

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 4 (1936)

**Artikel:** Die Methode der sukzessiven Annäherung bei der Berechnung von vielfach statisch unbestimmten Systemen

**Autor:** ališev, K.A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-5080>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **DIE METHODE DER SUKZESSIVEN ANNAHERUNG BEI DER BERECHNUNG VON VIELFACH STATISCH UNBESTIMMTEN SYSTEMEN.**

**LA MÉTHODE D'ITÉRATION POUR LE CALCUL SYSTÈMES  
HYPERSTATIQUES.**

**THE METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATION FOR THE  
ANALYSIS OF STATICALLY UNDETERMINED SYSTEMS.**

Prof. Dr. K. A. ČALIŠEV, Zagreb.

## **Vorrede.**

Ing. M. F. Fornerod (Schweiz. Bauzeitung No. 19, 4. November 1933) erklärt eine Methode der algebraischen Momentenverteilung von Prof. Hardy Cross<sup>1)</sup> auf Grund einer Arbeit von Prof. L. E. Grinter<sup>2)</sup>. Diese Methode hat große Ähnlichkeit mit der von den Amerikanern bei der Berechnung der Nebenspannungen infolge steifer Knoten längst gebrauchten Methoden<sup>3)</sup>. Ich benütze sie für die Berechnung der Rahmenträger schon seit 1922<sup>4)</sup> und will sie hier kurz beschreiben. Zunächst wird die Verwendung der Methode der sukzessiven Annäherung zur Berechnung der Nebenspannungen gezeigt und zwar zur Klärung der Frage des Einflusses der Verstärkung der Stäbe durch die Knotenbleche. Ferner wird die Berechnung der Rahmenträger betrachtet.

## **Einleitung.**

Über die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme besteht eine sehr umfangreiche Literatur. Eine genaue Berechnung solcher Systeme ist tatsächlich sehr wichtig, sie erfordert jedoch eingehende statische Kenntnisse. Viele theoretisch sehr gute Lösungen sind indessen für die Anwendung zu kompliziert. Vereinfachte angenäherte Lösungen sind anderseits nicht immer zuverlässig. Als erste Stufe einer Annäherung an eine genauere Lösung können aber angenäherte Lösungen oft mit Vorteil verwendet werden. Die Methode der sukzessiven Annäherung gestattet bei minimalem Zeitaufwand die Entwicklung einer Berechnung bis zu jedem gewünschten Grad der Genauigkeit.

## **Die Berechnung der Nebenspannungen bei Berücksichtigung der Einspannung der Stäbe durch die Knotenbleche.**

Die übliche Berechnung der Stabkräfte in Fachwerken ist nur eine angenäherte. Sie kann als erste Stufe der Annäherung an die genauere Lösung dienen, wie in den bekannten Methoden von Engesser-Manderla und Mohr.

<sup>1)</sup> Transaction Am. Soc. C. E. Vol. 96 (1932).

<sup>2)</sup> Proceeding Am. Soc. of C. E. Vol. 59 (1933).

<sup>3)</sup> J. A. L. Waddell, Bridge Engineering, 1916.

<sup>4)</sup> Tehnički List N. 1, 2, 1922, T. L. N. 17 bis 21, 1923.

(Ing. N. Nekrasoff vergleicht in seiner Arbeit vom Jahre 1904 die direkte Lösung der Aufgabe mit den Lösungen verschiedener angenäherter Methoden; er wählt aber dabei Fachwerke mit einer reduzierten Zahl von Knotenpunkten.)

Der Gang der Arbeit zur Berechnung eines vielfach statisch unbestimmten Systems nach der Methode der sukzessiven Annäherung ist folgender: Man berechnet die Stabkräfte nach den üblichen Verfahren. Dann ermittelt man die Längenänderungen der Stäbe und die dadurch verursachten Winkeländerungen zwischen je zwei Nachbarstäben in jedem Knotenpunkte unter Voraussetzung von reibungslosen Gelenken. Da sich die Winkel zwischen den Tangenten an den Enden der zusammenlaufenden Stäbe bei starren Knoten nicht ändern dürfen, müssen sich die Stäbe verbiegen. Auf jeden Stab wirken an den Enden Einspannmomente, die sich durch die Neigungsänderung der Tangenten an den Stabenden ausdrücken lassen. Die letzteren kann man nach Mohr durch den Knotendrehwinkel und durch die gegebene Winkeländerung zwischen den Stabrichtungen ausdrücken. Manderla verwendet hierzu den Neigungswinkel der Tangente irgend eines Stabes und die gegebenen Winkeländerungen.

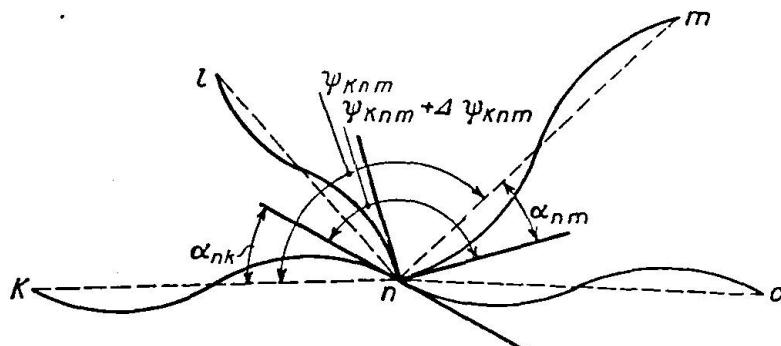


Fig. 1.

Wir bezeichnen nach Fig 1:

Die Winkeländerung zwischen den Stäben  $n k$  und  $n m$  mit  $\Delta \psi_{k n m}$ ,  
den Neigungswinkel der Tangente am Ende des Stabes  $n m$  mit  $\alpha_{n m}$ ,  
den Elastizitätsmodul mit  $E$ ,  
die Stablänge mit  $l$ ,  
das Einspannmoment am Ende  $n$  des Stabes  $n m$  mit  $M_{n m}$ .

Als positiver Drehsinn gilt der Uhrzeigersinn. Dann ist

$$M_{n m} = \frac{2 E J}{l} (2 \alpha_{n m} + \alpha_{m n}) \quad (1)$$

und nach Manderla

$$\alpha_{n m} = \alpha_{n k} - \Delta \psi_{k n m} \quad (2)$$

Für jeden Knotenpunkt läßt sich die Unbekannte  $\alpha_{n k}$  so bestimmen, daß die Gleichgewichtsbedingung für jeden Knoten erfüllt wird, d. h.

$$\sum M_{n m} = 0 \quad (3)$$

Man erhält also als Lösung soviele Gleichungen, als Knotenpunkte vorliegen. Nachdem die Gleichungen (3) gelöst sind, berechnet man die Querkräfte der Stäbe und läßt diese als Belastung in den Knoten wirken. Es folgen daraus für die Stabkräfte erste Korrekturwerte, die die angenäherten Stabkräfte verbessern. Mit den verbesserten Werten berechnet man erneut die Deformationen des Fachwerkes. Diese Rechnungsfolge kann bis zur Erreichung einer

beliebigen Genauigkeit fortgesetzt werden. Dabei ist die Auflösung der Gleichungen (3), d. h. die Berechnung der Einspannmomente der Stäbe in den Knoten bei gegebenen Winkeländerungen zwischen den Stabrichtungen das zeitraubendste. Gerade diese Aufgabe läßt sich mit Hilfe der Methode der sukzessiven Annäherung ganz einfach lösen (vergl. das oben zitierte Handbuch von Waddell).

