

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 4 (1936)

Artikel: Der allgemeinste Fall der Knickung des geraden Baustahlstabs mit unveränderlichem Querschnitt
Autor: Hartmann, Friedrich
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-5086>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DER ALLGEMEINSTE FALL DER KNICKUNG DES GERADEN BAUSTAHLSTABES MIT UNVERÄNDER- LICHEM QUERSCHNITT.

LE CAS LE PLUS GÉNÉRAL DU FLAMBAGE DE LA BARRE DROITE
EN ACIER DOUX AVEC SECTION CONSTANTE.

THE MOST GENERAL CASE OF BUCKLING OF A STRAIGHT BAR
OF BUILDING STEEL WITH CONSTANT CROSS-SECTION.

Prof. Dr.-Ing. FRIEDRICH HARTMANN, Wien.

Durch Engesser¹⁾ ist 1895 das Problem der Knickung eines in der Schwerachse gedrückten Stabes aus Baustahl (also mit plastischem Verhalten) restlos geklärt worden. Engesser konnte zeigen, daß auch bei Knickung im plastischen Bereich für beliebig geformte Querschnitte die Eulerformel verwendet werden kann, wenn an die Stelle des Elastizitätsmoduls E der von der Knickspannung abhängige „Knickmodul“

$$T = \frac{E_1 J_1 + E_2 J_2}{J}$$

gesetzt wird. Zu dessen Berechnung muß die Druck-Stauchungslinie $\sigma = f(\varepsilon)$ des Baustahles gegeben sein. Die Knickspannung $\sigma_k = \frac{P_k}{F}$ entspricht darin dem Modul der Druckspannung $E_1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ und dem Modul der entlastenden Zugspannungen $E_2 = E$; J_1 ist das Trägheitsmoment des über der Biegedruckzone liegenden Querschnittsteiles, J_2 das Trägheitsmoment des über der Biegezugzone liegenden Querschnittsteiles, beide bezogen auf die Biegenulllinie. J aber ist das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes bezogen auf seine Schwerachse. Die Lage der Biegenulllinie ist bestimmt durch die Gleichung $E_1 S_1 + E_2 S_2 = 0$, wobei die S die statischen Momente der durch die Biegenulllinie getrennten Querschnittsteile, bezogen auf die Nulllinie, sind. Der Knickmodul T hängt nicht nur von der Größe der Knickspannung, sondern auch von der Querschnittsform ab, sodaß also die Höhe der Knickspannung im plastischen Bereich, im Gegensatz zur Knickspannung im elastischen Bereich, von der Querschnittsform abhängig ist.

Trotzdem man glauben könnte, daß hiemit der allgemeinste Fall der Knickung gegeben sei, ist dem nicht so. Ein im Brückenbau häufig vorkommender Fall ist mit der Engesser'schen Theorie (die 1910 von Karman durch Versuche bestätigt wurde) nicht zu erfassen. In den Druckgurten von Fachwerkbrücken und in vollwandigen Bogenträgern liegt nämlich die Druckkraft P

¹⁾ Schweizer Bauzeitung 1895 vom 27. Juli.

in der lotrechten Schwerebene des Querschnittes, nicht aber in der wagrechten (Fig. 1, 1 a). In Fachwerkbrücken ist dieser Umstand bedingt durch die Veränderung des Querschnittes von Feld zu Feld und die damit verbundene Verschiebung der Schwerachse $x - x$, während die Druckkraft in der von Feld zu Feld unveränderlichen Netzlinie des Fachwerkes angreift, aber auch durch das Auftreten von Biegespannungen durch die steifen Knotenbleche. Der Gurt verbiegt sich unter der Belastung der Brücke mit dieser nach einer stetig gekrümmten Linie, im mittleren Teile hohl nach oben. Diese Wirkung kann man auf Feldweite oder Gurtknicklänge der Wirkung einer an einem Hebelarm p angreifenden Druckkraft gleichsetzen. Bei einem Bogenträger verläuft die Stützlinie fast durchwegs außerhalb der Achse, bei einem parabolisch geformten Zweigelenkbogen mit Vollbelastung beispielsweise durchaus oberhalb der $x - x$ -Achse (Fig. 1 und 1 a). In allen diesen Fällen ist der Querschnitt in der Regel so geformt, daß das auf die x -Achse bezogene Trägheitsmoment wesentlich größer

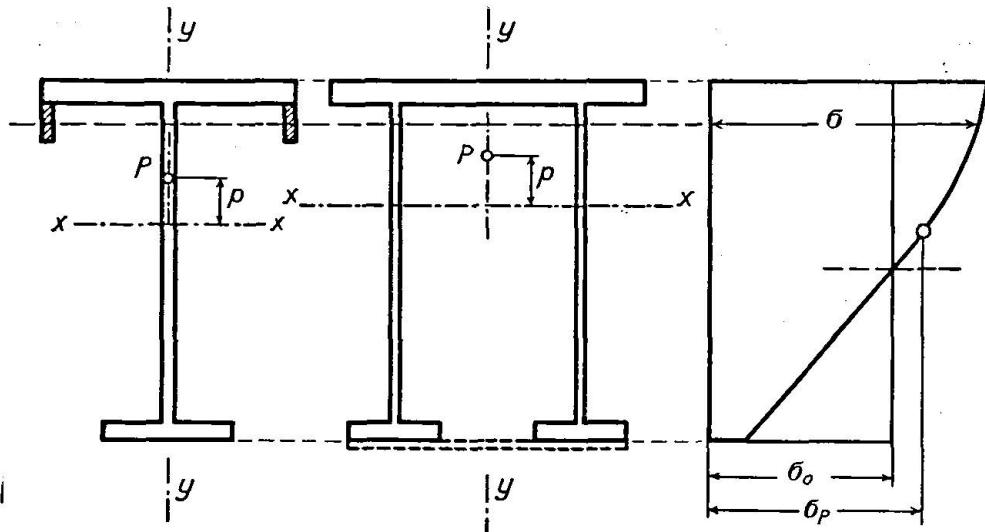


Fig. 1.

Fig. 1 a.

