Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 4 (1936)

Artikel: Les méthodes de calcul de la résistance des matériaux et la théorie d'élasticité

Autor: L'Hermite, Robert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5091

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LES MÉTHODES DE CALCUL DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX ET LA THÉORIE D'ÉLASTICITÉ.

BERECHNUNGSMETHODEN DER FESTIGKEITSLEHRE UND ELASTIZITÄTSTHEORIE.

METHODS OF CALCULATION CONCERNING THE STRENGTH OF MATERIALS AND THE THEORY OF ELASTICITY.

ROBERT L'HERMITE, Directeur-Adjoint des Laboratoires du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris.

Les théories élaborées dans le domaine de la résistance et de la déformation des matériaux ont pris, comme point de départ, des hypothèses simplificatrices telles, que les résultats ne sont valables qu'entre certaines limites très rapprochées. Quand on s'écarte de ces limites, la réalité se montre profondément différente des calculs. Ceci, tient au fait que, d'une part, les bases de départ sont trop simplifiées et que, d'autre part, on a négligé, au cours du développement, des termes qui ne devaient pas l'être.

Le mot même de résistance des matériaux utilisé habituellement pour désigner cette partie de la physique mathématique implique l'idée de rupture. Cependant, aucune liaison n'existe actuellement entre l'étude des déplacements et celle des ruptures. On peut s'en étonner, car nous avons affaire avant tout à une science constructive et non spéculative et ce que l'on cherche quand on construit c'est à combattre la rupture.

Toute la théorie de l'élasticité est basée sur cette hypothèse que les contraintes sont linéaires par rapport au déplacement. Pourtant rien n'est plus contestable, toutes les expériences le prouvent. Cette persistance dans l'erreur tient simplement à ce que si les tensions sont des expressions du premier degré, le potentiel des forces intérieures est une forme du second degré très commode à employer dans les calculs.

Dans ce domaine un autre fait a également une allure paradoxale. C'est la contradiction qui existe entre l'élasticité et la plasticité. On est arrivé à bâtir sur ces deux propriétés de la matière deux sciences absolument distinctes et en contradiction l'une avec l'autre. Cependant, la plasticité ni l'élasticité n'existent séparément pour les solides et ces deux notions pourraient être parfaitement réunies si l'on tenait compte du facteur temps. Tous les corps possèdent en effet, à un degré variable, une propriété de relaxation qui fait qu'ils suivent les sollicitations et tendent vers la forme et la position d'un liquide en équilibre par rapport à celles-ci. Le temps nécessaire aux corps pour parvenir à cet état d'équilibre et extrêmement variable et, en général, au dessus de toute possibilité d'observation directe. Cependant, il existe et il est très facile à mettre en évidence.

L'expérience la plus courante, je la rappelle pour mémoire, est celle du fil de brai de houille qui réagit comme un ressort aux torsions brusques et qui suit sans réaction les torsions suffisamment lentes. Ce même brai mis en morceaux

dans une cuve prend lentement la forme d'un liquide en équilibre quoiqu'il soit toujours nécessaire pour le sortir de le casser au marteau. Le temps de relaxation est certainement réduit dans de grandes proportions lorsque les efforts, au lieu d'être constants, sont soumis à des variations fréquentes et régulières produisant des déplacements additifs et par là une adaptation ou une rupture accélérées.

Laissons de côté les efforts répétés et considérons un prisme soumis à l'action d'une tension statique. Pour une valeur P de cette tension, la déformation u[1]) subie par le prisme est la somme d'une déformation élastique u_1 et d'une déformation dite plastique u_2; u_1 reste constant, tandis que u_2 augmente avec le temps. Il est d'autre part un fait expérimental certain que u_2 augmente également avec la charge; u_2 est donc une fonction croissante de P et de t.

Plaçons-nous maintenant au simple point de vue thermodynamique et écrivons que l'augmentation du potentiel interne, pendant une déformation, est égale: au travail des forces extérieures δV, plus la chaleur empruntée au dehors multipliée par l'équivalent mécanique: $J\,\delta Q$, moins l'accroissement de l'énergie dissipée en transformations plastiques irréversibles δP:

$$\delta U = \delta V - \delta P + J\,\delta Q.$$

Le travail externe s'exprime par: $\delta V = F\,\delta u$, l'accroissement d'énergie dissipée par: $\delta P = F\,\delta u_2$, la chaleur empruntée au dehors par: $E\,a\,\delta F$ pour une transformation isotherme.

L'égalité ci-dessus devient alors:

$$\delta U = F(\delta u - \delta u_2) + E a\,\delta F.$$

Exprimons là sous la forme d'une différentielle exacte, par rapport à F et t:

$$dU = F\left(\frac{du}{dt} - \frac{du_2}{dt}\right)dt + \left[F\left(\frac{du}{dF} - \frac{du_2}{dF}\right) + Ea\right]dF.$$

La première différentielle est nulle, puisque la différence $u_1 = u - u_2$ est la déformation élastique pure qui par définition est indépendante du temps, il vient:

$$dU = \left[F\left(\frac{du}{dF} - \frac{du_2}{dF}\right) + Ea\right]dF.$$

Le coefficient a est en général assez complexe et mal connu. Il est lui-même égal à la somme de deux fonctions, l'une correspondant à la déformation plastique, toujours positive, l'autre à la déformation élastique, du signe de dF.

Si au cours de la déformation, le potentiel interne atteint un maximum et devient décroissant, l'équilibre disparaît et la déformation se poursuit spontanément sans apport d'énergie extérieure. C'est par cette considération qu'on exprime la rupture. Ce maximum se produit pour $dU = 0$. On peut donc énoncer la règle suivante:

La rupture se produit quand l'accroissement de l'énergie extérieure est égal à l'accroissement de l'énergie dissipée en transformations plastiques et thermiques.

Si l'on néglige le coefficient a on est conduit à simplifier cette règle et à dire que la rupture a lieu quand $\delta u = \delta u_2$, c'est-à-dire au moment où l'accroissement du déplacement plastique devient plus grand que l'accroissement du déplacement total.

[1]) u étant rapporté à l'unité.

Une autre méthode a également été employée pour introduire la notion de rupture dans la théorie de l'élasticité. En désignant par U le potentiel des forces élastiques intérieures, les tensions sont des expressions de la forme $N = \frac{dU}{ds}$ et le potentiel a pour expression:

$$2U = N_1 a_1 + N_2 a_2 + N_3 a_3 + F_1 g_1 + F_2 g_2 + F_3 g_3 .$$

Soient $N = F(a_1, a_2, a_3)$ et $T = f(g)$ les expressions des tensions par rapport au déplacement.

Explicitons ces formules et écrivons:

$$a = F'(N_1, N_2, N_3), \qquad g = f'(T).$$

Supposons que ces valeurs soient les racines d'un système d'équations linéaires de la forme:

$$N_1 = a_1 \varphi_1(N_1, N_2, N_3) + a_2 \varphi_2(N_1, \ldots) + a_3 \varphi_3(N_1, \ldots)$$
$$N_2 = \cdots, \qquad N_3 = \cdots$$

Par raison de symétrie ce système doit se réduire à:

$$N_1 = a_1 \varphi_1(N_1) + a_2 \varphi_2(N_2) + a_3 \varphi_2(N_3)$$
$$N_2 = a_2 \varphi_1(N_2) + a_2 \varphi_2(N_1) + a_3 \varphi_2(N_3)$$
$$N_3 = a_3 \varphi_1(N_3) + a_2 \varphi_2(N_2) + a_1 \varphi_2(N_3)$$

et

$$T_1 = \frac{\varphi_1(T_1) - \varphi_2(T_2)}{2} g_1, \quad T_2 = \frac{\varphi_1(T_2) - \varphi_2(T_2)}{2} g_2$$

$$T_3 = \frac{\varphi_1(T_3) - \varphi_2(T_3)}{2} g_3 .$$

Si nous reportons ces valeurs dans l'expression du potentiel donnée plus haut, nous constatons que pour retrouver la valeur N par différentiation it faut que $\varphi_2(N_1) = \varphi_2(N_2) = \varphi_2(N_3) =$ constante.

Il ne reste donc qu'une seule fonction à déterminer: la fonction φ_1.

Cette fonction dépendra des propriétés du corps et peut être obtenue par comparaison avec la courbe élastique. Elle permet de tenir compte de la variation du coefficient d'élasticité avec les pressions, ce qui peut être d'une grande utilité dans l'étude des matériaux très élastiques comme le béton.

