Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 4 (1936)

Artikel: Étude sur les surfaces autoportantes minces métalliques: considérations théoriques et calcul, exemples de réalisation (couverture)

Autor: Beschkine, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5078

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ÉTUDE SUR LES SURFACES AUTOPORTANTES MINCES MÉTALLIQUES.

CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES ET CALCUL. EXEMPLES DE RÉALISATION (COUVERTURE).

UNTERSUCHUNGEN ÜBER FLÄCHENTRAGWERKE IN STAHL, THEORIE UND BERECHNUNG.

STUDIES ON SELF-SUPPORTING STEEL SHELLS, THEIR THEORY AND CALCULATION.

L. BESCHKINE, Ingénieur aux Etablissements Delattre et Frouard Réunis.

1re partie.

Considérations théoriques.

Chapitre I. Conditions d'emploi de surfaces métalliques minces.

Les surfaces minces de grande portée ont été employées en premier lieu dans la construction en béton armé. Dans ce mode de construction les éléments d'ossature peuvent être à des distantes assez importantes les uns des autres, sans crainte du flambage de la surface. — Au contraire, dans le cas de la construction métallique, les faibles épaisseurs pratiquement utilisables (1 mm à 4 mm — au lieu de 4 à 8 cm pour le béton armé) rendent impossible l'utilisation des principes de construction adoptés pour le béton armé.

Prenons par exemple, pour illustrer cette idée, le cas de voûtes cylindriques avec raidisseurs (ces raidisseurs étant, soit des nervures dans la voûte, soit des plans réalisés avec une membrure supérieure et un tirant, un treillis reliant les deux).

La relation liant la pression critique sur la voûte, supposée radiale (p_0) l'épaisseur de la voûte (e), le rayon de la voûte (R), l'écartement des raidisseurs (L), le module d'élasticité (E) et le coefficient de Poisson (σ) est:

$$\Psi = \frac{\mu^4 + \frac{\varepsilon}{12}(r^2 + \eta^2)^4}{\eta^2(\mu^2 + \eta^2)}$$

où:

$$\Psi = \frac{p_0(1-\sigma^2)}{E}\frac{R}{e}; \quad \mu = \frac{R}{L}\pi \qquad \varepsilon = \left(\frac{e}{R}\right)^2$$

η: nombre d'ondes de flambage pour un cylindre complet, défini de manière à rendre Ψ minimum.

(Loir par exemple, pour les formules permettant d'établir ces résultats, Love „Mathematical Theory of Elasticity", 4ème édition, pp. 571 et s.)

Prenons par exemple:

1° béton $e = 5$ cm $R = 60$ m $L = 8$ m $E = 2 \cdot 10^9$ kg/m² $\sigma = 0{,}1$
on trouve: $p_0 = 350$ kg/m².

2° acier $e = 3$ mm $R = 10$ m $L = 1$ m $E = 2 \cdot 10^{10}$ kg/m² $\sigma = 0{,}3$
on trouve: $p_0 = 387$ kg/m².

On voit les petites dimensions de voiles métalliques auxquelles on est conduit, si on veut les faire travailler à la compression dans des conditions analogues à celles des voiles en béton armé.

Il a donc fallu, pour réaliser des surfaces métalliques autoportantes, s'orienter vers de nouvelles solutions.

Deux procédés, totalement différents, ont été appliqués. On peut, soit s'imposer la condition qu'en aucun point, le voile ne travaille en compression, le voile métallique faisant office de toile tendue sur un cadre, soit diminuer les rayons et les distances entre raidisseurs, pour obtenir des éléments pouvant résister à la compression.

Dans le premier procédé, on est conduit à réaliser des surfaces à courbures opposées de manière à avoir toujours une direction en traction quel que soit le sens de l'effort appliqué. Ces surfaces sont en principe de révolution, de manière à permettre de constituer des éléments d'assemblage identiques.

Dans le deuxième cas, que nous étudions ici, on réalise des surfaces ayant au moins un rayon de courbure qui est très petit par rapport aux dimensions générales de l'ouvrage.

On réalise ce que nous appelons des membranes minces à cadres, dont nous faisons ci après une étude théorique générale.

Dans tous les cas d'ailleurs, les surfaces sont réalisées par des éléments de surface développables, l'obtention de surfaces non développables en métal, par exemple par emboutissage, étant très onéreuse.

Chapitre II. Généralités sur les membranes à cadre en forme de segment d'hyperboloïde de revolution.

Une membrane à cadre est un élément constructif formé d'une surface mince entourée par un cadre. La surface est assez mince pour ne supporter aucune flexion; le cadre est assez rigide pour supporter les forces induites sur les rives de la membrane, il est calculé en conséquence.

Dans ces conditions, l'élément considéré forme un tout capable d'absorber des efforts quelconques, exactement comme une poutre droite formée d'une âme et de semelles est un ensemble pouvant supporter tous les efforts situés dans son plan.

Un groupement de ces éléments, rigidement liés entre eux, constitue une construction qui peut être étudiée dans son ensemble, suivant les principes classiques de la Résistance des Matériaux à condition que sa forme générale corresponde aux hypothèses de la Résistance des Matériaux. En particulier il faut que l'on puisse définir d'une façon naturelle une ligne moyenne, ce qui implique que le corps doit être long par rapport à sa (ou ses) dimensions transversales (problèmes plans ou à trois dimensions).

On peut donc définir en tout point de la ligne moyenne, le moment, l'effort normal et l'effort tranchant, seules quantités utilisées en Résistance de Matériaux de par le principe d'équipollence (cas du problème plan).

Ces quantités sont déterminées sans hypothèse pour des systèmes isostatiques.

Dans le cas de systèmes hyperstatiques, il est possible de tenir compte de divers facteurs:

1° Si l'on se borne à tenir compte des déformations de flexion seulement, l'hypothèse de la planéité des sections après déformation n'entraine pas de contradiction appréciable avec les résultats fournis par les calculs d'élasticité, et le problème est résolu, à une approximation normalement satisfaisante.

2° Si l'on met en compte les efforts tranchants et les efforts normaux perpendiculaires à la ligne moyenne, ces efforts calculés à partir de l'hypothèse de planéité, sont entièrement erronés; aussi faut il corriger partiellement les résultats en tenant compte des équations différentielles d'équilibre.

Il résulte de ces considérations que, dans le cas des membranes, si l'on ne calcule le système qu'à la flexion, les résultats donnés par la Résistance des Matériaux des corps allongés sont exacts à leur précision habituelle.

Dans le cas où l'on veut calculer le système en tenant compte des autres facteurs (forces normales transversales et cisaillements) il faut, compte tenu d'un premier calcul approché, déterminer les déformations subies sous l'influence de ces facteurs, et faire un deuxième calcul définitif.

La détermination des déformations locales, la répartition générale des efforts étant supposée connue, est précisement l'objet de cette étude.

A partir des déformations locales on peut définir les efforts transmis par la membrane à son cadre, et accessoirement les efforts dans la membrane qui sont d'ailleurs définis assez exactement par la Résistance des Matériaux.

Le calcul exact de la membrane proprement dite est peu utile, étant donné que dans les conditions normales d'emploi, les efforts sont nettement inférieurs aux fatigues limites, à cause de l'épaisseur minima que l'on doit adopter pour la membrane (absence supposée de déformations initiales, résistance aux charges locales, rigidité pour la mise en place et le transport, résistance à la corrosion).

Dans les chapitres suivants, compte tenu des considérations qui précédent, nous étudierons les déformations des membranes en forme de segment d'hyperboloïde de révolution, le segment étant limité à deux parallèles et deux méridiens.

Fig. 1.
Rahmenelement. Cadre élémentaire. Fram element.

Les divers segments sont liés l'un à l'autre par les méridiens.

Considérons un segment réalisé par un cadre avec membrane mince formant un élément de poutre continue, droite ou courbe. D'après ce qui précède nous introduisons l'hypothèse de planéité des sections après déformation.