Wir untersuchen jetzt die Versteifung der Stäbe durch die Knotenbleche. Die Stabenden seien auf die Länge  $k l$  unendlich steif. Anstelle der Gleichung (1) erhalten wir:

$$M_{nm} = \frac{2aEJ}{l} (b \alpha_{nm} + \alpha_{mn}) \quad (4)$$

$$\text{wo } a = \frac{1 - 6k^2}{1 - 8k + 24k^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{2(1 - 3k - 3k^2)}{1 - 6k^2}.$$

Da  $\alpha$  und  $\Delta\psi$  sehr kleine Größen sind, führen wir der Einfachheit halber die Größen

$$N = 2aE 10^{-3} \alpha$$

$$\text{und} \quad K = 2aE 10^{-3} \Delta\psi \quad \text{ein.}$$

Die obigen Gleichungen lauten dann:

$$N_{nm} = N_{nk} - K_{knm} \quad (5)$$

$$M_{nm} = \frac{J}{l} (b N_{nm} + N_{mn}) \cdot 10^3 \quad (6)$$

$$\sum \frac{J}{l} (b N_{nm} + N_{mn}) = 0 \quad (7)$$

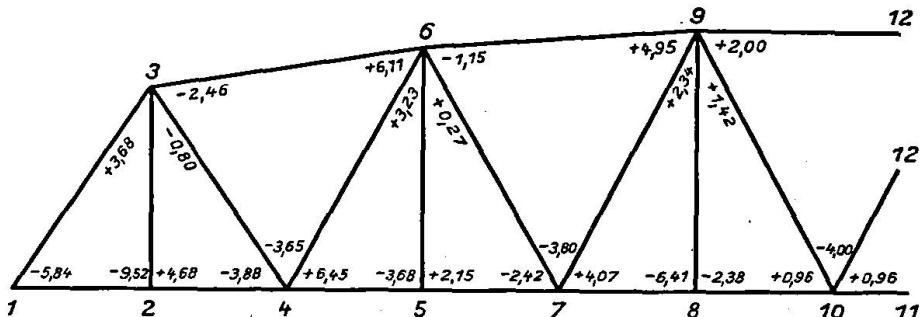


Fig. 2.

Die Summe erstreckt sich über alle Stäbe am  $n$ -ten Knoten. Die Berechnung der Unbekannten  $N$  und damit nach Gl. (6) der Momente an den Stabenden erfolgt mit sukzessiver Annäherung nach dem bei Waddell beschriebenen Schema. Der Rechnungsgang wird am Beispiel der Elbbrücke bei Torgau gezeigt.

Auf Grund dieses Beispiels äußert Dr. Leitz<sup>5)</sup> die Meinung, daß die Versteifung der Stäbe durch Knotenbleche die Momente und Nebenspannungen im Verhältnis der theoretischen Länge zur freien Stablänge vergrößert. Im erwähnten Beispiel ist das Verhältnis 1,2; somit ist  $k = \frac{1}{12}$ ,  $b = 1,6$  und  $a = 1,92$ .

Wir berechnen die Größe  $K = E \Delta\psi \cdot 10^{-3}$  und multiplizieren sie mit  $2a = 3,84$ . (In Fig. 2 in den Ecken des Fachwerkes eingetragen.) Die An-

<sup>5)</sup> Der Eisenbau 1917, S. 131.

fangswerte für  $N$  werden grob geschätzt, indem die  $K$ -Werte auf die beiden stärkeren Stäbe jedes Knotens im umgekehrten Verhältnis zu ihrer Steifigkeit  $\left(\frac{J}{l}\right)$  verteilt werden.

$$N'_{nk} = K_{kno} \frac{\left(\frac{J}{l}\right)_{no}}{\left(\frac{J}{l}\right)_{no} + \left(\frac{J}{l}\right)_{nk}} \quad (8)$$

So erhält man zum Beispiel für den 4. Knoten:

$$K_{245} = -3,88 - 3,65 + 6,45 = -1,08$$

$$N'_{42} = -1,08 \frac{101}{101 + 76} = -0,6$$

Nach Gl. (5) ist

$$N'_{43} = -0,6 - (-3,88) = 3,28$$

$$N'_{46} = 3,28 - (-3,65) = 6,93$$

$$N'_{45} = 6,93 - 6,45 = 0,48.$$

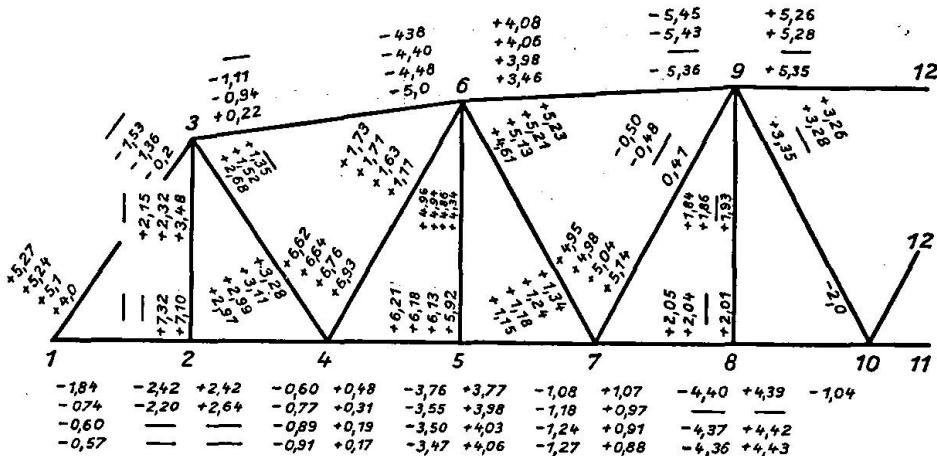


Fig. 3.

Die so berechneten  $N$ -Werte sind in Fig. 3 eingeschrieben. Mit Hilfe der Gl. (6) berechnet man die Momente  $M'_{nm}$  an den Stabenden. Diese Momente (in  $m t$ ), die den grob gewählten Winkeln  $N$  entsprechen, finden sich in Tabelle I, 3. Spalte. In der gleichen Spalte ist die Summe der Momente für einen Knoten ausgerechnet, die natürlich von 0 verschieden sein wird. Der Unterschied zwischen den Werten  $N$  und  $N'$  sei mit  $\Delta N$  bezeichnet. Aus Gl. (7) erhält man alsdann:

$$\Delta N_n b \sum \frac{J}{l} + \sum \Delta N_m \frac{J}{l} + \sum M'_{nm} = 0. \quad (8a)$$

Da der Koeffizient der Unbekannten  $\Delta N_n$  bedeutend größer ist als bei den andern Unbekannten  $\Delta N$ , werden diese Gleichungen gut konvergieren.

Die Werte  $\frac{J}{l}$  und  $b \sum \frac{J}{l}$  finden sich in Tabelle I, Spalte 2. Es empfiehlt sich, in jenem Knoten zu beginnen, für den größere Korrekturen zu erwarten sind. In unserem Falle ist es Knoten 1, für den