On peut se demander comment faire intervenir dans les équations, la notion d'énergie dissipée sans arriver à une complication inextricable. Le moyen serait, je pense, d'associer à chaque contrainte active produite par les forces extérieures une contrainte résiduelle fictive qui persisterait après la disparition de la première; cette contrainte entraînerait un déplacement permanent égal au déplacement plastique. Il me semble d'ailleurs illusoire, sauf dans les cas élémentaires, de chercher dans la théorie de l'élasticité la solution analytique directe d'un problème de construction. Je pense plutôt que devant les questions qui nous sont posées tous les jours et qui, en général, ne sont pas simples, on doit plutôt chercher à connaître les résultats par approximations successives.

Ce sont les méthodes d'approximations semi-expérimentales qu'il convient de développer. Qu'importe à un Ingénieur de savoir si la contrainte calculée est exacte à 5 % près, puisqu'il ne connaît jamais exactement les charges appliquées. Ce qu'il veut, c'est déterminer rapidement l'ordre de grandeur de la force à faire intervenir pour obtenir la rupture.

Cet ordre de grandeur, la résistance des matériaux ne le lui donne qu'avec une approximation incertaine. Les théories analytiques, de leur côté, rébutent

la plupart des esprits pratiques, par leur allure mathématique et par leur complexité qui n'est pas seulement apparente. L'étude expérimentale pure n'est malheureusement pas à la portée de tout le monde et les observations sont souvent difficiles à interpréter directement.

Dans les quelques exemples que je donnerai à la fin de ce rapport et dans les mémoires qui y feront suite, je voudrais montrer comment la théorie et l'expérience peuvent s'épauler mutuellement et conduire à des résultats substantiels et concluants.

Etudions maintenant les méthodes qui nous permettront d'utiliser les données de la théorie de l'élasticité dans ses limites de validité pour l'étude du béton armé.

Une pièce de béton armé comprend essentiellement un support en béton subissant des actions extérieures et une armature d'acier en équilibre sous l'action des liaisons agissant entre cette armature et le support.

D'une façon générale la rigidité des armatures est beaucoup plus élevée dans la direction parallèle au génératrices que vers le sens transversal. La rigidité transversale peut donc être négligée et l'on peut supposer que les aciers suivent la courbe funiculaire des liaisons. Un acier rectiligne ne supporte donc que des forces dirigées parallèlement à sa direction. Si, réciproquement, on connaît l'action des forces de liaison précédemment définies sur le support du béton ainsi que les déplacements et les tensions qui en découlent, le problème élastique du béton armé est théoriquement résolu. En effet, il ne reste plus qu'à écrire qu'en chaque point du passage de l'acier la résultante des déplacements élastiques apportés par chacune des liaisons est la même pour cet acier que pour le béton.

Pour l'acier assimilé à un fil inextensible la valeur des déplacements est relativement facile à établir; pour le béton elle l'est beaucoup moins. Il est, en effet, nécessaire dans ce dernier cas de faire intervenir, outre les forces superficielles appliquées au contour, des forces de masse appliquées au sein même du solide. Si l'on veut donc parvenir à un résultat dans ce sens, il est avant tout nécessaire de résoudre un certain nombre de problèmes préliminaires strictement indispensables.

Puisque les solides que nous envisageons sont en général à trois dimensions finies, c'est vers l'élasticité à trois dimensions que nous tenterons de nous diriger en premier lieu. Malheureusement les problèmes qu'on a pu résoudre jusqu'ici dans ce domaine sont encore très peu nombreux et leurs solutions se présentent généralement sous des formes compliquées.

Le premier problème est celui de la force appliquée en un point d'un solide indéfini. La solution fut donnée par Boussinesq. Elle se trouve dans tous les traités.

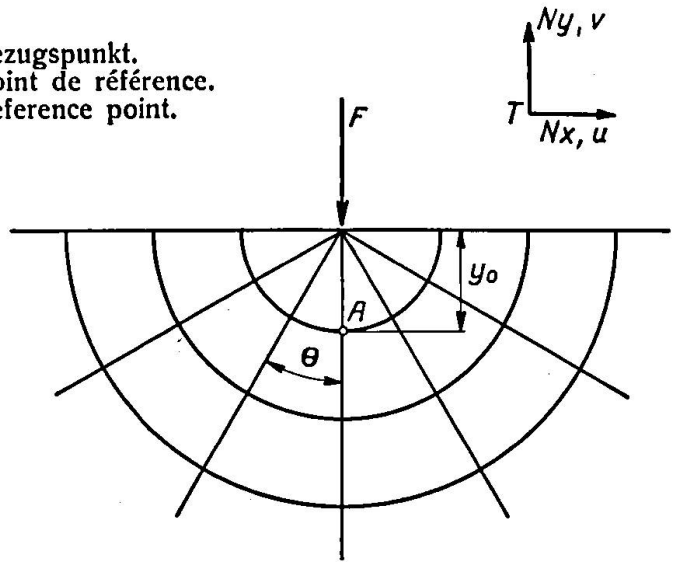
Le second problème résolu par ce même auteur est celui de la force appliquée sur le plan limite d'un solide semi indéfini. Ces deux solutions sont malheureusement insuffisantes pour traiter la question qui nous intéresse et nous devons nous limiter pour l'instant à l'élasticité plane.

Parmi les problèmes de l'élasticité plane qui présenteront pour nous un intérêt particulier citons en premier lieu celui de Flamant: Fig. 1 et 2.

Considérons ensuite le cas de la force massique appliquée en un point d'un plan illimité: Fig. 3.

Remarquons en particulier qu'ici les contraintes dépendent des constantes élastiques du solide. Elles deviennent infinies quand r tend vers zéro. Dans les cas où l'on étudie les contraintes sur des sections suffisamment voisines de la

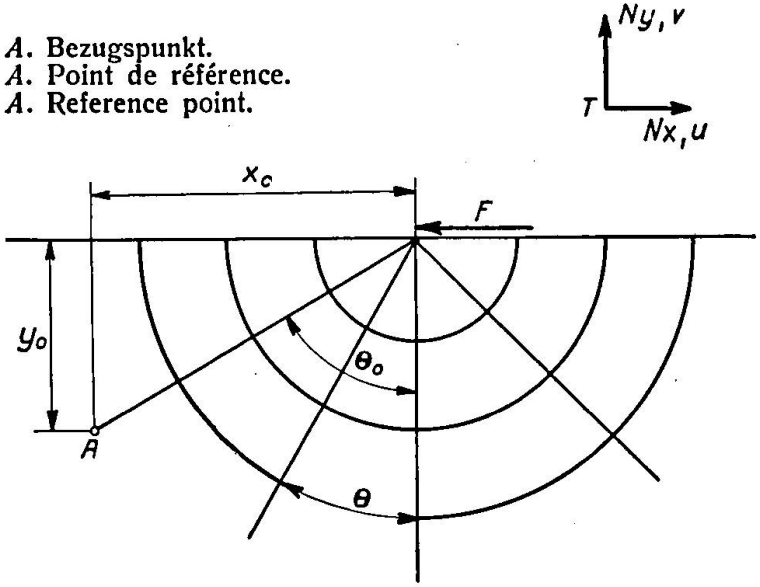
A. Bezugspunkt.
A. Point de référence.
A. Reference point.



$$\begin{cases} Nx = \dfrac{2F}{\pi}\,\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{r} \qquad T = -\dfrac{2F}{\pi}\,\dfrac{\sin\theta\cos^2\theta}{r} \\ Ny = \dfrac{2F}{\pi}\,\dfrac{\cos^3\theta}{r} \\ v = -\dfrac{2F}{\pi E}\cos\theta\log\dfrac{y_0}{r} - \left(\dfrac{1-\nu}{\pi E}\right)P\theta\sin\theta \\ u = \dfrac{2F}{\pi E}\sin\theta\log\dfrac{y_0}{r} + \left(\dfrac{1-\nu}{\pi E}\right)P(\sin\theta - \theta\cos\theta) + \dfrac{2\nu F}{\pi E}\sin\theta \end{cases}$$

