuten die Fig. 22, 23, 24 die Zustände

$$X' = -1, \quad Z' = -1, \quad X'Z' = 0.$$

Die Elastizitätsgleichungen lauten

$$X' \delta_{xx} + Z' \delta_{xz} = \delta_{xP},$$

$$X' \delta_{zx} + Z' \delta_{zz} = \delta_{zP}.$$

Es ist dabei ohne Belang, ob in Fig. 23 und 24 rechts ein bewegliches oder ein festes Auflager angenommen wird (statisch bestimmtes oder unbestimmtes Hauptsystem), weil  $H = 0$ . Ist das Zugband elastisch, so tritt zu  $\delta_{xx}$  der Zusatzwert  $\gamma$ . Die Lösung ergibt:

$$X' = \frac{\delta_{xP} \delta_{zz} - \delta_{zP} \delta_{xz}}{(\delta_{xx} + \gamma) \delta_{zz} - \delta_{xz}^2} \quad (36a)$$

$$Z' = \frac{-\delta_{xP} \delta_{xz} + \delta_{zP} (\delta_{xx} + \gamma)}{(\delta_{xx} + \gamma) \delta_{zz} - \delta_{xz}^2} \quad (36b)$$

Mit Einführung dieser Hilfswerte wird

$$X_{ae} = \frac{1}{2} P X', \quad Z_{ae} = -\frac{1}{2} P Z'. \quad (37)$$

Mit den Scheitellasten des Hauptbogens sind auch die der Seitenbogen nach (25) gegeben:

$$X_{bf} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} X_{ae}, \quad Z_{bf} = \frac{1}{2} \sqrt{2} Z_{ae}.$$

Die waagerechten Scheitelkräfte der Einzelbogen (hier  $X_{ae}$  und  $X_{bf}$ ) ergeben sich gleich Null für ungerades  $n$ , d. h. beim Sechseck, Zehneck, usw.

Die Horizontalschübe sind gleich den halben Scheitellasten, die Zugbandspannkraft  $T$  und Lagerwiderstände  $W$  folgen aus den Gl. (27), worin  $H_a = \frac{1}{2} X_{ae}$ .

Die lotrechten Lagerkräfte sind:

$$V_a = V_P + X_{ae} \frac{f}{l} - \frac{Z_{ae}}{l}, \quad V_e = -V_a; \quad (38a)$$

$$V_b = -X_{bf} \frac{f}{l} + \frac{Z_{bf}}{l}, \quad V_f = -V_b. \quad (38b)$$

Die Lagerverschiebungen sind durch (28) gegeben, für die Scheitelverschiebungen kann man je eine der Gl. (31) und (32) benutzen. Man erhält für  $\xi_s$  und  $\zeta_s$  einfache Formeln.

Aus (32 a) folgt mit Rücksicht auf (28 a) und (36):

$$\xi_s - \frac{1}{2} P X' \frac{\gamma}{4} (2 + \sqrt{2}) = \frac{1}{2} P X' \delta_{xx} + \frac{1}{2} P Z' \delta_{xz}.$$

$$\xi_s = \frac{1}{2} P [X' (\delta_{xx} + \gamma) + Z' \delta_{xz}].$$

Setzt man hierin  $X'$  und  $Z'$  ein, so bleibt

$$\xi_s = \frac{1}{2} P \delta_{xP}. \quad (39a)$$

Aus (32 b)

$$\zeta_s = \frac{1}{2} P X' \delta_{xz} + \frac{1}{2} P Z' \delta_{zz}$$

folgt:

$$\zeta_s = \frac{1}{2} P \delta_{zP}. \quad (39b)$$

Die Scheitelverschiebungen  $\xi$  und  $\zeta$  sind also halb so groß wie für den belasteten Einzelbogen nach Fig. 24, unabhängig vom Querschnitt des Zugrings.

Um die Wirkung einer einseitig stehenden Last zu erhalten, werden die Ergebnisse der Fälle I und II addiert und halbiert. Dabei ist darauf zu achten, daß die positiven Vorzeichen der Kraft- und Verschiebungsgrößen durch die Kräftepläne, Verschiebungspläne und Belastungsbilder der Bogen in I und II gesondert festgelegt sind und nicht immer übereinstimmen, z. B. ist

$+T_{bc}$  in I (Fig. 7) Zug,  $+T_{bc}$  in II (Fig. 21) Druck.

Bei einem sehr großen Querschnitt des Zugrings kann man  $F_t = \infty$  setzen, dann werden  $\kappa$  und  $\gamma = 0$  und die Formeln vereinfachen sich entsprechend. Die Ergebnisse des Zahlenbeispiels werden allerdings zeigen, daß der Einfluß des Zugrings recht groß ist.

### D. Rippenkuppel mit festen Fußpunkten.

Zum Vergleich sei noch der Fall behandelt, daß alle Fußpunkte fest gelagert sind.

