Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 4 (1936)

Artikel: Das durchlaufende aufgesteifte zylindrische Rohr oder Zeiss-Dywidag-Dach

Autor: Dischinger, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5082

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DAS DURCHLAUFENDE AUSGESTEIFTE ZYLINDRISCHE ROHR ODER ZEISS-DYWIDAG-DACH.

LE TUYAU CONTINU DE FORME CYLINDRIQUE RENDU RIGIDE ET LE TOIT ZEISS-DYWIDAG.

THE CONTINUOUS STIFFENED CYLINDRICAL TUBE AND THE ZEISS-DYWIDAG ROOF.

Prof. Dr. F. DISCHINGER, Berlin-Charlottenburg.

Das zylindrische Rohr, bei dem wir eine ganz beliebige Querschnittsform voraussetzen, soll sich durchlaufend über eine Anzahl von Feldern erstrecken. An sämtlichen Auflagerpunkten muß es zur Einführung der Auflagerreaktion durch Scheiben ausgesteift sein. Die inneren Kräfte des zylindrischen Rohres

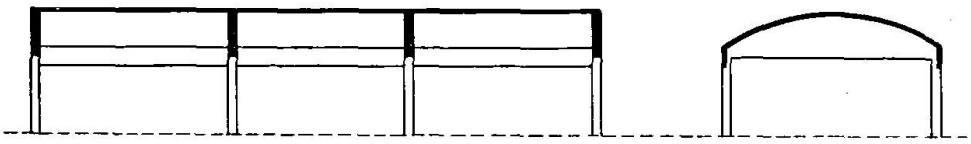

Fig. 1.

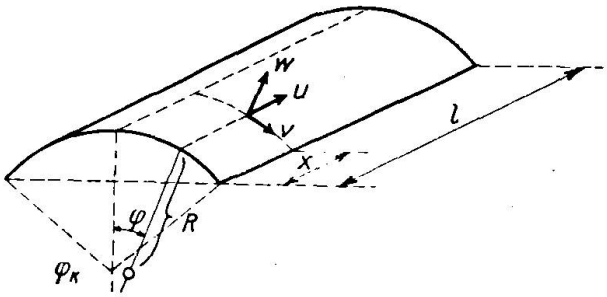

Fig. 2.

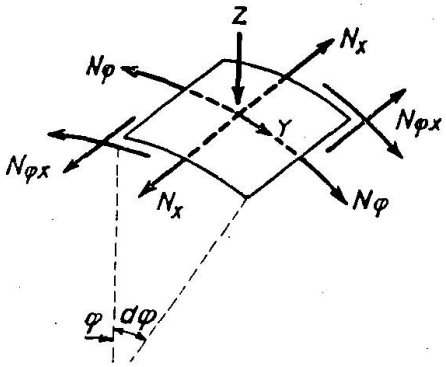

Fig. 3.

ergeben sich für den Membranspannungszustand bekanntlich aus den Gleichgewichtsbedingungen des Flächenelementes gegenüber Verschieben in den drei Richtungen des Koordinatensystems. Die Komponente der an einem Flächenelement in Richtung der Gewölbetangente oder der Normalen angreifenden Kräfte, die entweder Massenkräfte oder auch äußere Belastungen sein können, werden mit Y und Z bezeichnet. Ihr Verlauf in der Gewölberichtung ist ganz beliebig, in Richtung der Erzeugenden dagegen nehmen wir sie vorerst als konstant an, jedoch wollen wir später die Aufgabe in dieser Hinsicht noch erweitern.

Aus den drei Gleichgewichtsbedingungen erhalten wir: s. hierzu [1])

$$ZR\,d\varphi\,dx + N_\varphi\,dx\,d\varphi = 0 \qquad N_\varphi = -RZ$$

$$(1)\quad YR\,d\varphi\,dx + \partial N_\varphi\,dx + \partial N_{\varphi x} R\,d\varphi = 0 \qquad \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial N_\varphi}{R\,\partial\varphi} + Y = 0$$

$$\partial N_x R\,d\varphi + \partial N_{\varphi x}\,dx = 0 \qquad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{R\,d\varphi} = 0$$

hieraus folgt:

$$N_\varphi = -ZR$$

$$(2)\quad N_{x\varphi} = -\int\left[Y + \frac{\partial N_\varphi}{R\,\partial\varphi}\right]dx + C_1 = -xN_0 + C_1$$

$$N_x = -\int\frac{\partial N_{x\varphi}}{R\,\partial\varphi}\,dx + C_2 \qquad = \frac{x^2}{2}N_0^{\cdot} - xC_1^{\cdot} + C_2$$

wobei wir zur Abkürzung gesetzt haben:

$$N_0 = Y + \frac{\partial N_\varphi}{R\,\partial\varphi} \quad \text{und} \quad N_0^{\cdot} = \frac{\partial N_\varphi}{R\,\partial\varphi}.$$

C_1 und C_2 sind Funktionen von φ. Bei den nachstehenden Untersuchungen wollen wir eine anisotrope Schale betrachten, bei der die Schale durch Rippen sowohl in Richtung des Gewölbes, wie auch der Erzeugenden versteift ist. Dieser Fall der Anisotropie wird auch mit Orthotropie bezeichnet. Der allgemeinste Fall der Anisotropie, bei welchem die Rippen unter beliebigen Schrägen verlaufen, spielt im Bauwesen keine Rolle, so daß wir ihn außer Acht lassen können. Die Dehnungssteifigkeiten der Schale in den Richtungen φ und x bezeichnen wir mit D_φ und D_x, die Verzerrungssteifigkeit mit $D_{x\varphi}$. Damit ergeben sich bei Vernachlässigung der für den Eisenbeton unwesentlichen Querkontraktion die nachstehenden Zusammenhänge zwischen den inneren Kräften und den Verschiebungen (s. Literaturangabe unter 1 d und 1 f)

$$N_\varphi = D_\varphi\left(v^{\cdot} + \frac{w}{R}\right)$$

$$(3\,a)\quad N_x = D_x u' \qquad \text{wobei wiederum } u^{\cdot} = \frac{\partial u}{R\,\partial\varphi} \text{ und } u' = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$N_{x\varphi} = \frac{D_{\varphi x}}{2}(u^{\cdot} + v')$$

Streng genommen gelten diese Gleichungen nur bei einer zur Mittelfläche symmetrischen Ausbildung der Rippen. Bei unsymmetrischer Ausbildung der Rippen, wie sie vorhanden wäre, wenn die Rippen nur auf der Unterseite der Schale angeordnet wären, würden noch Zusatzglieder hinzutreten, die jedoch für uns ohne Bedeutung sind, da wir uns nur mit dem Membranspannungszustand beschäftigen. Aus der Gl. (3 a) erhalten wir die Verschiebungen als Funktionen der inneren Kräfte

---

[1]) a) Fr. Dischinger: Handbuch für E. B., 3. Aufl., Bd. 12, 1928.
b) K. Miesel: Über die Festigkeit von Kreiszylinderschalen. Ing. Arch. 1930.
c) U. Finsterwalder: Dissertation München 1930 und Ing. Arch. 1932.
d) W. Flügge: Die Stabilität der Kreiszylinderschale. Ing. Arch. 1932.
e) W. Flügge: Statik und Dynamik der Schalen. Jul. Springer, 1934.
f) Fr. Dischinger: Die strenge Theorie der Kreiszylinderschale. Beton und Eisen 1935, Heft 16—18.

$$u = \frac{1}{D_x}\int N_x\,dx + C_3$$

(3b) $$v = -\int u^{\cdot}\,dx + \frac{2}{D_{\varphi x}}\int N_{\varphi x}\,dx + C_4$$

$$w = -v^{\cdot}R + \frac{1}{D_\varphi}(N_\varphi R)$$

Wir erhalten demnach für die inneren Kräfte und Verschiebungen die nachstehenden Gleichungen in Abhängigkeit von N_0. Durch N_0 ist das Gesetz der Spannungsverteilung sowohl bezüglich der Schubkräfte N_x, wie auch der Biegungskräfte N_x gekennzeichnet.

$$N_\varphi = RZ$$

$$N_{\varphi x} = -xN_0 + C_1$$

(4) $$N_x = +\frac{x^2}{2}N_0^{\cdot} - xC_1^{\cdot} + C_2$$

$$u = \frac{1}{D_x}\left[\frac{x^3}{6}N_0^{\cdot} - \frac{x^2}{2}C_1^{\cdot} + xC_2 - C_3\right]$$

$$v = \frac{1}{D_x}\left[-\frac{x^4}{24}N_0^{\cdot\cdot} + \frac{x^3}{6}C_1^{\cdot\cdot} - \frac{x^2}{2}C_2^{\cdot} + xC_3^{\cdot} - C_4\right] + \frac{2}{D_{\varphi x}}\left[-\frac{x^2}{2}N_0 + xC_1 - C_0\right]$$

$$w = \frac{R}{D_x}\left[\frac{x^4}{24}N_0^{\cdot\cdot\cdot} - \frac{x^3}{6}C_1^{\cdot\cdot\cdot} + \frac{x^2}{2}C_2^{\cdot\cdot} - xC_3^{\cdot\cdot} + C_4^{\cdot}\right] + \frac{2R}{D_{\varphi x}}\left[\frac{x^2}{2}N_0^{\cdot} - xC_1^{\cdot} + C_0^{\cdot}\right] - \frac{ZR^2}{D_\varphi}$$

1. Das an den Binderscheiben beliebig, aber auf beiden Seiten gleichmäßig eingespannte Dach.

Die Konstanten $C_1 - C_4$ ergeben sich für das an den Binderscheiben freiaufliegende bezw. volleingespannte Dach wie folgt. Hierbei setzen wir starre Binderscheiben voraus, so daß die Verschiebungen v der Schale an den Binderscheiben zu Null werden.

a) Für das freiaufliegende Dach:

α) für $x=0$ ist $N_x=0$ also $C_2=0$

β) für $x=0$ ist $v=0$ also $C_4=0$, $C_0=0$

γ) für $x=1$ ist $N_x=0$ also $C_1^{\cdot}=+N_0^{\cdot}\frac{l}{2}$

δ) für $x=1$ ist $v=0$ also

$$-N_0^{\cdot\cdot}\frac{l^4}{24} + \frac{l^3}{6}C_1^{\cdot\cdot} + lC_3^{\cdot} = 0$$

$$C_3^{\cdot} = -N_0^{\cdot\cdot}\frac{l^3}{24}$$

b) Für das volleingespannte Dach:

α) für $x=0$ ist $u=0$ also $C_3=0$

β) für $x=0$ ist $v=0$ also $C_4=0$, $C_0=0$

γ) für $x=1$ ist $u=0$ also $N_0^{\cdot}\frac{l^3}{6} - C_1^{\cdot}\frac{l^2}{2} + C_2 l = 0$

δ) für $x=1$ ist $v=0$ also

$$-N_0^{\cdot\cdot}\frac{l^4}{24} + C_1^{\cdot\cdot}\frac{l^3}{6} - C_2^{\cdot}\frac{l^2}{2} = 0$$

Hieraus $C_2^{\cdot} = N_0^{\cdot\cdot}\frac{l^2}{12}$, $C_1^{\cdot\cdot} = N_0^{\cdot\cdot}\frac{l}{2}$.