Tabelle I.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Bezeichnung des Stabes	$\frac{J}{l}$	1. Annäherung			2. Annäherung			3. Annäherung			$\frac{M_{mn}^{IV}}{M_{mn}^0}$		
		$M'_{mn} = \frac{J}{l} (1,6 N'_{mn} + N'_{mn})$	$\Delta M'_{mn} = \frac{J}{l} \Delta N'_{mn}$	Verbesserung $\Delta N'$	$M''_{mn} = \frac{J}{l} (1,6 N''_{mn} + N''_{mn})$	$\Delta M''_{mn} = \frac{J}{l} \Delta N''_{mn}$	Verbesserung $\Delta N''$	$M'''_{mn} = \frac{J}{l} (1,6 N'''_{mn} + N'''_{mn})$	$\Delta M'''_{mn} = \frac{J}{l} \Delta N'''_{mn}$	Verbesserung $\Delta N'''$	$M''''_{mn} = \frac{J}{l} (1,6 N''''_{mn} + N''''_{mn})$	$M''''_{mn} = \frac{J}{l} (1,6 N''''_{mn} + N''''_{mn})$	$k = 0$
1-2	76,4	-410	-		-258	-		-241	-		-238	156	1,51
1-3	34,4	+213	-	+1,1	+230	-		+236	-		+238	156	1,51
	177	-197			- 28			- 5			0		
2-4	76,2	+250	-13		+264	-8		+255	-2		+252	171	1,47
2-3	4,35	+ 65	- 5	+0,22	+ 60	- 1		+ 60	-		+ 60	38	1,58
2-1	76,4	-436	+ 84		-326	+11		-315	+ 2		-313	210	1,49
	251	-121	-55		- 2	0		0	0		- 1		
3-1	34,4	+127	+ 38		+101	+ 5		+ 96	- 1		+ 97	44	2,20
3-2	4,35	+ 55	-		+ 48	-		+ 47	-		+ 47	27	1,74
3-4	7,56	+ 57	-		+ 42	-		+ 39	0		+ 39	24	1,62
3-6	29,4	-137	-		-176	-		-182	-		-182	96	1,90
	121	+102	+140		+ 15	+20		0	- 1		+ 1		
4-5	101,0	-303	-		-308	-		-323	-		-323	174	1,85
4-6	15,4	+188	+ 8		+191	-		+190	-		+189	117	1,61
4-3	7,56	+ 60	- 8	-0,17	+ 49	- 1	-0,12	+ 46	-	-0,02	+ 46	29	1,58
4-2	76,2	+111	-		+107	-		+ 93	-		+ 90	27	3,33
	320	+ 56	+56		+ 39	+38		+ 6	-		+ 2		
5-7	101,0	+500	-10		+525	-6		+526	-3		+528	355	1,45
5-6	1,18	+ 16	0	+0,21	+ 17	0	+0,05	+ 17	-	+0,03	+ 17	10	1,70
5-4	101,0	-558	-17		-542	-11		-546	-2		-543	364	1,49
	325	- 42	-69		0	-17		- 3	- 8		+ 2		
6-3	29,4	-229	-34		-239	-5		-240	-		-239	155	1,54
6-4	15,4	+132	-		+144	-2		+144	0		+144	76	1,9
6-5	1,18	+ 15	-	+0,52	+ 14	-	+0,08	+ 14	0	-0,02	+ 14	9	1,5
6-7	3,7	+ 32	-		+ 35	-		+ 35	-		+ 35	21	1,66
6-9	41,9	+ 8	-		+ 42	-		+ 44	- 1		+ 45	49	0,92
	147	- 42	-76		- 4	-11		- 3	- 4		- 1		
7-8	103,9	-276	-		-296	-		-303	-		-306	142	2,16
7-9	10,6	+ 82	-		+ 80	-		+ 80	-		+ 79	52	1,5
7-6	3,7	+ 25	+ 2	-0,1	+ 26	-	-0,06	+ 26	-	-0,03	+ 26	14	1,85
7-5	101,0	+206	-		+211	-		+207	-		+205	76	2,7
	350	+ 34	+36		+ 21	-		+ 10	-		+ 4		
8-10	103,9	+624	-		-	-		+626	- 3		+628	422	1,48
8-9	1,12	+ 6	-		-	-		+ 5,8	-		+ 5,8	3	1,9
8-7	103,9	-624	-10		-	6	+0,03	-632	-	+0,01	-634	426	1,48
	335	+ 6	-4		-	-10		? 0	- 3		? 0		
9-6	41,9	-215	+22		-	+ 3		-194	-		-195	151	1,29
9-7	10,6	+ 47	- 1		-	-		+ 45	-		+ 44	23	1,9
9-8	1,12	+ 6	-		-	-	-0,07	+ 5,7	-	-0,02	+ 5,6	3	1,9
9-10	3,59	+ 12	-		-	-		+ 12	-		+ 11,5	7	1,5
9-12	41,9	+134	-		-	-		+133	-		+132	118	1,1
	117	- 16	+ 5		-	+ 8		+ 2	-		- 1,9		
10-8	103,9	-	-		-	-		-	-		+286	127	2,2
10-9	3,59	-	-		-	-		+ 0,2	- 1,8		+ 0,2	1,8	0,2

$$\Delta N'_1 = - \frac{-197}{177} = + 1,1$$

ist. Auf Grund der Korrektur  $\Delta N'_1$  ändert die Summe der Momente bei benachbarten Knoten um Beträge  $\frac{J}{l} \Delta N'_1$ . Diese Änderungen werden in Spalte 5 der Tabelle eingetragen.

Auf diese Weise gehen wir von Knoten zu Knoten und berechnen die erste Korrektur  $\Delta N'$ . Die neuen Werte von  $N$  erhält man zu  $N'' = N' + \Delta N'$ , die in Fig. 3 eingetragen sind. Die entsprechenden Momente bestimmen sich nach Gl. (6) zu

$$M''_{nm} = \frac{J}{l} (1,6 N''_{nm} + N''_{mn})$$

und sind in Tabelle I, Spalte 6, eingetragen. Die Summe der Momente wird wieder von 0 verschieden sein, jedoch sind die Differenzen bedeutend kleiner geworden. In ähnlicher Weise berechnen wir die zweite Korrektur  $\Delta N''$  usw. Die Berechnung kann fortgesetzt werden, bis die Forderung  $\sum M = 0$  erfüllt

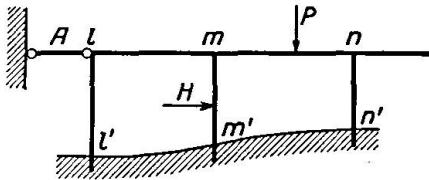


Fig. 4 a.

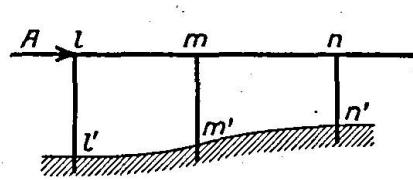


Fig. 4 b.

ist, oder bis die Änderung der Momente zwischen zwei aufeinanderfolgenden Berechnungen ein zulässig kleines Maß erreicht hat. Für praktische Bedürfnisse genügt in der Regel schon die erste Korrektur. Wir haben die Berechnung bis zur 4. Näherung durchgeführt, also drei Korrekturen berechnet. Der größte Fehler des Momentes für eine Korrektur beträgt ca. 8 %, d. h. ca. 20 mt, was einer Spannung von  $\sigma = 12 \text{ kg/cm}^2$ , d. h. ca. 1,5 % der zulässigen Spannung ( $870 \text{ kg/cm}^2$ ) entspricht. Der Fehler wird noch kleiner, wenn man die letzte Summe der Momente proportional zu den Größen der Momente verteilt.

In Spalte 13 sind die Momente eingetragen, die sich bei Vernachlässigung der Verstärkung der Stäbe durch Knotenbleche ergeben, d. h.  $k = 0$  gesetzt wird. Dann wird  $b = 2$  und  $a = 1$ . In diesem Falle ist die Konvergenz noch besser, da der Koeffizient  $b$  größer ist.

### Berechnung der mehrstieligen Rahmen.

Im allgemeinen erleiden die Knoten von Rahmenkonstruktionen bei der Deformation infolge der äußeren Lasten nicht nur Drehungen, sondern auch Verschiebungen. Das Auftreten solcher Verschiebungen kann verhindert werden, indem man einen Knoten, z. B. in Fig. 4 a den ersten Knotenpunkt, vermittelst des Stabes  $A$  (ungefähr in Richtung der Verschiebungsmöglichkeit) mit einem festen Punkt verbindet. Die Stabkraft  $A$  ist gleich der Summe der Querkräfte in den Stielen. Da in Wirklichkeit der Stab  $A$  nicht existiert, so muß dem Belastungszustand der Fig. 4 a noch der Belastungszustand der Fig. 4 b überlagert werden. Wir zerlegen auf diese Weise die Berechnung in zwei Teile, nämlich erstens in die Berechnung unter gegebener Belastung für unverschiebbliche Knotenpunkte und zweitens in die Berechnung für den Einfluß der Kraft  $A$ .

a) System mit unverschieblichen Knotenpunkten. Von der gewöhnlichen Voraussetzung ausgehend, daß bei der Berechnung der Rahmenkonstruktionen die Deformationen infolge der Normal- und Querkräfte gegenüber jenen infolge der Momente vernachlässigt werden können, wollen wir die Berechnung eines Systems mit unverschieblichen Knotenpunkten wieder unterteilen. Wir berechnen zuerst die durch die gegebenen äußeren Kräfte auf Biegung beanspruchten Stäbe unter der Voraussetzung vollständiger Einspannung an den Enden. Die Einspannmomente  $M^o$  ergeben sich zu

$$\left. \begin{aligned} M_{mn}^o &= -\frac{2L' - L''}{3} \dots \\ M_{nm}^o &= \frac{2L'' - L'}{3} \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

wo  $L' = \frac{6}{l^2} \int_0^l M_x(l-x) dx$  und  $L'' = \frac{6}{l^2} \int M_x x dx$

ist.  $M_x$  bedeutet die Ordinate der Momentenfläche bei gelenkiger Lagerung der Stabenden. Die Einspannmomente werden positiv bezeichnet, wenn sie auf das Stabende im Sinne des Uhrzeigers wirken.