#### 1. Symmetrischer Belastungsfall I.

Alle unbelasteten Seitenbogen befinden sich in gleichem Spannungszustande, daher wird

$$Y_b = Y_c = Y_d = Y_f = Y_g = Y_h = Y, \quad Y_a = Y_e = 3Y,$$

und die Scheitellasten werden

$$Y_{ae} = 6Y, \quad Y_{bf} = 2Y.$$

#### 2. Hilfsbelastungszustände am Einzelbogen.

Wir belasten den Zweigelenkbogen mit der Last  $Y_{ae} = 1$  und erhalten aus Fig. 9 und 10

$$H_y = \frac{\delta_{hy}}{\delta_{hh}}, \quad \delta_{yy}^{(1)} = \delta_{yy} - H_y \delta_{yh}. \quad (40a)$$

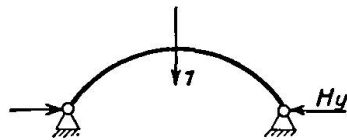


Fig. 28.

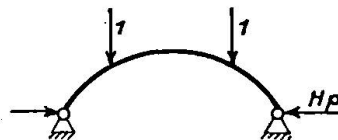


Fig. 29.

Durch die symmetrische  $P$ -Belastung (Fig. 29) entsteht

$$H_P = \frac{\delta_{hP}}{\delta_{hh}}, \quad \delta_{yP}^{(1)} = \delta_{yP} - H_P \delta_{yh}. \quad (40b)$$

Dann gilt für die Scheitelverschiebung  $\eta_s$  am Bogen  $a - e$ :

$$\eta_s = P \delta_{yP}^{(1)} - 6Y \delta_{yy}^{(1)},$$

und am Bogen  $b - f$ :

$$\eta_s = 2Y \delta_{yy}^{(1)},$$

hieraus folgt

$$Y = P \frac{\delta_{yP}^{(1)}}{8 \delta_{yy}^{(1)}}. \quad (41)$$

Damit ist der Belastungszustand der vier Bogen bekannt. Man beachte, daß dieser Gleichgewichtszustand nicht mit jenem übereinstimmt, den wir erhalten, wenn wir in  $B$  den Zugring starr annehmen, weil auch dann alle Lagerpunkte Verschiebungen  $\varrho$  ausführen. Die Scheitelsenkung  $\eta_s$  nach Gl. (22) ist aber dieselbe.

### 3. Antimetrischer Belastungsfall II.

Der Verschiebungsplan desselben Falles bei der Kuppel mit Fußring (Fig. 22) zeigt, daß der Auflagerpunkt  $c$  keine Verschiebung ausführt ( $q_c = 0$ ), weil Bogen  $c - g$  spannungslos bleibt. Wäre der Zugring starr ( $\Delta_{ab} = 0$ ,  $\Delta_{bc} = 0$ ), so müßten auch  $q_b$  und  $q_a = 0$  werden, d. h. die Auflagerpunkte der Rippenkuppel mit starrem Fußring verschieben sich beim Belastungsfall II nicht. Das Tragwerk verhält sich dann also wie ein solches mit festen Kämpferpunkten und wir erhalten für dieses die Scheitellasten

$$X_{ae} = \frac{1}{2} P X', \quad Z_{ae} = -\frac{1}{2} P Z', \quad (37)$$

wenn wir in den Formeln (36) für  $X'$  und  $Z'$   $\gamma = 0$  setzen.

Für die Bogen  $bf$  und  $dh$  gilt dann wieder:

$$X_{bf} = \frac{1}{2} \sqrt{2} X_{ae}, \quad Z_{bf} = \frac{1}{2} \sqrt{2} Z_{ae},$$

die Scheitellasten  $Y_{ae}$  sind  $= 0$ , da die Betrachtungen über das Gleichgewicht im Scheitel unter  $C$  auch hier gelten.

## E. Beispiel und Zahlenrechnung.

### 1. Bogenkonstanten.

Die Bogen seien Parabeln mit der Spannweite  $l$  und der Pfeilhöhe  $f$ . Um einfache Formeln für die Hilfswerte und dadurch rasch ein Bild von der Wirkung des Tragwerks zu erhalten, setzen wir das Trägheitsmoment  $J$  des Bogens an der Stelle  $xy$

$$J = J_s \cos \varphi,$$

wenn  $J_s$  das Trägheitsmoment im Scheitel und  $\varphi$  der Neigungswinkel im Punkte  $xy$  ist. Für die Hilfswerte ergeben sich dann sehr einfache Formeln.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fig. 9: } E J_s \delta_{hh} = \frac{8}{15} f^2 l, \\ \text{„ 10: } E J_s \delta_{yy} = \frac{l^3}{48}, \\ E J_s \delta_{hy} = \frac{5}{48} f l^2, \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fig. 22: } E J_s \delta_{xx} = \frac{f^2 l}{120}, \\ \text{„ 23: } E J_s \delta_{zz} = \frac{l}{12}, \\ E J_s \delta_{xz} = -\frac{f l}{48}. \end{array} \right\} \quad (29)$$

Der Horizontalschub  $H_y$  nach Fig. 28 wird

$$H_y = \frac{\delta_{hy}}{\delta_{hh}} = \frac{25}{128} \frac{l}{f},$$

die Scheitelsenkung  $\delta_{yy}^{(1)}$  im statisch unbestimmten Bogen:

$$E J_s \delta_{yy}^{(1)} = E J_s \delta_{yy} - H_y E J_s \delta_{yh} = \frac{l^3}{16 \cdot 128}. \quad (40a)$$

Hierbei ist, wie fast immer zulässig, die Wirkung der Normalkräfte im Bogen vernachlässigt worden, bei sehr flachen Bogen kann man sie in bekannter Weise durch einen Faktor  $1:\nu$ , der zum Werte  $\delta_{hh}$  tritt, leicht berücksichtigen,  $\nu$  etwa  $= 0,97$ .