Durch die Bedingung $v = 0$ ist die Schale an den Binderscheiben unverschieblich festgelegt. Aus der obigen Konstantenbestimmung ersehen wir, daß uns keine Konstante mehr zur Verfügung steht, um auch die w-Verschiebung zu Null zu machen. Dadurch ergibt sich theoretisch zwischen der Schale und den Binderscheiben eine klaffende Fuge, deren Schließung Biegungsmomente in

Richtung der Erzeugenden auslöst, die vom Rand aus nach stark gedämpften Schwingungen verlaufen, so daß schon in ganz geringer Entfernung von den Binderscheiben der reine Membranspannungszustand wieder vorhanden ist (s. Literaturangabe unter 1 b). Bei der eingespannten Tonne ist an den Binderscheiben $u = 0$, bei der freiaufliegenden Tonne dagegen ist dies nicht der Fall, hier ist an den Scheiben ein Wert u vorhanden und zwar als Funktion von φ. In diesem Fall müssen wir also voraussetzen, daß die Binderscheibe in ihrer Fläche zwar vollständig steif ist, aber in der dazu senkrechten Richtung als Platte so verbiegbar ist, daß sie sich diesen veränderlichen Werten von u anpassen kann.

Wir erhalten demnach für die beiden Fälle folgende Gleichungen

a) Das freiaufliegende Dach:

$$N_\varphi = -ZR$$

$$N_{\varphi x} = -\frac{2x-l}{2} N_0$$

$$N_x = +\frac{x^2-lx}{2} N_0^{\cdot}$$

$$u = +\frac{4x^3-6lx^2+l^3}{12} \frac{N_0^{\cdot}}{D_x}$$

$$v = -\frac{x^4-2lx^3+l^3x}{24} \frac{N_0^{\cdot\cdot}}{D_x} - \frac{x^2-lx}{2} \frac{2N_0}{D_{\varphi x}}$$

$$w = +\frac{x^4-2lx^3+l^3x}{24} \frac{N_0^{\cdot\cdot\cdot}R}{D_x} + \frac{x^2-lx}{2} \frac{2N_0^{\cdot}R}{D_{\varphi x}} - \frac{ZR^2}{D_\varphi},$$

b) Das volleingespannte Dach:

$$N_\varphi = -ZR$$

$$N_{\varphi x} = -\frac{2x-l}{2} N_0$$

$$N_x = \frac{6x^2-6lx+l^2}{12} N_0^{\cdot}$$

$$u = \frac{2x^3-3lx^2+l^2x}{12} \frac{N_0^{\cdot}}{D_x}$$

$$v = -\frac{x^4-2lx^3+l^2x^2}{24} \frac{N_0^{\cdot\cdot}}{D_x} - \frac{x^2-lx}{2} \frac{2N_0}{D_{\varphi x}}$$

$$w = \frac{x^4-2lx^3+l^2x^2}{25} \frac{N_0^{\cdot\cdot\cdot}R}{D_x} + \frac{x^2-lx}{2} \frac{2N_0^{\cdot}R}{D_{\varphi x}} - \frac{ZR^2}{D_\varphi}.$$

Die Glieder, die von der Dehnungssteifigkeit D_x abhängig sind, zeigen den Einfluß der reinen Balkenbiegung auf die Verschiebungen. Die hierbei auftretenden Funktionen f_x sind sowohl bei der freiaufliegenden wie auch bei der eingespannten Tonne nichts anderes wie die Biegelinien eines freiaufliegenden bezw. eines eingespannten Balkens und deren Ableitungen. Die Funktion f_x, die bei den Gliedern mit Schubverzerrung ($D_{x\varphi}$) vorhanden ist, entspricht der zweiten Ableitung der Biegelinie eines freiaufliegenden Balkens. Die bei den Gliedern mit Gewölbewirkung (D_φ) auftretende Funktion f_x ist gleich 1, sie entspricht der oben als konstant angenommenen Lastverteilung längs der Erzeugenden.

Da die Spannungsgesetze bei dem freiaufliegenden wie auch bei dem volleingespannten Dach sowohl bezüglich der Schubkräfte (gekennzeichnet durch N_0) wie auch der N_x-Kräfte (gekennzeichnet durch $N_0^{\cdot}$) genau die gleichen sind, können wir die beiden Lastfälle ohne weiteres addieren und wir erhalten damit die inneren Kräfte und Verschiebungen eines an den Bindern teilweise, aber symmetrisch eingespannten Rohres oder Daches. Anstelle der Biegelinien des freiaufliegenden bezw. volleingespannten Balkens und deren Ableitungen müssen wir nunmehr bei den von D_x abhängigen Gliedern die Biegelinien des beliebig, aber symmetrisch eingespannten Balkens bezw. die zugehörigen Ableitungen einführen, die wir mit δ_x, δ_x' bis δ_x'''' bezeichnen. Hierbei ist δ_x'''' die Lastfunktion längs der Erzeugenden, für die wir oben die Voraussetzung

gemacht haben, daß sie konstant sein soll. Die bei den Gliedern mit Schubverzerrung (D_x) auftretende Funktion f_x entspricht dagegen der zweiten Ableitung der Biegelinie des freiaufliegenden Balkens. Wir bezeichnen sie mit δ_{x0}''. Die bei den Gliedern mit Gewölbewirkung (D_φ) auftretende Funktion f_x entspricht der Lastfunktion, die wir sowohl mit δ_x'''' wie mit δ_{x0}'''' bezeichnen können (Fig. 4).

Wir erhalten demnach für das beliebig, aber symmetrisch eingespannte Rohr mit den Belastungen $Z = Z_0\,\delta_x''''$, $Y = Y_0\,\delta_x''''$ die nachstehenden sehr einfachen Gleichungen für die inneren Kräfte und Verschiebungen.

$$
\begin{aligned}
N_\varphi &= -ZR = -Z_0 R\,\delta_x'''' & u &= \frac{N_0^{\cdot}}{D_x}\,\delta_x' \\
N_{\varphi x} &= -N_0\,\delta_x''' & v &= -\frac{N_0^{\cdot\cdot}}{D_x}\,\delta_x - \frac{2N_0}{D_{\varphi x}}\,\delta_{x0}'' \\
N_x &= +N_0^{\cdot}\,\delta_x'' & w &= +\frac{N_0^{\cdot\cdot\cdot}R}{D_x}\,\delta_x + \frac{2N_0^{\cdot}R}{D_{\varphi x}}\,\delta_{x0}'' - \frac{ZR^2}{D_\varphi}\,\delta_x''''
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$\text{wobei } N_0 = Y + \frac{\partial N_\varphi}{R\,\partial\varphi}.$$

Die Verschiebungen sind also Funktionen der Biegungskräfte N_x, der Schubkräfte $N_{x\varphi}$ und der Gewölbekräfte N_φ, wie aus den drei Faktoren der Dehnungssteifigkeiten D_x, $D_{x\varphi}$ und D_φ hervorgeht.

Diese Gleichungen gelten aber nicht nur für eine längs x konstante Lastfunktion δ_x'''', sondern auch für eine ganz beliebige, wie man sich leicht durch Einsetzen der obigen Werte in die Diff.-Gl. (1) und (3a) überzeugen kann. Wie aus den Entwicklungen ohne weiteres hervorgeht, ist dagegen gleiche Schalenstärke vorausgesetzt, die Veränderlichkeit der Belastungen bezieht sich demnach nur auf die äußeren Belastungen. Durch die Gl. (5) sind demnach die inneren Kräfte und Verschiebungen eines beliebig, aber symmetrisch eingespannten Rohres bei beliebigen mit φ und x veränderlichen Belastungen

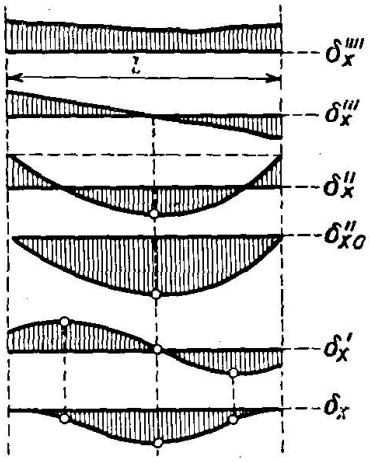

Fig. 4.

$$Z = Z_n f_{1\varphi}\,\delta_x'''', \qquad Y = Y_n f_{2\varphi}\,\delta_x''' \qquad \text{gegeben.} \tag{6}$$

Wir gehen nun zu dem wichtigeren Fall über, daß die Tonne nur einseitig eingespannt ist.

2. Das einseitig eingespannte Dach.

Wir gehen hierbei wiederum von den Gl. (4) aus, bei denen wir vorausgesetzt haben, daß die Lastfunktion δ_x'''' eine konstante Größe ist. Die Konstanten ergeben sich jetzt aus den nachstehenden

α) für $x = 0$ ist $v = 0$ also $C_4 = 0$ und $C_0 = 0$

β) für $x = 0$ ist $u = 0$ also $C_3 = 0$

γ) für $x = 1$ ist $N_x = 0$ also $\frac{l^2}{2} N_0^{\cdot} - l C_1^{\cdot} + C_2 = 0$

δ) für $x = 1$ ist $v = 0$ also $\frac{1}{D_x}\left[-N_0^{\cdot\cdot}\frac{l^4}{24}+\frac{l^3}{6}C_1^{\cdot\cdot}-\frac{l^2}{2}C_2^{\cdot}\right]+\frac{2}{D_{\varphi x}}\left[-\frac{l^2}{2}N_0+lC_1\right]=0$

Aus γ folgt $-C_2^{\cdot}\frac{l^2}{2} = N_0^{\cdot\cdot}\frac{l^4}{4}-C_1^{\cdot\cdot}\frac{l^3}{2}$ wir setzen diesen Wert in δ ein.

$$-\frac{l^4}{24}N_0^{\cdot\cdot}+\frac{l^3}{6}C_1^{\cdot\cdot}+N_0^{\cdot\cdot}\frac{l^4}{4}-\frac{l^3}{2}C_1^{\cdot\cdot}+2\frac{D_x}{D_{\varphi x}}\left[-\frac{l^2}{2}N_0+lC_1\right]=0$$

$$\left[N_0^{\cdot\cdot}-N_0\frac{24}{5l^2}\frac{D_x}{D_{\varphi x}}\right]l=\frac{8}{5}C_1^{\cdot\cdot}-\frac{48}{5l^2}\frac{D_x}{D_{\varphi x}}C_1. \tag{7}$$