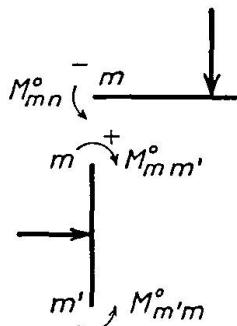


Fig. 5 a.

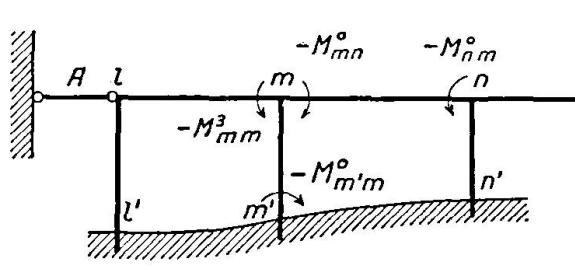


Fig. 5 b.

Im zweiten Teil der Berechnung haben wir nur die Wirkung der Momente in den Knoten zu untersuchen. Diese Momente sind den oben erwähnten Einspannmomenten entgegengesetzt gleich (Fig. 5 b). Zu dieser Belastung treten eventuelle Exzentrizitätsmomente hinzu.

Die Momentenfläche irgend eines Stabes  $nm$  setzt sich nun endgültig zusammen aus:

1. der Momentenfläche  $M_x$  infolge der gegebenen Belastung für den einfachen Balken,
2. aus der Momentenfläche infolge der Einspannmomente  $M_{mn}^o$  und  $M_{nm}^o$ ,
3. der Momentenfläche infolge der Momente  $M_{mn}$  und  $M_{nm}$  an den Enden des Stabes, die für den Belastungszustand der Fig. 5 b berechnet sind.

Die unter 3. genannten Momente berechnen wir nach der Methode der sukzessiven Annäherung in ähnlicher Weise wie vorher für die Berechnung der Momente an den Stabenden eines Fachwerkes mit steifen Knotenverbindungen gezeigt wurde. Da die Knotenpunkte unverschieblich sind, bleiben die Neigungswinkel der Tangente zur Stabrichtung für alle Stäbe eines Knotens gleich. Wir bezeichnen den mit  $2E$  multiplizierten Neigungswinkel der Tangente am Ende  $n$  des Stabes  $nm$  mit  $N_n$ . Die gesuchten Momente lassen sich durch diese Winkel nach Gl. (1) ausdrücken.

$$M_{nm} = \frac{J}{l} (2N_n + N_m) \quad (11)$$

Die Gleichgewichtsbedingung für jeden Knoten fordert die Befriedigung der Gleichung

$$\sum M_{nm} + \sum M_{nm}^o = 0 \quad (12)$$

Die Summierung ist über alle Stäbe des  $n$ -ten Knotens zu erstrecken. Mit Hilfe der Gl. (11) erhält man

$$2N_n \sum \frac{J}{l} + \sum N_m \cdot \frac{J}{l} + \sum M_{nm}^o = 0 \quad (13)$$

Diese Gleichung entspricht vollständig der Gl. (8 a). Die erste Näherung für  $N_n$  bekommen wir nach Annäherung aller Werte  $N_m$ .

$$N'_n = -\frac{\sum M_{nm}^o}{2 \sum \frac{J}{l}} \quad (14)$$

Falls ein Stiel unten gelenkig gelagert ist, bestimmt sich der Wert  $N_i = 0,5 N_n$ . Gleichung (13) ergibt für diesen Fall

$$N'_n = -\frac{\sum M_{nm}^o}{2 \sum \frac{J}{l} - \frac{1}{2} \left( \frac{J}{l} \right)_{ni}} \quad (15)$$

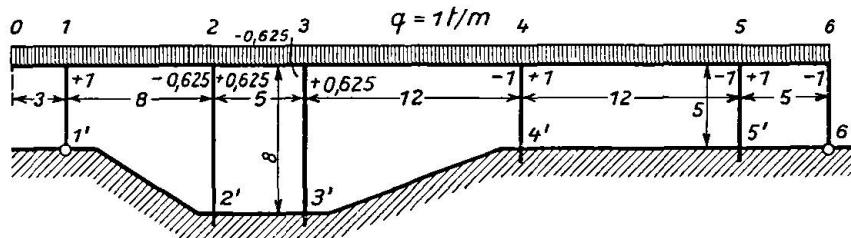


Fig. 6.

Wir wollen diese Methode auf das Beispiel der Fig. 6 anwenden. Die Werte  $\frac{J}{l}$ , sowie die Werte  $2 \sum \frac{J}{l}$  sind in Spalte 2 der Tabelle II eingetragen. Spalte 3 enthält die Einspannmomente  $M^o$  nach Formel:  $M^o = \pm \frac{q l^2}{8}$  für gleichmäßig verteilte Belastung. Für jeden Knotenpunkt ist in der gleichen Spalte der Wert  $\sum M^o$  berechnet.

Wir fangen mit dem Knoten 3 an, für den der größte Wert  $N$  zu erwarten ist. Nach Gleichung (14) ist

$$N'_3 = -\frac{9,92}{2} = \sim 5.$$

Bei der Berechnung von  $N'$  der Nachbarknoten nehmen wir für  $N_3$  schon den Wert  $N'_3$  statt Null. Der Nenner der Gl. (14) ändert um den Betrag  $\frac{J}{l} \cdot N'_3$ ; diese Änderung wird in die 4. Spalte für den Knoten eingetragen, der der  $\sum M$  entspricht. Nachdem die  $N'$ -Werte für alle Knoten bestimmt sind, berechnen wir nach Gl. (11) die erste Näherung für die Momente  $M'$

$$M'_{nm} = \frac{J}{l} (2N'_n + N'_m).$$

Den Unterschied zwischen  $N$  und  $N'$  bezeichnen wir mit  $\Delta N'$ . Nach Einsetzen des Wertes  $(N' + \Delta N')$  in die Gleichung (13) erhält man:

$$\Delta N'_n 2 \sum \frac{J}{l} + \Sigma \Delta N_m \frac{J}{l} + \Sigma M_{nm}^o + \Sigma M'_{nm} = 0. \quad (16)$$

Die Werte  $\Delta N'$  ergeben sich mit Hilfe der Formeln (14) ev. (15). Anstelle von  $\Sigma M_{nm}^o$  treten jetzt kleinere Werte  $\Sigma M_{nm}^o + \Sigma M'_{nm}$  auf.