## 2. Belastungsglieder.

$$\left. \begin{aligned} \text{Fig. 9, 10, 11: } E J_s \delta_{hPI} &= \frac{2}{3} \frac{f x}{l^2} (l^3 - 2 l x^2 + x^3), \\ E J_s \delta_{yPI} &= \frac{x}{24} (3 l^2 - 4 x^2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Fig. 22, 23, 24: } E J_s \delta_{xPII} &= \frac{f x}{24 l^2} (l^3 - 8 l x^2 + 8 x^3), \\ E J_s \delta_{zPII} &= -\frac{x}{12 l} (l^2 - 4 x^2). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Der Horizontalschub  $H_{PI}$  nach Fig. 29 wird

$$\left. \begin{aligned} H_{PI} &= \frac{\delta_{hPI}}{\delta_{hh}} = \frac{5}{4} \frac{x}{f l^3} (l^3 - 2 l x^2 + x^3), \\ \text{hieraus die Scheitelsenkung des statisch unbestimmten Bogens} \\ E J_s \delta_{yPI}^{(1)} &= E J_s \delta_{yPI} - H_{PI} \delta_{yh} = -\frac{x}{8 \cdot 24 l} (l^3 - 18 l x^2 + 25 x^3) \end{aligned} \right\} \quad (40b)$$

3. Wir untersuchen eine Laststellung in  $x = \frac{l}{4}$ .

$$\begin{aligned} E J_s \delta_{hPI} &= \frac{57}{6 \cdot 64} f l^2. & E J_s \delta_{yPI} &= \frac{11}{16 \cdot 24} l^3. \\ E J_s \delta_{xPII} &= \frac{5}{32 \cdot 24} f l^2. & E J_s \delta_{zPII} &= -\frac{l^2}{64}. \\ H_{PI} &= \frac{5 \cdot 57}{16 \cdot 64} \frac{l}{f}. & E J_s \delta_{yPI}^{(1)} &= -\frac{17}{24 \cdot 32 \cdot 64} l^3. \end{aligned}$$

Die Rechnung ließe sich durchführen, ohne für  $l$  und  $f$  Zahlenwerte einzusetzen, nur zur Berechnung von  $z$  und  $\gamma$  muß dies geschehen.

$$\varepsilon = \frac{45^\circ}{2} = 22^\circ 30', \quad \sin \varepsilon = 0,38268, \quad \sin^2 \varepsilon = 0,14644.$$

Die Seitenlänge im Grundriß ist dann

$$a = l \sin \varepsilon = 7,65 \text{ m.}$$

Für  $l = 20 \text{ m}$ ,  $f = 5 \text{ m}$ ,  $J_s = 10000 \text{ cm}^4$ ,  $F_t = 40 \text{ cm}^2$

$$\text{wird} \quad \frac{J_s}{F_t} = \frac{0,0001}{0,0040} = 0,025 \text{ m}^2, \quad z = \frac{7,65 \cdot 0,025}{0,14644} = 1,306,$$

$$\gamma = \frac{z}{4} (2 + \sqrt{2}) = 1,1147.$$

## 4. Symmetrischer Belastungsfall I.

Zur Berechnung des Hilfswertes  $H'$  aus (18) bilden wir

$$\delta_{hh} + z = \frac{8}{15} f^2 l \left( 1 + \frac{15z}{8 f^2 l} \right) = \frac{8}{15} f^2 l \cdot 1,0049.$$



Dann wird  $H' = +0,34463 \frac{l}{f} (+0,41663)$ .

Die eingeklammerten Zahlen gelten für  $\kappa = 0$ .

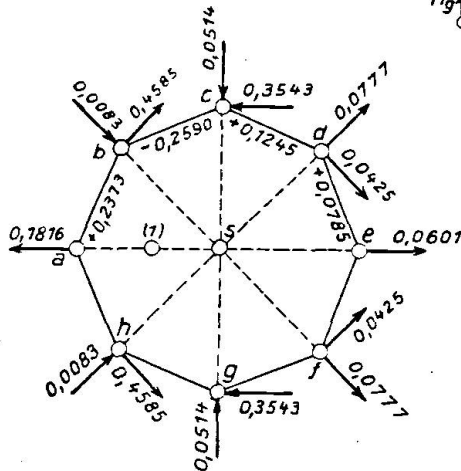


Fig. 30.