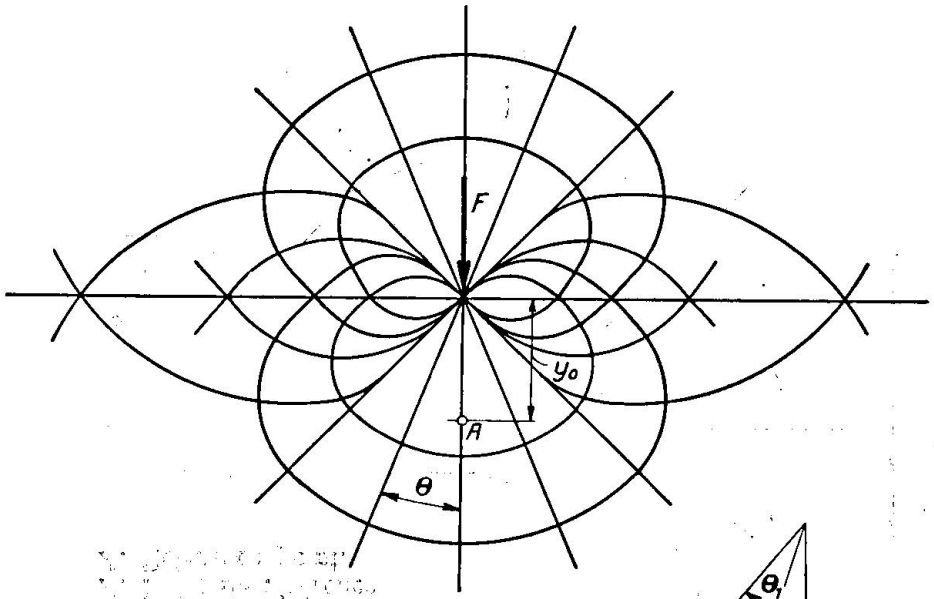
Fig. 1. 1. Fall von Flamant.
1er Cas de Flamant.
1st case of Flamant.

A. Bezugspunkt.
A. Point de référence.
A. Reference point.



$$\begin{cases} Nx = -\dfrac{2F}{\pi}\,\dfrac{\sin^3\theta}{r} \qquad T = -\dfrac{2F}{\pi}\,\dfrac{\sin^2\theta\cos\theta}{r} \\ Ny = -\dfrac{2F}{\pi}\,\dfrac{\sin\theta\cos^2\theta}{r} \\ u = -\dfrac{2F}{\pi E}\log\dfrac{r}{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)}} + \dfrac{1-\nu}{\pi E}F(\theta-\theta_0)\cos\theta \\ v = -\dfrac{2F}{\pi E}\cos\theta\log\dfrac{r}{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)}} + \dfrac{1+\nu}{\pi E}F(\cos\theta-\cos\theta_0) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1-\nu}{\pi E}F(\theta-\theta_0)\sin\theta \end{cases}$$

Fig. 2. 2. Fall von Flamant.
2ème Cas de Flamant.
2nd case of Flamant.

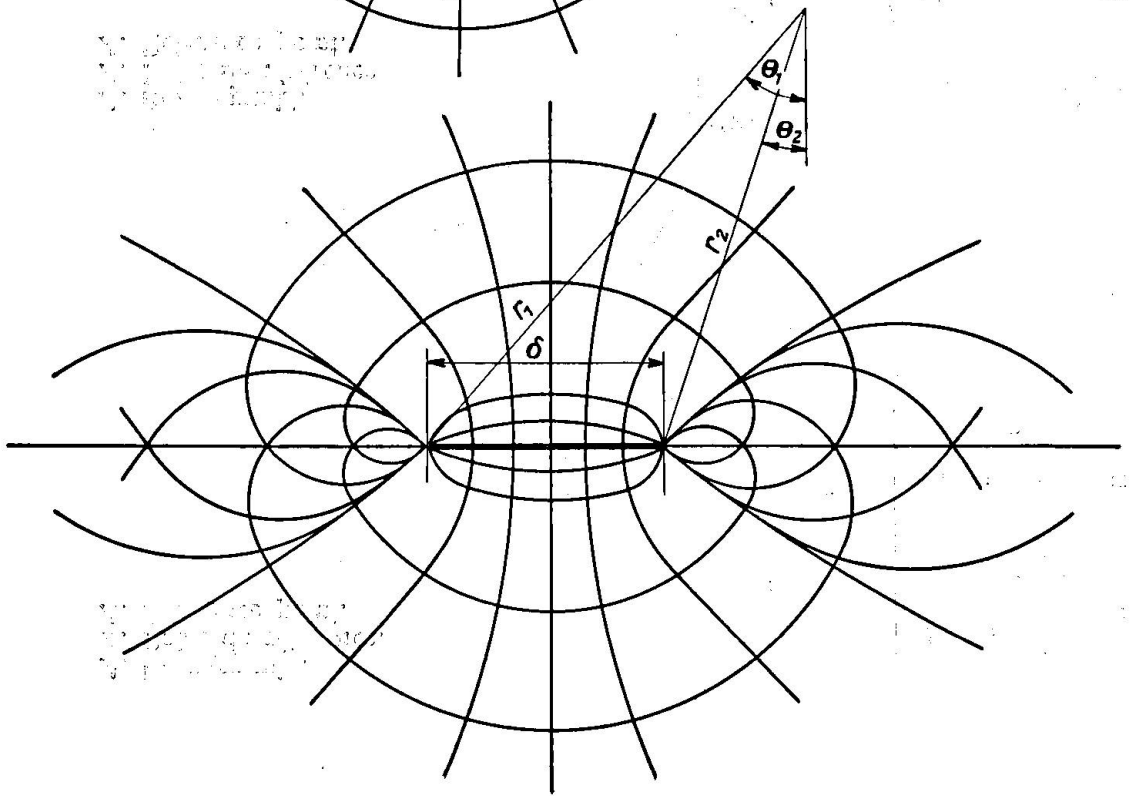


A. Bezugspunkt. — *A*. Point de référence. — *A*. Reference point.

$$\begin{cases} Nx = -\dfrac{2F}{\pi}\dfrac{\cos\theta}{r}[-k_1 + k_2\sin^2\theta] \\ Ny = -\dfrac{2F}{\pi}\dfrac{\cos\theta}{r}[k_1 + k_2\cos^2\theta] \\ T = -\dfrac{2F}{\pi}\dfrac{\sin\theta}{r}[k_1 + k_2\cos^2\theta] \\ u = -\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\dfrac{F}{2\pi\mu A} \\ v = \left[\left(A - \dfrac{1}{2}\right)\log\dfrac{r}{y_0} - \dfrac{1}{2}(\cos^2\theta - 1)\right]\dfrac{F}{2\pi\mu A} \end{cases}$$

$$\lambda' = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\lambda \qquad k_1 = \frac{\mu}{4(\lambda' + 2\mu)} \qquad k_2 = \frac{\lambda' + \mu}{2(\lambda' + 2\mu)} \qquad A = \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda + \mu}$$

Fig. 3. Einzellast in der Mitte der Ebene. — Charge ponctuelle au centre du plan. — Point load in centre of plane.



$$\begin{cases} Nx = \dfrac{F}{\pi\delta}(2k_1 - k_2)(\theta_1 - \theta_2) + \dfrac{F_0}{\pi\delta}k_2(\sin\theta_1\cos\theta_1 - \\ \qquad\qquad - \sin\theta_2\cos\theta_2) \\ Ny = \dfrac{F_0}{\pi\delta}(\theta_1 - \theta_2) - \dfrac{F_0}{\pi\delta}k_2(\sin\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_2) \\ T = \dfrac{2F}{\pi\delta}k_1\log\dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} + \dfrac{2F}{\pi\delta}k_2(\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2) \end{cases}$$

Fig. 4.