Damit haben wir die Diff.-Gl. gefunden, aus welcher wir die unbekannte Funktion C_1 in Abhängigkeit von N_0 ermitteln müssen. Durch den Ansatz:

$$C_1 = (N_0 + f_\varphi)\frac{5}{8}l \tag{8}$$

können wir die Diff.-Gl. noch weiter vereinfachen und den Wert $N_0^{\cdot\cdot}$ beseitigen. Wir erhalten damit folgende Diff.-Gl.:

$$f_\varphi^{\cdot\cdot}-f_\varphi\frac{6}{l^2}\frac{D_x}{D_{\varphi x}}=\frac{6}{5l^2}\frac{D_x}{D_{\varphi x}}N_0 \tag{7a}$$

oder ausführlich geschrieben

$$\frac{\partial}{R\partial\varphi}\left(\frac{\partial f_\varphi}{R\partial\varphi}\right)-f_\varphi\frac{6}{l^2}\frac{D_x}{D_{\varphi x}}+\frac{6}{5l^2}\frac{D_x}{D_{\varphi x}}N_0. \tag{7b}$$

Infolge der Veränderlichkeit von R ist eine allgemeine Lösung dieser Diff.-Gl. unmöglich. Wie im folgenden gezeigt wird, scheint eine Lösung nur für die besonderen Fälle der Kreiszylinderschale und der Cykloidenschale möglich zu sein. Für die im Bauwesen für die Konstruktion der Zeiss-Dywidag-Schalendächer sehr oft benutzten elliptischen Querschnittslinien, die infolge ihrer starken Überhöhung gegenüber der Seillinie eine ausgezeichnete Trägerwirkung von Binderscheibe zu Binderscheibe besitzen, erscheint eine Lösung der Diff.-Gl. infolge der komplizierten Zusammenhänge zwischen dem Krümmungsradius R und dem Winkel φ nicht möglich zu sein. Die nachstehend für die Kreiszylinderschale gegebene Lösung gestattet es uns aber auch, Rückschlüsse auf die Wirkungsweise dieser Dachformen zu machen.

3. Die Lösung der Differentialgleichung für die durch Eigengewicht belastete Zykloidenschale.

Die Zykloidenschale ist für die Schalenbauweise von Bedeutung, weil sie ebenso wie die flache Ellipse gegenüber der Seillinie eine starke Überhöhung aufweist und deshalb eine sehr gute Trägerwirkung besitzt (siehe Fig. 5). Wir betrachten eine Schale konstanter Wandstärke und gleichen Flächengewichtes. Für die Zykloide ist:

$$R = -R_0\cos\varphi,\quad Z = g\cos\varphi,\quad Y = g\sin\varphi,$$

demnach

$$N_\varphi = -gR\cos\varphi = -gR_0\cos^2\varphi,\qquad N_0 = Y+\frac{\partial N_\varphi}{R\partial\varphi} = 3g\sin\varphi.$$

Die Lösung der Diff.-Gl. (7b) ist gegeben durch den Ansatz $f_\varphi = \varkappa g\sin\varphi$. Hiermit ergibt sich

$$\frac{\partial f}{R\,\partial\varphi} = \frac{1}{R_0 \cos\varphi}\,\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial}{R\,\partial\varphi}\left(\frac{\partial f_\varphi}{R\,\partial\varphi}\right) = \frac{1}{R_0\cos\varphi}\left(\frac{\partial^2 f_\varphi}{\partial\varphi^2}\,\frac{1}{R_0\cos\varphi} + \frac{\sin\varphi}{R_0\cos\varphi}\,\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi}\right) = \frac{1}{R_0\cos\varphi}\left(\frac{\partial^2 f_\varphi}{\partial\varphi^2} + \operatorname{tg}\varphi\,\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi}\right)$$

für $f_\varphi = \varkappa g \sin\varphi$ ist $\dfrac{\partial}{R\,\partial\varphi}\left(\dfrac{\partial f\varphi}{R\,\partial\varphi}\right) = \dfrac{1}{R_0\cos^2\varphi}(-\varkappa g\sin\varphi + \varkappa g\sin\varphi) = 0$

und damit geht die Diff.-Gl. (7 b) in eine gewöhnliche Gleichung über.

$$f_\varphi\,\frac{6}{l^2}\,\frac{D_x}{D_{\varphi x}} = -\frac{6}{5\,l^2}\,\frac{D_x}{D_{\varphi x}}\,N_0, \qquad f_\varphi = \varkappa g\sin\varphi = -\frac{N_0}{5}.$$

Damit ergibt sich nach der Gl. (8)

$$C_1 = \left(N_0 - \frac{1}{5}N_0\right)\frac{5}{8}\,l = N_0\,\frac{l}{2}$$

aus der Gl. (4) folgt dann

$$N_{\varphi x} = -x N_0 + C_1 = N_0\left(\frac{l}{2} - x\right),$$

d. h. die Schubkräfte werden in der Trägermitte für $x = 1/2$ zu Null. Daraus folgt, daß bei der einseitig eingespannten Zykloidentonne tatsächlich gar keine

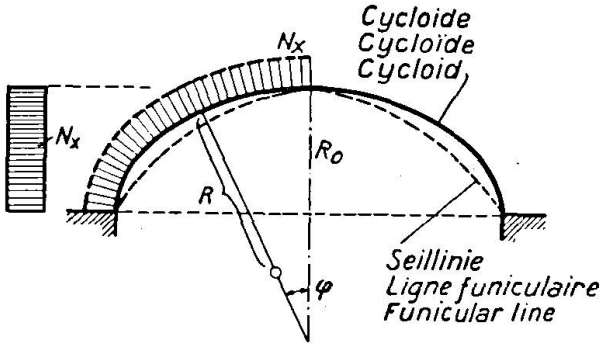

Fig. 5.

Einspannung vorhanden ist, bei dem durchlaufenden Zykloidenrohr arbeiten demnach die einzelnen Felder wie freiaufliegende Träger, ohne sich gegenseitig durch Einspannungsmomente zu beeinflussen. Dieses überraschende Resultat hätten wir schon aus den Gl. (4) ableiten können. Es war $N_0 = 3\,g\sin\varphi$, damit wird $N_0^{\cdot} = \dfrac{\partial N_0}{R\,\partial\varphi} = \dfrac{3\,g\cos\varphi}{R\cos\varphi} = \dfrac{3\,g}{R_0}$. Da N_0 konstant ist, ergibt sich für N_x eine geradlinige Spannungsverteilung, bei der jedoch die Kräfte N_x unabhängig von φ, also für den gesamten Querschnitt konstant sind (siehe Fig. 5) und in gleicher Weise sind auch die u-Verschiebungen für den ganzen Querschnitt von gleicher Größe. Daraus folgt aber, daß Gewölbequerschnitte, die vor der Belastung in einer senkrechten Ebene lagen, dies auch nach der Belastung noch sind. Infolgedessen ergeben sich an den Binderscheiben keine Verdrehungen und deshalb können auch keine Einspannungsmomente entstehen. Voraussetzung für dieses merkwürdige Verhalten der durchlaufenden Zykloidenschale ist naturgemäß, daß der Membranspannungszustand erhalten bleibt und nicht durch die Randbedingungen wesentlich gestört wird. Die

Randbalken bezw. die Auflagerkonstruktion müssen demnach die gleichen u-Verschiebungen aufweisen. In den Randgliedern entstehen aber parabelförmig verlaufende Zugkräfte, die den Druckkräften N_x der Schale das Gleichgewicht halten und infolgedessen können wir die obige Bedingung bezüglich der u-Verschiebung in den Randgliedern nur dann erfüllen, wenn wir in diesen durch eine Vorspannung parabelförmig verlaufende Druckkräfte erzeugen. Ein derartiger vorgespannter Zykloiden-Träger wird demnach nur Durchbiegungen infolge der Schubverzerrung aufweisen. Wenn diese Maßnahme nicht durchgeführt wird, dann ergeben sich wesentliche Randstörungen, die mit Biegungsmomenten in der Schale verbunden sind, und durch die bei der durchlaufenden Tonne eine gewisse, ihrer Größe aber nicht festzustellende Kontinuitätswirkung erzeugt wird. Die für das Zykloidendach von gleichbleibender Wandstärke bei Eigengewichtsbelastung festgestellte Tatsache des Fehlens einer Kontinuitätswirkung gilt naturgemäß nur für Eigengewichtsbelastung, für Wind und Schnee ist diese vorhanden, jedoch ist für diesen Fall die Auflösung der Diff.-Gl. nicht möglich.

4. Die Lösung der Differentialgleichungen für die in der Ringrichtung beliebig belastete Kreiszylinderschale.

Entsprechend den Voraussetzungen für die Ableitung der Diff.-Gl. (7), setzen wir auch hier voraus, daß die Lastfunktion δ_x'''' konstant ist. In der Ringrichtung dagegen können die Belastungen Y und Z ganz beliebig sein. Jede dieser mit φ veränderlichen Belastungen Z und Y entwickeln wir in einer Fourierreihe. Die Fourier-Glieder von Z und Y, die der gleichen Harmonischen angehören, können wir in einem Rechnungsgang zusammenfassen. Diese seien $Z = Z_n \cos n\varphi$, $Y = Y_n \sin n\varphi$. Daraus ergibt sich nach den Gl. (2)

$$N_\varphi = -Za = -Z_n a \cos n\varphi, \quad N_\varphi^{\cdot} = \frac{\partial N_\varphi}{a\,\partial\varphi} = n Z_n \sin n\varphi \quad \text{und damit wird}$$

$$N_0 = Y + N_\varphi^{\cdot} = \sin n\varphi\,(Y_n + n Z_n) \quad \text{bezw.}$$

$$N_0^{\cdot\cdot} = \frac{\partial^2 N_\varphi}{a^2\,\partial^2\varphi} = -\frac{n^2}{a^2}\sin n\varphi\,(Y_n + n Z_n).$$

Wir setzen diese Werte in die Diff.-Gl. (7) ein und erhalten

$$-\sin n\varphi\,(Y_n + n Z_n)\left[\frac{n^2}{a^2} + \frac{24}{5\,l^2}\frac{D_x}{D_{\varphi x}}\right] = C_1^{\cdot\cdot}\frac{8}{5} - C_1\frac{48}{5\,l^2}\frac{D_x}{D_{\varphi x}}.$$

Wir erkennen sofort, daß die Diff.-Gl. durch den Ansatz

$$C_1 = \sin n\varphi\,(Y_n + n Z_n)\,x_0 = N_0\,x_0$$

erfüllt wird, wobei die Größe von C_1 durch den Wert $x = x_0$ gekennzeichnet ist. Aus C_1 ergibt sich

$$C_1^{\cdot\cdot} = -\frac{n^2}{a^2}\sin n\varphi\,(Y_n + Z_n)\,x_0.$$

Setzt man die gefundenen Werte von C_1 und $C_1^{\cdot\cdot}$ in die Diff.-Gl. ein und löst nach x_0 auf, dann erhält man nachstehende Gleichung für x_0

$$x_0 = \frac{l}{8}\,\frac{5\,n^2\left(\frac{l}{a}\right)^2 + 24\,\frac{D_x}{D_{\varphi x}}}{n^2\left(\frac{l}{a}\right)^2 + 6\,\frac{D_x}{D_{\varphi x}}} = \frac{l}{8}\,\frac{5\,n^2\left(\frac{l}{2\,a}\right)^2 + 6\,\frac{D_x}{D_{\varphi x}}}{n^2\left(\frac{l}{2\,a}\right)^2 + 1{,}5\,\frac{D_x}{D_{\varphi x}}}. \tag{9}$$