Gleichgewicht am Fußring. Einheit  $P \frac{l}{f}$   
 Equilibre de la ceinture basse. Unité  $P \frac{l}{f}$   
 Equilibrium at base ring. Unit  $P \frac{l}{f}$

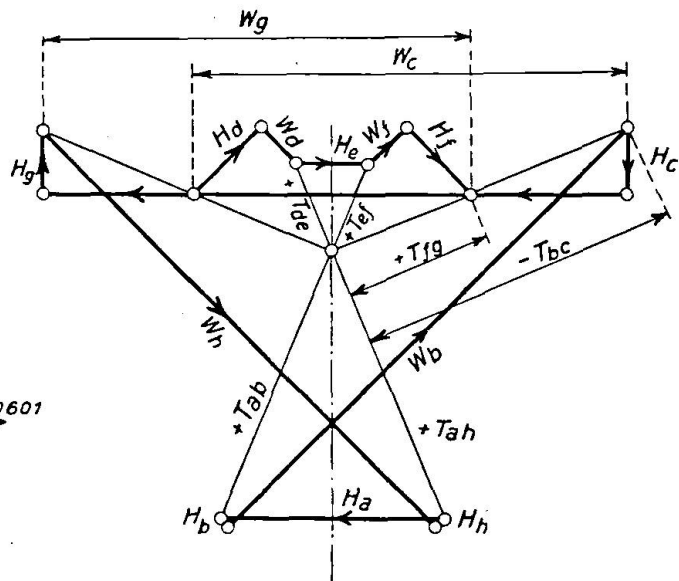


Fig. 31.

Kräfteplan  
 Polygone des forces  
 Diagram of forces

Aus den Formeln (19), (20), (21) erhält man dann

$$\begin{array}{lcl}
 H_a = +0,24172 & \left. \begin{array}{l} H_b = +0,06941 \\ H_c = -0,10290 \\ T_{ab} = +0,31583 \\ T_{bc} = -0,13445 \end{array} \right\} P \frac{l}{f} & \begin{array}{l} (+0,27789) \\ (+0,06958) \\ (-0,13873) \\ (+0,36309) \\ (-0,18127) \end{array} \\
 Y_{ae} = +0,16968 & P & (-0,01032) \\
 Y_{bf} = +0,34374 & " & (+0,34374) \\
 Y_{cg} = -0,51782 & " & (-0,69782) \\
 W = +0,41600 & P \frac{l}{f} & (+0,50291) \\
 V_a = +0,9152 & P \frac{l}{f} & (+1,0052) \\
 V_b = +0,1719 & " & (+0,1719) \\
 V_c = -0,2589 & " & (-0,3489)
 \end{array}$$

Damit sind die an den 3 Bogen wirkenden Kräfte bekannt. Die lotrechte Verschiebung des Scheitels ergibt sich aus (6 a) (oder (5 a), (7 a)):

$$E J_s \eta_s = -0,000068 P l^3 \quad (-0,000086),$$

die Lagerverschiebungen aus (5 b), (6 b), (7 b):

$$E J_s 2 \varrho_a = + 0,00185 P f l^2 \quad (+ 0,00130)$$

$$E J_s 2 \varrho_b = - 0,00121 \quad " \quad (- 0,00130)$$

$$E J_s 2 \varrho_c = + 0,00094 \quad " \quad (+ 0,00130).$$

Für  $\kappa = 0$  hat sich die Scheitelverschiebung nach (22)

$$E J_s \eta_s = \frac{1}{4} P \delta_{yP}^{(1)} = - \frac{1}{4} P \cdot \frac{17 l^3}{49152} = - \frac{1}{4} P \cdot 0,000346 l^3 = - 0,000086 P l^3$$

ergeben. Die Lagerverschiebungen sind für  $\kappa = 0$  nach (22 a) abwechselnd

$$\varrho = \pm \frac{P}{8 \delta_{yy}} (\delta_{hP} \delta_{yy} - \delta_{yP} \delta_{hy})$$

$$E J_s \varrho = \pm \frac{P 48}{8 l^3} \left( \frac{57}{6 \cdot 64} f l^2 \frac{l^3}{48} - \frac{11 l^3 5}{16 \cdot 24 \cdot 48} f l^2 \right) = \pm \frac{P f l^2}{24 \cdot 64}$$

$$E J_s \varrho = \pm \frac{P f l^2}{1536} = \pm 0,000651 P f l^2.$$

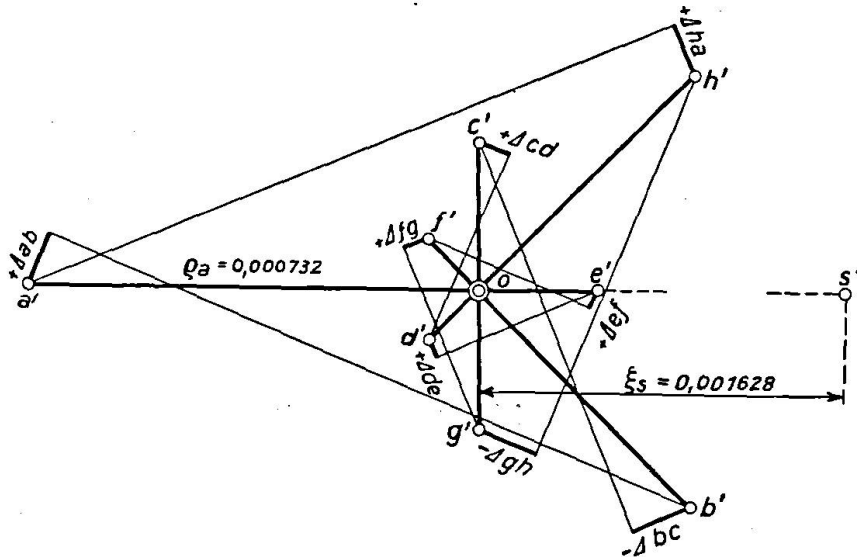


Fig. 32.