D'une manière plus précise, nous supposons que la répartition des déformations est linéaire le long de la hauteur de l'élément, ce qui conduit à introduire le coefficient de Poisson et les contraintes transversales, procédé plus précis que celui habituel en résistance des matériaux.

D'autre part, cette distribution entraine une distribution hyperbolique des contraintes (solution approchée de Résal pour les poutres courbes, Annales des Mines 1862) qui, pour des rapports du rayon de courbure à la hauteur supérieurs à 10, est pratiquement confondue avec la distribution réelle (solution de H. Golovine, Bulletin de l'Institut de Technologie de Saint Petersbourg 1881, et de C. Ribière, Comptes Rendus, Vol. 108, 1889). Pour la comparaison effective de ces solutions, voir Timoshenko: Theory of Elasticity, p. 61 et aussi du même, Strength of Materials, Vol. II, p. 429.

D'une manière plus précise, l'hypothèse de planéité des sections (distribution linéaire des déformations) n'est pas introduite en termes différentiels pour un élément infinitésimal pris le long de la ligne moyenne, ce qui donnerait des contraintes en contradiction avec les équations d'équilibre du voile. Nous écrivons uniquement que la déformation globale d'un cadre élémentaire est définie par cette hypothèse de planéité, c'est à dire que la déformation totale entre les 2 rives du cadre (dans le sens de la ligne moyenne) est définie par une loi linéaire. Cette condition est jointe aux efforts totaux définis dans la section moyenne du cadre (ces derniers calculés par la Résistance des Matériaux classique), effort normal et moment de flexion d'une part, effort tranchant d'autre part.

On obtient ainsi deux équations définissant les valeurs moyennes des contraintes (équations des moments et des efforts normaux).

D'autre part les équations différentielles d'équilibre des surfaces minces sont au nombre de 3:

$$(A) \begin{cases} 2 \text{ équations différentielles} \\ 1 \text{ équation à termes finis} \end{cases}$$

la dernière équation pouvant, au moins dans le cas de surfaces à courbures inverses, être écrite (voir plus loin):

$$\tau = R_N \frac{H^2}{2D'}.$$

τ étant la contrainte composée de cisaillement en coordonnées asymptotiques, R_N l'effort normal, $\frac{H^2}{2D'}$ une fonction de la courbure, („gauchissement" de la surface).

Cette dernière équation, jointe, non aux 2 équations différentielles mais aux 2 équations tirées de l'hypothèse de planéité donne un système de 3 équations à termes finis déterminant les valeurs moyennes des contraintes le long de leurs lignes d'action qui sont les asymptotiques. En particulier le problème est très simple quand les asymptotiques sont rectilignes.

Le système d'équations ainsi formé dit système (B) n'est pas en contradiction avec le système (A).

Celui ci donne en effet les variations des contraintes dans un élément, mais ne définit pas leurs valeurs moyennes.

Le système (B) au contraire, donne les valeurs moyennes, sans définir les variations.

Le système (B) est d'ailleurs suffisant, au point de vue de la connaissance des contraintes, quand le cadre élémentaire est petit par rapport aux dimensions générales de la pièce.

Il faut d'ailleurs noter que des constructions des types envisagés étant destinées à supporter des charges réparties, des charges rapidement variables (concentrées) qui rendraient le procédé de calcul illusoire, ne sont pas à considerer.

Nous établirons le calcul à partir des équations (B) uniquement.

Il est à remarquer que l'introduction des équations (A) n'augmente pas les difficultés du calcul et vient simplement compléter les résultats fournis par les équations (B).

Chapitre III. Formules générales d'équilibre des membranes.

Dans l'étude que nous avons faite pour Monsieur Lafaille sur la construction des voûtes en béton (voir le Rapport paru dans les Publications Préliminaires) nous avons développé, à partir des formules fondamentales établies par Monsieur Aimond et relatives à l'équilibre général des surfaces minces, un certain nombre de résultats d'ensemble relatifs au calcul de ces surfaces et que nous ne reproduisons pas ici.

Nous reprenons simplement d'une façon plus complète les calculs relatifs aux surfaces doublement réglées avec application plus particulière aux hyperboloïdes de révolution, ces calculs servant de base au calcul des membranes à cadre en forme d'hyperboloïde.

Section I: Formules de géométrie.

Soit une surface doublement réglée définie par les équations

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

u et v étant les coordonnées asymptotiques de la surface, c'est à dire que $u = C^{te}$ et $v = C^{te}$ définissent les droites des 2 familles de la surface. Posons:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$H^2 = EG - F^2.$$

Un élément d'arc ds (du, dv) est égal à:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Un élément de surface dS (du, dv) est égal à $dS = H\,du\,dv$.

Les directions principales sont définies par

$$\frac{du}{\sqrt{G}} = \pm\frac{dv}{\sqrt{E}}.$$

Nous définissons les directions asymptotiques par leurs vecteurs unitaires $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Par exemple la projection de $\vec{U}$ sur l'axe des x est

$$l_u = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{dx}{du}.$$

Section II: Équations d'équilibre.

Les forces extérieures de surface étant représentées par le vecteur

$$\vec{R}(X, Y, Z)$$

sur l'élément (du, dv) agit la force

$$\vec{R}\,H\,du\,dv$$

Nous décomposons $\vec{R}$ suivant les 2 directions asymptotiques (R_u et R_v) et l'intersection des plans osculateurs aux directions principales de la surface (R_w). La projection de $\vec{R}$ sur la normale à la surface est R_N.

Les contraintes internes agissant sur les cotés de l'élément du, dv, sont:

ν_1 agissant sur dv parallèlement à du
ν_2 „ „ du „ „ dv
τ „ tangentiellement sur du et sur dv.

L'équation générale d'équilibre est:

$$H\vec{R} = \frac{\partial}{\partial u}(\vec{V}\tau\sqrt{G} + \vec{U}\nu_1\sqrt{G}) + \frac{\partial}{\partial v}(\vec{U}\tau\sqrt{E} + \vec{V}\nu_2\sqrt{E})$$

$$= \vec{U}\left(\frac{\partial}{\partial u}(\nu_1\sqrt{G}) + \frac{\partial}{\partial v}(\tau\sqrt{E})\right) + \vec{V}\left(\frac{\partial}{\partial v}(\nu_2\sqrt{E}) + \frac{\partial}{\partial u}(\tau\sqrt{G})\right)$$

$$+ \tau\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial u}\sqrt{G} + \frac{\partial\vec{U}}{\partial v}\sqrt{E}\right).$$

Le vecteur

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial u}\sqrt{G} + \frac{\partial\vec{U}}{\partial v}\sqrt{E}$$

est l'intersection des plans osculateurs aux directions principales de la surface.

En effet, les lignes principales ont pour directions $\vec{U} \pm \vec{V}$.

Les plans osculateurs, sont définis par $\vec{U} \pm \vec{V}$ et par:

$$(\vec{U} \pm \vec{V})'_{\vec{U} \pm \vec{V}}$$

c'est à dire:

$$\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial u}du + \frac{\partial\vec{U}}{\partial v}dv\right) \pm \left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial u}du + \frac{\partial\vec{V}}{\partial v}dv\right)$$

avec:

$$\frac{du}{\sqrt{G}} = \pm\frac{dv}{\sqrt{E}}$$

et comme:

$$\frac{\partial\vec{U}}{du} = 0 \quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial v} = 0 \quad \text{(asymptotiques rectilignes)}$$

la direction commune des deux plans est bien:

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial v}\sqrt{E} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial u}\sqrt{G}.$$

La projection de ce vecteur sur la normale à la surface a pour valeur:

$$\frac{2D'}{H} \quad \text{avec} \quad D' = \left|\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial^2}{\partial u, \partial v}\right|(x, y, z).$$

On a donc:

$$\begin{cases} HR_u = \dfrac{\partial(\nu_1\sqrt{G})}{\partial u} + \dfrac{\partial(\tau\sqrt{E})}{\partial v} \\ HR_v = \dfrac{\partial(\nu_2\sqrt{E})}{\partial v} + \dfrac{\partial(\tau\sqrt{G})}{\partial u} \\ \tau = \dfrac{H^2}{2D'}R_N. \end{cases}$$

Section III: Cas des hyperboloïdes de révolution.