Tabelle II.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Bezeichnung des Stabes	$\frac{J}{l}$	$M^o$	1. Annäherung			2. Annäherung			$N'''$	$N''I$	$M''_{nm}$	$M^o_{nm} + M'_{nm}$	$M^o_{nm} + M''_{nm}$	
			$2 \sum \frac{J}{l}$	$tm.$	Änderung der Momente	$N'$	$M'_{nm}$	Änderung der Momente						
1-0 1-2 1-1'	—	4,50				—						—	4,50	4,50
	0,40	-5,33	-1,20			0,40	-0,20					0,47	-4,86	-4,81
	0,10	—				0,30						0,36	0,36	0,36
	0,95	-0,83	-2,03	+ 2		-0,83						-0,83	0	+ 0,05
2-1 2-3 2-2'	0,40	5,33				-1,60						-1,91	3,42	3,49
	0,50	-2,08	+ 2,50			-0,50	+ 0,35					-0,63	-2,71	-2,73
	0,10	—				-0,60						-0,72	-0,72	0,70
	2,0	+3,25	+ 5,75	- 3		+ 3,25						+ 3,25	-0,01	+ 0,06
3-2 3-4 3-3'	0,50	2,08				3,50						4,11	6,19	6,03
	0,40	-12,00				4,00						4,63	-7,37	-7,52
	0,10	—				1,00						1,18	1,18	1,14
	2,0	-9,92		+ 5		-9,92						-9,92	0	-0,35
4-3 4-5 4-4'	0,40	12,00	+ 2,00			2,00	+ 0,28					2,17	14,17	14,12
	0,40	-12,00	-2,00			-2,00	+ 0,08					-2,08	-14,09	-14,08
	0,15	—				—						-0,06	-0,07	-0,06
	1,9	0	0			0	+ 0,36	-0,2	-0,2			—	+ 0,01	-0,02
5-4 5-6 5-5'	0,40	12,00				-4,00						-3,38	8,12	8,08
	0,50	-2,08				-4,80						-4,61	-6,69	-6,73
	0,15	—				-1,50						-1,42	-1,42	-1,44
	2,1	+9,92		- 5		+ 9,92						+ 9,92	+ 0,01	-0,09
6-5 6-6'	0,50	2,08	-2,50			-2,10	+ 0,10					-2,12	-0,04	-0,02
	0,10	—				0,06						0,05	+ 0,04	+ 0,05
	1,15	+2,08	-0,42	+ 0,4		+ 2,08						+ 2,08	0	+ 0,03
				+ 0,04		+ 0,14	-0,1	+ 0,3	+ 0,03	+ 0,26	+ 0,25	0		

Die Momente  $M'$ , sowie die Werte  $\Sigma M_n^o + \Sigma M'$  sind in der 6. Spalte der Tabelle II wiedergegeben. Nach der Berechnung der Verbesserungen  $\Delta N'$  erhalten wir zweite Näherungen für  $N$ , nämlich  $N'' = N' + \Delta N'$  und damit die

zweite Näherung der Momente zu  $M''_{nm} = \frac{J}{l} (2N''_{nm} + N''_{mn})$ .

In gleicher Weise können weitere Verbesserungen  $\Delta N'' = N - N''$  berechnet werden. Der soeben geschilderte Rechnungsgang kann bis zur gewünschten Genauigkeit der Endergebnisse fortgesetzt werden. Die endgültigen Momente an den Stabenden erhält man durch Addition der Momente  $M_{n'm}^0$  und der eben berechneten Momente  $M'_{n'm}$  usw. Diese Werte sind für die 4. Annäherung in Spalte 14 und für die 2. Annäherung in Spalte 15 der Tabelle II eingetragen. Der größte Fehler des Momentes für die zweite Annäherung ist etwa 2 %.

Die Stabkraft  $A$  des Festhaltestabes zur Überführung des Systems mit verschieblichen Knotenpunkten in jenes mit unverschieblichen Knotenpunkten berechnet sich, falls der Stab horizontal angeordnet ist, zu

$$A = \Sigma H + \Sigma Q_{nn'} \quad (17)$$

wo  $\Sigma H$  die Summe der wagrechten Komponenten der äußeren Kräfte und  $\Sigma Q_{nn'}$  die Summe der horizontalen Auflagerkräfte aller Stiele bedeutet.

$$Q_{nn'} = \frac{M_{nn'} + M_{n'n}}{l} \quad (18)$$

Wir erhalten  $A = -0,281 t$ .

b) Die Wirkung der wagrechten Kraft  $A$ . Unter der Wirkung der wagrechten Kraft  $A$  verschieben sich alle Knotenpunkte um eine kleine Größe  $\delta$ . Infolgedessen ändern die Werte der Winkel zwischen den Richtungen der Riegel und der Stiele um die Größe  $\psi_{l'mm'} = -\frac{\delta}{l}$  von der linken und  $\psi_{n'mm'} = +\frac{\delta}{l}$  von der rechten Seite der Stiele  $m'm'$ .

Da die Stäbe steif miteinander verbunden sind, so müssen sie sich ausbiegen. Zwischen den Neigungswinkeln  $a$  der Tangente, der Winkeländerungen  $\psi$  und der Momente an den Stabenden gelten die Verhältnisse nach Gleichungen (1), (2) und (3) wie im Falle der Berechnung der Nebenspannungen. Mit den Bezeichnungen  $2E\psi = K$  und  $2Ea = N$  erhalten wir die Gleichungen (5), (6) und (7). Demgemäß ist

$$K = \pm \frac{2E\delta}{l} \quad (19)$$

Für Stäbe konstanter Steifigkeit mit  $b = 2$  und  $a = 1$  schreiben sich obige Gleichungen wie folgt:

$$N_{nm} = N_{nk} - K_{knm} \quad (20)$$

$$M_{nm} = \frac{J}{l} (2N_{nm} + N_{mn}) \quad (21)$$

$$\Sigma \frac{J}{l} (2N_{nm} + N_{mn}) = 0 \quad (22)$$

In üblicher Weise wählt man für  $\delta$  einen beliebigen Wert und berechnet hierfür die Momente  $M_{n'm}$  nach der Methode der sukzessiven Annäherung, wie das bei der Berechnung der Nebenspannungen durchgeführt wurde. Hieraus berechnet man die wagrechte Kraft  $B$ , die die gewählte Deformation erzeugt.

$$B = -\Sigma Q_{nn'} = -\Sigma \frac{M_{nn'} + M_{n'n}}{l} \quad (23)$$

Da die Deformation der Belastung proportional ist, sind die wirklichen Mo-

mente infolge der Kraft  $A$  gleich den gewonnenen Momenten multipliziert mit dem Koeffizienten  $\frac{A}{B}$ .