Kraft senkrecht auf ein Element rechts von der Mitte.
Charge normale à un élément de droite au centre du plan.
Force right-angled to element at the right of the centre.

$$\left\{\begin{aligned} Nx &= \frac{2\,k_1 F}{\pi\,\delta}\log\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} + \frac{2\,k_2 F}{\pi\,\delta}(\sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2) \\ Ny &= -\frac{2\,k_1 F}{\pi\,\delta}\log\cdot\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} + \frac{2\,k_2 F}{\pi\,\delta}\left[(\mathrm{tg}^2\,\theta_1 + \mathrm{tg}^2\,\theta_2) - \log\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right] \\ T &= \frac{F}{\pi\,\delta}(2\,k_1 - k_2)(\theta_1 - \theta_2) + \frac{F}{\pi\,\delta}\,k_2\,(\sin\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_2) \end{aligned}\right.$$

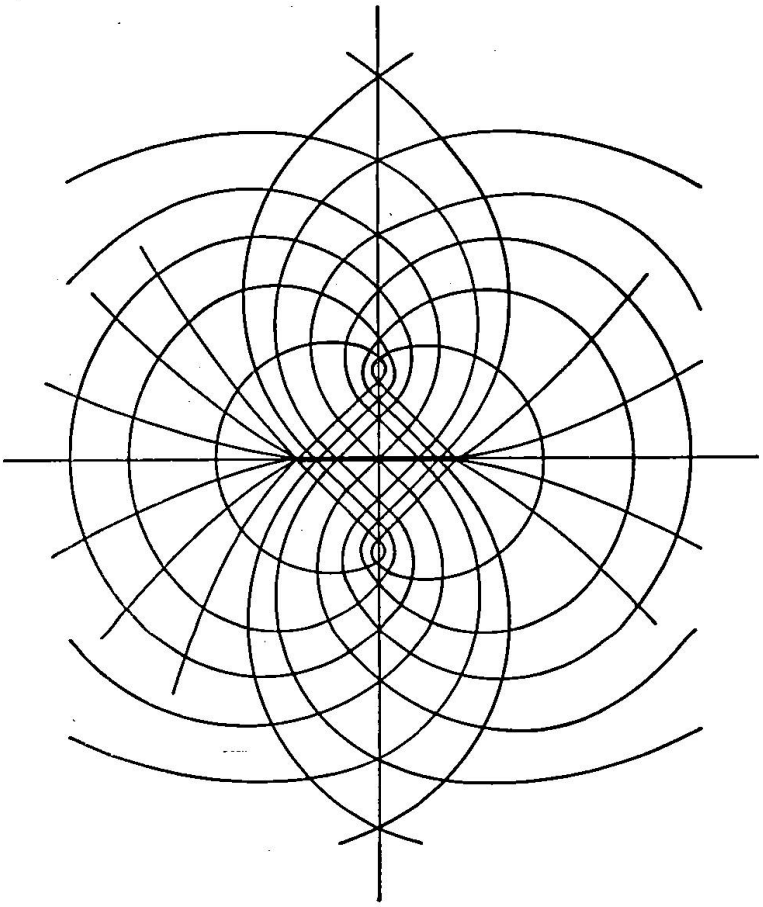


Fig. 5.

Kraft parallel zu einem Element rechts von der Mitte.
Charge parallèle à un élément de droite au centre du plan.
Force parallel to element at the right of the centre.

surface d'application de la charge pour que les dimensions de celle-ci ne soient plus négligeables on doit faire usage des formules suivantes: Fig. 4 et 5.

Du cas de la figure 3 on peut facilement par superposition tirer celui de la figure 6 où deux forces opposées agissent sur deux directions contraires à une distance d l'une de l'autre (figure 6). On peut remarquer que les cisaillements sont nuls le long de la droite AB. On peut donc effectuer une coupure le long de cette droite à condition de remplacer la partie sectionnée par les réactions normales à AB.

Celles-ci sont données par la Fig. 7.

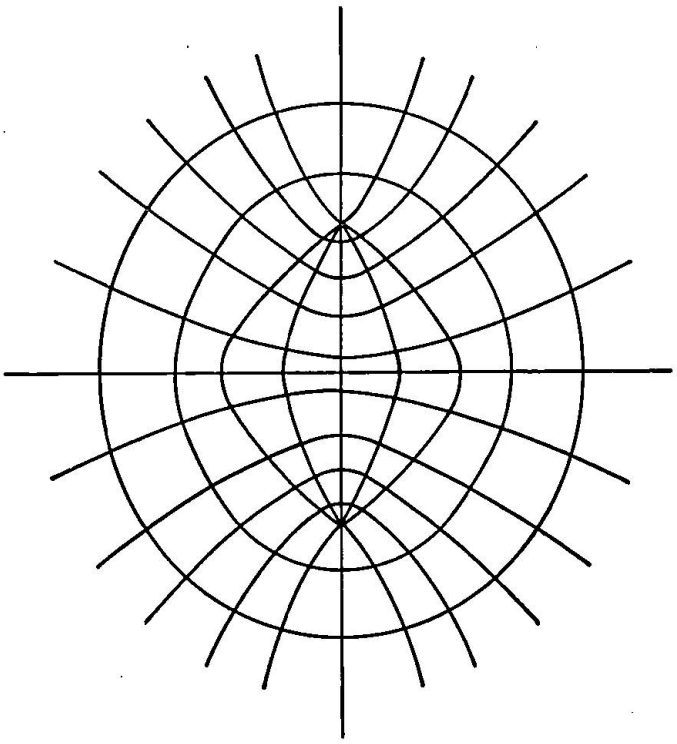


Fig. 6.

Nous avons en outre grâce aux formules de la figure 1, la possibilité d'appliquer normalement à AB des forces égales et de signe contraire à ces réactions. Nous obtenons alors la solution du cas de la charge appliquée à l'intérieur d'un ½ plan. Le calcul donne pour cette solution les expressions suivantes.

$$N_x = -A\left(\frac{y-d}{r_1^2} - \frac{y+d}{r_2^2}\right) + BX^2\left[\frac{y-d}{r_1^4} - \frac{y+d}{r_2^4}\right] - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A\frac{2d}{r^2} + B\frac{2d^3}{r^4}\right]\frac{(X-x)^2}{R^4}Y\,dx.$$

$$N_y = A\left(\frac{y-d}{r_1^2} - \frac{y+d}{r_2^2}\right) + B\left(\frac{(y-d)^3}{r_1^2} - \frac{(y+d)^3}{r_2^2}\right) - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(A\frac{2d}{r^2} + B\frac{2d^3}{r^4}\right)\frac{Y^3}{R^4}\,dx.$$

$$T = AX\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) + BX\left[\frac{(y-d)^2}{r_1^4} - \frac{(y+d)^2}{r_2^4}\right] - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(A\frac{2d}{r^2} + B\frac{2d^3}{r^4}\right)\frac{(X-2)Y^2}{R^4}\,dx.$$

$$A = \frac{2FK_1}{\pi}, \qquad B = \frac{2FK_2}{\pi} \quad \text{(voir fig. 8).}$$

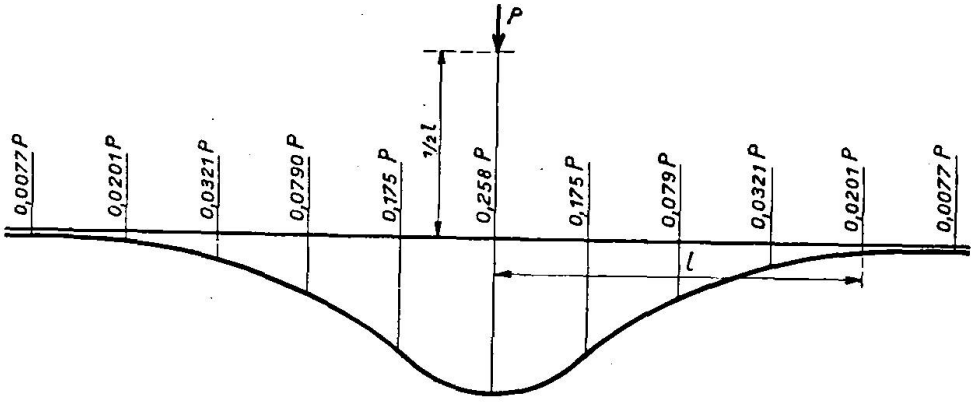


Fig. 7.

Drücke am Rande einer einseitig begrenzten Halbscheibe auf einem starren Untergrund.

Pressions à la limite d'un tympan semi-indéfini reposant sur un corps indéformable.

Pressures on the edge of an unlimited half-plane, resting on a rigid body.

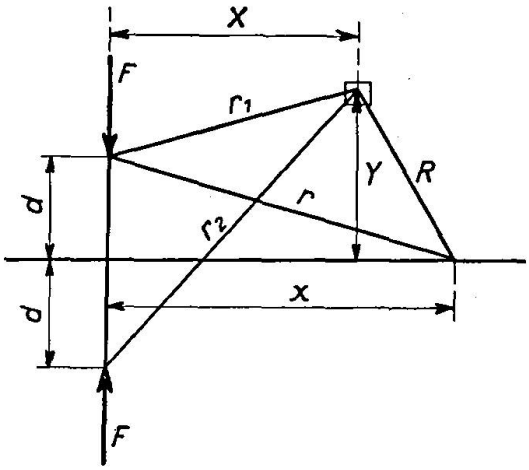


Fig. 8.