I° *Formules de géometrie.*

L'hyperboloïde est représenté par l'équation

$$\frac{z^2}{b^2} = \frac{x^2+y^2}{a^2} - 1 = \frac{\varrho^2}{a^2} - 1$$

avec $$c^2 = a^2 + b^2.$$

Les coordonnées asymptotiques seront φ et ψ, angles pris sur le cercle de gorge correspondant aux intersections avec celui-ci des 2 asymptotiques passant par le point M (x, y, z) considéré.

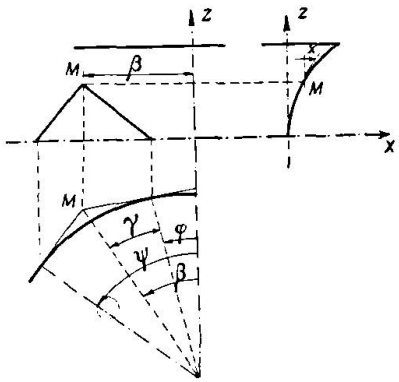

Fig. 2.

Posons: $\beta = \frac{\psi+\varphi}{2}$; $\gamma = \frac{\psi-\varphi}{2}$.

On a:

$$x = a\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}; \quad y = a\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}; \quad z = b\,\mathrm{tg}\,\gamma.$$

En particulier, pour $\beta = 0$ (plan $x\,0\,z$):

$$x = \frac{a}{\cos\gamma}; \quad z = b\,\mathrm{tg}\,\gamma.$$

Dans ce qui suit, les coordonnées (x, z) seront issues du point $\varphi = 0$, $\psi = 0$, de sorte que:

$$x = a\left(\frac{1}{\cos\gamma} - 1\right) = \frac{a\sin^2\gamma}{\cos\gamma\,(1+\cos\gamma)}.$$

Les coordonnées curvilignes fondamentales étant considérées comme étant ψ, φ, et les formules étant exprimées à l'aide de β, γ, on a:

$$K = \sqrt{E} = \sqrt{G} = \frac{c}{2\cos^2\gamma}$$

$$H = \frac{a^2}{2\cos^3\gamma}\cdot\sqrt{\sin^2\gamma + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{2\cos^2\gamma}\,\mathrm{tg}\,\omega.$$

ω est le demi-angle des asymptotiques, tel que:

$$\cos\omega = \frac{a}{c}\cos\gamma; \quad \sin\omega = \frac{a}{c}\sqrt{\sin^2\gamma + \frac{b^2}{a^2}}; \quad \mathrm{tg}\,\omega = \frac{\sqrt{\sin^2\gamma + \frac{b^2}{a^2}}}{\cos\gamma}.$$

La quantité $\frac{H^2}{2D'}$ a pour valeur:

$$\frac{H^2}{2D'} = \frac{a^2}{2b}\,\mathrm{tg}^2\,\omega.$$

Le ds d'arc de parallèle est:

$$ds = \frac{a}{\cos\gamma}\,d\beta.$$

Le $d\varepsilon$ d'arc de méridien est:

$$d\varepsilon = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\omega}{\cos\gamma}\,d\gamma.$$

Enfin, χ étant l'angle avec l'axe du plan tangent en un point, on a:

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{a}{b}\sin\gamma; \qquad \sin\chi = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\omega}; \qquad \cos\chi = \frac{b}{a\cos\gamma\operatorname{tg}\omega}.$$

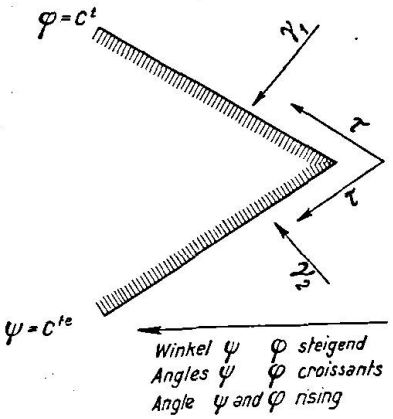

Fig. 3.

On a, par application des formules générales:

$$(A)\begin{cases} \tau = R_N \dfrac{a^2}{2b}\cdot\operatorname{tg}^2\omega \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\nu_1}{\cos^2\gamma}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\psi}\left(\dfrac{\tau}{\cos^2\gamma}\right) = R\varphi\,\dfrac{a^2}{c}\,\dfrac{\operatorname{tg}\omega}{\cos^2\gamma} \\ \dfrac{\partial}{\partial\psi}\left(\dfrac{\nu_2}{\cos^2\gamma}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\tau}{\cos^2\gamma}\right) = R\psi\,\dfrac{a^2}{c}\,\dfrac{\operatorname{tg}\omega}{\cos^2\gamma}. \end{cases}$$

$R\varphi$ et $R\psi$ remplaçant respectivement $R_u R_v$ des formules générales.

II° *Formules d'équilibre sur les directions principales.*

Si l'on considère les lignes $\beta = C^{te}$, $\gamma = C^{te}$ (méridiens et parallèles) les fatigues normale et tangentielle sont:

Sur un élément $d\beta$: μ_1, Θ
Sur un élément $d\gamma$: μ_2, Θ

On a les relations suivantes entre ces contraintes et les contraintes asymptotiques:

$$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{\operatorname{tg}\omega}{2}(\nu_1 + \nu_2 - 2\tau) \\ \mu_2 = \dfrac{1}{2\operatorname{tg}\omega}(\nu_1 + \nu_2 + 2\tau) \\ \Theta = \dfrac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1). \end{cases}$$

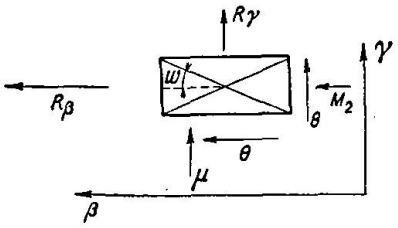

Fig. 4.

La combinaison des formules précédentes en asymptotiques donne:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\beta}\left(\dfrac{\mu_2\operatorname{tg}\omega}{\cos^2\gamma}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\gamma}\left(\dfrac{\Theta}{\cos^2\gamma}\right) = R_\beta a\,\dfrac{\operatorname{tg}\omega}{\cos^3\gamma} \\ \dfrac{\partial}{\partial\gamma}\left(\dfrac{\mu_1}{\operatorname{tg}\omega\cos^2\gamma}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\beta}\left(\dfrac{\Theta}{\cos^2\gamma}\right) = R_\gamma\,\dfrac{a}{\cos^3\gamma} \\ \mu_2\operatorname{tg}\omega - \dfrac{\mu_1}{\operatorname{tg}\omega} = R_N\,\dfrac{a^2}{b}\operatorname{tg}^2\omega. \end{cases}$$

Ces formules seront utilisées plutôt sous la forme:

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_2\operatorname{tg}^2\omega - R_N\dfrac{a^2}{b}\operatorname{tg}^3\omega \\ \dfrac{\partial\Theta}{\partial\beta} = R_\gamma\dfrac{a}{\cos\gamma} - \cos^2\gamma\,\dfrac{\partial}{\partial\gamma}\left(\dfrac{\mu_1}{\operatorname{tg}\omega\cos^2\gamma}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial\gamma}\left(\dfrac{\Theta}{\cos^2\gamma}\right) = R_\beta a\,\dfrac{\operatorname{tg}\omega}{\cos^3\gamma} - \dfrac{\operatorname{tg}\omega}{\cos^2\gamma}\,\dfrac{\partial\mu_2}{\partial\beta}. \end{cases}$$

Dans une première partie, nous déterminerons la répartition des efforts N et M (effort normal et moment de flexion). Dans une 2e partie nous mettrons en compte l'effort tranchant T, qui permet de repartir les efforts de cisaillement.