Fig. 1 b.

ist als das für die y -Achse, sodaß für die Berechnung die Knickung aus der Ebene $y - y$ maßgebend ist. Da die Kraft P in dieser Ebene wirkt, liegt also ein Fall reiner Knickung, aber mit einer in der y -Richtung ungleichmäßigen Spannungsverteilung, vor, da den reinen Druckspannungen schon bei der kleinsten Belastung Biegespannungen überlagert sind. Darin besteht die Abweichung vom gewöhnlichen Knickfall. Beim Bogenträger ist allerdings der Druckstab in der y -Ebene nicht gerade, sondern gekrümmmt. Aber innerhalb der Knicklänge ist der Krümmungspfeil klein. Streng genommen ist auch beim Fachwerk mit geraden Gurten der einseitig gedrückte Gurt vor dem Knicken nicht mehr gerade, doch ist die Krümmung hier verschwindend klein und ist auch noch durch eine anfängliche Gegenkrümmung, die jeder Brücke als „Sprengung“ nach aufwärts bei der Anarbeitung gegeben wird, weiter vermindert. Diese Krümmungen beeinflussen wohl die Knickung in der y -Ebene, ihr Einfluß auf die hier zu behandelnde Knickung in der x -Richtung aber ist verschwindend.

Der Querschnitt sei, wie es den Ausführungen entspricht, symmetrisch zur y -Achse, aber unsymmetrisch zur x -Achse (Fig. 1, 1 a). Da im Augenblick des Knickens wie vorher die Spannungen in der y -Richtung veränderlich sind, ist auch in jenen Querschnittsteilen, in denen die Spannungen

oberhalb der Proportionalitätsgrenze σ_p liegen, der Modul veränderlich. Es ist zu untersuchen, ob auch in diesem Fall die Berechnung mit einem einheitlichen Knickmodul durchgeführt werden kann, wie dies sonst der Fall ist. Dieser Knickmodul müßte offenbar einem Mittelwert aus den verschiedenen Modul-Werten des Querschnittes entsprechen. Bisher hat man diesen Fall wohl meist mit dem Knickmodul, der der reinen Druckspannung $\sigma_0 = \frac{P_k}{F}$ entspricht, behandelt. Das führt zu einer Überschätzung der Tragkraft, also zu einer Verringerung der Sicherheit, die sehr beträchtlich sein kann, wenn die an der Gurtunterkante liegenden wagrechten Teile nur schmal sind, oder, wie beim T-Gurt, überhaupt fehlen. Rechnet man anderseits mit dem Modul, der der oberen Randspannung entspricht, so erhält man wieder im allgemeinen eine zu geringe Tragkraft; nur beim T-Gurt ist diese Rechnungsweise ziemlich richtig²⁾.

Die strenge Berechnung zerfällt in zwei Teile.

1. Die Ermittlung der Spannungsverteilung im Querschnitt bei Erreichung der Knicklast. Hierzu muß natürlich die Druck-Stauchungslinie des verwendeten Baustahles gegeben sein. Der Verlauf der Biegespannungen wird in jenen Teilen des Querschnittes, die über die σ_p -Grenze hinaus beansprucht sind, krummlinig verlaufen. Diese Spannungsverteilung ergibt sich streng aus der Berechnung des Stabes auf einseitigen Druck mit dem Hebelarm p . Dazu muß die Knicklast P_k geschätzt werden. Die vorhin angegebenen Näherungsberechnungen liefern hiefür gute Anhaltspunkte. Die Durchführung wird an einem Beispiel gezeigt werden.

In Fig. 1 b sei die Spannungsverteilung dargestellt, wobei $\sigma_0 < \sigma_p$ angenommen wurde. Es sind also die oberen Teile des Querschnittes plastisch, die unteren elastisch beansprucht. Die Biegenulllinie ist gestrichelt. Diese Spannungsverteilung ist in allen Stabquerschnitten dieselbe, wenn der Hebelarm p über die ganze Stablänge konstant ist. Ist dies nicht der Fall, dann kann man genau genug mit der Spannungsverteilung in Stabmitte rechnen, die schließlich für die Knickung besonders maßgebend ist.

2. Die Berechnung auf Knickung in der x -Richtung. Hier handelt es sich wie stets bei Knickaufgaben um die Ermittlung jener kritischen Last, bei der das stabile Gleichgewicht des Stabes gerade in das instabile Gleichgewicht übergeht, um jene Last also, die neben der geraden auch noch eine gebogene Gleichgewichtsform mit unendlich kleinen Ausbiegungen ermöglicht. Dabei werden die üblichen Voraussetzungen gemacht: Das Ebenbleiben der Querschnitte auch nach der Ausbiegung, was bei unendlich kleinen Ausbiegungen gerechtfertigt erscheint, also linearer Verlauf der Dehnungen in der x -Richtung des Querschnitts. Ferner wird angenommen, daß im ausgebogenen Stab zwischen Spannung und Dehnung überall derselbe Zusammenhang besteht, wie bei einem rein auf Zug oder Druck beanspruchten Stab. Auch diese Annahme ist bei unendlich kleinen Ausbiegungen gerechtfertigt.

a) Zunächst ist die Lage der Biegenulllinie $n-n$ zu bestimmen. Es wird angenommen, daß sich bei der Knickung der Querschnitt nach links verschiebt. Wir greifen aus dem Querschnitt $m-m$ des Stabes (Fig. 2 b) zwei Flächenelemente df_1 und df_2 beiderseits der Biegenulllinie $n-n$ heraus. Ihre Abstände von $n-n$ sind a_1 und a_2 . Ihrer Lage im Querschnitt

²⁾ Roš hat in dem Bericht über die „II. internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau“ näherungsweise mit einem arithmetischen Mittelwert der Module gerechnet und Versuche mit Stäben von rechteckigem Querschnitt durchgeführt.

(Fig. 2) entspreche die Spannung σ , wie beispielsweise in Fig. 1 den kleinen schraffierten Flächen in der Spannungsverteilung Fig. 1 b die Spannung σ entspricht. Da die Dehnungen linear verlaufen, erhält man nach Fig. 2 a für ein angenommenes ε_1 das zugehörige $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{a_2}{a_1}$, und aus der Druck-Stauchungslinie (Fig. 2 c) die zugehörigen Biegespannungen σ_1 und σ_2 . Für die Bestimmung von σ_1 ist der Modul E_1 der Druckspannung maßgebend und zwar ist $E_1 = \operatorname{tg} \beta_1$ des Tangentenwinkels im Punkt S, da ja ε_1 unendlich klein zu denken ist. Auf der Biegezugseite gilt die Entlastungsgerade (in Fig. 2 c gestrichelt),