Tabelle III.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Bezeichnung des Stabes	$\frac{J}{l};$ $\Sigma \frac{J}{l}$	1. Annäherung				2. Annäherung				3. Annäherung			
		$N'$	$M'_{mn} = \frac{J}{l}(2N'_{mn} + N'_{nm})$	Änderung der Momente	$\Delta N'$	$N''$	$M''_{mn} = \frac{J}{l}(2N''_{mn} + N''_{nm})$	Änderung der Momente	$\Delta N''$	$N'''$	$M'''_{mn} = \frac{J}{l}(2N'''_{mn} + N'''_{nm})$	$\frac{A}{B} M'''_{mn}$	Volle Momente tm.
1-2	0,40	0,20	0,16	0,02		0,14	0,132	0,002		0,135	0,130	-0,09	-4,95
1-1'	0,10	-0,80	-0,12		-0,06	-0,86	-0,129		-0,005	-0,865	-0,130	+0,09	0,45
	0,95		+ 0,04	+ 0,06			+ 0,003	0,005	-0,005		0		
1'-1	0,10	+ 0,40				+ 0,43				+ 0,433	0	0	0
2-1	0,40	0	0,080	—		0,05	0,096			0,056	0,099	-0,07	3,35
2-3	0,50	0	0	—		0,05	0,065	+ 0,006		0,056	0,077	-0,05	-2,76
2-2'	0,10	-0,625	-0,188			-0,575	-0,178			-0,569	-0,176	+0,13	-0,59
	2,0		-0,108		+ 0,05		-0,017	-0,011	+ 0,006		0		
2'-2	0,10	-0,625								-0,625	-0,182	0,13	-0,23
3-2	0,50	0	0	+ 0,025		0,03	0,055	—		0,041	0,069	-0,05	6,14
3-4	0,40	0	0	+ 0,096		0,03	0,120			0,041	0,114	-0,08	-7,45
3-3'	0,10	-0,625	-0,188			-0,595	-0,182	-0,015		-0,584	-0,179	+0,13	1,31
	2,0		-0,188	-0,067	+ 0,03		-0,007	-0,022	+ 0,011		+ 0,004		
3'-3	0,10	-0,625								-0,625	-0,183	0,13	0,72
4-3	0,40	0	0	—		0,24	0,204	—		0,203	0,179	-0,12	14,15
4-5	0,40	0	0	—		0,24	0,244	—		0,203	0,226	-0,16	-14,25
4-4'	0,15	-1,0	-0,45		+ 0,24	-0,76	-0,378		-0,037	-0,797	-0,389	0,28	0,21
	1,9						+ 0,070				+ 0,016		
4'-4	0,15	-1,0								-1,0	-0,420	0,30	0,26
5-4	0,40	0	0	+ 0,096		0,13	0,200	-0,015		0,159	0,208	-0,15	7,97
5-6	0,50	0	0,08	—		0,13	0,165	—		0,159	0,189	-0,14	-6,55
5-5'	0,15	-1,0	-0,45			-0,87	-0,411			-0,841	-0,402	0,29	-1,13
	2,1		-0,37	-0,274	+ 0,13		-0,046	-0,061	+ 0,029		-0,005		
5'-5	0,15	-1,0								-1,00	-0,426	0,31	-0,40
6-5	0,50	0,16	0,160	+ 0,065		0,07	0,135	+ 0,015		0,06	0,140	-0,10	-0,14
6-6'	0,10	-0,84	-0,126			-0,93	-0,139			-0,94	-0,141	0,10	0,14
	1,15		+ 0,034	+ 0,049	-0,09		-0,004	+ 0,011	-0,01		-0,001		
6'-6	0,10	+ 0,42								+ 0,47	0	0	0

In unserem Beispiel (Fig. 6) nehmen wir  $\delta$  so an, daß  $K$  für irgend einen Winkel, z. B.  $(1' - 1 - 2) = 1$  wird. Die andern Winkel berechnen sich zu

$$K_{nn'} = \pm 1 \frac{l_{11'}}{l_{nn'}} \quad (24)$$

Diese  $K$ -Werte sind in Fig. 6 eingeschrieben. Die Anfangswerte von  $N$  berechnet man nach Gl. (8) und (20). Für den Knoten 1 ergibt sich

$$N_{12} = 1 \frac{0,10}{0,10 + 0,40} = 0,20 \quad N_{2'21} = 0,20 - 1 = -0,80.$$

Tabellarische Berechnung siehe Tabelle III. Nach Gl. (23) berechnet sich die wagrechte Kraft  $B$  zu

$$B = -\left(\frac{-0,20}{5} + \frac{-0,176 - 0,182 - 0,179 - 0,183}{8} + \frac{-0,389 - 0,402 - 0,402 - 0,426 - 0}{5}\right) = 0,392 \text{ t.}$$

Die wirklichen Momente infolge der Kraft  $A$  erhält man durch Multiplikation mit

$$\frac{A}{B} = \frac{-0,281}{0,392} = -0,72.$$

Diese Momente sind in Spalte 13 eingetragen. Die totalen Momente erhält man durch Addition der Momente beider Teile der Berechnung, d. h. der Werte in Spalte 14 der Tabelle II und der Werte in Spalte 13 der Tabelle III. Spalte 14 der Tabelle III enthält diese totalen Momente.

### Die mehrstöckigen Rahmen.

Der erste Teil der Aufgabe, d. h. die Berechnung der Momente für das System mit unverschieblichen Knotenpunkten, wird in gleicher Weise gelöst wie für den oben beschriebenen mehrstieligen Rahmen.

Wir betrachten nun die Wirkung der wagrechten Kräfte  $A_1, A_2 \dots A_i$ , die an den verschiedenen Riegeln wirken. Die Verschiebungen entsprechender Knoten seien  $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_i$ , von oben nach unten gerechnet. Diese Verschiebungen können anfänglich grob geschätzt werden. Falls die Steifigkeit der Riegel bedeutend größer ist als die der Stiele, so kann als angenäherte Deformation diejenige eingesetzt werden, die einem System mit starren Riegeln entspricht. Falls umgekehrt die Steifigkeit der Stiele bedeutend größer ist als die der Riegel, so kann in erster Annäherung die letztere gleich Null gesetzt werden. Als angenäherte Verschiebungen erhält man alsdann die Durchbiegungen der eingespannten Balken mit der Steifigkeit, die der Summe der Steifigkeiten aller Stiele entspricht. Nachdem die Verschiebungen  $\delta$  und dementsprechend die Werte  $K$  gewählt sind, berechnen wir die Momente an den Stabenden und damit die wagrechten Kräfte  $B$ , die der angenommenen Deformation entsprechen.

$$B_1 = -\sum Q_1 \quad B_i = -\sum Q_i - \sum_1^i B \quad (25)$$

Um zwischen den erhaltenen Kräften  $B$  und den gegebenen Kräften  $A$  einen möglichst kleinen Unterschied zu erreichen, multiplizieren wir die angenommene Deformation, ebenso die Kräfte  $B$  mit einem Koeffizienten  $\eta$ , der so zu bestimmen ist, daß

$$\sum (A_i - \eta B_i)^2$$

zu einem Minimum werde. Man bekommt dabei

$$\eta = \frac{\sum A_i B_i}{\sum B_i^2} \quad (26)$$

Tabelle IV.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bezeichnung des Stabes	$\frac{J}{l}$	1. Annäherung		2. Annäherung		3. Annäherung		4. Annäherung	
	$2 \sum \frac{J}{l}$	$N'_{mn}$	$M'_{mn}$ tm.	$N''_{mn}$	$M''_{mn}$ tm.	$N'''_{mn}$	$M'''_{mn}$ tm.	$N^{IV}_{mn}$	$M^{IV}_{mn}$ tm.
1—4	0,1	-1,97	-0,586	-1,88	-0,543	-1,89	-0,552	-1,89	-0,552
	0,8	0,25	0,400	0,34	0,568	0,33	0,560	0,325	0,552
	1,8		-0,186		+0,025		+0,008		0
2—1	0,8	0	0,200	0,03	0,320	0,04	0,328	0,041	0,326
	0,6	0	0,192	0,03	0,318	0,04	0,312	0,041	0,313
	0,1	-2,22	-0,666	-2,19	-0,644	-2,18	-0,640	-2,18	-0,640
	3,0		-0,274		-0,006		0		-0,001
3—2	0,6	0,32	0,360	0,47	0,582	0,44	0,552	0,44	0,552
	0,1	-1,90	-0,600	-1,75	-0,542	-1,78	-0,552	-1,78	-0,552
	1,4		-0,240		+0,040		0		0
4—1	0,1	-1,92	-0,581	-1,67	-0,522	-1,74	-0,537	-1,75	-0,538
	1,5	0,30	0,900	0,55	1,890	0,48	1,710	0,473	1,694
	0,2	-2,20	-1,306	-1,95	-1,106	-2,02	-1,150	-2,03	-1,156
	3,6		-0,987		+0,262		+0,023		0
5—4	1,5	0	0,450	0,16	1,305	0,18	1,260	0,183	1,259
	0,1	-2,22	-0,666	-2,06	-0,631	-2,04	-0,626	-2,04	-0,626
	1,2	0	0	0,16	0,744	0,18	0,744	0,183	0,751
	0,2	-2,50	-1,500	-2,34	-1,400	-2,32	-1,384	-2,32	-1,382
	6,0		-1,716		+0,018		-0,006		+0,002
6—5	1,2	0	0	0,30	0,912	0,26	0,840	0,26	0,843
	0,1	-2,22	-0,634	-1,92	-0,559	-1,96	-0,570	-1,96	-0,570
	1,2	0	0,432	0,30	1,090	0,26	1,008	0,26	1,008
	0,2	-2,50	-1,500	-2,20	-1,220	-2,24	-1,264	-2,24	-1,268
	5,4		-1,702		+0,223		+0,014		+0,013
7—6	1,2	0,36	0,864	0,31	1,10	0,32	1,08	0,32	1,08
	0,2	-2,14	-1,168	-2,19	-1,10	-2,18	-1,09	-2,18	-1,09
	2,9		-0,304		0		-0,01		-0,01
8—4	0,2	-2,13	-1,292	-1,63	-1,04	-1,71	-1,09	-1,72	-1,09
	1,5	0,37	1,110	0,87	2,88	0,79	2,70	0,78	2,68
	0,2	-2,77	-1,736	-2,27	-1,54	-2,35	-1,57	-2,36	-1,57
	3,8		-1,918		+0,30		+0,04		+0,02
12—8	0,2	-3,14						-3,14	-1,73
9—8	1,5	0	0,555	0,18	1,85	0,22	1,85	0,23	1,86
	0,2	-2,50	-1,500	-2,32	-1,40	-2,28	-1,38	-2,27	-1,38
	1,2	0	0	0,18	1,39	0,22	1,32	0,23	1,32
	0,2	-3,14	-1,870	-2,96	-1,81	-2,92	-1,80	2,91	-1,80
	6,2		-2,815		+0,03		-0,01		0
13—9	0,2	-3,14						-3,14	-1,84
10—9	1,2	0	0	0,80	2,13	0,66	1,85	0,64	1,81
	0,2	-2,50	-1,50	-1,70	-1,12	-1,84	-1,18	-1,86	-1,19
	1,2	0	1,13	0,80	3,59	0,66	3,31	0,64	3,26
	0,3	-4,71	-4,23	-3,91	-3,76	-4,05	-3,84	-4,07	-3,86
	5,8		-4,60		+0,84		+0,14		+0,02
14—10	0,3	-4,71						-3,14	-4,05
11—10	1,2	0,94	2,25	1,39	4,29	1,44	4,25	1,44	4,22
	0,2	-1,56	-1,05	-1,11	-0,88	-1,06	-0,86	-1,06	-0,86
	0,3	-3,77	-3,68	-3,32	-3,41	-3,27	-3,38	-3,27	-3,38
	3,4		-2,48		0		+0,01		
15—11	0,3	-4,71						-4,71	-3,81