Chapitre IV. Étude de la répartition des efforts normaux à partir des hypothèses de planéité.

I° Introduction.

Soient 2 sections droites voisines d'une poutre (droite ou courbe) à l'état libre.

Quand on charge cette poutre, les sections, tout au moins en général, ne restent pas planes, et l'on ne peut plus définir l'angle des 2 sections après déformation. Mais il est toujours loisible d'écrire que, en première approximation, l'allongement des fibres tout le long de l'axe transversal ox est de la forme:

$$\Delta = \delta_1 x + \delta_0 \qquad (1)$$

Cette expression entraine évidemment une répartition des contraintes bien déterminée.

Dans le cas usuels, cette répartition est évidemment en bonne approximation de la répartition réelle dont elle représente sensiblement les premiers termes du développement en série en fonction de x.

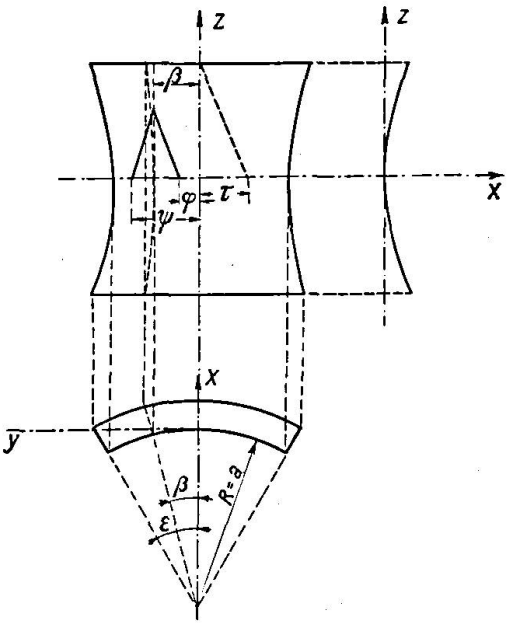

Fig. 5.

Si l'on considère le développement comme limité à ces deux termes, la statique pure permet de définir leur valeur, si le moment et l'effort normal sont définis au droit de la section.

D'autre part l'expression (1) permet évidemment d'écrire (en lui adjoignant les déformations d'effort tranchant) des relations entre les déformations angulaire et métrique de la pièce, d'une part, et les efforts qui lui sont appliqués en chaque point, d'autre part.

Il en résulte que des relations, telles que les théorèmes de Castigliano et de Menabrea, peuvent être transposées à cette élastique dont la formule fondamentale est (1).

Il est alors intéressant de remarquer que si la formule (1) ne donne pas de résultats exacts pour la répartition rigoureuse des contraintes, les 2 quantités δ_0 et δ_1 représentant l'allongement moyen et la rotation moyenne, suffisent pour une application très précise de théorèmes sus-indiqués, de sorte que la résolution du système hyperstatique est relativement bien plus exacte que la résolution du problème de la répartition des contraintes.

II° Relation entre les contraintes et les déformations.

Soit un cadre élémentaire d'un hyperboloïde de révolution défini par son rayon $R = a$ au cercle de gorge et la valeur b de l'axe non transverse de l'hyperbole méridienne.

Soient $2L$ la longueur d'arc sur le cercle de gorge, $2B$ la largeur du cadre.

φ et ψ étant les coordonnées asymptotiques, on a sur le méridien de rive, l'axe de l'élément étant pris pour origine:

$$\beta = \frac{L}{R} = \varepsilon.$$

Sur les rives des parallèles on a:

$$\gamma = \psi = -\varphi = \lambda \quad \text{et} \quad b \operatorname{tg} \lambda = B.$$

Sur l'axe
$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos \dfrac{\psi - \varphi}{2}} - a = \dfrac{a}{\cos \gamma} - a \\[2ex] z = b \operatorname{tg} \dfrac{\psi - \varphi}{2} = b \operatorname{tg} \lambda \end{cases}$$

Soient μ_1 et μ_2 les contraintes suivant le méridien et le parallèle, prises pour toute l'épaisseur e.

La déformation dans le sens du parallèle est:

(E: module d'Young,
σ : coefficient de Poisson)

$$(\mu_2 - \sigma \mu_1) \frac{1}{Ee}.$$

La déformation totale le long de l'élément est:

$$\Delta = \frac{1}{Ee} \int (\mu_2 - \sigma \mu_1)\, ds$$

$$\Delta = \frac{a}{Ee \cos \gamma} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\mu_2 - \sigma \mu_1)\, d\beta$$

$$\left(\text{puisque} \quad ds = \frac{a}{\cos \gamma}\, d\beta\right).$$

Dans le cas de cadres normalement utilisés, ε est petit (de l'ordre de $^1/_{20}$). Dans ces conditions l'intégrale:

$$I = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\mu_2 - \sigma \mu_1)\, d\beta$$

devient:

$$I = 2\varepsilon (\mu_2 - \sigma \mu_1).$$

Comme:

$$\mu_1 = \mu_2 \operatorname{tg}^2 \omega - R_N \frac{a^2}{b} \operatorname{tg}^3 \omega,$$

il résulte:

$$\Delta = \frac{1}{Ee} \frac{a}{\cos \gamma} 2\varepsilon \left[\mu_2 (1 - \sigma \operatorname{tg}^2 \omega) + \sigma R_N \frac{a^2}{b} \operatorname{tg}^3 \omega\right].$$

Comme il a été dit, nous posons:

$$\Delta = \delta_1 x + \delta_0.$$

Remplaçant δ_1 et δ_0 par des quantités proportionnelles telles que:

$$\frac{m_1}{\delta_1} = \frac{m_0}{\delta_0} = \frac{Ee}{2a\varepsilon},$$

il vient:

$$m_1 x + m_0 = \mu_2 \frac{1 - \sigma \operatorname{tg}^2 \omega}{\cos \gamma} + \frac{\sigma \operatorname{tg}^3 \omega}{\cos \gamma} R_N \frac{a^2}{b}.$$

Il en résulte la formule fondamentale:

$$\boxed{\mu_2 = -\frac{\sigma \operatorname{tg}^3 \omega}{1 - \sigma \operatorname{tg}^2 \omega} \frac{a^2}{b} R_N + (m_1 x + m_0) \frac{\cos \gamma}{1 - \sigma \operatorname{tg}^2 \omega}}$$

Les quantités m_1 et m_0 sont déterminées en écrivant que la résultante des μ_2 est égale à l'effort normal résultant, et que le moment des forces μ_2 est égal au moment résultant.

On a donc les équations:

$$N = \int \mu_2 \, d\Sigma$$
$$M = \int \mu_2 x \, d\Sigma$$

les moments étant pris sur le cercle de gorge.

On a:

$$d\Sigma = \frac{a \operatorname{tg} \omega}{\cos \gamma} d\gamma.$$

On peut généraliser ces équations en écrivant que les pièces formant les rives parallèles participent à la déformation.

Soit S leur section et I leur moment d'inertie, les rives étant soumises à une contrainte n, on a immédiatement:

$$\Delta = \frac{n \cdot 2 \varepsilon a}{E \cos \gamma}.$$

En appliquant les règles classiques de la résistance des matériaux il vient, f_0 étant l'abscisse du centre de gravité de la rive:

$$\int n \, ds = (f_0 \delta_1 + \delta_0) S \frac{E}{2 \varepsilon} \frac{\cos \gamma_0}{a} = (f_0 m_1 + m_0) \frac{S}{e} \cos \gamma_0.$$

γ_0 est l'angle moyen, pratiquement confondu avec l'angle correspondant à f_0.