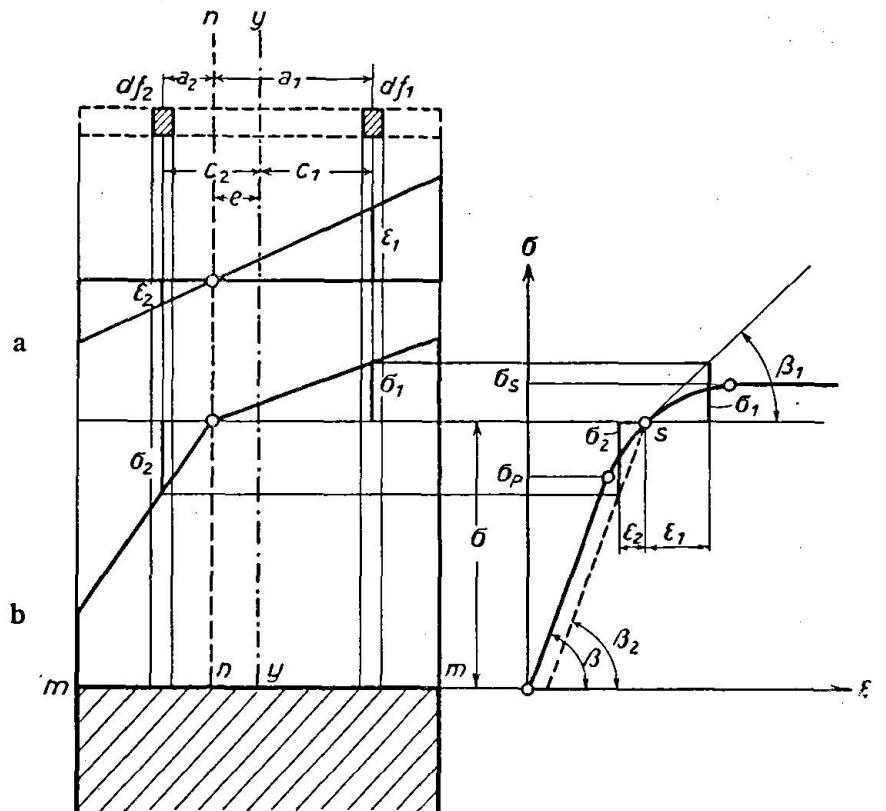


Fig. 2.

die annähernd parallel zur Hook'schen Geraden verläuft, so daß $(E_2 = \operatorname{tg} \beta_2) = (E = \operatorname{tg} \beta)$ ist. Daraus erhält man σ_2 , und damit die Spannungsverteilung im Querschnitt $m-m$ bei unendlich kleiner Ausbiegung. Die Spannungen sind $\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1$ und $\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2$, im allgemeinen also $\sigma_x = E_x \varepsilon_x$. E_x deutet den nach der Lage des Flächenelementes im Querschnitt veränderlichen Modul an. Dabei ist aber, wie im eben behandelten Fall E_x auch für im Querschnitt gleich hoch liegende Teile, je nachdem sie auf der Biegendruck- oder auf der Biegezugseite liegen, E_x im ersten Fall gleich E_{1x} , im zweiten Fall gleich $E_2 = E$.

Aus Fig. 3, die ein Stabelement von der Länge 1 in ausgebogenem Zustand darstellt, folgt die bekannte Beziehung $\varepsilon_1 = \frac{a_1}{\rho}$, $\varepsilon_2 = \frac{a_2}{\rho}$ oder allgemein $\varepsilon_x = \frac{a_x}{\rho}$, wenn ρ der Krümmungshalbmesser ist, der wegen der unendlich kleinen Ausbiegungen unendlich groß zu denken ist und daher ebenso gut von der Schwerachse, wie von der Biegenulllinie aus gegen den Krümmungsmittelpunkt gemessen werden kann.

Somit ist allgemein

$$\sigma_x = E_x \varepsilon_x = \frac{E_x a_x}{\varrho} \quad (1)$$

Nun muß für die Biegespannungen im Querschnitt die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ erfüllt sein. Diese lautet

$$\int \sigma_x d\varphi_x = 0 \quad \text{oder nach Gl. (1)} \quad \int \frac{E_x a_x}{\varrho} d\varphi_x = 0.$$

Da im Querschnitt ϱ für alle Flächenteile konstant angesehen werden darf, erhält man die Gleichung

$$\int E_x a_x d\varphi_x = 0.$$

$d\varphi_x \cdot a_x$ ist aber das statische Moment dS_x des Flächenelementes bezogen auf die Biegenulllinie. Dabei sind die a_x einerseits, etwa rechts von der Nulllinie, positiv, anderseits also links negativ zu bezeichnen. Damit lautet die letzte Gleichung

$$\int E_x dS_x = 0. \quad (2)$$

Das Integral ist über den ganzen Querschnitt zu erstrecken, und aus dieser Gleichung kann die Lage der Nulllinie berechnet werden. Dazu ist es vorteilhaft, den Abstand der Biegenulllinie $n - n$ von der y -Achse einzuführen. Dieser Abstand soll mit e bezeichnet werden. Sind dann die Abstände eines Flächenelementes $d\varphi_x$ von der y -Achse $\pm c_x$, so ist

$$a_x = \pm c_x + e \quad (3)$$

Führt man diese Werte in die Gleichung (2) ein, so lautet sie

$$\int E_x (\pm c_x + e) d\varphi_x = 0. \quad (4)$$

Aus dieser Gleichung kann e berechnet werden.

b) Nachdem die Lage der Nulllinie bekannt ist, hat man die Gleichung $M_a = M_i$ anzusetzen. Es ist also zuerst das Moment der inneren Kräfte M_i zu bestimmen, denn $M_a = P_k p$ ist bekannt. Nach Fig. 3 ist

$$M_i = \int a_x \cdot \sigma_x d\varphi_x = \int E_x \frac{a_x^2}{\varrho} d\varphi_x; \quad (5)$$

$d\varphi_x \cdot a_x^2 = dJ_x$ ist das Trägheitsmoment des Flächenelementes bezogen auf die Nulllinie. Die a_x sind jetzt bereits durch Gl. (3) bestimmt. Somit ist auch

$$M_i = \int \frac{E_x}{\varrho} dJ_x. \quad (6)$$

Da $M_i = M_a$ ist, erhält man, wenn man statt M_a einfach M als Moment der äußeren Kräfte setzt, die Gleichung

$$M = \frac{1}{\varrho} \int E_x \cdot dJ_x \quad (7)$$

als Differentialgleichung der Biegelinie; da es sich um unendlich kleine Ausbiegungen handelt, darf in voller Schärfe $\frac{1}{\varrho} = y''$ gesetzt werden und man kann die Gleichung auch in der Form schreiben

$$y'' = - \frac{M}{\int E_x dJ_x}. \quad (8)$$

Das negative Zeichen ist einzusetzen, um Übereinstimmung zwischen dem

Biegungssinn und der Krümmung zu erhalten. Wird das Moment $M = P_k \cdot y$ positiv angenommen, dann muß der positiven Richtung der y entsprechend y'' negativ sein (Fig. 4). Bezeichnet man nun mit \bar{E} den Ausdruck

$$\bar{E} = \frac{\int E_x dJ_x}{J} \quad (9)$$

dann kann man Gl. (8) auch in der Form schreiben

$$y'' = -\frac{M}{\bar{E}J}. \quad (10)$$

Das ist aber wieder die gewöhnliche Form der Differentialgleichung der Biegelinie des ausgeknickten Stabes, wobei $M = P_k \cdot y$ zu setzen ist³⁾. An Stelle des Moduls E oder T tritt hier der Modul \bar{E} , der nach Gl. (9) zu berechnen ist und

Fig. 3.