Verschiebungsplan. Einheit  $\frac{P f l^2}{E J_s}$

Diagramme des translations. Unité  $\frac{P f l^2}{E J_s}$

Diagram of displacements. Unit  $\frac{P f l^2}{E J_s}$

### 5. Antimetrischer Belastungsfall.

Zur Berechnung der Hilfswerte  $X'$  und  $Z'$  aus (36) bilden wir

$$\delta_{xx} + \gamma = \frac{f^2 l}{120} \left( 1 + \frac{120 \gamma}{f^2 l} \right) = \frac{f^2 l}{120} \cdot 1,26754.$$

Die Längenänderung der Fußringseiten macht sich also in diesem Belastungsfall sehr stark bemerkbar. Es ergeben sich

$$X' = + 0,83324 \quad (+ 0,48630) \cdot l : f$$

$$Z' = + 0,02085 \quad (- 0,06592) \cdot l.$$

Dann erhält man aus den Formeln (37), (27), (38) die eingeklammerten Zahlen für  $\kappa = 0$ ,  $\gamma = 0$ :

$$\begin{aligned}
 X_{ae} &= + 0,24315 \, Pl:f & (+ 0,41662) \\
 Z_{ae} &= + 0,03296 \, Pl & (- 0,01043) \\
 X_{bf} &= + 0,17193 \, Pl:f & (+ 0,29459) \\
 Z_{bf} &= + 0,02330 \, Pl & (- 0,00737) \\
 T_{ab} &= + 0,15885 \, Pl:f & (+ 0,27224) \\
 T_{bc} &= + 0,38349 \, , & (+ 0,65708) \text{ (Druck)} \\
 W_b &= + 0,50105 \, , & (+ 0,85851) \\
 W_c &= + 0,70859 \, , & (+ 1,21412) \\
 V_a &= + 0,71019 \, P & (+ 0,92705) \\
 V_b &= - 0,14863 \, , & (- 0,30196) .
 \end{aligned}$$

Der große Unterschied in diesen Zahlen läßt den Einfluß der Längenänderung des Zugrings erkennen.

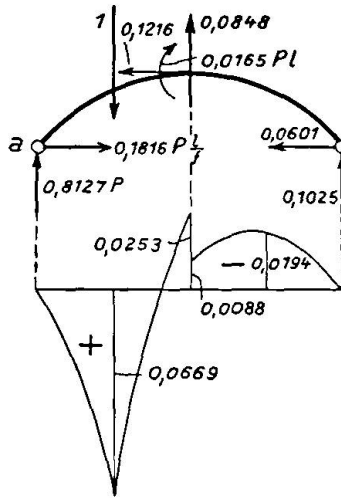


Fig. 33 a.

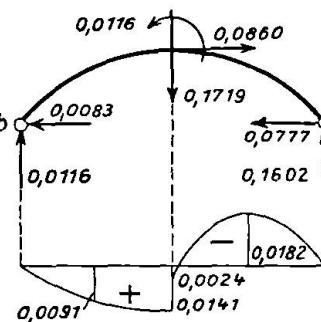
Einheit der Momente  $Pl$ .

Fig. 33 b.

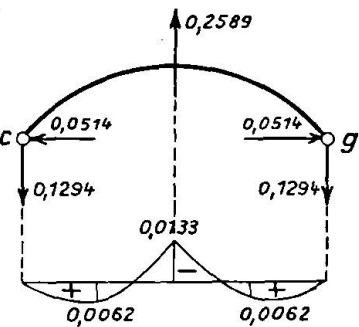
Unité des moments  $Pl$ .

Fig. 33 c.

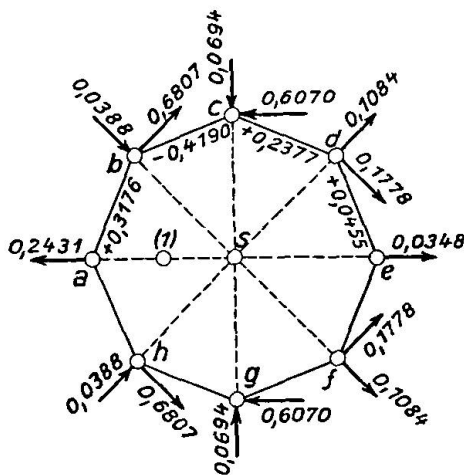
Unit of moments  $Pl$ .

Fig. 34.

Gleichgewicht am Fußring. Einheit  $\frac{Pl}{f}$   
 Equilibre de la ceinture basse. Unité  $\frac{Pl}{f}$   
 Equilibrium at base ring. Unit  $\frac{Pl}{f}$

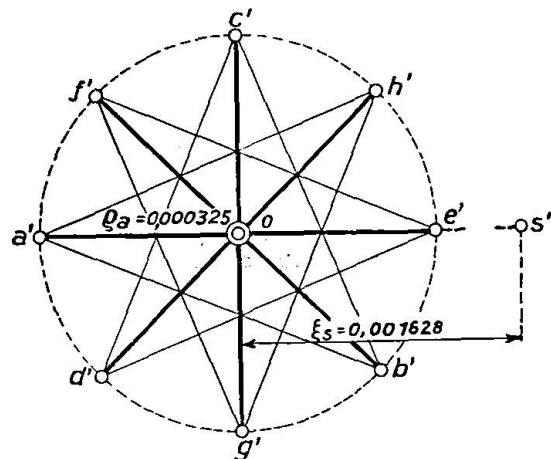


Fig. 36.