Aus der Gl. (2) $N_{\varphi x} = -N_0 + C_1 = N_0 (x_0 - x)$ erkennen wir, daß x_0 die Stelle bezeichnet, an der die Schubkräfte und damit die Querkraft zu Null wird. Bei großen Trägerspannweiten l im Verhältnis zu den Krümmungsradien a können die zweiten Glieder des Zählers und des Nenners gegenüber den ersten vernachlässigt werden und es ergibt sich aus der Gl. (9)

$$\frac{l}{a} \to \infty \qquad x_0 \to \frac{5}{8} l, \quad \text{umgekehrt dagegen}$$

$$\frac{l}{a} \to 0 \qquad x_0 \to \frac{l}{2}.$$

Bei großen Spannweiten des Rohres oder des Daches im Verhältnis zu den Krümmungsradien liegt der Nullpunkt der Querkraft ebenso wie bei einem schlanken, einseitig eingespannten Balken bei $x_0 \cong 5/8$, bei kleinen Werten von $l:a$ dagegen liegt der Nullpunkt genau in der Feldmitte bei $x = \frac{l}{2}$ und damit geht jede Kontinuitätswirkung verloren (Fig. 6).

Dieses auffallende Ergebnis hängt damit zusammen, daß mit abnehmenden Binderabständen der Einfluß der Schubverzerrungen auf die Verschiebungen

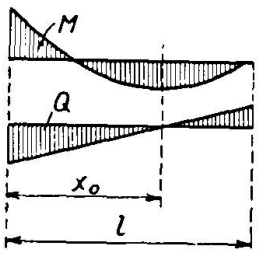

Fig. 6.

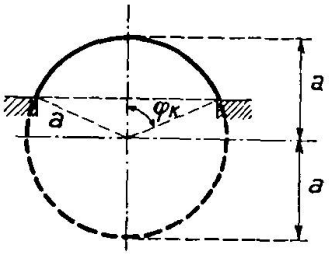

Fig. 7a.

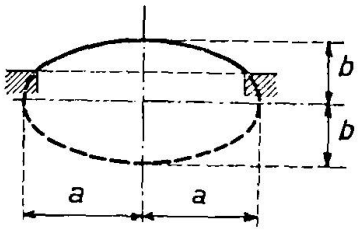

Fig. 7b.

und damit auf die Durchbiegungen wesentlich größer wird als der Einfluß der Balkenkrümmung. Bei der Theorie des durchlaufenden schlanken Trägers kann bekanntlich der Einfluß der Schubverzerrung gegenüber den Formänderungen aus den Biegungskräften vernachlässigt werden, und diese Vernachlässigung ist, wie wir später an Zahlenrechnungen noch sehen werden, vollständig gerechtfertigt. Bei sehr hohen Trägern im Verhältnis zu den Spannweiten ist diese Vernachlässigung jedoch unzulässig, wie z. B. auch bei den hohen Scheiben, die als Träger bei Silobauten etc. benützt werden und bei denen die inneren Kräfte nur aus den Elastizitätsgleichungen mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktionen ermittelt werden müssen.

Bei den zylindrischen Schalen, die als durchlaufende Träger benutzt werden, müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Handelt es sich um freitragende Systeme nach Fig. 1, bei denen eine flache Tonne mit den beiderseitigen Randbalken zusammen als Träger wirkt, dann ist der Einfluß der Schubverzerrungen im Verhältnis zu den Formänderungen aus der Balkenkrümmung sehr gering und es gelten annähernd die üblichen Gleichungen des durchlaufenden Trägers, denn bei diesem Trägersystem beträgt die gesamte aus Schale und Randbalken zusammengesetzte Trägerhöhe h nur ca. $^1/_{10}$ bis $^1/_{12}$ der Spannweite. Handelt es sich dagegen um eine Tonne mit unnachgiebigen Auflagern an den Kämpfern gemäß Fig. 7a, dann ist als Trägerhöhe nicht h, sondern der Durchmesser des Kreiszylinders $2a$ maßgebend und dann darf bei kleinen Verhältnissen $l:a$ der Einfluß der Schubverzerrungen gegenüber den Formänderungen aus der Ver-

krümmung nicht mehr vernachlässigt werden. Stellt man ein derartiges Dach dagegen bei gleicher Konstruktionshöhe h nicht aus einer Kreiszylinderschale, sondern aus einem flachen elliptischen Zylinder gemäß Fig. 7 b her, dann wird die wirksame Trägerhöhe ganz wesentlich kleiner (sie beträgt jetzt $2\,b$) und damit auch der Einfluß der Schubverzerrungen.

Bei der isotropen Schale wird $D_x = D_{\varphi x}$. Beschränken wir uns zugleich auf die erste Harmonische $Z = Z_n \cos\varphi$, $Y = Y_n \sin\varphi$, die einer in der Gewölberichtung gleichbleibenden Eigengewichtsbelastung $Z = g\cos\varphi$, $Y = g\sin\varphi$ entspricht, dann ergibt sich:

$$(9\,\mathrm{a}) \qquad x_0 = \frac{l}{8}\,\frac{24\,a^2 + 5\,l^2}{6\,a^2 + l^2} \qquad \text{für} \quad l \gg a \quad \text{ist} \quad x_0 \to \frac{5}{8}\,l$$

$$l \ll a \qquad x_0 \to \frac{l}{2}.$$

Die Gl. (9) gibt uns noch einen wichtigen Aufschluß über die Kontinuitätsverhältnisse bei den verschiedenen Harmonischen. Je höher die Zahl n der Harmonischen, umso mehr nähern sich die Kontinuitätsverhältnisse denen des schlanken Balkens. Die Zahl n hat hierauf genau den gleichen Einfluß wie das Verhältnis l/a von Trägerspannweite zum Krümmungsradius. Das ist auch leicht verständlich, weil gemäß Fig. 15, 16 bei einer Harmonischen $n > l$ immer nur ein Sektor mit dem Öffnungswinkel π/n mit dem ihm gegenüber liegenden Sektor als Träger zusammenwirkt. Als Träger ist hier nur der Pfeil der beiden Sektoren maßgebend und infolgedessen ist die Trägerhöhe gegenüber dem Durchmesser des Rohres nur sehr gering, so daß der Einfluß der Schubverzerrungen gegenüber den Verkrümmungen stark zurückgeht und die Kontinuitätsverhältnisse sich denen des schlanken Trägers nähern.

Nachdem wir nunmehr aus den Diff.-Gl. (7) die Größe der Funktion C_1 ermittelt haben, können wir die Größe der inneren Kräfte und Verschiebungen angeben, indem wir die gefundenen Werte der Konstanten in die Gl. (4) einsetzen. Da wir für die verschiedenen Harmonischen entsprechend dem Faktor n^2 verschiedene Werte für die Querkrafts-Null-Stelle x_0 gefunden haben, können wir im Gegensatz zu der symmetrisch eingespannten oder freiaufliegenden Schale für die einseitig eingespannte keine geschlossenen Gleichungen für eine beliebige Last in der Ringrichtung angeben. Dies ist nur möglich für die Belastungsglieder der gleichen Harmonischen

$$(10\,\mathrm{a}) \qquad Z = Z_n \cos n\varphi\,, \quad Y = Y_n \sin n\varphi\,.$$

Für jede Harmonische ergeben sich entsprechend den verschiedenen Werten von x_0 andere Kontinuitätsgesetze. Die Gesamtkräfte erhält man durch Summierung der einzelnen Fourier-Glieder. Aus der Lösung der Diff.-Gl. ergab sich: $C_1 = \sin n\varphi\,[Y_n + n\,Z_n]\,x_0 = N_0\,x_0$. Hieraus ergibt sich der Wert von

$$C_2 = -\frac{l^2}{2}\,N_0' + l\,C_1' = -\frac{l^2}{2}\,N_0' + l\,x_0\,N_0' = -\frac{N_0\,l}{2}\,(l - 2\,x_0)\,.$$

[2]) Diese Gleichung für den Sonderfall der ersten Harmonischen der isotropen Schale findet sich auch in dem unter 1 e) angezogenen Buch von W. Flügge auf S. 72. Hieran knüpft Flügge die Bemerkung, daß hier in der bisherigen Schalenliteratur ein Fehler vorliege, womit anscheinend der Satz im Hdb. f. E. B. gemeint ist: „Die Kontinuitätsgesetze bleiben dagegen erhalten.“ Diese von mir gemachte Bemerkung ist absolut richtig, denn es ist für jeden Ingenieur eine selbstverständliche Tatsache, daß die Einspannungsmomente nicht nur von der Krümmung des Balkens, sondern auch von der Schubverzerrung abhängig sind, und daß bei der Theorie des durchlaufenden Trägers diese Vernachlässigung der Schubverzerrung bewußt als bedeutungslos vorausgesetzt wird. Die Kontinuitätsgesetze bleiben aber trotzdem immer erhalten.

Setzt man die Werte der beiden Konstanten C_1 und C_2 in die Gl. (4) ein, dann ergibt sich:

$$N_\varphi = -RZ = -RZ_n \cos n\varphi, \quad u = \frac{N_0^{\cdot}}{D_x} \frac{x^3 - 3l^2x - x_0(3x^2 - 6lx)}{6}$$

$$\text{(10b)} \quad N_{\varphi x} = -N_0(x - x_0), \quad v = -\frac{N_0^{\cdot\cdot}}{D_x} \frac{x^4 - 6l^2x^2 - 4x_0(x^3 - 3lx^2)}{24} - \frac{2N_0}{D_{\varphi x}} \frac{x^2 - 2xx_0}{2}$$

$$N_x = N_0^{\cdot} \frac{x^2 - l^2 - 2x_0(x - l)}{2}, \quad w = +\frac{N_0^{\cdot\cdot\cdot}R}{D_x} \frac{x^4 - 6l^2x^2 - 4x_0(x^3 - 3lx^2)}{24} + \frac{2N_0^{\cdot}R}{D_{\varphi x}} \frac{x^2 - 2xx_0}{2} - \frac{ZR^2}{D_\varphi}$$

Auch hier ergeben sich die Funktionen f_x von v, u, N_x, $N_{\varphi x}$, N_φ wiederum als Ableitungen einer Funktion, deren vierte Ableitung die Lastfunktion δ_x'''' ist, aber die bei w und v auftretende Funktion f_x ist jetzt nicht mehr die Biegelinie des schlanken Balkens, weil sich die Nullstelle der Querkraft x_0 verschoben hat. Im Gegensatz zu der symmetrisch eingespannten Tonne, bei welcher sich die Lage der Nullstelle durch die symmetrischen Einspannungsmomente nicht ändert.