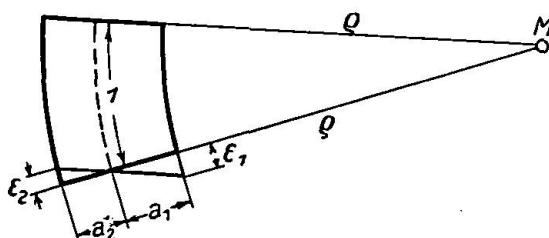
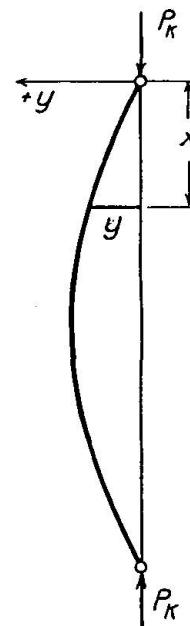


Fig. 4.



in allen Querschnitten des Stabes denselben Wert hat, wenn der Hebelarm p unveränderlich ist oder noch als unveränderlich angesehen werden darf. Der Modul \bar{E} ist also bei der Integration der Differentialgleichung (10) als Konstante anzusehen und man erhält daher auch wie für den elastischen Bereich die Knicklast

$$P_k = \frac{\pi^2 \bar{E} J}{l^2}. \quad (11)$$

oder mit der Schlankheit $\lambda = \frac{l}{i}$ die Knickspannung

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \bar{E}}{\lambda^2}. \quad (12)$$

Die Rechnung ist aber nur richtig, wenn das nach Gl. (11) berechnete P_k mit dem angenommenen Wert von P_k übereinstimmt. Das wird nach der ersten Rechnung im allgemeinen nicht der Fall sein, so daß die Rechnung so lange zu

³⁾ Die Ausbiegungen erfolgen in der im Querschnitt mit x bezeichneten Richtung, werden aber in üblicher Weise mit y in die Rechnung eingesetzt.

wiederholen ist, bis Übereinstimmung herrscht, was nach einer zweiten Rechnung durch Interpolation mit genügender Genauigkeit zu erreichen sein wird.

Die Bestimmung der Knicklast ist also ungleich langwieriger als im Falle einer in der Schwerachse wirkenden Kraft. Für den letzteren Fall erhält man aus Gl. (9) den Engesser'schen Knickmodul T ohne weiteres, wenn man bedenkt, daß dann auf der Biegedrückseite durchaus der konstante Modul E_1 und auf der Biegezugseite der hier konstante Modul $E_2 = E$ herrscht. Man kann daher das Integral der Gl. (9) in zwei Teile spalten und in jedem Teil das für diesen konstante E vor das Integral setzen. Bezeichnet man dann schließlich die zwei Integrale mit J_1 und J_2 , so erhält man

$$T = \frac{E_1 J_1 + E_2 J_2}{J}.$$

Ebenso erhält man aus Gl. (2) die Engesser'sche Gleichung zur Bestimmung der Biegenulllinie $E_1 S_1 + E_2 S_2 = 0$. Die Gleichungen (2) und (9) stellen also die allgemeinste Lösung des einachsigen Knickproblems dar.

Die Integrale wird man natürlich durch Verwandlung in Summen berechnen, indem man die Querschnittsfläche in geeigneter Weise in Teilflächen, zumeist Rechtecke, zerlegt, deren Ausdehnung in der y -Richtung so groß gewählt werden kann, daß man hiefür den Modul E_1 , der mittleren Spannung in diesem Querschnittsteil entsprechend, als unveränderlich annehmen darf. Eine übertriebene Genauigkeit ist natürlich nicht am Platz, da ja bekannt ist, daß die Arbeitslinie auch bei einem und demselben Baustahl zwischen Proportionalitäts- und Stauchgrenze verschieden verlaufen kann. Jedenfalls wird man aus Sicherheitsgründen den Verlauf möglichst flach annehmen. Die Dehnung am Beginn des Fließens kann je nach der Höhe der Stauchgrenze mit 0,2 bis 0,25 % angenommen werden. Es ist auch zu empfehlen, für die Stauchgrenze den tiefsten Wert anzunehmen, wobei man allenfalls berücksichtigen könnte, daß der von den Walzwerken vielfach angegebene Tiefstwert von 55 % der Mindestfestigkeit bei zusammengesetzten Querschnitten doch wohl nicht in allen Teilen vorhanden sein wird.

Bleibt die größte Biegespannung im Querschnitt noch unter der Proportionalitätsgrenze, dann ist nach Gl. (9) $\bar{E} = E$, woraus folgt, daß für diesen Fall trotz der Exzentrizität der Kraft genau so wie bei vollkommen zentrischer Belastung gerechnet werden darf, also nach der Euler'schen Formel. Dabei ist allerdings eine Einschränkung zu machen. Die vorhergehende Berechnung setzt wie jede Knickberechnung zusammengesetzter Querschnitte voraus, daß die einzelnen Teile auch für sich knick- oder beulsicher sind. Die Untersuchung der einzelnen Teile, besonders also dünner Platten, auf Beulung muß selbstverständlich auch durchgeführt werden und nur wenn die Beulspannungen höher liegen als die rechnungsmäßige Knickspannung, ist diese richtig. So müssen beispielsweise bei einem Querschnitt nach Fig. 1a die zwei unteren Platten genügend oft durch Bindebleche und die Stege durch Querschoten verbunden sein.