Auf diesem Wege gelangt man gewöhnlich zu guten Annäherungen. Unterscheiden sich die Kräfte  $A$  wesentlich von den Werten  $\eta B$ , so können die Differenzen  $A_i - \eta B_i$  als äußere Kräfte eingeführt und die Berechnung in gleicher Weise wiederholt werden. Man erhält so die Verbesserung der früheren Lösung.

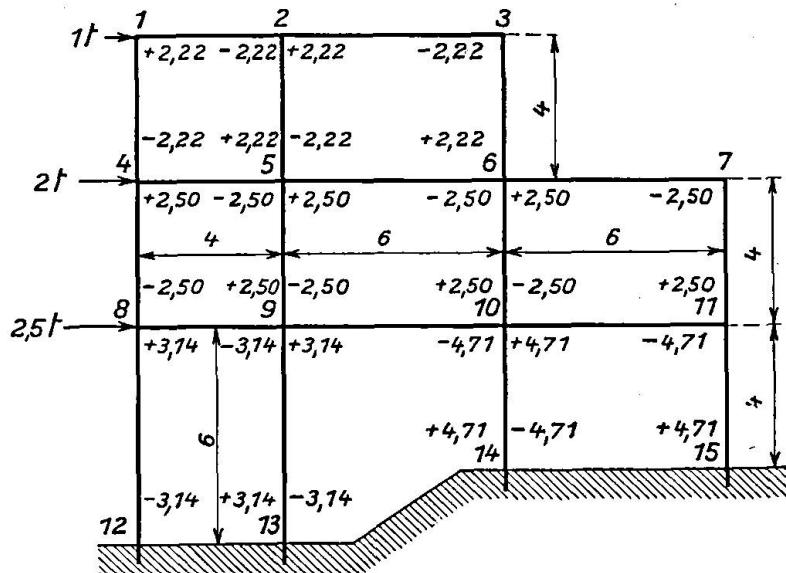


Fig. 7.

Beispiel. Die Steifigkeiten der Stäbe des in Fig. 7 dargestellten Rahmens sind in Spalte 2 der Tabelle IV wiedergegeben. Bei Annahme von starren Riegeln ergibt sich für die  $i$ -te Reihe von oben der Ausdruck

$$K_i = \frac{2E(\delta_i - \delta_{i+1})}{l_i}$$

Die Momente an den Enden der lotrechten Stäbe ergeben sich zu

$$M_i = \frac{J}{l} 3 K_i,$$

die Querkräfte des Stabes zu

$$Q_i = \frac{2 M_i}{l} - \frac{J}{l} \frac{6 K_i}{l}.$$

Aus der Gleichung  $\sum_1^i A + \sum Q_i = 0$  erhält man:

$$K_i = \frac{l_i \sum_1^i A}{6 \Sigma \left( \frac{J}{l} \right)_i} \quad (27)$$

Gl. (27) ist für den Fall, daß in einer wagrechten Reihe die Stiele verschiedene Höhe haben, abzuändern in

$$K_{il} = \frac{l_{il} A}{6 \frac{J}{l} \left( \frac{l_{il}}{l_{in}} \right)^2} \quad (28)$$

wobei  $K_{in} = K_{il} \frac{l_{il}}{l_{in}}$  ist.

In unserem Beispiel wird  $K_1 = K_{2 \cdot 14} = \frac{4 \cdot 1}{6 \cdot 3 \cdot 0,1} = 2,22$

$$K_2 = K_{5 \cdot 8} = \frac{4(1+2)}{6(3 \cdot 0,2 + 0,1)} = 2,50 \text{ und nach Gl. (28)}$$

$$K_3 = K_{9 \cdot 8 \cdot 12} = \frac{6(1+2+2,5)}{6 \left[ 2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 \left( \frac{6}{4} \right)^2 \right]} = 3,14$$

$$K_{11 \cdot 10 \cdot 14} = 3,14 \cdot \frac{6}{4} = 4,71.$$

Alle  $K$ -Werte sind in Fig. 7 eingetragen. Die ersten angenäherten Werte für  $N$  berechnen sich nach Gl. (8). In Tabelle IV sind die sukzessiven Annäherungen für die Werte  $N$  und die Momente selbst angegeben. Mit Hilfe der Momente berechnen sich die  $B$ -Kräfte nach Gl. (25) zu

$$B_1 = 0,87 \text{ t}, \quad B_2 = 1,48 \text{ t}, \quad B_3 = 2,58 \text{ t},$$

und nach Gl. (26)

$$\eta = \frac{1 \cdot 0,87 + 2 \cdot 1,48 + 2,5 \cdot 2,58}{0,87^2 + 1,48^2 + 2,58^2} = 1,08.$$

Die Differenzen  $A - \eta B$  ergeben sich zu:  $A'_1 = 0,06$ ,  $A'_2 = 0,40$  und  $A'_3 = -0,28$ . Der größte Unterschied beträgt 20 %. Für praktische Zwecke ge-