Damit ist nun die Aufgabe für den Zweifeldträger mit gleichen Öffnungen gelöst, da dieser sich aus zwei derartig einseitig eingespannten Tonnen zusammensetzt. Bei beliebig vielen und vor allem bei verschieden großen Spannweiten ist eine Ermittlung der Einspannungsmomente aus den Verschiebungen etwas umständlich. Dieser umständliche Rechnungsgang ist aber gar nicht notwendig, nachdem wir aus der Diff.-Gl. erkannt haben, daß sowohl bei einseitiger wie auch bei beiderseitiger Einspannung und damit auch bei ganz beliebigen Kontinuitätsverhältnissen, die bei den freiaufliegenden Tonnen maßgebenden Spannungsgesetze (gekennzeichnet durch N_0) erhalten bleiben. Wir können also als wichtige Erkenntnis feststellen, daß bei dem Kreiszylinderrohr die Spannungsverteilung unabhängig davon ist, ob es sich um einen freiaufliegenden oder um einen durchlaufenden Balken handelt. Sobald der Krümmungsradius der Schale jedoch veränderlich ist, dann gelten, wie wir aus der Diff.-Gl. erkennen, diese einfachen Gesetze nicht mehr, denn dann gelten für das durchlaufende Rohr, wie wir aus der Gl. (8) $C_1 = (N_0 + f\varphi)\frac{5}{8}$ erkennen, nicht mehr die durch N_0 gekennzeichneten Spannungsgesetze des freiaufliegenden Rohres. f_φ stellt in diesem Fall eine Störungsfunktion dar, deren Verlauf wir nicht kennen, solange wir die Diff.-Gl. (7) für die betreffende Rohrform nicht integrieren können. Bis jetzt ist, wie schon erwähnt, eine Lösung der Diff.-Gl. nur für den konstanten Krümmungsradius, d. h. für das Kreisrohr und für den oben behandelten trivialen Fall des Cykloidenrohres, gelungen.

Wie in den nachfolgenden Abschnitten gezeigt wird, können wir bei dem Kreiszylinderrohr die Einspannungsmomente in sehr einfacher Weise durch ein System von Clapeyron'schen Gleichungen ermitteln. Diese Art der Lösung hat, abgesehen von dem sehr einfachen und übersichtlichen Rechnungsgang, noch den Vorteil, daß wir nicht nur eine Veränderlichkeit der Lastfunktion δ_x'''', sondern auch eine Veränderlichkeit der Schalenstärke längs der Erzeugenden berücksichtigen können. Hierzu stellen wir zunächst für den gewöhnlichen Balken die Clapeyron'schen Gleichungen in Form von Winkelgleichungen auf.

5. Die Clapeyron'schen Winkelgleichungen des gewöhnlichen schlanken Balkens.

Bei einem freiaufliegenden schlanken Balken mit veränderlichem Querschnitt und Trägheitsmoment, belastet durch die Momentenfläche $\mathfrak{M}$, ergeben

sich die beiderseitigen Winkeldrehungen an den Auflagern zu (siehe hierzu Fig. 8)

$$\varphi' = \frac{1}{l}\int_0^l \mathfrak{M}\frac{x_2}{EJ_x}\,dx, \qquad \varphi'' = \frac{1}{l}\int_0^l \mathfrak{M}\frac{x_1}{EJ_x}\,dx. \tag{11}$$

Für den Fall konstanten Trägheitsmomentes und konstanter Belastungen mit parabelförmiger Momentenfläche vereinfachen sich diese Gleichungen wie folgt

$$\varphi' = \varphi'' = q\frac{l^3}{24\,EJ}. \tag{11a}$$

Die Winkeldrehungen infolge eines am linken oder rechten Auflager angreifenden Momentes $M' = 1$ bezw. $M'' = 1$, die wir mit α', β'' bezw. α'', β' bezeichnen, betragen

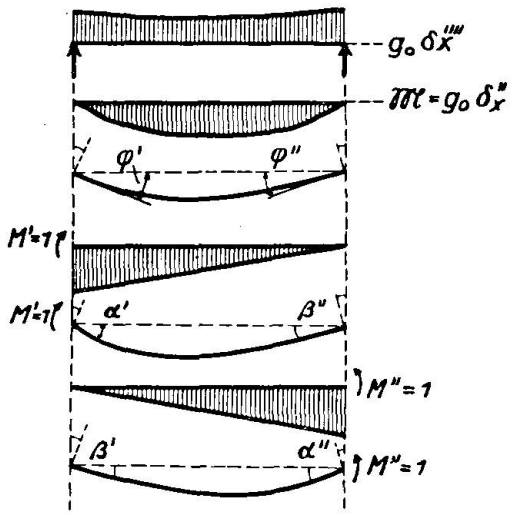

Fig. 8.

$$\alpha' = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{x_2^2}{EJ_x}\,dx \tag{12}$$

$$\alpha'' = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{x_1^2}{EJ_x}\,dx$$

$$\beta' = \beta'' = \beta = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{x_1 x_2}{EJ_x}\,dx.$$

Für den Sonderfall gleichen Trägheitsmomentes erhalten wir

$$\alpha' = \alpha'' = \frac{l}{3\,EJ} \tag{12a}$$

$$\beta' = \beta'' = \beta = \frac{l}{6\,EJ}.$$

Wir betrachten nun die beiden Felder l_r und l_{r+1} eines durchlaufenden Trägers mit den noch unbekannten Stützmomenten M_{r-1}, M_r und M_{r+1}. Bei der Ermittlung der Einspannungsmomente berücksichtigen wir zugleich eine eventuelle Stützensenkung, die wir durch den Sehnenwinkel γ_r ausdrücken (s. Fig. 9). Dieser wird positiv gezählt bei einer nach oben springenden Ecke der Verbindungslinie der Auflager. Aus der Bedingung, daß an der Stütze r sämtliche Winkeldrehungen gleich Null sein müssen, erhalten wir eine Beziehung zwischen den drei aufeinander folgenden Stützenmomenten M_{r-1}, M_r und M_{r+1}

$$M_{r-1}\,\beta_r + 2\,M_r(\alpha_r'' + \alpha_{r+1}') + M_{r+1}\,\beta_{r+1} + \varphi_r'' + \varphi_{r+1}' + \gamma_r = 0. \tag{13}$$

Bei $n-1$ Zwischenstützen ist der Träger $n-1$ fach statisch unbestimmt, zur Ermittlung dieser statisch unbestimmten Größen stehen uns ebenso viel Winkelgleichungen der obigen Art zur Verfügung.

Bei der Aufstellung der Einheitswinkel der Gl. (13) haben wir nur den Einfluß der Verbiegung berücksichtigt und den Einfluß der Schubverzerrung vernachlässigt. Bei den durchlaufenden Schalendächern müssen wir aber diesen Einfluß der Schubverzerrungen mitberücksichtigen. Dies soll in dem nächsten Abschnitt erfolgen.

6. Die Ermittlung der Kontinuitätsgesetze des durchlaufenden Kreiszylinderrohres mit veränderlicher Belastung und veränderlicher Wandstärke mit Hilfe der Clapeyron'schen Winkelgleichungen.

Wir setzen gemäß den Gl. (6) eine Belastung voraus in der allgemeinen Form

$$Z = Z_0 f_{1\varphi} \delta_x'''', \quad Y = Y_0 f_{2\varphi} \delta_x''''.$$

Auch für die verschiedenen Felder des durchlaufenden Rohres können sowohl Belastungen wie auch die Schalenstärken verschieden sein. Die Lastfunktion δ_x'''' gibt uns wieder die Veränderlichkeit der Last längs der Erzeugenden an. Die Funktionen $f_{1\varphi}$ und $f_{2\varphi}$, durch welche die Veränderlichkeit der Belastung in der Ringrichtung gekennzeichnet ist, entwickeln wir in bekannter

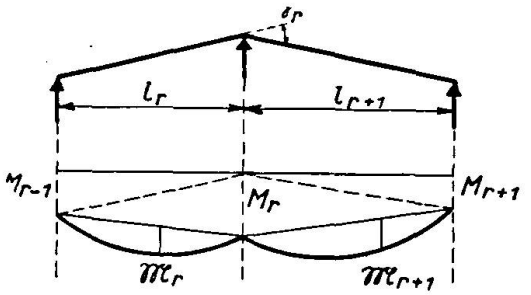

Fig. 9.

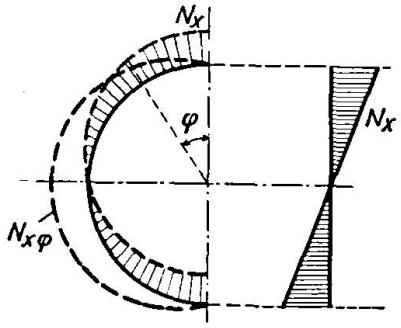

Fig. 10.

Weise nach dem Fourier'schen Lehrsatz. Glieder der gleichen Harmonischen der beiden Funktionen $f_{1\varphi}$ und $f_{2\varphi}$ können wir in einem Rechnungsgang behandeln.

a) Die Lösung für die erste Harmonische.

Die Belastungen für den Fall der ersten Harmonischen lauten:

(14) $$Z = Z_1 \cos\varphi\, \delta_x'''' \quad \text{und} \quad Y = Y_1 \sin\varphi\, \delta_x''''.$$

Der Lastfunktion δ_x'''' entspricht gemäß der Fig. 4 die Querkraftslinie δ_x''' und die Momentenlinie δ_x''.

Setzen wir $Z_1 = Y_1 = g_1$, dann ergibt sich aus der Gl. (14 a) der Fall des durch sein Eigengewicht belasteten Rohres mit veränderlicher Wandstärke, deren Veränderlichkeit jetzt durch die Lastfunktion δ_x'''' gekennzeichnet ist. Die Gleichungen für die Belastungen lauten:

(14 a) $$Z = g_1 \cos\varphi\, \delta_x'''', \quad Y = g_1 \sin\varphi\, \delta_x''''.$$

Setzen wir dagegen $Y = 0$, dann entspricht die in der Richtung der Normalen wirkende Kraft

(14 b) $$Z = Z_1 \cos\varphi$$

entweder einer antimetrischen Windbelastung oder auch der Wasserlast des vollständig wassergefüllten Rohres. Hierbei ist die Lastfunktion $\delta_x'''' = 1$ zu setzen, weil bei diesen beiden Belastungsfällen eine Veränderlichkeit längs x nicht in Frage kommen kann. Wenn die Wasserfüllung zugleich unter einem hydrostatischen Druck steht, dann kommen zu der Belastung der Gl. (14 b) noch drehsymmetrische Radialkräfte hinzu, die aber keinen Einfluß auf die Kontinuität haben, da diese nur durch Ringkräfte aufgenommen werden.