B e i s p i e l: Fig. 5 zeigt den Scheitelquerschnitt einer vollwandigen Bogenbrücke mit Fahrbahn unten von 55,2 m Stützweite; der Baustoff ist St 44 mit $\sigma_s = 2,7$ und $\sigma_p = 2,14$ t/cm². Die Querschnittswerte sind: $F = 885$ cm², $J_x = 1\,762\,800$ cm⁴, $J_y = 182\,760$ cm⁴ und $W_{x_0} = 39\,200$ cm³. Die größte Druckkraft im Scheitel ist $N = \max H = 757,7$ t. Bei Vollbelastung entsteht ein positives Biegemoment $M = 237$ tm und man erhält die größte Spannung am oberen Rand $s = 0,857 + 0,605 = 1,462$ t/cm². Es handelt sich um eine

Brücke ohne oberen Verband, also um eine offene Brücke. Die Berechnung in der üblichen Weise mit der Normalspannung allein erfolgt nach der Formel von Engesser. Der erforderliche Rahmenwiderstand ist bei $m = 2,5$ -facher Sicherheit und bei der Feldweite $a = 6,133 \text{ m}$

$$v = \left(\frac{mN}{2} \right)^2 \cdot \frac{a}{EJ_y} = \left(\frac{2,5 \cdot 757,7}{2} \right)^2 \cdot \frac{613,3}{2150 \cdot 182760} = 1,4 \text{ t/cm.}$$

Da die Normalspannung $\sigma_0 = \frac{mN}{F} = 2,14$ gerade gleich σ_p ist, darf noch mit E gerechnet werden. Der ausgeführte Rahmenwiderstand in Brückenmitte ist $1,74 \text{ t/cm}$, so daß man nach dieser Rechnung eine mehr als 2,5-fache Sicherheit erhält. Die Sicherheit wird noch vergrößert dadurch, daß die Engesser'sche Berechnung durchaus gleiche Rahmenwiderstände voraussetzt, während sie beim Bogenträger gegen die Enden zu stark anwachsen. Es ist noch zu untersuchen, ob die Engesser'sche Annahme gleichmäßig verteilter Rahmenwiderstände im vorliegenden Fall berechtigt ist. Hiezu muß die Halbwellenlänge l_k größer als $1,8a$ sein. Man erhält für $m = 2,5$

$$l_k = \pi \sqrt{\frac{2EJ}{mO}} = 1790 \text{ cm} = 2,92a.$$

Zur richtigen Berechnung muß man zuerst die Knickkraft halbwegs richtig schätzen. Der Fall der Knickung des Bogens in der Ebene der Tragwand braucht im gegebenen Fall deshalb nicht behandelt zu werden, weil es sich um einen Bogen mit Zugband handelt, das vermöge seiner großen Zugspannung das Knickbestreben unterbindet, ähnlich wie die Kette einer in sich selbst verankerten Hängebrücke die Knickung in der Tragwandebene hemmt. Ein Versagen wird also erst bei Erreichung der Stauchgrenze eintreten. Faßt man die Obergurtplatte mit den unterhalb unmittelbar anliegenden Teilen zu einem einheitlichen Rechteckquerschnitt $700 \cdot 52$ zusammen, so hat dieser eine Fläche von 364 cm^2 . Nimmt man mit $m = 2$ als Knickspannung (Normalspannung) $\sigma_0 = 2 \cdot 0,857 = 1,714 \text{ t/cm}^2$, dann kann dieser in der oberen Platte höchstens eine Biegespannung von rund $1,0 \text{ t/cm}^2$ überlagert werden, da mit dieser bereits die Stauchgrenze erreicht wird. Der Verfestigungsbereich kommt nicht in Frage, weil dazu der Stauchbereich ganz durchlaufen werden müßte, was ganz unzulässige Verformungen ergäbe. Somit kann die Obergurtplatte durch die Biegebeanspruchung höchstens eine Kraft von $364 \cdot 1,0 = 364 \text{ t}$ aufnehmen. Der Druckkraft muß im Falle der Biegung eine gleich große Zugkraft entsprechen. Zwar ist die Querschnittsfläche der unteren Platte kleiner, dafür aber ist die Spannung nicht begrenzt. Der Hebelarm der gleich großen Zug- und Druckkräfte ist rund 102 cm , so daß man ein inneres Moment $M_i > (364 \cdot 1,02 = 365 \text{ tm})$ erhält. Bei $m = 2$ ist das Moment der äußeren Kräfte aber $M_a = 2 \cdot 237 = 474 \text{ tm}$. Da der Steg mit den daran liegenden Winkelteilen die Differenz der Momente nicht zu decken vermag, ist $m = 2$ zu hoch gegriffen. Mit $m = 1,9$ aber ist $\sigma_0 = 1,63$, die größte Druckbiegespannung $1,07 \text{ t/cm}^2$, die Biegedruckkraft in der oberen Platte 390 t und $M_i > (390 \cdot 1,02 = 398 \text{ tm})$, $M_a = 1,9 \cdot 237 = 450 \text{ tm}$; die inneren Querschnittsteile hätten also jetzt nur noch ein Moment von rund 50 tm zu decken, was schon möglich ist. Daher wird mit rund $\sigma_0 = 1,65$ berechnet und mit einer Druckbiegespannung, die die Stauchgrenze gerade erreicht.

Zur genaueren Berechnung wird der Querschnitt in folgende Teile zerlegt: Die obere Platte samt den unmittelbar anliegenden Teilen als Rechteckfläche

mit 364 cm^2 , die untere Platte mit 169 cm^2 , die an diese anliegenden Winkelschenkel mit dem dazwischen liegenden kurzen Stegstück mit $45,5 \text{ cm}^2$, die am Steg anliegenden Winkelschenkel mit dem dazwischen liegenden Stegstück mit 64 cm^2 und in den restlichen Teil des Steges von 74 cm Länge und $2,4 \text{ cm}$ Stärke. Die Schwerpunkte der Flächen (mit Ausnahme des freien Stegteiles) haben die in Fig. 6 angegebenen Abstände. In Fig. 7 ist nun die Druck-Stauchungslinie in genügend stark verzerrtem Maßstabe gezeichnet. Dabei ist die Lage der Stauchgrenze mit $\epsilon_s = 0,002$ angenommen und der Übergang von der Hook'schen Geraden zur Stauchgrenze möglichst flach gezeichnet worden. Dann wird die Gerade $\sigma_0 = 1,65$ und $\sigma_p = 2,14$ eingetragen. Die erstere grenzt die reinen Normalspannungen von den überlagerten Biegespannungen ab. Nun wird die Flächenkraft 364 an die Stauchgrenze verlegt und der Flächenkraft 169 der anderen Platte eine Lage zugewiesen, so daß die Summe aller Biegespannungen voraussichtlich Null ergibt. Das gelingt natürlich nicht gleich das erste Mal. Der Fläche 169 entspricht eine Biegezugspannung von $1,8 \text{ t}/\text{cm}^2$. Der Abstand der beiden Größen ist die Dehnung $\epsilon = 0,00207$. Diese Strecke ist nun dem Abstand $102,8 \text{ cm}$ der beiden Flächenkräfte gleichzusetzen und dann sind die übrigen Flächenkräfte verhältnisgleich einzutragen. Die Lage der Biegenulllinie ergibt sich im Abstand von $45,9$ und $28,1 \text{ cm}$ von den Enden des freien Stegblechteiles, die eingeklammerten Knten sind die wahren Längenmaße im Querschnitt, mit denen weiterhin zu rechnen ist. Die krummlinig begrenzte Fläche über dem Stegstück von $34,4 \text{ cm}$ wird zerlegt in eine Trapezfläche und in eine kleine Fläche, die annähernd als parabelförmig begrenzt angesehen wird. Der Schwerpunkt wird aber entsprechend der Begrenzung von der Mitte etwas gegen die Nulllinie hin verschoben gedacht. Man erhält die Biegedruckkraft