Verschiebungsplan. Einheit  $\frac{Pfl}{EJ_s}$   
 Diagramme des translations. Unité  $\frac{Pfl}{EJ_s}$   
 Diagram of displacements. Unit  $\frac{Pfl}{EJ_s}$

Damit sind die an den drei Bogen angreifenden Kräfte bekannt. Die Scheitelverschiebungen folgen aus den Formeln (39) zu

$$E J_s \xi_s = \frac{1}{2} P \delta_{xP} = + 0,003255 P f l^2 \quad (0,003255)$$

$$E J_s \zeta_s = \frac{1}{2} P \delta_{zP} = - 0,007812 P l^2 \quad (- 0,007812),$$

sie sind unabhängig von den Längenänderungen des Zugrings.

Die Lagerverschiebungen aus (28) sind

$$E J_s \varrho_a = + 0,000542 P f l^2 \quad (0),$$

$$E J_s \varrho_b = + 0,000383 \quad ,, \quad (0),$$

sie sind mit starrem Fußring für diesen Belastungsfall = 0, vgl. D 3.

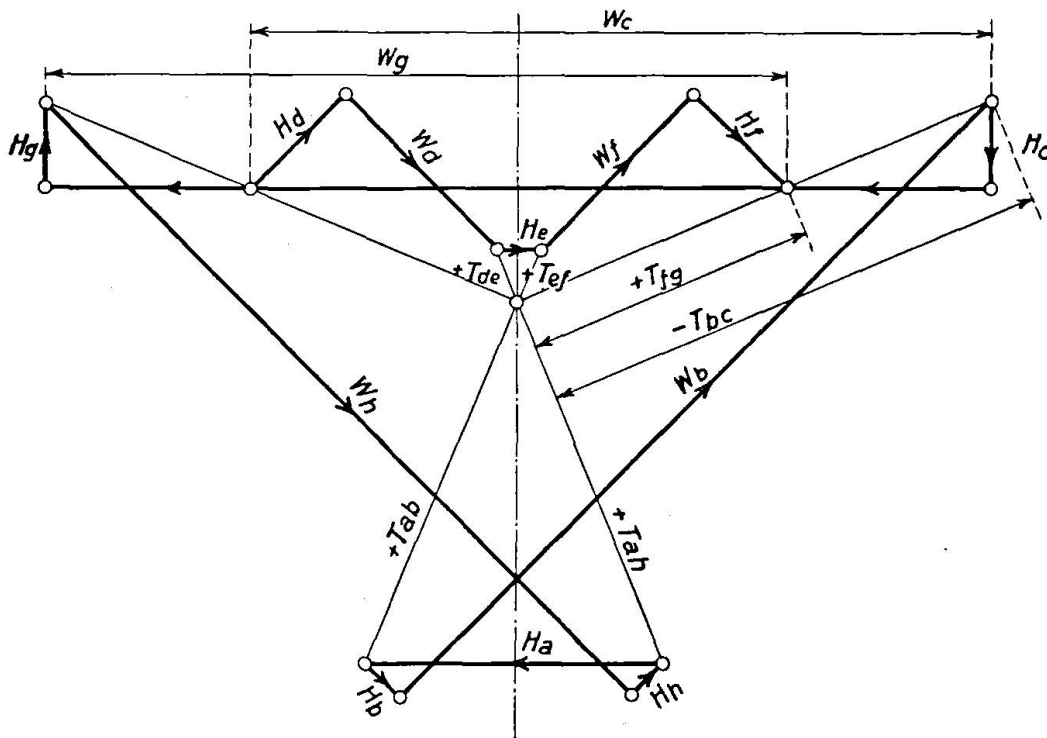


Fig. 35.

Kräfteplan. Polygone des forces. Diagram of forces.

## 6. Kuppel mit festen Fußpunkten.

Für den symmetrischen Teilbelastungszustand I braucht nur  $Y$  bestimmt zu werden, aus (41) folgt

$$Y = P \frac{\delta_{yp}^{(1)}}{8 \delta_{yy}^{(1)}} = \frac{-P \cdot 17 l^3 16 \cdot 128}{8 \cdot 24 \cdot 32 \cdot 64 \cdot l^3} = - \frac{17 P}{8 \cdot 24} = - 0,08854 P.$$

Dann ergeben sich folgende Werte:

Bogen $a - e$	Bogen $b - f$	Bogen $c - g$
$Y_{ae} = - 0,53125 P$	$Y_{bf} = - 0,17708 P$	$Y_{cg} = - 0,17708 P$
$H_a = + 0,38208 P l : f$	$H_b = - 0,03459 \quad ,,$	$H_c = - 0,03459 \quad ,,$
$V_a = + 1,26563 P$	$V_b = - 0,08854 \quad ,,$	$V_c = - 0,08854 \quad ,,$

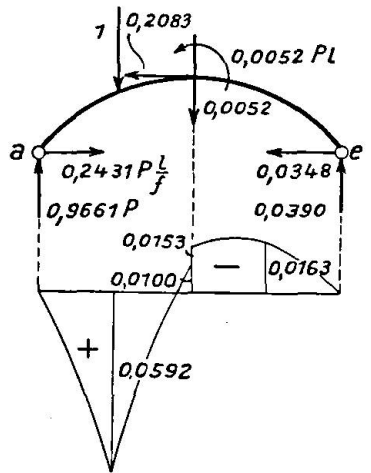


Fig. 37a.