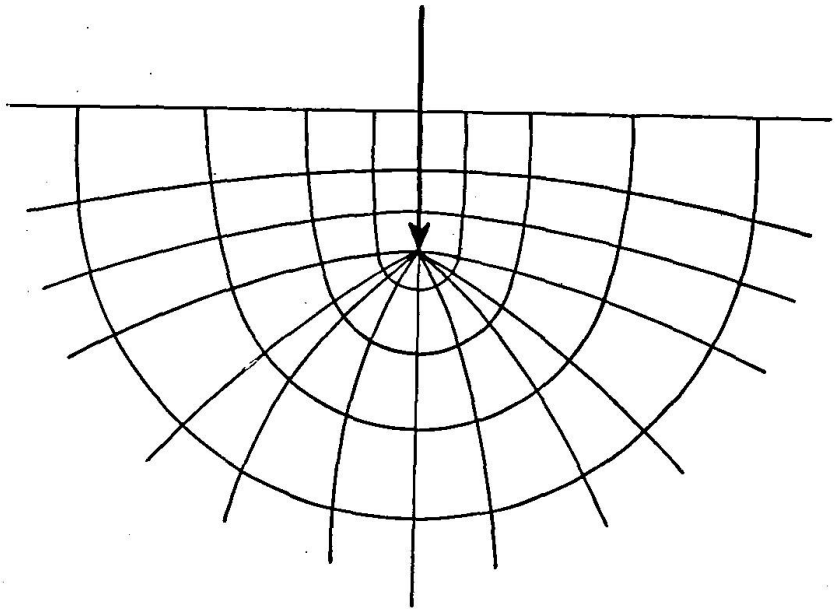


Fig. 9.

La résolution des intégrales définies par la méthode des résidus donne en définitive les formules ci-dessous (voir Fig. 9):

$$N_x = -A\left(\frac{y-d}{r_1^2} - \frac{y+d}{r_2^2}\right) + BX^2\left(\frac{y-d}{r_1^4} - \frac{y+d}{r_2^4}\right)$$
$$-\frac{2Y}{\pi}\left[2AdX^2I_1 - 4AdXI_2 + 2AdI_3 + 2Bd^3X^2I_4 - 4Bd^3XI_5 + 2Bd^3I_6\right]$$

$$N_y = A\left[\frac{y-d}{r_1^2} - \frac{y+d}{r_2^2}\right] + B\left[\frac{(y-d)^3}{r_1^4} - \frac{(y+d)^3}{r_2^4}\right] - \frac{2Y^3}{\pi}\left[2AdI_1 + 2Bd^3I_4\right]$$

$$T = AX\left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right] + BX\left[\frac{(y-d)^2}{r_1^4} + \frac{(y+d)^2}{r_2^4}\right]$$
$$-\frac{2Y^2}{\pi}\left[2AdXI_1 - 2AdI_2 + 2Bd^3I_3 + 2Bd^3I_6\right].$$

Les intégrales $I_1, I_2, \ldots I_5, I_6$ ont les valeurs suivantes:

$$I_1 = \pi\left[\frac{1}{d[(id-X)^2+Y^2]} + \frac{1}{2Y^3}\frac{(iY+X)^2+2iY(iY+X)+d^2}{[(iY+X)^2+d^2]^2}\right]$$

$$I_2 = \pi\left[\frac{id}{d[(id-X)^2+Y^2]^2} + \frac{1}{2Y^3}\frac{X[(iY+X)^2+d^2]+2(iY+X)^2iY}{[(iY+X)^2+d^2]^2}\right]$$

$$I_3 = \pi\left[\frac{-d^2}{d[(id-X)^2+Y^2]^2} + \frac{1}{2Y^3}\frac{(X^2+Y^2)[(iY+X)^2+d^2]+2iY(iY+X)^3}{[(iY+X)^2+d^2]^2}\right]$$

$$I_4 = \frac{\pi}{2}\left[\frac{[(iY+X)^2+d^2]+4iY(iY+X)}{Y^3[(id-X)^2+Y^3]^3} + \frac{(id-X)^2+Y^2+4id(iY-X)}{d^3[(id-X)^2+Y^2]^3}\right]$$

$$I_5 = \frac{\pi}{2}\left[\frac{-4d^2(id-X)}{d^3[(id-X)^2+Y^2]^3} + \frac{X[(iY-X)^2+d^2]+4iY(iY+X)^2}{Y^3[(iY+X)^2+d^2]^3}\right]$$

$$I_5 = \frac{\pi}{2}\left[\frac{(X^2+Y^2)[(iY+X)^2+d^2]+4(iY+X)^3iY}{Y^3[(iY+X)^2+d^2]^3} + \frac{d^2[(id-X)^2+Y^2]-4id^3(id-X)}{d^3[(id-X)^2+Y^2]^3}\right].$$

Les figures 10, 11, 12 donnent les tableaux des valeurs des contraintes dans un ½ plan établies d'après ces formules par une force $F = 1$.

Si au lieu d'appliquer la force au point A perpendiculairement à la direction du bord on l'appliquait suivant une parallèle, on obtiendrait par la même méthode les contraintes sous forme d'expressions semblables aux précédentes.

Il est possible de résoudre analytiquement d'autres problèmes d'élasticité plane. Tels sont par exemple: le problème du quart de plan soumis à une force appliquée sur un côté à une distance d du sommet de l'angle droit, le problème du quart de plan soumis à l'action d'une force massique intérieure; le problème du ½ plan chargé uniformément et supporté par des appuis rigides rectilignes, normaux à la limite et régulièrement espacés ... etc.

Examinons maintenant sur un cas concret comment il est possible d'appliquer quelques-uns de ces cas élémentaires au calcul du béton armé. Soit une force P agissant normalement à la limite d'un ½ plan sur lequel a été placé un acier AB d'une longueur $2l$. En chaque point de AB agit une force horizontale de liaison $F(X)$. L'ensemble de ces forces produit en x un déplacement mesuré par (voir Fig. 13):

$$V_1(x) = \int_0^x \frac{F(X)X}{\omega E}dX + \int_x^l \frac{F(X)x}{\omega E}dX.$$