$$\begin{aligned}
 D &= 364 \cdot 1,05 + 64 \cdot 1,025 + (2,4 \cdot 34,4) 0,75 + (2,4 \cdot 34,4) \frac{2}{3} \cdot 0,15 \\
 &\quad + 2,4 \cdot 11,5 \cdot 0,245 = \\
 &= 382,2 + 65,6 + 61,9 + 8,3 + 6,8 = 524,8 \text{ t}
 \end{aligned}$$

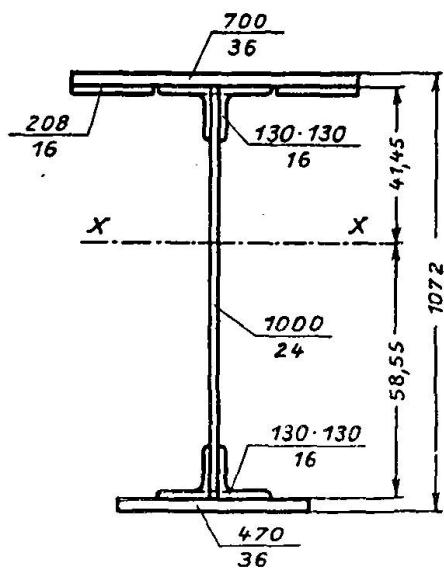


Fig. 5.

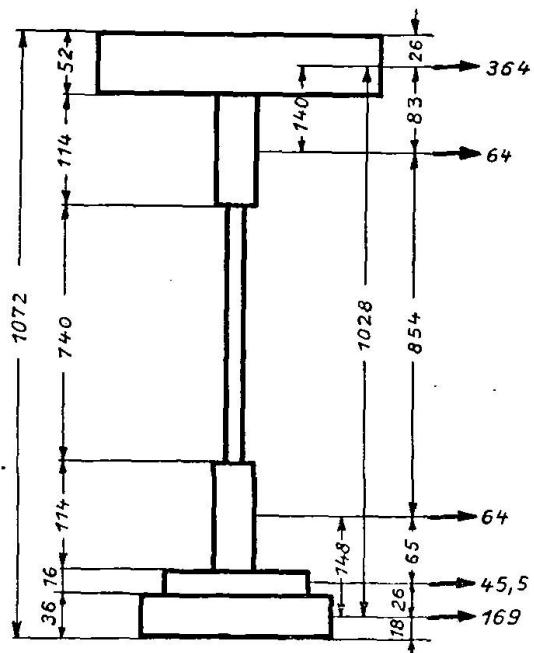


Fig. 6.

nungen ab. Nun wird die Flächenkraft 364 an die Stauchgrenze verlegt und der Flächenkraft 169 der anderen Platte eine Lage zugewiesen, so daß die Summe aller Biegespannungen voraussichtlich Null ergibt. Das gelingt natürlich nicht gleich das erste Mal. Der Fläche 169 entspricht eine Biegezugspannung von $1,8 \text{ t}/\text{cm}^2$. Der Abstand der beiden Größen ist die Dehnung $\epsilon = 0,00207$. Diese Strecke ist nun dem Abstand $102,8 \text{ cm}$ der beiden Flächenkräfte gleichzusetzen und dann sind die übrigen Flächenkräfte verhältnisgleich einzutragen. Die Lage der Biegenulllinie ergibt sich im Abstand von $45,9$ und $28,1 \text{ cm}$ von den Enden des freien Stegblechteiles, die eingeklammerten Knten sind die wahren Längenmaße im Querschnitt, mit denen weiterhin zu rechnen ist. Die krummlinig begrenzte Fläche über dem Stegstück von $34,4 \text{ cm}$ wird zerlegt in eine Trapezfläche und in eine kleine Fläche, die annähernd als parabelförmig begrenzt angesehen wird. Der Schwerpunkt wird aber entsprechend der Begrenzung von der Mitte etwas gegen die Nulllinie hin verschoben gedacht. Man erhält die Biegedruckkraft

und die Zugkraft

$$Z = 169 \cdot 1,8 + 45,4 \cdot 1,7 + 64 \cdot 1,43 + (2,4 \cdot 28,1) \cdot 0,595 = \\ = 304,2 + 77,3 + 91,5 + 40,2 = 513,2 \text{ t.}$$

Die beiden Kräfte sind also nicht genau gleich. Bevor aber an eine Korrektur geschritten wird, muß man sich von der Größe des Momentes überzeugen. Man

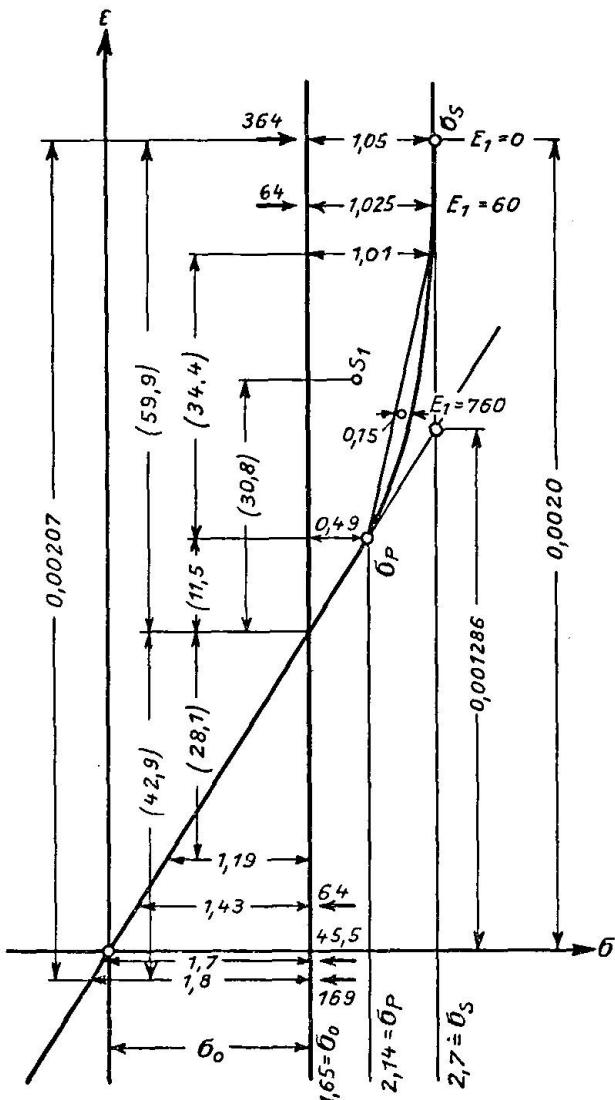


Fig. 7.