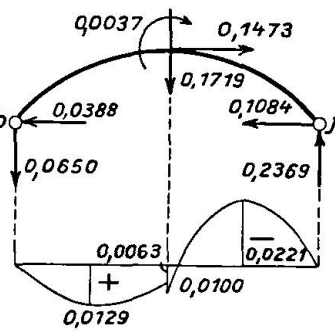
Einheit der Momente  $Pl$ . Unité des moments  $Pl$ . Unit of moments  $Pl$ .

Fig. 37b.

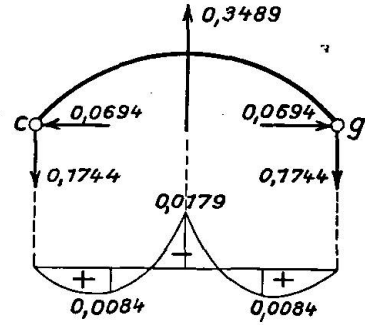


Fig. 37c.

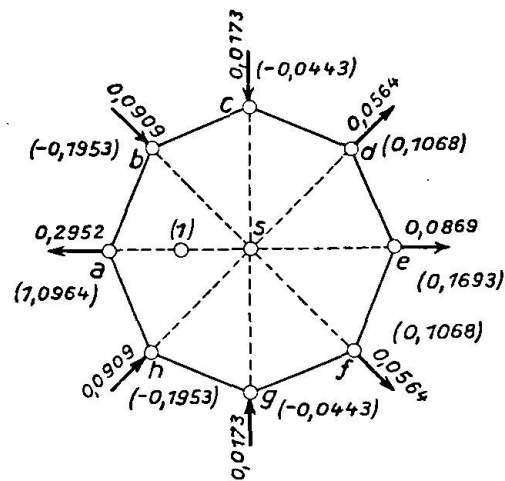


Fig. 38.

Einheit  $P \frac{l}{f}$   
 Unité  $P \frac{l}{f}$   
 Unit  $P \frac{l}{f}$

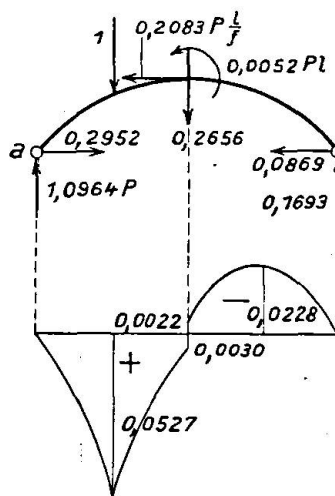


Fig. 39a.

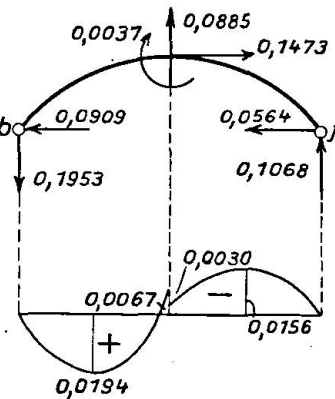
Einheit der Momente  $Pl$ . Unité des moments  $Pl$ . Unit of moments  $Pl$ .

Fig. 39b.

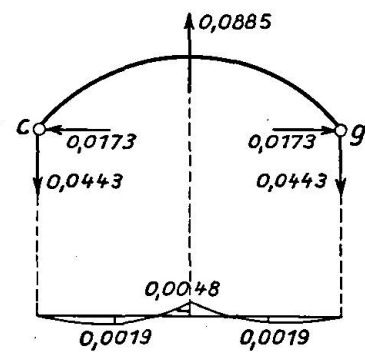


Fig. 39c.

Hieraus die Biegemomente.

Scheitelsenkung  $\eta_s = \frac{1}{4} P \delta_{yp}^{(1)} = -0,000086 P l^3$  wie unter E 4 für  $\kappa = 0$ .

Der antimetrische Belastungsfall II stimmt mit dem unter E 5 für  $\kappa = 0$  berechneten vollkommen überein, da sich bei diesem die Stützpunkte ebenfalls nicht verschieben ( $\varrho = 0$ ).

### 7. Der gegebene einseitige Belastungszustand

(mit  $P$  im Viertelpunkt des Bogens  $ae$ ) wird erhalten, indem man bei allen drei untersuchten Systemen die Teilzustände I und II addiert und die Ergebnisse durch 2 dividiert.

Die endgültigen Ergebnisse dieses Belastungszustandes sind in den folgenden Figuren wiedergegeben.

a) für elastischen Fußring

Fig. 30: Am Fußring angreifende waagerechte Kräfte, Faktor  $P \frac{l}{f}$ .

„ 31: Kräfteplan hierzu.