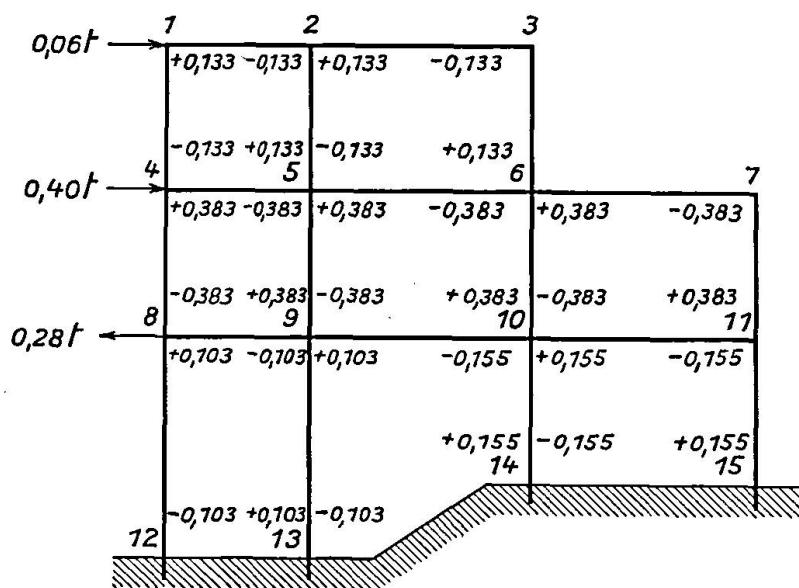


Fig. 8.

nügt diese Genauigkeit sehr oft. Man kann aber die Berechnung wiederholen, indem man die Differenzen  $A'$  als Belastungen wählt. Die  $K$ -Werte für diesen Fall sind in Fig. 8 wiedergegeben, die Berechnung in Tabelle V. Die wagrechten Kräfte  $B'$  ergeben sich zu  $B'_1 = 0,048$ ,  $B'_2 = 0,358$ ,  $B'_3 = -0,258$  und damit  $\eta_1 = 1,13$ .

Die Summen  $\eta B + \eta_1 B'$  sind: 0,994, 2,002 und 2,495.

Der größte Unterschied gegenüber den Kräften  $A$  ist etwas über 0,5 %. Die totalen Momente an den Stabenden erhält man durch Addieren der mit  $\eta = 1,08$  multiplizierten Momente der Spalte 10, Tabelle IV, und der mit

Tabelle V.

1	2	3	4	5	6	7	8
Bezeichnung des Stabes	1. Annäherung		2. Annäherung		3. Annäherung		Endgültige Momente $M_{mn}$
	$N'_{mn}$	$M'_{mn}$	$N''_{mn}$	$M''_{mn}$	$N'''_{mn}$	$M'''_{mn}$	
1-4	-0,120	-0,0328	-0,114	-0,0301	-0,115	-0,0302	-0,630
1-2	0,013	0,0208	0,019	0,0320	0,018	0,0312	0,631
		-0,0120		+ 0,0019		+ 0,0010	
2-1	0	0,0104	0,002	0,0184	0,003	0,0192	0,374
2-3	0	0,0120	0,002	0,0180	0,003	0,0186	0,359
2-5	-0,133	-0,0399	-0,131	-0,0370	-0,130	-0,0370	0,733
		-0,0175		-0,0006		+ 0,0008	
3-2	0,020	0,0240	0,026	0,0324	0,025	0,0318	0,632
3-6	-0,113	-0,0359	-0,107	-0,0311	-0,108	-0,0320	-0,632
		-0,0119		+ 0,0013		-0,0002	
4-1	-0,088	-0,0296	-0,073	-0,0260	-0,072	-0,0259	-0,610
4-5	0,045	0,1350	0,060	0,2175	0,061	0,2175	2,070
4-8	-0,338	-0,2028	-0,323	-0,1932	-0,322	-0,1926	-1,470
		-0,0974		-0,0017		-0,0010	
5-4	0	0,0675	0,025	0,1650	0,023	0,1605	1,540
5-2	-0,133	-0,0399	-0,108	-0,0347	-0,110	-0,0350	-0,716
5-6	0	0	0,025	0,1030	0,023	0,0900	0,910
5-9	-0,383	-0,2298	-0,358	-0,2142	-0,360	-0,2158	-1,736
		-0,2022		+ 0,0191		-0,0003	
6-5	0	0	0,036	0,1160	0,029	0,0970	1,02
6-3	-0,133	-0,0379	-0,097	-0,0301	-0,104	-0,0316	-0,651
6-7	0	0,0636	0,036	0,1570	0,029	0,1450	1,25
6-10	-0,383	-0,2298	-0,347	-0,2070	-0,354	-0,2110	-1,61
		-0,2041		+ 0,0359		-0,0006	
7-6	0,053	0,1270	0,059	0,1850	0,063	0,1860	1,38
7-11	-0,330	-0,2026	-0,324	-0,1852	-0,320	-0,1866	-1,38
		-0,0756		-0,0002			
8-4	-0,338	-0,2028	-0,320	-0,1926	-0,319	-0,192	-1,39
8-9	0,045	0,1350	-0,063	0,2310	0,064	0,228	3,16
8-12	-0,058	-0,0438	-0,040	-0,0366	-0,039	-0,036	-1,74
		-0,1116		+ 0,0018		0	
12-8	-0,103				-0,103	-0,049	-1,93
9-8	0	0,0675	0,028	0,1785	0,024	0,168	2,20
9-5	-0,383	-0,2298	-0,355	-0,2136	-0,359	-0,216	-1,73
9-10	0	0	0,028	0,1175	0,024	0,103	1,54
9-13	-0,103	-0,0618	-0,075	-0,0506	-0,079	-0,052	-2,00
		-0,2241		+ 0,0318			
13-9	-0,103				-0,103	-0,057	-2,05
10-9	0	0	0,042	0,134	0,038	0,120	2,09
10-6	-0,383	-0,2298	-0,341	-0,206	-0,345	-0,209	-1,53
10-11	0	0,0360	0,042	0,227	0,038	0,199	3,75
10-14	-0,155	-0,1395	-0,113	-0,114	-0,117	-0,117	-4,30
		-0,3333		+ 0,041		-0,007	
14-10	-0,155				-0,155	-0,128	-4,51
11-10	0,030	+ 0,0720	0,105	0,302	0,090	0,262	4,85
11-7	-0,353	-0,2072	-0,278	-0,176	-0,293	-0,181	-1,13
11-15	-0,125	-0,1215	-0,050	-0,076	-0,065	-0,076	-3,74
		-0,2567		+ 0,050		+ 0,005	
15-11	-0,155				-0,155	-0,113	-4,24

$\eta_1 = 1,13$  multiplizierten Momente der Spalte 7, Tabelle V. Diese Momente sind in Spalte 8 der Tabelle V wiedergegeben.

Auf ähnliche Weise lassen sich die Zusatzmomente berechnen, die infolge Längenänderungen der einzelnen Stäbe auftreten, unabhängig davon, ob diese Änderungen eine Folge der Wirkung der Normalkräfte, der Temperaturänderungen oder der Nachgiebigkeit des Baugrundes sind.

### **Der Vierendeelträger.**

Anstelle der oben angeführten Methode der sukzessiven Annäherung empfiehlt sich für dieses System das vom Autor in der Zeitschrift „Der Bauingenieur“ 1922, Heft 7 und 8, angegebene Berechnungsverfahren: „Die Berechnung der Rahmenträger“.

### **Zusammenfassung.**

Der Verfasser zeigt die Anwendung des Iterationsverfahrens auf die Nebenspannungsberechnung bei Fachwerken. Das Beispiel der Elbbrücke bei Torgan wird ganz durchgerechnet. Bei mehrstieligen und mehrstöckigen Rahmen geht die Berechnung einzelner Teile ganz entsprechend vor sich, wie an Hand von zwei Beispielen ausführlich gezeigt wird.

### **Résmué.**

L'auteur expose l'application de la méthode d'itération au calcul des tensions secondaires dans les constructions en treillis. Elle est appliquée ici au calcul complet du pont sur l'Elbe près de Torgan. Le calcul des cadres juxtaposés et à plusieurs étages s'opère exactement de la même manière, comme le montrent deux exemples détaillés.

### **Summary.**

The author demonstrates the application of the succession re-iteration procedure for the calculation of secondary stresses in lattice structures. A fully numerical example is shown for the Torgan bridge over the River Elbe. The application of the theory to multiple-storey frames is done in the same way as for the bridge and is illustrated by two examples.

**Leere Seite**  
**Blank page**  
**Page vide**