Den Belastungen der Gl. (14) entsprechen nach Gl. (2) oder (5) nachstehende innere Kräfte

$$\text{a)}\quad N_\varphi = -Za = -Z_1 a \cos\varphi\, \delta_x''''$$

$$\text{(14c) b)}\quad N_{x\varphi} = -\int\left(Y + \frac{\partial N_\varphi}{a\,\partial\varphi}\right)dx = \sin\varphi\,(Z_1 + Y_1)\int \delta_x''''\,dx = -N_0\,\delta_x''',$$

$$N_0 = \sin\varphi\,(Z_1 + Y_1)$$

$$\text{c)}\quad N_x = -\int \frac{\partial N_{x\varphi}}{a\,\partial\varphi}\,dx = -\cos\varphi\,\frac{Z_1 + Y_1}{a}\int \delta_x'''\,dx = N_0 \cdot \delta x''.$$

Aus der Gl. (14 c) erkennen wir, daß die dem äußeren Biegungsmoment widerstehenden Kräfte N_x von den $\cos\varphi$ abhängig, d. h. gemäß Fig. 10 proportional

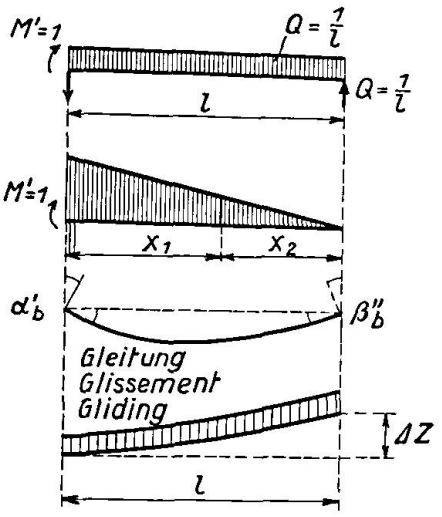

Fig. 11.

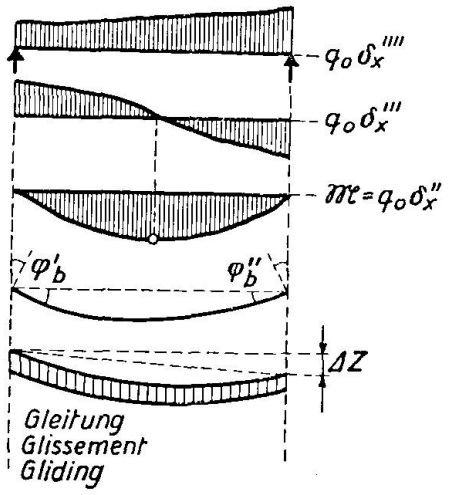

Fig. 12.

dem Abstand von der neutralen Achse sind. Bei der ersten Harmonischen ist also das Navier'sche Geradliniengesetz mathematisch streng gültig, während es bei dem schlanken Balken des Ingenieurwesens zwar sehr genaue Resultate ergibt, aber immer nur eine Hypothese bleibt[3]). Nach dieser Feststellung können wir nun in einfacher Weise die verschiedenen Drehwinkel der Clapeyronschen Winkelgleichungen Gl. (12) aufstellen und daraus die Einspannungsmomente ermitteln. Wir stellen zunächst die Gleichungen für die Winkeldrehungen α', α'' und β bei Berücksichtigung der Schubverzerrung auf. Die Winkeldrehungen setzen sich zusammen aus dem Anteil der Biegung und aus dem Anteil der Gleitung.

$$\alpha' = \alpha_b' + \alpha_g', \qquad \alpha'' = \alpha_b'' + \alpha_g', \qquad \beta = \beta_b + \beta_g.$$

Unter dem Einfluß der Stützmomente $M' = 1$ und $M'' = 1$ ergeben sich nach Fig. 11 die Biegewinkel wie vor zu:

$$\alpha = \frac{1}{l^2}\int_0^l \frac{x_2^2\,dx}{EJ_x}, \quad \alpha'' = \frac{1}{l^2}\int_0^l \frac{x_1^2\,dx}{EJ_x}, \quad \beta' = \beta'' = \beta = \frac{1}{l^2}\int_0^l \frac{x_1 x_2}{EJ_x}\,dx.$$

Hierbei ist I_x das Trägheitsmoment des Kreisrohres $J_x = \pi a^3 d$, wobei bei Eigen-

[3]) Fr. Dischinger: Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens. Intern. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Zürich, 1932.

gewichtsbelastung, wie oben schon dargelegt, d entsprechend der Lastfunktion δ_x'''' veränderlich sein kann. Außer der Biegung müssen wir aber nun auch die Gleitung berücksichtigen. Infolge des Momentes $M' = 1$ oder $M'' = 1$ ergibt sich eine konstante Querkraft $Q = \frac{1}{l}$. Diese Querkraft Q verteilt sich gemäß Gl. (14) über den Ringquerschnitt nach dem Gesetz $N_x = N_{x\varphi_n} \sin\varphi$. Demnach

$$Q = 4\int_0^{\pi/2} N_{x\varphi} \sin\varphi \, a d\varphi = 4 N_{x\varphi_n} a \int_0^{\varphi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \pi a N_{x\varphi_n},$$

wobei $N_{x\varphi_n}$ der Größtwert der Schubkraft in der neutralen Achse für $\varphi = 90°$. Demnach ist $N_{x\varphi_n} = \frac{1}{\pi a l}$.

Aus dem Gleitwinkel $\frac{2 N_{x\varphi_n}}{D_{\varphi x}}$ ergibt sich die zugehörige Durchbiegung zu $\Delta Z = \frac{2}{\pi a l}\int_0^l \frac{\partial x}{D_{\varphi x}}$, wobei die Verzerrungssteifigkeit $D_{x\varphi} = E d$ entsprechend der Veränderlichkeit von d im allgemeinen auch veränderlich ist. Der Drehwinkel infolge der Gleitung, der zu dem Biegungswinkel hinzuzuzählen ist, beträgt $\frac{\Delta Z}{l}$, da wir den Träger um dieses Maß zurückdrehen müssen, damit er wieder auf beiden Auflagern aufruht.

Demnach ergeben sich folgende Einheitsdrehwinkel:

(15a) $$\alpha' = \alpha_b' + \alpha_g' = \frac{1}{l^2}\int_0^l \frac{x_2^2\,dx}{EJ_x} + \frac{2}{\pi a l^2}\int_0^l \frac{dx}{D_{\varphi x}}$$

(15b) $$\alpha'' = \alpha_b'' + \alpha_g'' = \frac{1}{l^2}\int_0^l \frac{x_1^2\,dx}{EJ_x} + \frac{2}{\pi a l^2}\int_0^l \frac{dx}{D_{\varphi x}}$$

(15c) $$\beta = \beta_b + \beta_g = \frac{1}{l^2}\int_0^l \frac{x_1 x_2}{EJ_x}dx - \frac{2}{\pi a l^2}\int_0^l \frac{dx}{D_{\varphi x}}$$

In gleicher Weise werden auch die Drehwinkel φ', φ'' des durch Eigengewicht, Wasser oder Wind belasteten freiaufliegenden Trägers ermittelt. Die gesamte Belastung des Rohres durch Eigengewicht, Wasser oder Wind pro laufendem Träger bezeichnen wir mit $q = q_0\,\delta_x''''$. Dieser Belastung entspricht gemäß Fig. 12 wiederum eine Querkraftlinie δ_x''' und eine Momentenlinie δ_x''.

Die Drehwinkel infolge der Verbiegung betragen wiederum wie vor:

$$\varphi_b' = \frac{1}{l}\int_0^l \mathfrak{M}\,\frac{x_2\,dx}{EJ_x}, \qquad \varphi'' = \frac{1}{l}\int_0^l \mathfrak{M}\,\frac{x_1\,dx}{EJ_x}.$$

Hierzu kommen wieder die Einflüsse aus der Gleitung. Die Schubkraft in der neutralen Faser beträgt nach Gl. (14b) $N_{x\varphi_n} = -N_0\,\delta_x'''$, demnach

$$\varphi_g' = -\varphi_g'' = -2N_0\int_0^l \frac{\delta_x'''}{D_{\varphi x}}dx.$$

Wir erhalten also folgende Drehwinkel

(16a) $$\varphi' = \varphi_b' + \varphi_g' = \frac{1}{l}\int_0^l \mathfrak{M}\,\frac{x_2}{EJ_x}dx - 2N_0\int_0^l \frac{\delta_x'''}{D_{\varphi x}}dx$$

(16b) $$\varphi'' = \varphi_b' + \varphi_g' = \frac{1}{l}\int_0^l \mathfrak{M}\,\frac{x_1}{EJ_x}dx - 2N_0\int_0^l \frac{\delta_x'''}{D_{\varphi x}}dx.$$

Für den Sonderfall konstanter Wandstärke und einer längs x unveränderlichen Belastung q_0 vereinfachen sich die Gleichungen ganz wesentlich, weil wir die Integration leicht durchführen können (s. hierzu auch die Gl. (12a) und (11a)). Bei Berücksichtigung der $I_x = \pi a^3 d$, $D_{xd} = E d$ ergibt sich

$$\alpha' = \alpha'' = \frac{l}{3\pi a^3 E d} + \frac{2}{\pi a l E d} = \frac{l^2 + 6a^2}{3\pi a^3 l E d} \tag{17a}$$

$$\beta = \frac{l}{6\pi a^3 E d} - \frac{2}{\pi a l E d} = \frac{l^2 - 12a^2}{6\pi a^3 l E d} \tag{17b}$$

$$\varphi' = \varphi'' = \frac{q_0 l^3}{24 E J} = q_0 \frac{l^3}{24\pi a^3 \cdot E d}. \tag{18}$$

Wegen der Symmetrie des Trägers fällt bei den Drehwinkeln φ', φ'' der Einfluß der Schubverzerrung heraus. Bei Eigengewichtsbelastung ist $q = 2\pi a g$, für Wasserkraft dagegen $q = \pi a^2 \cdot 1{,}0$.

Für antimetrischen Wind $w = w_0 \cos\varphi$ ergibt sich:

$$q = 4\int_0^{\pi/2} w \cos\varphi \, a \, d\varphi = 4 a w_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi = \pi a w_0 .$$

Nachstehend werden nun für den Zwei- und Dreifeldträger die Einspannungsmomente ermittelt und der Einfluß der Schubverzerrung zahlenmäßig festgestellt.

a) Der Zweifeldträger. $l_1 = m l_2 = m l$.