De même, on a:

$$\int n x \, ds = f_0 (f_0 m_1 + m_0) \frac{S}{e} \cos \gamma_0 + \frac{I}{e} m_1 \cos \gamma_0.$$

Il en résulte les formules:

$$\text{(I)} \quad \boxed{\begin{aligned} N &= \int_0^\lambda \frac{\mu_2 a \operatorname{tg} \omega}{\cos \gamma} d\gamma + \frac{S}{e} (m_1 f_0 + m_0) \cos \gamma_0 \\ M &= \int_0^\lambda \frac{\mu_2 a^2 \operatorname{tg} \omega}{\cos \gamma} \left(\frac{1}{\cos \gamma} - 1 \right) d\gamma + \frac{(S f_0^2 m_1 + I m_1 + S f_0 m_0) \cos \gamma_0}{e} \\ \mu_2 &= -\frac{\sigma \operatorname{tg}^3 \omega}{1 - \sigma \operatorname{tg}^2 \omega} \frac{a^2}{b} R_N + (m_1 x + m_0) \frac{\cos \gamma}{1 - \sigma \operatorname{tg}^2 \omega} \\ n &= \frac{(m_1 x + m_0)}{e} \cos \gamma \end{aligned}}$$

III° Relation entre les efforts totaux et les déformations — Centre d'action — Potentiel interne.

Posons:

$$\int \frac{\cos\gamma\, d\Sigma}{1-\sigma\,\mathrm{tg}^2\,\omega} + \frac{S}{e}\cos\gamma_0 = I_0$$

$$\int \frac{x\cos\gamma\, d\Sigma}{1-\sigma\,\mathrm{tg}^2\,\omega} + \frac{S}{e} f_0 \cos\gamma_0 = I_1$$

$$\int \frac{x^2\cos\gamma\, d\Sigma}{1-\sigma\,\mathrm{tg}^2\,\omega} + \frac{S f_0^2 + I}{e}\cos\gamma_0 = I_2$$

$$\int -\frac{\sigma\,\mathrm{tg}^3\,\omega}{1-\sigma\,\mathrm{tg}^2\,\omega}\,\frac{a^2}{b} R_N\, d\Sigma = -P'_R\,\sigma$$

$$\int -\frac{\sigma\,\mathrm{tg}^3\,\omega}{1-\sigma\,\mathrm{tg}^2\,\omega}\,\frac{a^2}{b} R_N\, x\, d\Sigma = -P''_R\,\sigma.$$

Il vient:

$$N = m_1 I_1 + m_0 I_0 - P'_R\,\sigma$$
$$M = m_1 I_2 + m_0 I_1 - P''_R\,\sigma.$$

Dans un calcul de système hyperstatique, M est défini par rapport au centre de gravité de la section et l'on obtient:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{M}{EI}.$$

Pour que l'on puisse écrire ici une telle relation cherchons un point tel que la déformation angulaire m_1 ne dépende pas de l'effort normal, quand on définit le moment par rapport à ce point.

Soit g ce point ($x = g$), M_g le moment correspondant:

$$M = M_g + g N.$$

Donc:

$$M_g = m_1 (I_2 - g I_1) + m_0 (I_1 - g I_0) - (P''_R - P'_R g)\,\sigma.$$

On déduit immédiatement:

$$g = \frac{I_1}{I_0}.$$

On voit que:

1°) g n'est pas le centre de gravité défini en Résistance des Matériaux. Il en diffère par l'introduction dans les intégrales I_1 et I_0 de $\cos\gamma$ (qui est une généralisation au cas des poutres courbes des formules uselles pour les poutres droites) et de l'expression $1 - \sigma\, tg^2\,\omega$ qui provient de la contraction transversale.

2°) m_1 est donné par la relation:

$$m_1 = \frac{M_g + (P''_R - P'_R g)\,\sigma}{I_2 - g^2 I_0}.$$

Au dénominateur figure une expression du type $I - S\varrho^2$ qui représente un moment d'inertie.

Au numérateur, M_g ne figure pas seul. Les intégrales P_R' et P_R'' existent de par la présence du coefficient de Poisson.

La déformation angulaire peut être définie par δ_1:

$\frac{\delta_1}{2\varepsilon(a+g)}$ donne la variation de courbure $\frac{d\alpha}{dy}$ qui est:

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{a+g} = \frac{a}{Ee(a+g)} \frac{M_g + (P''_R - P'_R g)\sigma}{I_2 - g^2 I_0}.$$

Posons:

$$I_g = \int \frac{(x-g)^2 \cos\gamma \, d\Sigma}{1 - \sigma \operatorname{tg}^2 \omega} + \frac{1}{e}(S(f_0 - g)^2 + I) \cos\gamma_0$$

$$P_R = \frac{a^2}{b} \int \frac{\operatorname{tg}^3 \omega}{1 - \sigma \operatorname{tg}^2 \omega}(x-g) R_N \, d\Sigma$$

ϱ étant le rayon de courbure:

$$\Delta\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{E} \frac{M_g + P_R \sigma}{I_g e \frac{a+g}{a}}.$$

L'expression du rayon de courbure ne diffère de l'expression classique que par les conventions sur la définition de g et de I_g, d'une part, et par l'introduction de σP_R, d'autre part.

Posant: $$m_0 + m_1 g = m_g,$$

on a:

$$N = m_g I_0 - P'_R \sigma.$$

Posant:
$$\begin{cases} \Omega = I_0 e \frac{a+g}{a} \\ I = I_g \frac{a+g}{a} e \end{cases}$$

on a donc (i etant le raccourcissement unitaire):

$$m_g = \frac{N + P'_R \sigma}{I_0}; \quad i = \frac{1}{E} \frac{N + P'_R \sigma}{I_0 e \frac{a+g}{a}} = \frac{N + P'_R \sigma}{E\Omega}$$

$$m_1 = \frac{M_g + P_R \sigma}{I_g}; \quad \Delta\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{E} \frac{M_g + P_R \sigma}{I_g e \frac{a+g}{a}} = \frac{M_g + P_R \sigma}{EI}.$$

On déduit immédiatement l'expression du potentiel interne par unité de longueur sur le cercle de gorge:

$$W = \frac{1}{2Ee}[m_1^2 I_g - m_1 \sigma P_R + m_g^2 I_0 - m_g \sigma P'_R]$$

$$= \frac{1}{2Ee}\left[\frac{(M_g + \frac{1}{2} P_R \sigma)^2 - (\frac{1}{2}\sigma P_R)^2}{I_g} + \frac{(N + \frac{1}{2} P'_R \sigma)^2 - (\frac{1}{2}\sigma P'_R)^2}{I_0}\right].$$

La partie utile de l'expression de W pour le calcul des réactions hyperstatiques est (c'est la seule partie dépendant des réactions hyperstatiques):

$$W_u = \frac{1}{2E} \frac{(M_g + \frac{1}{2} P_R \sigma)^2}{e I_g} + \frac{1}{2E} \frac{(N + \frac{1}{2} P'_R \sigma)^2}{e I_0}.$$

W_u est donc la somme de deux carrés l'un en M, l'autre en N.

L'application du théorème de Menabrea à cette expression se fait de la même façon qu'à une expression du même type de la Résistance des matériaux classique.

Chapitre V. Répartition des efforts de cisaillement.

Les efforts de cisaillement sont définis par les 2 expressions suivantes:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = R\gamma \frac{a}{\cos\gamma} - \cos^2\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\mu_1}{\operatorname{tg}\omega \cos^2\gamma}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\Theta}{\cos^2\gamma}\right) = R\beta \frac{a \operatorname{tg}\omega}{\cos^3\gamma} - \frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos^2\gamma}\frac{\partial \mu_2}{\partial \beta}. \tag{2}$$

Ces 2 formules s'interprètent de façons différentes. La formule (1) définit, dans l'intérieur d'un cadre, la variation de Θ le long d'un parallèle, mais ne définit pas les valeurs de Θ le long d'un méridien. Dans son expression figure la quantité:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\mu_1}{\operatorname{tg}\omega \cos^2\gamma}\right)$$

qui peut être calculée à partir des considérations indiquées ci-dessus.