„ 32: Verschiebungsplan der Stützpunkte, Faktor  $P f l^2 : E J_s$ . Es ist auch die waagerechte Scheiterverschiebung eingetragen, Punkt  $s'$  fällt mit  $\xi_s = 0,001628 P f l^2 : E J_s$  weiter nach rechts.

„ 33 a, b, c: Belastung der einzelnen Bogen und Momentenflächen. Faktor der lotrechten Kräfte  $= P$ , der waagerechten  $P l : f$ , der Momente  $P l$ .

b) für starren Fußring gelten die Figuren 34 bis 37. Man erkennt aus den Größenverhältnissen des Kräfteplans, daß die waagerechten Kräfte — Horizontalschübe, Lagerwiderstände und Spannkräfte im Fußring —, die hier zur Entfaltung kommen, weit größer sind als bei elastischem Fußring. Alle Lagerverschiebungen sind jetzt gleich groß und abwechselnd nach außen und innen gerichtet (22 a), sie rühren nur vom symmetrischen Teilbelastungszustand I her, die Scheiterverschiebung ist dieselbe wie vor.

c) für feste Stützpunkte gelten die Figuren 38, 39.

### Zusammenfassung.

Dem Zweigelenkbogen mit elastischem Zugband in der Ebene entspricht im Raum die Zweigelenkbogen-Rippenkuppel mit elastischem Fußring. Es wird die Berechnung einer achtseitigen Kuppel ( $n = 4$ ) mit einer an beliebiger Stelle einer Rippe stehenden lotrechten Einzellast  $P$  zunächst allgemein für beliebige Bogenform durchgeführt. Hierbei erweist es sich als besonders zweckmäßig, eine symmetrische und eine antimetrische Teilbelastung einzuführen. Die Elastizitätsgleichungen ergeben sich durch Vergleich der drei Verschiebungsgrößen  $\eta$   $\xi$   $\zeta$  des Scheitels für die drei Einzelbogen. Ein Zahlenbeispiel für Parabelbogen, das auch für starres Zugband ( $\kappa = 0$ ) durchgeführt ist, zeigt die starke Abhängigkeit der statischen Größen von der Dehnung des Zugbandes. Zum Vergleich werden auch die Ergebnisse für feste Lagerung der Bogenauflager angegeben. Die lotrechte Verschiebung des Scheitels ist von der Dehnung des Zugrings abhängig, für starren Zugring ist sie  $= \frac{1}{4}$  der Durchbiegung des belasteten Einzelbogens. Die waagerechte Verschiebung des Scheitels und die Drehung der Scheiteltangente sind aber von der Längenänderung des Zugrings unabhängig und halb so groß wie die entsprechenden Werte des belasteten Einzelbogens. Die Ableitungen lassen sich leicht auf eine Kuppel mit anderer Seitenzahl übertragen.

### Résumé:

A l'arc à deux articulations avec tirant élastique, dans le plan, correspond, dans l'espace, la coupole à nervures à arc à deux articulations, avec ceinture de base élastique. L'auteur effectue le calcul d'une coupole octogonale ( $n = 4$ ) sous l'effet d'une charge unique verticale agissant à un endroit quelconque d'une nervure; le calcul, d'abord d'une signification générale, est valable pour une forme quelconque de l'arc. Il résulte de ce calcul qu'il est particulièrement utile d'introduire une charge partielle symétrique et une asymétrique. On obtient les équations de l'élasticité en comparant entre eux les 3 déplacements  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$  du sommet pour les trois éléments de l'arc. Dans un exemple numérique, concernant un arc parabolique, et effectué aussi dans le cas d'un tirant rigide ( $\kappa = 0$ ), l'auteur montre que la grandeur statique  $H$  dépend fortement de l'extension du tirant. A titre de comparaison il donne aussi les résultats obtenus dans le cas d'appuis fixes des arcs. Le déplacement vertical du sommet dépend de l'extension de la ceinture; pour une ceinture rigide, il est égal à  $1/4$  de la flèche de l'élément d'arc chargé. Le déplacement horizontal du sommet et la rotation opérée par la tangente au sommet ne dépendent cependant pas de la variation de longueur de la ceinture; leurs valeurs atteignent la moitié des valeurs correspondantes de l'élément d'arc chargé. Les développements s'appliquent facilement à une coupole dont le nombre des côtés est différent.

### Summary.

To the two-hinged arch with tie lying in a plane, corresponds in space a two-hinged, ribbed cupola with elastic base-ring. The calculation is given for an eight-sided cupola ( $n = 4$ ) having a perpendicularly acting point load applied anywhere on one of the ribs. The shape of arch can have, to start with, any chosen form. The investigation is best carried through by introducing a symmetrical and an antimetrical part-loading. The elasticity equations are obtained by comparison of the three quantities of displacement  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$  of the crown for the three single arches. A numerical example of a parabolic arch, carried out also for a rigid tie ( $\kappa = 0$ ), shows clearly the strong dependence of the static quantities on the elongation of the tie. For the purpose of comparison the results for rigid supports of arch bearings are given. The vertical displacement of the crown is dependent on the elongation of the tension ring and amounts to  $1/4$  of the displacement of a loaded single arch. The horizontal displacement of the crown and the turning of the tangent at the crown are independent of the longitudinal deformation of the tension ring, and amount to half of the corresponding values in case of the loading of a single arch. The deductions can easily be applied to cupolas of a different number of sides.