Aus der Winkelgleichung (12) erhalten wir das unbekannte Stützmoment M:

$$M(\alpha_1'' + \alpha_2') = -\varphi_1'' - \varphi_2'$$

$$M\left[\frac{l_1^2 + 6a^2}{3\pi a^3 l_1 E d} + \frac{l_2^2 + 6a^2}{3\pi a^3 l_2 E d}\right] = -q\frac{l_1^3 + l_2^3}{24\pi a^3 d},$$

für $l_1 = m l_2 = m l$ folgt

$$M = -\frac{q_0}{8}\frac{l^4(1+m^3)}{l^2 m + 6a^2}\frac{m}{m+1} = -\frac{q_0 l^2}{8}\frac{(1+m^3)m}{1+m}\frac{(l/2a)^2}{\left(\frac{l}{2a}\right)^2 + \frac{1{,}5}{m^2}} = \bar{M}\frac{(l/2a)^2}{\left(\frac{l}{2a}\right)^2 + \frac{1{,}5}{m^2}}. \tag{19}$$

Hierbei gibt $\bar{M}$ das Einspannmoment bei Vernachlässigung der Schubverzerrung an. Für den Sonderfall $l_1 = l_2 = 1$ ergibt sich

$$M = -\frac{q_0 l}{8}\frac{(l/2a)^2}{(l/2a)^2 + 1{,}5}. \tag{19a}$$

Hieraus erhalten wir für die verschiedenen Verhältnisse der Trägerlänge l zur Trägerhöhe $2a$ folgende Werte

Tabelle 1.

Für $l/2a =$	0	1	2	4	10	∞	
$M =$	0,00	0,40	0,726	0,912	0,985	1,00	$\bar{M}$

Ermittelt man aus dem Einspannmoment der Gl. (19a) den Nullpunkt x_0 der Querkraft, dann kommt man wieder auf den aus der Diff.-Gl. abgeleiteten Wert x_0 der Gl. (9a).

Die Gl. (19) zeigt uns aber auch, daß bei ungleichen Feldern der Einfluß der Schubverzerrung sehr stark anwächst. Z. B. ergibt sich für $l_1 = 0{,}5\ l$, $m = 0{,}5$

$$M = -\frac{3}{64} q_0 l^2 \frac{(l/2a)^2}{(l/2a)^2 + 6} = \bar{M} \frac{(l/2a)^2}{(l/2a)^2 + 6} \tag{19b}$$

Tabelle 2.

Für $1/2a =$	0	1	2	4	10	∞	
$M =$	0,00	0,143	0,400	0,727	0,833	1,00	$\bar{M}$

In der Fig. 13 ist der Verlauf der Momente für die verschiedenen Verhältnisse $l/2a$ dargestellt. Für $l/2a \to 0$ fehlt jede Kontinuität, und für $l/2a \to \infty$ ergibt sich das Einspannmoment des schlanken Balkens bei Vernachlässigung der Schubverzerrung.

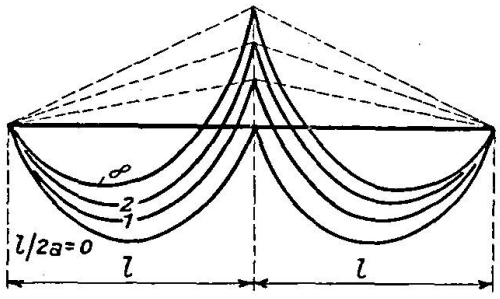

Fig. 13.

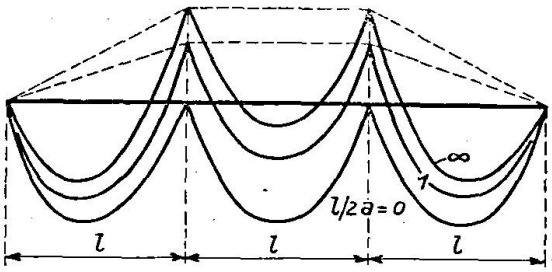

Fig. 14.

β) Der symmetrische Dreifeldträger. $l_1 = m\,l_2 = m\,l$.

Das statisch unbestimmte Einspannmoment folgt aus der Winkelgleichung

$$M(\alpha_1'' + \alpha_2') + M\beta = -\varphi_1'' - \varphi_2', \quad M = -\frac{\varphi_1'' + \varphi_2'}{\alpha_1'' + \alpha_2' + \beta_2}$$

$$\varphi_1' + \varphi_2'' = -q_0 \frac{l_1^3 + l_2^3}{24\pi a^3 Ed} = -q_0 \frac{l^3}{24} \frac{1 + m^3}{\pi a^3 Ed},$$

$$\alpha_1'' + \alpha_2' + \beta = \frac{l_1^2 + 6a^2}{3\pi a^3 l_1 Ed} + \frac{l_2^2 + 6a^2}{3\pi a^3 l_2 Ed} + \frac{l_2^2 - 12a^2}{6\pi a^3 l_2 Ed} = \frac{l^2(3m + 2m^2) + 12a^2}{6m\pi a^3 l Ed}$$

$$M = -\frac{q_0}{4} \frac{l^4(1+m^3)m}{l^2(3m+m^2)+12a^2} = -\frac{q_0 l^2}{4} \frac{1+m^3}{3+2m} \frac{(l/2a)^2}{(l/2a)^2 + \frac{3}{3m+2m^2}} = \bar{M} \frac{(l/2a)^2}{(l/2a)^2 + \frac{3}{3m+2m^2}} \tag{20}$$

Hierbei ist $\bar{M}$ wiederum das Einspannmoment bei Vernachlässigung der Schubverzerrung. Für den Sonderfall $l_1 = l_2 = 1$ ergibt sich

$$M = -\frac{q_0 l^2}{10} \frac{(l/2a)^2}{(l/2a)^2 + 0{,}6} = \bar{M} \frac{(l/2a)^2}{(l/2a)^2 + 0{,}6}. \tag{20a}$$

Der Vergleich mit der Gl. (19b) zeigt, daß beim Dreifeldträger der Einfluß der Schubverzerrung wesentlich geringer ist (gekennzeichnet durch die Zahl 0,6 gegenüber 1,5). Es wird

Tabelle 3.

Für $l/2a =$	0	1	2	4	10	∞	
$M =$	0,000	0,625	0,870	0,965	0,994	1,00	$\bar{M}$

Der Einfluß der Schubverzerrung wächst jedoch, wie die Gl. (20) zeigt, sehr rasch an, wenn die Endfelder kleiner sind als das Mittelfeld. Setzt man $l_1 = 0{,}5\ l_2 = 0{,}5\ l$, dann ist $m = 0{,}5$ und es ergibt sich

$$M = -\frac{q}{128} q_0 l^2 \frac{(l/2a)^2}{(l/2a)^2 + 1{,}5} \tag{20b}$$

Tabelle 4.

Für $l/2a =$	0	1	2	4	10	∞	
$M =$	0,000	0,400	0,726	0,912	0,985	1,00	$\bar{M}$

Der Verlauf der Momente ist in der Fig. 14 dargestellt.

In gleicher Weise lassen sich auch die Einspannmomente für den Vier- oder Fünffeldträger ermitteln, in diesem Falle sind jedoch zwei unbekannte Einspannmomente vorhanden und infolgedessen müssen wir die Winkelgleichungen zweimal ansetzen.

γ) Von Interesse ist vielleicht ein Vergleich mit einem eisernen I-Träger, dessen Trägheitsmoment wir mit J bezeichnen. Es ergibt sich wiederum:

Der Gleitwinkel an der neutralen Faser ergibt sich zu $\gamma_{xg} = \frac{Q}{G}\frac{S_x}{Jd}$, wobei S_x das statische Moment des halben Trägerquerschnittes in Bezug auf die neutrale Achse und d die Stegstärke bedeutet. Demnach ergibt sich für das Einspannungsmoment $M' = 1$ bezw. $M'' = 1$, denen die Querkraft $Q = 1/1$ entspricht:

$$\alpha' = \alpha'' = \frac{l}{3EJ} + \frac{S_x}{GJdl}, \quad \beta = \frac{l}{6EJ} - \frac{S_x}{GJdl}.$$

Für einen Zweifeldträger mit gleichen Öffnungen erhalten wir hieraus das nachstehende Einspannungsmoment:

$$M = -\frac{\frac{q_0 l^3}{24EJ}}{\frac{l}{3EJ} + \frac{S_x}{GJdl}} = -q_0 \frac{l^2}{8} \frac{l^2}{l^2 + 3\frac{E}{G}\frac{S_x}{d}} = \bar{M} \frac{l^2}{l^2 + 3\frac{E}{G}\frac{S_x}{d}} \tag{21}$$

Für die Zahlenrechnung betrachten wir einen I P-Träger mit der Höhe $h = 30$ cm, $I_x = 25\,760$ cm^4, $S_x = 959$ cm^3, $d = 1{,}2$ cm, damit ist $\frac{S_x}{d} = \frac{959}{1{,}2} = 800$ cm^2 $= h^2\ 0{,}89$. Für das Verhältnis des Elastizitätsmoduls zum Gleitmodul setzen wir $\frac{2\,100\,000}{810\,000} = 2{,}3$ und erhalten damit

$$M = \bar{M} \frac{(l/h)^2}{(l/h)^2 + 6{,}15}. \tag{21a}$$

Tabelle 5.

Für $l/a =$	0	1	3	4	10	∞	
ist $M =$	0,000	0,140	0,394	0,722	0,940	1,000	$\bar{M}$

Wir ersehen also bei einem Vergleich mit der Tabelle 1, daß bei einem Breitflanschträger der Einfluß der Schubverzerrungen auf die Einspannungsmomente des durchlaufenden Trägers wesentlich größer ist, als bei einem Schalenträger in Form einer Kreiszylinderschale. Nur ist zu berücksichtigen, daß bei den Schalenträgern meistens das Verhältnis von Spannweite zu Trägerhöhe wesentlich geringer ist als bei einem IP-Träger.

b) Die Lösung für die höheren Harmonischen.

Den Belastungen nach den höheren Harmonischen ($n > 1$)

$$Z = Z_n \cos n\varphi\, \delta_x'''', \qquad Y = Y_n \sin n\varphi\, \delta_x'''' \quad \text{(Fig. 15)}$$

entspricht, wie die nachstehenden Integrationen zeigen, keine tatsächliche Vertikallast, denn es ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} Z \cos\varphi\, a\, d\varphi = Z_n a\, \delta_x'''' \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos\varphi\, d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} Y \sin\varphi\, a\, d\varphi = Y_n a\, \delta_x'''' \int_0^{2\pi} \sin n\varphi \sin\varphi\, d\varphi = 0$$

Die gesamte vertikale Last wird also von der ersten Harmonischen allein getragen. Die Glieder der höheren Harmonischen geben also nur den Einfluß an, der sich aus der Umlagerung der Last entsprechend den Gesetzen der ersten Harmonischen ergibt. Aus der Gl. (9) erkennen wir ohne weiteres, daß bei den höheren Harmonischen, d. h. für die Lastumlagerung, der Einfluß der Schubverzerrungen infolge des Faktors n^2 gegenüber den Verkrümmungen sehr klein wird.

Tabelle 6.