En effectuant les opérations on trouve:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = R\gamma \frac{a}{\cos\gamma} - \frac{\operatorname{tg}\gamma}{1-\sigma \operatorname{tg}^2\omega}\left[m_1 a \operatorname{tg}\omega + (m_1 x + m_0)\left\{\frac{2\frac{c^2}{a^2} - \cos^2\gamma}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \sin^2\gamma}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\sigma \operatorname{tg}\omega}{1-\sigma \operatorname{tg}^2\omega}\frac{c^2}{a^2\cos\gamma}\right\} - \frac{2R_N}{\cos^2\gamma\, b}\left(c^2 - a^2\cos^2\gamma + \frac{c^2}{1-\sigma \operatorname{tg}^2\omega}\right)\right] +$$

$$+ \frac{a^2}{b}\frac{\operatorname{tg}^2\omega}{(1-\sigma \operatorname{tg}^2\omega)}\frac{\partial R_N}{\partial \gamma}.$$

D'autre part, la formule (2) semble définir la répartition de Θ le long d'un méridien, mais on doit remarquer que:

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\mu_2 \operatorname{tg}\omega}{\cos^2\gamma}\right) = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos^2\gamma}\frac{\partial \mu_2}{\partial \beta}$$

n'est pas défini par les considérations qui précédent. D'autre part, la distribution des cisaillements en section est fonction principalement de la distribution des efforts normaux μ_2, non à l'intérieur d'un cadre, mais le long de la ligne moyenne, d'un cadre à l'autre. Il s'ensuit donc que $\frac{\partial \mu_2}{\partial \beta}$ peut être obtenu en dérivant par rapport à β l'expression de μ_2 calculée sur l'axe du cadre, en considérant M et N comme des fonctions de β.

Nous pouvons donc écrire:

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial \beta} = -\frac{2\sigma \operatorname{tg}\omega}{1-\sigma \operatorname{tg}^2\omega}\frac{\partial \tau}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial m_1 x}{\partial \beta} + \frac{\partial m_0}{\partial \beta}\right)\frac{\cos\gamma}{1-\sigma \operatorname{tg}^2\omega}.$$

Posant:

$$\frac{\partial m_1}{\partial \beta} = L_1 \qquad \frac{\partial m_0}{\partial \beta} = L_2$$

il vient donc:

$$\frac{\partial u_2}{\partial \beta} = -\frac{2\sigma \operatorname{tg}\omega}{1-\sigma \operatorname{tg}^2\omega}\frac{\partial \tau}{\partial \beta} + (L_1 x + L_0)\frac{\cos\gamma}{1-\sigma \operatorname{tg}^2\omega}.$$

D'autre part:

$$\frac{\partial M_g}{\partial \beta} = TR_M. \qquad \frac{\partial N}{\partial \beta} = -T + P_t R_M.$$

R_M est le rayon de la ligne moyenne, P_t la composante tangentielle des forces extérieures, M_g le moment sur la gigne moyenne.

On a: $$M = M_g + Ng.$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} gP_tR_M + TR = \int x \dfrac{\partial \mu_2}{\partial \beta}\dfrac{a \operatorname{tg}\omega}{\cos\gamma}\, d\gamma \\ P_tR_M - T = \int \dfrac{\partial \mu_2}{\partial \beta}\dfrac{a \operatorname{tg}\omega}{\cos\gamma}\, d\gamma \end{cases}$$

(R est le rayon du cercle de gorge $R = a$.)

En introduisant les sections des membrures, on trouve, d'une façon générale, les 3 formules fondamentales:

$$\text{(II')} \quad \boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial \mu_2}{\partial \beta} = -\frac{\sigma \operatorname{tg}^3\omega}{1-\sigma \operatorname{tg}^2\omega}\frac{a^2}{b}\frac{\partial R_N}{\partial \beta} + (L_1 x + L_0)\frac{\cos\gamma}{1-\sigma \operatorname{tg}^2\omega} \\ &P_tR_M - T = \int \frac{\partial \mu_2}{\partial \beta}\, d\Sigma + \frac{S}{e}(L_1 f_0 + L_0)\cos\gamma_0 \\ &gP_tR_M + TR = \int x\frac{\partial \mu_2}{\partial \beta}\, d\Sigma + \frac{(Sf_0^2L_1 + IL_1 + Sf_0L_0)\cos\gamma_0}{e} \end{aligned}}$$

La formule (2) ci dessus permet de déterminer $\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\Theta}{\cos^2\gamma}\right)$ compte tenu du fait que pour $\gamma = 0$ par raison de symétrie, le cisaillement est nul.

Cette détermination de Θ pour $\beta = 0$, jointe à la formule $\frac{\partial \Theta}{\partial \beta}$, donne toutes les valeurs de Θ.

Ces formules ne permettent pas de résoudre le problème des efforts introduits par les cisaillements dans les pannes. En effet représentons en fonctions de β la loi de cisaillement Θ pour $\gamma = c^{te}$, dans 2 cadres consécutifs.

Dans chaque cadre à partir de la valeur Θ_0 calcaluée sur son axe Θ varie suivant la loi en trait plein. Θ_0 qui peut être calculé en tout point de la ligne moyenne, varie suivant le tracé en pointillé (qui ne correspond pas à une distribution matérielle de cisaillements). On peut dire que le cisaillement supporté par la panne, dû au cadre I, est égal à A B et que le cisaillement supporté par la panne, dû au cadre II, est égal à A C. On voit immédiatement que:

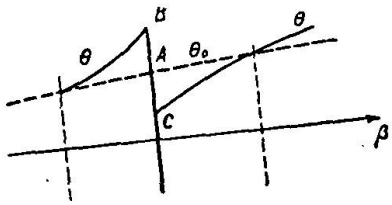

Fig. 6

$$AB = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} - \frac{\partial \Theta_0}{\partial \beta}\right)\varepsilon$$

$\frac{\partial \Theta_0}{\partial \beta}$ s'obtient en dérivant les formules (II').

On a $\frac{\partial \Theta}{\partial \beta}$ par la formule (1).

Il en résulte immédiatement $\left(\text{avec } \frac{\partial L_1}{\partial \beta} = K_1;\ \frac{\partial L_0}{\partial \beta} = K_0\right)$

$$
\text{(III')}\quad \boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial\gamma\,\partial\beta}\left(\frac{\Theta_0}{\cos^2\gamma}\right) = \frac{\partial R_\beta}{\partial \beta}\, a \operatorname{tg} w \frac{1}{\cos^3\gamma} - \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \beta^2}\frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos^2\gamma}\\
&\frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \beta^2} = -\frac{\sigma \operatorname{tg}^3\omega}{1-\sigma\operatorname{tg}^2\omega}\frac{a^2}{b}\frac{\partial^2 R_N}{\partial\beta^2} + (k_1 x + k_2)\frac{\cos\gamma}{1-\sigma\operatorname{tg}^2\omega}\\
&\frac{\partial P_t}{\partial \beta} R_M + N - P_n R_M = \int \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \beta^2}\, d\Sigma + \frac{S}{e}(k_1 f_0 + k_0)\cos\gamma_0\\
&g R_M \frac{\partial P_t}{\partial \beta} - NR + P_n R R_M = \int x \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \beta^2}\, d\Sigma + \frac{(S f_0^2 K_1 + I K_1 + S f_0 K_0)\cos\gamma_0}{e}
\end{aligned}}
$$

On définit ainsi la valeur des cisaillements dans la panne.

Chapitre VI. Efforts dans les pièces du cadre.

Les pièces du cadre sont: les membrures (le long des parallèles) et les pannes rives intérieures (le long des méridiens).

I° Les membrures.