Fall / Cas / Case \ N_x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	$+0{,}0012K_1$ $+0{,}0335K_2$			$+0{,}0235K_1$ $+0{,}0414K_2$		$+0{,}0648K_1+0{,}0650K_2$		$+0{,}1012K_1+0{,}078K_2$		$+0{,}1214K_1+0{,}078K_2$	$+0{,}1285K_1+0{,}0787K_2$
7	$-0{,}0018K_1$ $+0{,}0455K_2$			$+0{,}0328K_1$ $+0{,}0561K_2$		$+0{,}0888K_1+0{,}0868K_2$		$+0{,}1246K_1+0{,}0908K_2$		$+0{,}1399K_1+0{,}089K_2$	$+0{,}1342K_1+0{,}0775K_2$
6	$-0{,}0064K_1$ $+0{,}0600K_2$		$+0{,}0169K_1$ $+0{,}0503K_2$	$+0{,}0374K_1$ $+0{,}0785K_2$	$+0{,}0825K_1$ $+0{,}0955K_2$	$+0{,}1273K_1+0{,}104K_2$	$+0{,}1416K_1+0{,}1090K_2$	$+0{,}1523K_1+0{,}1045K_2$		$+0{,}1581K_1+0{,}0955K_2$	$+0{,}1446K_1+0{,}0790K_2$
5	$-0{,}0202K_1$ $+0{,}0820K_2$		$+0{,}0087K_1$ $+0{,}0863K_2$	$+0{,}0946K_1$ $+0{,}1127K_2$	$+0{,}1241K_1$ $+0{,}1321K_2$	$+0{,}1650K_1+0{,}1322K_2$	$+0{,}1890K_1+0{,}1301K_2$	$+0{,}1881K_1+0{,}1229K_2$		$+0{,}1822K_1+0{,}0989K_2$	$+0{,}1498K_1+0{,}0790K_2$
4	$-0{,}0832K_1$ $+0{,}1130K_2$		$-0{,}0008K_1$ $+0{,}1195K_2$	$+0{,}1208K_1$ $+0{,}1785K_2$	$+0{,}1850K_1$ $+0{,}1691K_2$	$+0{,}2116K_1+0{,}1485K_2$	$+0{,}2371K_1+0{,}1416K_2$	$+0{,}2227K_1+0{,}1210K_2$		$+0{,}1984K_1+0{,}1001K_2$	$+0{,}1517K_1+0{,}0730K_2$
3	$-0{,}3046K_1$ $+0{,}1660K_2$	$-0{,}2276K_1$ $+0{,}0175K_2$	$+0{,}0255K_1$ $+0{,}193K_2$	$+0{,}128K_1$ $+0{,}215K_2$	$+0{,}2439K_1$ $+0{,}2410K_2$	$+0{,}2943K_1$ $+0{,}1900K_2$	$-0{,}3039K_1+0{,}1570K_2$	$+0{,}3085K_1+0{,}1480K_2$	$+0{,}2540K_1+0{,}1749K_2$	$+0{,}2126K_1+0{,}0956K_2$	$+0{,}1438K_1+0{,}0600K_2$
2	$-0{,}5854K_1$ $+0{,}205K_2$	$-0{,}3008K_1$ $+0{,}200K_2$	$+0{,}1639K_1$ $+0{,}1968K_2$	$+0{,}2709K_1$ $+0{,}210K_2$	$+0{,}3578K_1$ $+0{,}2555K_2$						
1	$+0{,}4796K_1$ $+0{,}262K_2$	$+0{,}4112K_1$ $+0{,}236K_2$	$+0{,}3519K_1$ $+0{,}211K_2$	$+0{,}4883K_1$ $+0{,}200K_2$	$+0{,}5113K_1$ $+0{,}1990K_2$	$+0{,}4474K_1$ $+0{,}1590K_2$	$+0{,}329K_1+0{,}1450K_2$	$+0{,}3662K_1+0{,}1420K_2$	$+0{,}2719K_1+0{,}0992K_2$	$+0{,}2251K_1+0{,}088K_2$	$+0{,}1272K_1+0{,}0435K_2$
0	$+2{,}6025K_1$ $+0{,}345K_2$	$+1{,}4400K_1$ $+0{,}205K_2$	$+0{,}8836K_1$ $+0{,}073K_2$	$+0{,}7364K_1$ $+0{,}1100K_2$	$+0{,}6773K_1$ $+0{,}1520K_2$						
	$+1{,}4162K_1$ $+0{,}965K_2$	$+1{,}1786K_1$ $+0{,}200K_2$	$+1{,}1264K_1$ $+0{,}0037K_2$	$+0{,}9455K_1$ $+0{,}1100K_2$	$+0{,}7644K_1$ $+0{,}1770K_2$	$+0{,}5902K_1$ $+0{,}1400K_2$	$+0{,}4044K_1+0{,}1259K_2$	$+0{,}4453K_1+0{,}1150K_2$	$+0{,}2543K_1+0{,}0844K_2$	$+0{,}2318K_1+0{,}0835K_2$	$+0{,}0959K_1+0{,}0205K_2$
	$+1{,}4850K_1$ $+0{,}680K_2$	$+1{,}2877K_1$ $+0{,}530K_2$	$+1{,}3813K_1$ $+0{,}395K_2$	$+1{,}0549K_1$ $+0{,}300K_2$	$+0{,}9368K_1$ $+0{,}2110K_2$						

Fig. 10.

Fall Cas Case ↓ N_y												
8	$-0{,}6431K_1$ $-0{,}2521K_2$			$-0{,}3917K_1$ $-0{,}2396K_2$		$-0{,}3246K_1$ $-0{,}1986K_2$		$-0{,}2642K_1$ $-0{,}1459K_2$		$-0{,}1750K_1$ $-0{,}0943K_2$		$-0{,}1079K_1$ $-0{,}0537K_2$
7	$-0{,}6917K_1$ $-0{,}2749K_2$			$-0{,}4147K_1$ $-0{,}2626K_2$		$-0{,}3368K_1$ $-0{,}2059K_2$		$-0{,}2631K_1$ $-0{,}1433K_2$		$-0{,}1668K_1$ $-0{,}0882K_2$		$-0{,}0983K_1$ $-0{,}0487K_2$
6	$-0{,}7661K_1$ $-0{,}2983K_2$	$-0{,}5112K_1$ $-0{,}2980K_2$		$-0{,}4430K_1$ $-0{,}2856K_2$	$-0{,}3912K_1$ $-0{,}2450K_2$	$-0{,}3529K_1$ $-0{,}2261K_2$	$-0{,}2882K_1$ $-0{,}1787K_2$	$-0{,}2521K_1$ $-0{,}1378K_2$		$-0{,}1591K_1$ $-0{,}0774K_2$		$-0{,}0924K_1$ $-0{,}0379K_2$
5	$-0{,}8188K_1$ $-0{,}3172K_2$	$-0{,}5566K_1$ $-0{,}3288K_2$		$-0{,}5003K_1$ $-0{,}3290K_2$	$-0{,}4100K_1$ $-0{,}2561K_2$	$-0{,}3624K_1$ $-0{,}2316K_2$	$-0{,}2964K_1$ $-0{,}1725K_2$	$-0{,}2430K_1$ $-0{,}1263K_2$		$-0{,}1469K_1$ $-0{,}0635K_2$		$-0{,}0825K_1$ $-0{,}0291K_2$
4	$-0{,}8746K_1$ $-0{,}3096K_2$	$-0{,}5960K_1$ $-0{,}3809K_2$		$-0{,}5294K_1$ $-0{,}4584K_2$	$-0{,}4400K_1$ $-0{,}2822K_2$	$-0{,}3882K_1$ $-0{,}2394K_2$	$-0{,}2221K_1$ $-0{,}1661K_2$	$-0{,}2470K_1$ $-0{,}1130K_2$		$-0{,}1445K_1$ $-0{,}0484K_2$		$-0{,}0772K_1$ $-0{,}206K_2$
3	$-0{,}7188K_1$ $-0{,}1236K_2$ $-0{,}5124K_1$ $-0{,}5220K_2$	$-0{,}8817K_1$ $-0{,}8219K_2$ $-0{,}0710K_1$ $-1{,}0304K_2$	$-0{,}6475K_1$ $-0{,}5271K_2$ $-0{,}9757K_1$ $-0{,}5399K_2$	$-0{,}4994K_1$ $-0{,}5006K_2$ $-0{,}5806K_1$ $-0{,}5618K_2$	$-0{,}6068K_1$ $-0{,}4894K_2$ $-0{,}6995K_1$ $-0{,}5266K_2$	$-0{,}4822K_1$ $-0{,}3529K_2$	$-0{,}3893K_1$ $-0{,}2097K_2$	$-0{,}2928K_1$ $-0{,}1287K_2$	$-0{,}2246K_1$ $-0{,}0884K_2$		$-0{,}1306K_1$ $-0{,}0398K_2$		$-0{,}0684K_1$ $-0{,}0121K_2$
2	$-0{,}1597K_1$ $-0{,}9582K_2$ $-3{,}7414K_1$ $-3{,}0876K_2$	$-1{,}2034K_1$ $-1{,}0207K_2$ $-2{,}0511K_1$ $-1{,}2091K_2$	$-1{,}1111K_1$ $-0{,}8135K_2$ $-1{,}4362K_1$ $-0{,}9359K_2$	$-0{,}8711K_1$ $-0{,}5530K_2$ $-0{,}7308K_1$ $-0{,}5083K_2$	$-0{,}7863K_1$ $-0{,}5312K_2$ $-0{,}8730K_1$ $-0{,}5092K_2$	$-0{,}4805K_1$ $-0{,}2976K_2$	$-0{,}3959K_1$ $-0{,}1592K_2$	$-0{,}2202K_1$ $-0{,}0888K_2$	$-0{,}2092K_1$ $-0{,}0666K_2$		$-0{,}1207K_1$ $-0{,}0169K_2$		$-0{,}0626K_1$ $-0{,}0055K_2$
1	$-1{,}7542K_1$ $-1{,}8820K_2$ $-0{,}8748K_1$ $-1{,}8046K_2$	$-2{,}1124K_1$ $-1{,}7714K_2$ $-3{,}1519K_1$ $-2{,}2396K_2$	$-1{,}5465K_1$ $-1{,}2838K_2$ $-1{,}8188K_1$ $-1{,}7307K_2$	$-0{,}6482K_1$ $-0{,}4278K_2$ $-0{,}4748K_1$ $-0{,}5047K_2$	$-0{,}9355K_1$ $-0{,}4200K_2$ $-1{,}2677K_1$ $-0{,}4151K_2$	$-0{,}5053K_1$ $-0{,}2254K_2$	$-0{,}3894K_1$ $-0{,}1040K_2$	$-0{,}1887K_1$ $-0{,}0547K_2$	$-0{,}1522K_1$ $-0{,}0373K_2$		$-0{,}1042K_1$ $-0{,}0066K_2$		$-0{,}0612K_1$ $-0{,}0016K_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0

Fig. 11.