Für $l/2a$	=	0	1	2	3	4	10	∞	
$n = 1$	$x_0 =$	0,500	0,550	0,591	0,608	0,614	0,623	0,625	
$n = 2$	$x_0 =$	0,500	0,591	0,614	0,620	0,622	0,6245	0,625	l
$n = 3$	$x_0 =$	0,500	0,608	0,620	0,6228	0,6245	0,625	0,625	
$n = 1$	$M =$	0,000	0,400	0,726	0,860	0,912	0,985	1,000	
$n = 2$	$M =$	0,000	0,726	0,912	0,960	0,976	0,996	1,000	$\bar{M}$
$n = 3$	$M =$	0,000	0,860	0,960	0,982	0,996	1,000	1,000	

In der vorstehenden Tabelle 6 sind für die drei ersten Harmonihschen $n = 1$ bis 3 bei $\delta_x'''' = 1$ die Werte der Querkraftsnullstelle x_1 für den symmetrischen Zweifeldträger für eine isotrope Schale angegeben. Für $D_x = D_{x\varphi}$ ergibt sich aus der Gl. (9)

$$x_0 = \frac{l}{8} \frac{5n^2 (l/2a)^2 + 6}{n^2 (l/2a)^2 + 1{,}5}$$

und daraus ergibt sich nach der Fig. 6 die Größe des Einspannungsmomentes zu

$$M = -q_0 \frac{l}{2} (2x_0 - l) = -q_0 \frac{l^2}{8} \frac{8x_0 - 4l}{l} = \bar{M} \frac{8x_0 - 4l}{l},$$

hierbei ist $\bar{M}$ das Moment des schlanken Balkens bei Vernachlässigung der Schubverzerrung. Der Faktor $\frac{8x_0 - 4l}{l}$ gibt die Abminderung des Einspannungsmomentes infolge der Schubverzerrung an und demgemäß muß er für $x_0 = \frac{5}{8} l$ gleich 1 werden.

Die Tabelle zeigt, daß bei den Harmonischen $n \geqq 2$ der Einfluß der Schubverzerrung schon sehr gering wird. Die sich gemäß der obigen Tabelle ergebenden Einspannungsmomente M weichen von denen des schlanken Balkens ohne Schubverzerrung M bei $l/2a \geqq 2{,}0$ nur noch um Prozente ab. Der Begriff des Biegungsmomentes bezw. des Einspannungsmomentes muß bei den höheren

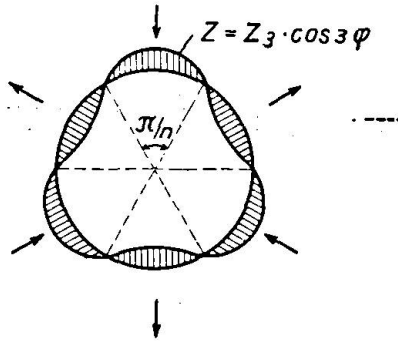

Fig. 15.

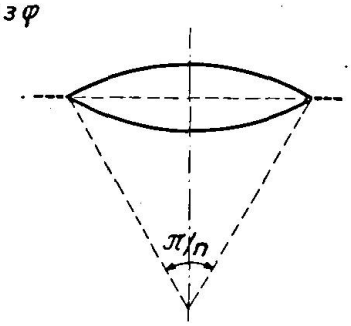

Fig. 16.

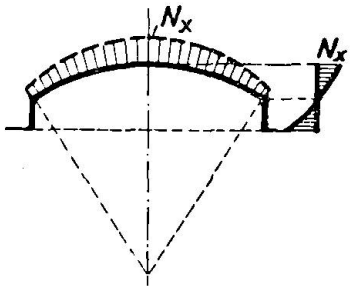

Fig. 17.

Harmonischen noch etwas genauer definiert werden, denn wir haben oben schon gesehen, daß den höheren Harmonischen gar keine höhere Last entspricht. Jedoch bilden bei diesen höheren Harmonischen, wie ich schon im Hdb. f. E. B. gezeigt habe, je zwei sich gegenüber liegende Sektoren nach Fig. 16 einen gemeinsamen Träger, dessen neutrale Achse in der Sehne dieser Sektoren liegt. Diesen beiden Sektoren entspricht aber eine senkrechte Last und damit auch ein Biegungsmoment. Der ganze Ring besteht aus n derartigen flachen Trägern, deren senkrecht zusammengefaßte Lasten sich gegenseitig aufheben. Da diese flachen Kreissegmentträger nur eine geringe Konstruktionshöhe besitzen, muß, wie auch die Gl. (9) zeigt, der Einfluß der Schubverzerrung auf die Einspannungsmomente klein werden.

Selbstverständlich lassen sich auch für den Fall der höheren Harmonischen die obigen Winkelgleichungen für die Ermittlung der Einspannungsmomente bei mehreren Feldern aufstellen. Der Raumersparnis wegen will ich jedoch darauf verzichten, insbesondere da wir aus den Diff.-Gl. schon die notwendigen Rückschlüsse ziehen können, die nachstehend nochmals kurz zusammengefaßt werden.

Durch die erste Harmonische wird die gesamte Last der Kreiszylinderschale getragen. Bei ihr ergibt sich eine wesentliche Verringerung der Einspannungsmomente infolge der Schubverzerrung. Diese Verringerung ist bei der Kreiszylinderschale aber kleiner wie bei einem gewöhnlichen IP-Träger. Durch die höheren Harmonischen wird im Ringquerschnitt nur eine Umlagerung der Last gegenüber der ersten Harmonischen bewirkt. Je zwei gegenüberliegende Sektoren mit den Öffnungswinkeln π/n bilden einen gemeinsamen flachen Träger, die Sehne der beiden Kreissegmente bildet hierbei die neutrale Achse. Insgesamt ergeben sich n derartige Träger, deren senkrechte Gesamtlast jedoch gleich Null ist. Die Kontinuitätsverhältnisse bei diesen höheren Harmonischen

liegen schon sehr nahe bei denen des schlanken Balkens ohne Schubverzerrung, und zwar umso mehr, je größer die Spannweite l im Verhältnis zur Trägerhöhe $2a$ und je höher die Harmonische ist. Wir wollen nun nachstehend die gewonnenen Erkenntnisse noch auf die freitragenden Zeiss-Dywidag-Schalendächer anwenden.

7. Die Kontinuitätsverhältnisse bei den freitragenden Zeiss-Dywidag-Schalentonnen.

Für die am Kämpfer unterstützten Kreiszylinderschalen, in denen im wesentlichen ein Membranspannungszustand wirkt, ist, wie ich schon oben auseinandergesetzt habe, entsprechend der Fig. 7a der ganze Rohrdurchmesser als Trägerhöhe maßgebend. Es gelten hierfür also die im Abschnitt 6 ermittelten Formeln und Tabellen, wobei die erste Harmonische für die Kontinuitätsverhältnisse ausschlaggebend ist. Bei einer freitragenden Tonne mit Randgliedern ist dagegen nicht die erste Harmonische, sondern die zweite oder dritte für die Kontinuitätsverhältnisse maßgebend und infolgedessen ergeben sich für diese durchlaufenden Tonnen fast die gleichen Kontinuitätsverhältnisse wie bei den schlanken Balken. Eine strenge Lösung unter Berücksichtigung der Biegungsmomente in der Gewölberichtung ist nicht möglich, denn schon bei der freiaufliegenden Tonne ergeben sich sehr umfangreiche und schwierige Entwicklungen. Das ist aber auch gar nicht notwendig, weil die Verteilung der Biegungsmomente in der Gewölberichtung auf die Kontinuitätsverhältnisse annähernd ohne jeden Einfluß ist. Die Größe der Einspannungsmomente ist vor allem abhängig von dem Verhältnis der Schubkräfte in der neutralen Achse zu den die äußeren Biegungsmomente aufnehmenden N_x-Kräften. Für eine derartige freitragende, über mehrere Felder durchlaufende Schalentonne ergeben sich N_x-Kräfte gemäß der Fig. 17. Die neutrale Achse liegt hierbei je nach der gewählten Randträgerhöhe etwas über oder unter dem Kämpfer. Das Spannungsdiagramm der N_x-Kräfte ist also ganz ähnlich dem einer höheren Harmonischen. Diese Schalendächer werden im allgemeinen mit Öffnungswinkeln von 2.30° bis 2.45° ausgeführt, so daß der Verlauf der N_x-Kräfte dem der Harmonischen $n = 2$ bis $n = 3$ entspricht. Die Einspannungsmomente werden demnach bei einem Verhältnis $l/2a \geqq 2$ nur bis höchstens 10 % vermindert. Da bei den negativen Stützmomenten die Schale auf Zug beansprucht wird, ist dadurch eine etwas größere Sicherheit gegenüber Haarrissen gegeben. Das ist umso mehr wünschenswert, weil zu diesen Zugspannungen aus den negativen Momenten noch die Zugspannungen aus den Schubkräften $N_{x\varphi}$ hinzukommen. An den Stellen der größten Feldmomente ergeben sich bei einer Vernachlässigung der Schubverzerrung etwas zu kleine Biegungsmomente. Für diese positiven Biegungsmomente ist der Fehler jedoch ohne jede Bedeutung. Außerdem kann er durch geringe Zulagen an Zugeisen entsprechend den obigen Formeln und Tabellenwerten leicht ausgeglichen werden.

Zusammenfassung.

Bei der Theorie des durchlaufenden schlanken Balkens werden die Einflüsse der Schubverzerrung auf die Größe der Einspannungsmomente bewußt als sehr klein vernachlässigt. Bei dem durchlaufenden ausgesteiften Rohr oder den zylindrischen Zeiss-Dywidag-Schalen darf man diese Einflüsse ohne weiteres nicht vernachlässigen. In der vorstehenden Arbeit wird ein Verfahren zur Ermittlung dieser Einflüsse in einer ganz allgemeinen Form entwickelt und die Einflüsse werden an Zahlenbeispielen nachgewiesen. Hierbei wird

auch gezeigt, daß in den Grenzfällen sehr kleiner Trägerspannweiten im Verhältnis zu den Rohrdurchmessern die Kontinuitätserscheinungen ganz wegfallen.

Résumé.

Dans la théorie de la poutre continue élancée on néglige les influences des déformations dues aux efforts tranchants sur la grandeur des moments d'encastrement car on sait que ces influences sont très petites. Dans le cas du tuyau continu renforcé ou dans le cas des voiles cylindriques Zeiss-Dywidag on ne peut pas négliger sans autre ces influences. Dans le présent travail l'auteur développe un procédé, dans une forme tout-à-fait générale, pour la détermination de ces influences et il montre ces influences par quelques exemples numériques. L'auteur démontre encore que dans le cas limite de portées très faibles par rapport au diamètre des tuyaux, l'effet de continuité disparaît complètement.

Summary.

The theory of slender continuous beams purposely neglects the influences of deformation due to shear, since they are very small. These influences, however, cannot be neglected in the case of continuous stiffened tubes or cylindrical Zeiss-Dywidag shells. In the treatise following, a general procedure for determining these influences is given and the influences themselves are shown by examples. It is also shown that continuity conditions entirely disappear for boundary cases of small spans in relation to the tube diameter.