erhält mit den eben berechneten Kräften das auf die Biegenulllinie bezogene Moment der inneren Kräfte

$$M_i = 382,2 \cdot 59,9 + 65,6 \cdot 51,7 + 61,9 \cdot 30,8 + 8,3 \cdot 27 + 6,8 \cdot 7,7 \\ + 304 \cdot 42,9 + 77,3 \cdot 40,2 + 91,5 \cdot 33,7 + 40,2 \cdot 18,74 = \\ = 48450 \text{ tcm.}$$

Der angenommenen Normalspannung $\sigma_0 = 1,65$ entspricht eine Sicherheitszahl $m = \frac{1,65}{0,857} = 1,925$, daher ein äußeres Moment $M_a = 1,925 \cdot 23700 = 45600 \text{ tcm}$. Man kann nun zweierlei machen. Man kann, indem man bei $m = 1,925$ bleibt, D verkleinern, indem man in Fig. 7 mit der Randkraft etwas

von der Stauchgrenze gegen die P -Grenze zu abrückt, aber auch die Zugkräfte etwas verkleinert, so daß M_i entsprechend kleiner wird.

Da man aber aus der Rechnung ersieht, daß der Querschnitt imstande ist, ein größeres Moment als 456 tm aufzunehmen, ist es richtiger, mit der Normalspannung σ_0 hinaufzurücken, allerdings nur sehr wenig, da ja damit auch M_a größer wird. Es soll aber hier weder das eine noch das andere durchgeführt werden, sondern wir rechnen wegen der Geringfügigkeit der Differenzen in den Ergebnissen einfach weiter. Man muß bedenken, daß die Arbeitslinie ja nicht unwe sentlich anders aussehen kann sowohl was die Höhenlage von σ_P und σ_S betrifft, als auch betreffs der Stauchdehnung ε_S . Es ist auch deshalb gut weiter zu rechnen, weil man ja erst aus dem Endergebnis ersieht, ob die angenommene Sicherheit auch wirklich vorhanden ist.

Es sind für die weitere Rechnung zunächst die E_1 für die einzelnen Querschnittsteile erforderlich. Diese sind gegeben durch den Tangens des Neigungswinkels an die Druckstauchungslinie. Als Maßstab gilt natürlich der Neigungswinkel der Hooke'schen Geraden mit $E = 2100 \text{ t/cm}^2$. Die E_1 -Werte sind in Fig. 7 eingetragen. Es wird nun die Lage der Biegenulllinie e für die Knickung senkrecht zur y -Achse bestimmt. Sie ist aus der Gleichung $\sum E_x S_x = 0$ zu erhalten; für die obere Platte ist E_1 auf der Biegedruckseite Null. Es kommt daher in der Gleichung nur die Biegezugseite der Platte mit $E_2 = E$ vor; für den Stegteil mit 34,4 cm Länge wird mit dem Mittelwert $E_1 = 760$ der Sehne in der Arbeitslinie gerechnet. Soweit sich der Querschnitt elastisch verhält, kann er als Ganzes behandelt werden: Das ist der Stegteil von 52,6 cm Länge, die unteren Winkel mit 78,6 cm² Fläche und die untere Platte:

$$-2100 \cdot \frac{5,2}{2} (35 - e)^2 + 60 \cdot 64 \cdot e + 760 \cdot (2,4 \cdot 34,4) e + 2100 \cdot (2,4 \cdot 52,6 + 78,6 + 169,0) e = 0$$

Dividiert man die Gleichung durch 2100, so lautet sie:

$$-3185 + 182 e - 2,6 e^2 + 1,8 e + 29,9 e + 373,8 e = 0 \quad \text{oder} \\ e^2 - 225,96 e + 1225 = 0.$$

Daraus erhält man $e = 5,53 \text{ cm}$ und $e^2 = 30,58$. Nun berechnet man \bar{E} aus der Gleichung $\bar{E} J_y = \sum E_x J_x$. Die J_x sind hier natürlich die Trägheitsmomente der Teilflächen bezogen auf die Biegenulllinie e . Das Trägheitsmoment des unteren ganz elastischen Teiles bezogen auf die e -Linie ist 45 800 cm⁴.

$$\begin{aligned} \sum E_x J_x &= 2100 \cdot \frac{5,2}{3} \cdot (35 - 5,53)^3 + 60 \left[\frac{11,5}{12} \cdot 5,6^3 + 64 \cdot 30,58 \right] \\ &\quad + 760 \cdot (2,4 \cdot 34,4) \cdot 30,58 + 2100 \cdot 45800 = \\ &= 2100 \cdot (44400 + 60 + 910 + 45800) = 2100 \cdot 91170; \\ \bar{E} &= \frac{2100 \cdot 91170}{182760} = 1050 \text{ t/cm}^2. \end{aligned}$$

Erweitert man die Engesserformel auf den unelastischen Bereich, so ist

$$\text{erf } \nu = \left(\frac{mO}{2} \right)^2 \frac{a}{\bar{E} J} = \left(\frac{1,925 \cdot 757,7}{2} \right)^2 \cdot \frac{613,3}{1050 \cdot 182760} = 1,70 \text{ t/cm}.$$

Nachdem der vorhandene Rahmenwiderstand 1,74 ist, sieht man, daß die Sicherheit ein wenig größer als 1,925 ist, da für die angenommene Spannungsverteilung das innere Moment etwas größer ist als das äußere Moment. Jedenfalls ist eine weitere Rechnung überflüssig. Nachdem die hier durchgeführte

Berechnungsweise schon eine scharfe genannt werden darf, ist die Sicherheit von 1,9 hinreichend.