Fall / Cas / Case ↓ T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	0		+0,1488 K_1 +0,1555 K_2		+0,1662 K_1 +0,1615 K_2		+0,2156 K_1 +0,1400 K_2		+0,206 K_1 +0,1110 K_2		+0,156 K_1 +0,079 K_2
7	0		+0,174 K_1 +0,140 K_2		+0,265 K_1 +0,210 K_2		+0,290 K_1 +0,745 K_2		+0,276 K_1 +0,138 K_2		+0,1718 K_1 +0,0859 K_2
6	0		+0,2134 K_1 +0,1466 K_2	+0,3208 K_1 +0,1989 K_2	+0,3049 K_1 +0,1850 K_2	+0,2856 K_1 +0,1667 K_2	+0,2599 K_1 +0,1375 K_2		+0,2104 K_1 +0,0985 K_2		+0,184 K_1 +0,090 K_2
5	0		+0,2819 K_1 +0,1964 K_2	+0,3677 K_1 +0,2208 K_2	+0,3388 K_1 +0,1885 K_2	+0,3077 K_1 +0,1590 K_2	+0,2693 K_1 +0,1288 K_2		+0,2097 K_1 +0,0861 K_2		+0,2014 K_1 +0,080 K_2
4	0		+0,3701 K_1 +0,2648 K_2	+0,4339 K_1 +0,2625 K_2	+0,7113 K_1 +0,2149 K_2	+0,3486 K_1 +0,1675 K_2	+0,3110 K_1 +0,1387 K_2	+0,2659 K_1 +0,1080 K_2	+0,2012 K_1 +0,0695 K_2		+0,215 K_1 +0,085 K_2
3	0	+0,3462 K_1 +0,2562 K_2	+0,5594 K_1 +0,3130 K_2	+0,5941 K_1 +0,2450 K_2	+0,5438 K_1 +0,2390 K_2	+0,4471 K_1 +0,1840 K_2	+0,3693 K_1 +0,1420 K_2	+0,3087 K_1 +0,1112 K_2	+0,2569 K_1 +0,0846 K_2		+0,2278 K_1 +0,089 K_2
2	0	+2,1786 K_1 +0,1030 K_2	+0,8365 K_1 +0,1110 K_2	+0,6187 K_1 +0,1060 K_2	+0,4772 K_1 +0,0850 K_2	+0,3006 K_1 +0,0540 K_2	+0,1958 K_1 +0,0330 K_2	+0,1382 K_1 +0,0195 K_2	+0,1484 K_1 +0,0175 K_2		+0,0180 K_1 +0,004 K_2
1	0	+1,070 K_1 +0,227 K_2	+0,640 K_1 +0,185 K_2	+0,632 K_1 +0,120 K_2	+0,442 K_1 +0,080 K_2		+0,1106 K_1 +0,0110 K_2	+0,0751 K_1 +0,0075 K_2	+0,0490 K_1 +0,0050 K_2		+0,0100 K_1 +0,0010 K_2
0	0	+0,2250 K_1 +0,357 K_2	+0,5116 K_1 +0,259 K_2	+0,3052 K_1 +0,144 K_2	+0,3092 K_1 +0,077 K_2	+0,1775 K_1 +0,0235 K_2					
	0	+0,310 K_1 +0,300 K_2	+0,405 K_1 +0,412 K_2	+0,200 K_1 +0,170 K_2	+0,160 K_1 +0,148 K_2						

Fig. 12.

La force P engendre le long de AB un déplacement horizontal exprimé par:

$$V_2(x) = \frac{2P}{\pi E_1} \log x + \frac{(1+\nu)}{\pi E} P.$$

Les forces de liaison F agissant sur le béton produisent elles-mêmes des déplacements horizontaux qui sont:

$$V_3(x) = -\frac{2}{\pi E'} \int_0^l F(X) \log \frac{X+x}{X-x} dx.$$

Ecrivons que sur chaque point de AB: $V_1(x) = V_2(x) + V_3(x)$:

$$\int_0^x \frac{F(X)X}{\omega E} dX + \int_x^l \frac{F(X)x}{\omega E} dX = \frac{2P}{\pi E'} \log x + \frac{1+\nu}{\pi E'} P - \frac{2}{\pi E'} \int_0^l F(X) \log \frac{X+x}{X-x} dX.$$

Cette équation intégrale peut être remplacée par un système d'équations linéaires quand on remplace les sommes continues par des sommes discrètes. Dans ce cas, au lieu d'imposer les conditions de la formule précédente pour toutes les valeurs de x de $-l$ à $+l$ on les restreint à quelques points le long de cette droite et l'on suppose que les liaisons F agissent seulement en ces points. L'approximation obtenue dépend évidemment du nombre des points envisagés.

Une autre méthode de calcul plus générale peut être employée pour résoudre les problèmes de béton armé dans le domaine de l'élasticité plane. Nous nous limiterons ici au résumé des principes généraux et nous formulerons en premier lieu l'énoncé suivant:

Soit un massif de béton de forme et de dimensions déterminées à l'avance. Il est soumis à un système de forces extérieurement données. Dans certaines régions il est soumis à des contraintes supérieures aux contraintes limites fixées à l'avance. Déterminer les sections et les directions des aciers à placer de telle façon que dans les régions où se trouvent les aciers, l'une au moins des deux contraintes principales soit constante et égale à l'un des taux de travail limite du béton.

Dans cet ordre d'idée peuvent exister dans le solide quatre sortes de zones:

a) Les zones sans armatures ou les deux tensions principales sont à l'intérieur des limites.

b) Les zones armées où une seule des deux tensions principales est à la limite (de traction ou de compression).

c) Les zones armées où les deux tensions principales sont à une limite de même signe.

d) Les zones armées où les deux tensions principales sont à des limites de signes contraires.

Dans les zones a) les équations liant les contraintes sont celles de l'élasticité ordinaire à deux dimensions. Dans les zones b) les contraintes sont liées entre elles par les équations:

$$K_1 + \mathfrak{N}x = Nx + Ny$$
$$K_1 \mathfrak{N}x = Nx\,Ny - T^2$$

où K_1 représente une tension limite et $\mathfrak{N}x$ une tension principale. On en déduit facilement la relation générale:

$$K_1^2 - T^2 + Nx\,Ny - K_1(Nx + Ny) = 0.$$

On connait également les équations:

$$\frac{dNx}{dx} + \frac{dT}{dy} = X$$

$$\frac{dT}{dx} + \frac{dNy}{dy} = Y$$

qui lient les contraintes.

Dans les zones c) et d) les deux tensions principales sont connues et l'on doit ajouter au système précédent la quatrième relation $Nx + Ny = K_1 + K_2$.

Lorsque les limites des zones ainsi définies peuvent être fixes à priori la détermination des contraintes est rapide. Dans la plupart des applications le contour ne peut pas être fixé à l'avance et l'on est obligé d'opérer par approximations successives, approximations qui peuvent être réalisées expérimentalement ou par le calcul.

En premier lieu on fait l'étude du corps sans armatures et l'on détermine les zones où les tensions dépassent les taux fixés. On détermine alors à l'aide du groupe d'équations précédent quelles forces de masses X et Y il faut appliquer pour que ces équations soient satisfaites, la résultante de X et Y étant dirigée suivant la direction de K_1 qui elle-même coincide avec la direction principale obtenue au même point dans le solide sans armature.

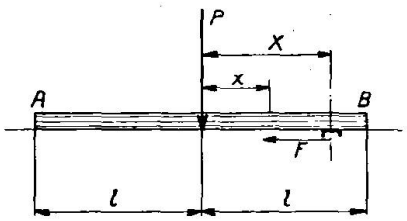


Fig. 13.

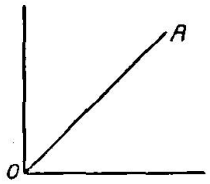


Fig. 14.

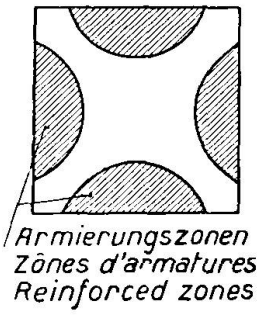


Fig. 15.