Les membrures sont soumises aux efforts suivants:

1°) La part qui leur est propre de l'effort de compression ou traction, tel qu'il est défini par $\frac{S}{e}\mu_2$, μ_2 étant calculé pour $x = f_0$.

2°) Les efforts normaux μ_1 que l'on peut admettre uniformes d'une panne à l'autre.

3°) Les efforts tangentiels Θ (différents de Θ_0) qui varient linéairement.

Ces membrures peut être considérées comme poutres courbes continues. Comme, dans les calculs de vérification, on calcule les régions d'effort maximum, les efforts varient lentement d'un cadre à l'autre; le calcul peut donc être assimilé à celui d'une poutre continue uniformément chargée, c'est à dire une poutre encastrée aux points d'appuis qui sont formés par les pannes.

II°. Les pannes (rives intérieures).

Les pannes sont soumises aux efforts suivants:

1°) Les différences des efforts μ_2 d'un coté et de l'autre de la panne que nous négligeons, étant donné que la rigidité d'une bande de la surface prise le long du méridien est incomparablement plus grande que celle d'une panne. Eu égard à la petitesse des efforts différentiels μ_2, cette approximation est de peu d'importance.

2°) Les efforts $(\Theta - \Theta_0)$ qui s'ajoutent des deux côtés de la panne.

3°) Les réactions d'appui (efforts tranchants) des membrures. L'ensemble des forces 2° et 3° doit être équivalent à 0.

La panne doit être calculée comme une poutre courbe sur deux appuis (les réactions d'appuis étant définies indépendamment des charges) dans le sens transversal à la ligne moyenne du système étudié.

Chapitre VII. Conclusions théoriques.

Dans ce qui suit, nous allons faire une brève comparaison de la méthode de calcul, telle qu'elle vient d'être esquissée, avec la méthode de calcul classique de Résistance des Matériaux.

Notons tout d'abord que la méthode de calcul actuelle, pas plus que les méthodes employées jusqu'ici pour ce genre de problèmes, n'étudie pas l'état de contraintes au voisinage immédiat des pièces de cadre, sauf toutefois en ce qui concerne la déformation le long des membrures suivant le parallèle, les déformations de la membrure et de la membrane étant compatibles, aux faibles efforts Θ près, qui sont induits dans la membrure (et qui sont d'autant plus petits que le cadre est petit).

On peut répondre à cette observation en s'appuyant, soit sur les principes d'accomodation, soit sur les démonstrations mathématiques de la faible importance des équations surabondantes.

Ceci posé, nous remarquerons que des 2 équations que fournit l'élastique à 2 dimensions:

$$\frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} = X; \qquad \frac{\partial n_2}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x} = Y,$$

le processus habituel de calcul de Résistance consiste à en utiliser zéro ou une seule.

Dans le 1er cas, on pose les formules suivantes à partir de l'hypothèse de la planéité des sections (qui entraine implicitement le principe d'équipollence, puisque, si celui ci n'était pas vrai, les déformations des sections restant planes ne donneraient pas suffisamment de paramètres arbitraires pour tenir compte de la distribution des forces):

$$n_2 = \frac{Mv}{I} + \frac{N}{\Omega}; \qquad t = \frac{T}{\Omega}.$$

Dans le 2e cas, on rectifie la 2e formule qui devient:

$$t = \frac{TA}{Ie},$$

A étant le moment statique, par rapport au centre de gravité, de la section au delà du point considéré, et e l'épaisseur en tout point. Pour établir cette formule, on se sert de la 2e équation différentielle (x étant dans le sens transversal et y suivant la ligne moyenne de la pièce).

La 1re équation différentielle donne des valeurs de n_1 qui sont en général inconciliables avec l'équation dite de compatibilité.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(n_1 + n_2) = -(1+\sigma)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right).$$

Au contraire, les 3 équations d'équilibre des membranes sont entièrement appliquées dans les calculs développés précédemment, avec la seule restriction, (qui peut être levée par l'introduction de termes correctifs avec lesquels on pourrait reprendre le calcul et atteindre l'approximation que l'on veut) que la longueur d'un cadre élémentaire doit être petite par rapport à celle de la pièce étudiée.

D'autre part, l'équation de compatibilité n'existant pas dans le cas de membranes non planes, le problème est entièrement résolu.

(L'équation de compatibilité est remplacée par la 3e équation d'équilibre.)

Il résulte de ces considérations que, en introduisant la même hypothèse

fondamentale que celle de la Résistance des Matériaux Classiques (principe de Saint-Venant), nous résolvons complètement le problème posé, en vérifiant toutes les conditions imposées par les équations d'équilibre, ce que ne donne pas la Résistance des Matériaux des pièces planes.

On voit donc que l'on peut avoir en ces calculs une confiance au moins aussi grande qu'en ceux de la Résistance des Matériaux et que la technique de la construction par membranes minces à cadres rigides peut être considérée comme entièrement au point.

2ème partie.

Exemple de réalisation.

Au début de l'année 1935, Le Ministère de l'Air décida de construire un assez grand nombre de hangars métalliques.

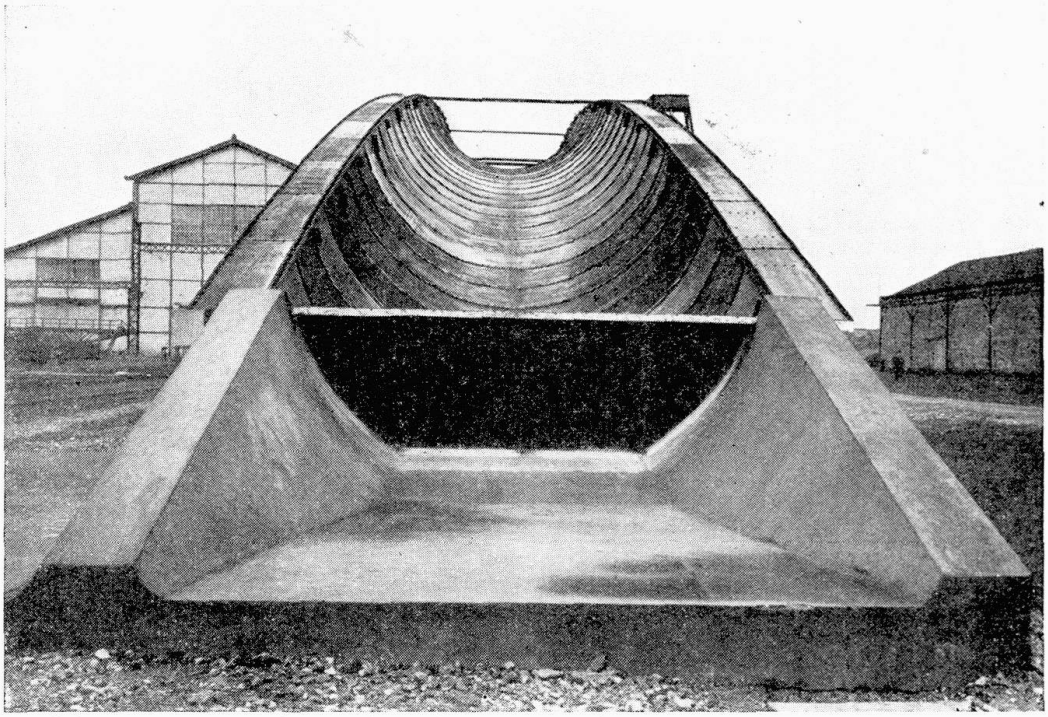

Fig. 7.
Gewölbe-Bogen von 70 m Spannweite. Hersteller: Delattre et Frouard réunis.
Voûte-arc de 70 m de portée — Vue générale. Etablissements Delattre et Frouard Réunis.
Shell-Arch, 70 m span. Built by Delattre et Frouard réunis.

Nous avons étudié, pour un des concours qui ont eu lieu à cette époque, deux modèles différents de couvertures autoportantes en métal, les deux modèles dérivant des mêmes considérations théoriques (exposées dans la première partie).