Die Sicherheit wird für Vollbelastung noch dadurch größer werden, da die Biegemomente vom Scheitel gegen die Kämpfer zu abnehmen, während die Querschnitte größer werden. Die Berechnung nach der Theorie von Engesser setzt gleichmäßig verteilte Rahmenwiderstände voraus und diese Annahme ist nur berechtigt, wenn die Halbwellenlänge größer als das 1,8-fache der Halb-rahmenentfernung, also der Feldweite a , ist. Man muß daher noch die Halbwellenlänge berechnen. Es ist

$$l_k = \pi \sqrt{\frac{2 \bar{E} J}{m O}} = 1610 \text{ cm} = 2,5 a.$$

Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei noch aufmerksam gemacht, daß unter der Annahme gleichmäßig verteilter Rahmenwiderstände die Knicklast die Größe hat

$$P_k = \frac{2 \pi^2 \bar{E} J}{l_k^2}.$$

Hier ergibt sich natürlich $P_k = m O$.

Das Ende der Berechnung gestaltet sich aber anders, wenn es sich um eine Brücke mit einem oberen Querverband handelt. Dann ist die Knicklänge bei Knickung aus der Ebene der Tragwand in der Brückenmitte gleich der Feldweite $l_k = a = 613,3 \text{ cm}$. Da innerhalb dieser Länge keinerlei seitliche Stützung vorhanden ist, erhält man jetzt die Knickkraft nach der gewöhnlichen Formel

$$P_k = \frac{\pi^2 \bar{E} J}{l_k^2} = 5040 \text{ t.}$$

Das bedeutet einen starken Widerspruch gegenüber der Annahme $m O = 1460 \text{ t}$ mit $\sigma_k = \sigma_0 = \frac{1460}{885} = 1,65 \text{ t/cm}^2$. Man müßte also die Rechnung mit einem größeren σ_0 wiederholen, doch wird die Erhöhung nur gering sein dürfen, weil mit wachsenden σ_0 die Biegespannungen schon stark in den Fließbereich hineinragen und dann der mittlere Modul \bar{E} rasch abnimmt. Es wäre aber auch hier eine nochmalige Berechnung überflüssig, weil es zu wissen genügt, daß die Sicherheit größer als 1,925 ist. Diese Sicherheit dürfte nämlich schon größer sein als die gegen Knickung in der Ebene des Tragwerkes. Bei Bogenträgern darf ja die Biegerandspannung die zulässige Spannung erreichen, also bei St 44 ... $s_{zul} = 1,67$. Da die Stauchgrenze mit $\sigma_s = 2,7$ angenommen wird, kann die Sicherheit nicht sehr viel größer sein als $\frac{2,7}{1,67} = 1,62$, auch wenn die Knicklänge sehr klein ist, wie bei einem Bogenträger mit Zugband. Selbst wenn kein Knicken eintritt, entstehen doch große Verformungen, die einen unerwünschten Grenzzustand bilden.

Zusammenfassung.

An einem geraden Stab mit unveränderlichem, zur y -Schwerachse symmetrischen Querschnitt greift an den Enden die Druckkraft P in der y -Schwerebene, aber außerhalb der x -Schwerebene an einem Hebelsarm p an. Wenn das Trägheitsmoment J_x genügend größer ist als J_y , liegt der Fall von Knickung senkrecht zur y -Ebene vor, wobei jedoch die Spannungsverteilung vom Anbeginn ungleichmäßig ist und auch in den plastischen Bereich ragen kann. Die

Bestimmung der Knicklast P_k erfolgt nach strengen Gleichungen, deren Lösung aber nicht vermittelbar möglich ist. Man schätzt zuerst P_k und bestimmt die zugehörige Spannungsverteilung (Moment $P_k \cdot p$) aus der Druckstauchungslinie des gewählten Baustahles. Dann wird die beim Knicken in der x -Richtung sich ergebende Biegungslinie (Gl. 4) und schließlich ein Knickmodul $\bar{\epsilon}$ bestimmt (Gl. 9), mit dem man die Knicklast berechnen kann (Gl. 11). Stimmt diese mit dem angenommenen Wert P_k nicht überein, so ist die Rechnung bis zur Übereinstimmung zu wiederholen. Für $p = \Theta$ (in der Schwerachse gedrückter Stab) übergeht der Knickmodul $\bar{\epsilon}$ in den Engesser'schen Modul τ . Ein Beispiel zeigt die praktische Anwendung des Verfahrens.

Résumé.

Sur une barre droite avec section constante et symétrique par rapport à l'axe des y agit aux deux extrémités la force de compression P dans le plan de symétrie y , mais à l'extérieur du plan des x à la distance p de cet axe. Lorsque le moment d'inertie J_x est suffisamment plus grand que J_y , le cas du flambage se trouve perpendiculaire au plan des y , où cependant la répartition des contraintes est irrégulière à partir du début et peut se prolonger aussi dans le domaine plastique. La détermination de la charge de flambage P_k se fait au moyen d'équations exactes dont la solution n'est cependant pas immédiatement possible. On admet d'abord P_k et l'on détermine la répartition correspondante des contraintes (moment $P_k \cdot p$), en partant de la courbe de l'écrasement de l'acier choisi. L'axe neutre (éq. 4) que l'on obtient pour le flambage dans la direction des x , ainsi que le module de flambage $\bar{\epsilon}$ (éq. 9), peuvent être déterminés et l'on peut ainsi calculer la charge de flambage (éq. 11). Si cette valeur ne concorde pas avec la valeur P_k admise, il faut répéter le calcul jusqu'à ce que l'on obtienne concordance. Lorsque $p = \Theta$ (barre comprimée dans son axe de gravité), le module de flambage $\bar{\epsilon}$ se transforme en le module d'Engesser τ . Un exemple montre l'application pratique du procédé.

Summary.

A straight bar with constant cross section symmetrical to the gravity axis y is subjected to two compression forces P . These forces act one at each end of the bar in the gravity plane y but definitely outside the gravity plane x , with a lever arm p .

If the moment of inertia J is sufficiently greater than J_y we have buckling at right angles to the plane y . At first the distribution of stresses is not uniform in this case and can even enter the range of plasticity. The determination of the buckling load P_k can be effected by exacting equations, the solution of which is, however, not a straightforward one.

The value of P_k is first estimated and with it is calculated the stress distribution (moment $P_k \cdot p$) based on the compression-upsetting line of building steel. After this the neutral axis (Eq. 4) for bending due to buckling in the direction x , and the modulus of buckling $\bar{\epsilon}$ (Eq. 9) is determined, out of which can be calculated the buckling load (Eq. 11). If the result to be obtained does not tally with the assumed value of P_k , the whole procedure has to be repeated until agreement is reached. For $p = \Theta$ (compression along the gravity axis) the modulus of buckling $\bar{\epsilon}$ transforms itself into the so-called Engesser modulus τ .

An example is given to elucidate the procedure.

Leere Seite
Blank page
Page vide