On reprend ensuite l'étude du corps en tenant compte des forces X et Y et on trouve un nouveau contour de zone ainsi que des forces excentrées X' et Y'. Ce contour varie très peu d'une approximation à l'autre puisque les forces X et Y sont en équilibre et que leur influence ne s'étend d'une façon appréciable que sur un faible rayon. On peut donc dire que ce système d'approximation est rapidement convergent.

Les armatures à placer dans les zones ainsi déterminées suivront les trajectoires des vecteurs X et Y avec des sections proportionnelles, en chaque point, à la grandeur de ces vecteurs.

Dans les zones du type b) X et Y sont liés entr'eux par une relation indiquant que leur résultante suit la direction de K et l'on trouve pour X et Y une seule solution, donc une seule direction d'armatures.

Dans les zones des types c) et d) existe une relation supplémentaire entre X' et Y' indiquant que leur résultante suit la direction de K_2. On trouve alors un autre groupe de forces massiques et une seconde direction d'armatures.

Prenons comme exemple d'application de ce principe la torsion d'un prisme en béton armé. Chaque section de ce prisme travaille au cisaillement et chaque point de celle-ci supporte un effort de cisaillement différent. Nous pouvons

assimiler la ligne élastique de cisaillement du béton à une droite $O\,A$ jusqu'au point A où le béton atteint un taux de travail qu'il ne dépasse jamais puisqu'on ajoute des aciers destinés à l'empêcher d'augmenter. Cette ligne est en tous points semblable à celle qu'on envisage dans le cas ou les contraintes sont sujettes à dépasser la limite élastique. On sait que dans ce cas, un phénomène d'analogie mécanique simple permet de représenter la distribution des efforts par une membrane élastique venant butter sur une surface en tas de sable construite sur le périmètre de la section. Les régions où la membrane touche la surface, (régions variables avec la hauteur du point A de la figure 14) subissent des efforts de cisaillement constants. Cette région est donc celle où il sera nécessaire de placer des armatures. Supposons un prisme de section carrée par exemple (Fig. 15). Les zones de contact sont représentées en hachures sur la figure. On peut constater qu'elles sont situées près du mileu des côtes.

Ceci indique que, pour a r m e r une telle section il est nécessaire de placer des aciers longitudinaux dans ces régions, ainsi que des cadres concentriques, au périmètre du carré vers le centre. Cette façon de faire qui paraît contraire aux habitudes consacrées conduit cependant à des sections de plus grande résistance comme nous l'ont montré plusieurs expériences faites en confirmation.

Nous conclurons de ce rapide exposé que la théorie de l'élasticité a un domaine d'application très restreint quand on la considère seulement comme une science purement mathématique. On arrive à élargir ce domaine dans de grandes proportions en l'envisageant comme une branche de la physique générale et en cherchant une interprétation des phénomènes de la résistance des matériaux dans l'énergétique et la chimie physique.

Nous constatons, en outre, que l'étude du béton armé peut donner lieu à deux techniques différentes:

Une technique constructive qui consiste à chercher quelles sont les régions d'un solide où devront être placées les armatures et qu'elles doivent être les sections et les directions de celles-ci pour que ni l'acier ni le béton ne dépasse un taux de travail fixé à l'avance.

Une technique analytique qui a pour but la recherche des contraintes dans un solide armé quand les sections et les directions des armatures sont connues à l'avance.

Résumé.

Le but du mémoire n'est pas de fournir des indications sur les méthodes de calcul de la résistance des matériaux habituellement utilisés, mais d'essayer de montrer par où celles-ci sont en défaut et quelle est la valeur relative des résultats qu'on peut en tirer.

Il est montré, en premier lieu, que l'élasticité que l'on a l'habitude de considérer seule est accompagnée d'une plasticité et d'une viscosité dont l'importance est loin d'être négligeable. Ce sont ces deux dernières propriétés qui expliquent l'adaptation de solides aux contraintes qu'ils subissent et c'est grâce à leur utilisation dans la thermo-dynamique qu'on arrive à trouver des indications sur la probabilité de rupture en charge d'un élément de construction. La troisième quantité qui a son importance dans les corps à faible coefficient d'élasticité est la variation du module d'Young avec la contrainte. L'introduction de coefficients variables dans les équations générales de l'élasticité montre dans quel sens on peut chercher à tenir compte de cette notion et en obtenir les conséquences. La première conclusion à tirer de ces constatations est qu'il ne

faut pas trop espérer des méthodes de calculs dites exactes, mais qu'il est préférable de pousser les recherches vers des méthodes d'approximations semi-expérimentales.

La deuxième partie du mémoire comprend quelques applications simples des premières idées; notamment, un essai d'application de la théorie mathématique de l'élasticité au calcul analytique du béton armé et quelques indications pour l'établissement d'une méthode générale destinée à déterminer dans un massif de béton les régions où il est nécessaire de placer des aciers, les sections et les directions de ces aciers, pour que les contraintes subies par le béton ne dépassent pas les limites fixées par avance.

L'étude du béton armé peut ainsi donner lieu à deux techniques différentes, l'une constructive où l'on recherche la forme à donner au solide et à ses armatures; l'autre, analytique ayant pour but de rechercher les contraintes dans un solide armé quand les sections et les directions d'armatures sont connues à l'avance.

Zusammenfassung.

Die Abhandlung will keine Angaben über Festigkeitsberechnungsverfahren der gewöhnlich gebrauchten Werkstoffe machen, sondern ihre Fehler und die Wertung ihrer Ergebnisse zeigen.

In erster Linie wird gezeigt, daß die gewöhnlich allein betrachtete Elastizität neben einer Plastizität und Zähigkeit besteht, die wegen ihrer Wichtigkeit auf keinen Fall vernachlässigt werden dürfen. Diese beiden letzteren Eigenschaften erklären die Anpassung der festen Stoffe an die Spannungen; dank ihrer Verwendung in der Thermodynamik lassen sich Hinweise auf einen möglichen Bruch eines Bauteiles finden. Die dritte bei den Stoffen mit kleinem Elastizitätsmodul wichtige Eigenschaft ist die Änderung des Moduls von Young mit der Spannung. Die Einführung veränderlicher Werte in den allgemeinen Elastizitätsgleichungen zeigt, in welchem Sinne man versuchen wird, dieser Auffassung Rechnung zu tragen und die Folgerungen zu ziehen. Die erste Folge dieser Feststellungen ist die, daß man von dem sogenannten genauen Berechnungsverfahren nicht zu viel erhoffen darf, sondern daß eine Erforschung von halbempirischen Näherungsverfahren vorzuziehen ist.

Der zweite Teil der Abhandlung umfaßt einige einfache Anwendungen der oben genannten Anschauungen. Besonders wird der Versuch einer Anwendung der mathematischen Elastizitätstheorie auf die Berechnung des Eisenbetons dargestellt. Ferner werden einige Angaben über die Aufstellung eines allgemeinen Verfahrens gemacht, das in einem Betonblock die Lagen, die Querschnitte und die Richtungen der Eisen bestimmen soll, damit die zulässigen Betonspannungen nicht überschritten werden.

Die Untersuchung des Eisenbetons kann auf zwei verschiedene Arten geschehen: Entweder wird die Form und die Bewehrung gesucht, oder werden die Spannungen aus bekannten Querschnitts- und Bewehrungsverhältnissen errechnet.

Summary.

The object of the paper is not to give information as to methods of calculating the strength of materials, but to consider errors committed and the evaluation of results.

In the first instance it is shown that, besides the usual, independently considered elasticity there exist plasticity and toughness, which on account of their importance cannot be neglected. The two latter properties are those by which

the adaption of solid materials to stresses can be explained; thanks to their application in thermo-dynamics the possibility of fracture in a structural element can be predicted. The third property of materials with a small modulus of elasticity is the alteration of Young's modulus with the stress. The introduction of variable coefficients into the general elastic equations shows to what extent consideration should be given to this view, and what conclusions may be drawn from it. The first conclusion to be drawn is that too much cannot be expected from the so-called exact methods of calculation, and that research work on approximate semi experimental methods is preferable.

The second part of the paper gives some simple applications of the first ideas.

Particularly, an attempt is made to apply the mathematical theory of elasticity to the analytical calculation of reinforced concrete. Some details are given to determine, in a mass of concrete, zones requiring reinforcement, their cross sectional area and the direction of reinforcement, so that the stresses to which concrete is subjected do not exceed given limits.

The study of reinforced concrete can thus give rise to two different methods: A constructive method, to find the dimensions and reinforcement of a structural element, and an analytical method to ascertain the stresses in a structural element of given dimensions and known reinforcement.