Pour les deux modèles, nous avons réalisé des éléments d'essai en vraie grandeur, dont les photographies ci-après donnent une idée.

Le premier modèle est un arc de 70 m de portée et de 8 m de flèche. Il a été réalisé sur le sol, appuyé sur des culées. Il est destiné à servir de couverture à des hangars de 70 m, avec, soit un tirant directement suspendu à

l'arc, soit des contrefiches extérieures des deux côtés du bâtiment, avec tirant enterré ou butées dans le sol.

Le deuxième modèle est une couverture plate travaillant en poutre sur 35 m de portée.

Fig. 8.
Gewölbe-Bogen von 70 m Spannweite — Endansicht.
Hersteller: Delattre et Frouard réunis.
Voûte-arc de 70 m de portée — Vue en bout. Etablissements Delattre et Frouard réunis.
Shell-Arch, 70 m span — End view. Built by Delattre et Frouard réunis.

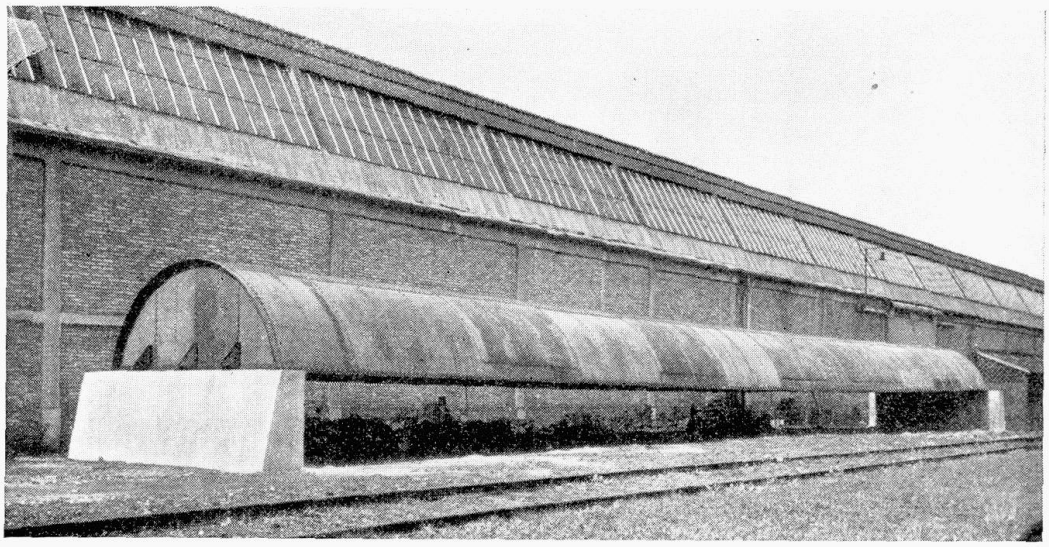

Fig. 9.
Gewölbe-Balken von 35 m Spannweite. Hersteller: Delattre et Frouard réunis.
Voûte-poutre de 35 m de portée — Vue générale.
Etablissements Delattre et Frouard réunis.
Shell-Beam, 35 m span. Built by Delattre et Frouard réunis.

Les deux modèles sont réalisés de la même façon.

L'arc et la poutre sont formés d'éléments en tôle de 3 mm, cintrée pour réaliser un demi-tube.

Suivant le traçage des joints, on obtient des arcs de divers rayons constitués par des demi-tubes placés bout à bout ou bien des poutres droites. Le demi-tube est raidi de place en place par des raidisseurs en cornières et des pannes réalisées par de petites poutres courbes en treillis. Plusieurs éléments

de tôle sont soudés bout à bout. De place en place, des joints démontables sont réalisés par des lignes de boulonnage.

Un pareil élément a une largeur d'environ 4,5 m. Un certain nombre de tels éléments placés côte à côte et reliés entre eux par des joints étanches constituent une couverture de bâtiment.

Le modèle qui nous a été commandé en trois exemplaires (hangar de 67,5 m × 67,5 m) est le deuxième (poutre droite). Ce modèle correspond plus exactement aux conditions du concours, un appui au centre du hangar étant autorisé. Ce deuxième modèle, qui nécessitait l'emploi du point d'appui intermédiaire, eu égard à la distance à franchir, était, par là même, moins onéreux que le premier qui nécessite des tirants et des pignons supplémentaires.

Nous examinons en détail le mode de construction du bâtiment réalisé à partir de cette voûte.

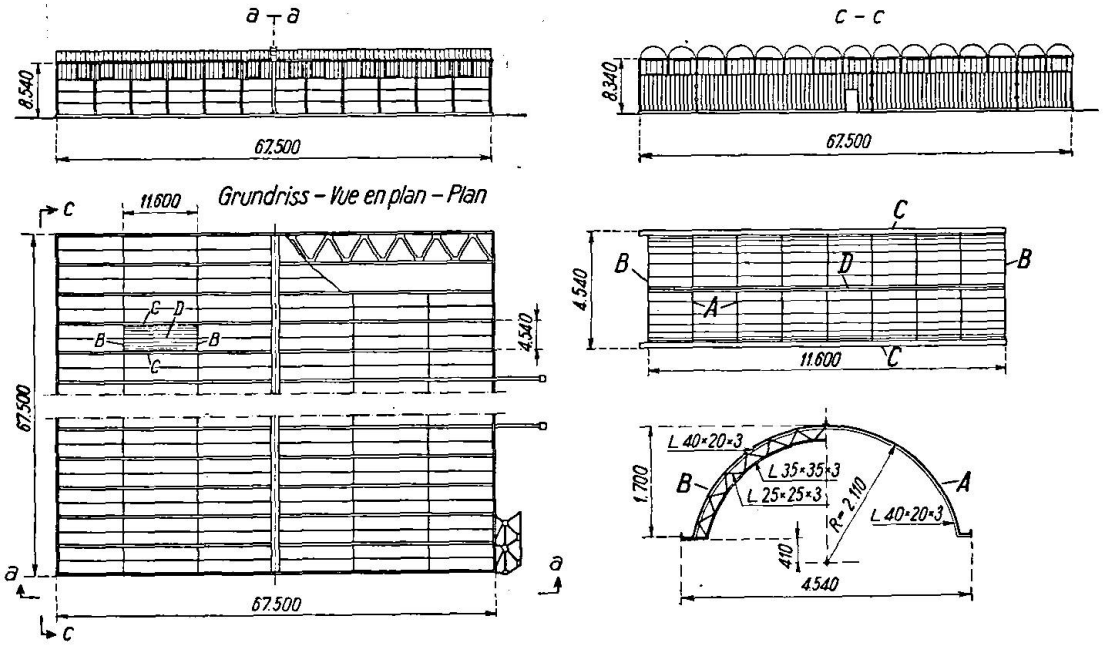

Fig. 10.

Chapitre I. Description du hangar.

Le hangar a le gabarit intérieur suivant: 67,5 m × 67,5 m × 8,5 m (fig. 10).

Un des longs pans (façade) du hangar est fermé par des portes roulant sur le sol et s'éclipsant dans un garage latéral. Ces portes ont été réalisées par les Etablissements Huguet & Tournemine.

Dans l'axe du hangar perpendiculaire à la façade et à 22 m 50 en arrière de celle-ci, un poteau central est prévu, qui, avec un poteau placé dans le long pan arrière du hangar supporte une poutre de 67,5 m de long servant de ligne d'appuis intermédiaires pour la couverture.

La couverture est constituée par 15 voûtes accolées de 67 m 50 de longueur, de 4,54 m de largeur, portant sur 3 lignes appuis: les 2 longs pans latéraux et la poutre centrale.

Les longs pans sont constitués par un bardage en tôle ondulée sur ossature en IPN (lisses et poteaux).

Les portes sont en tôle pliée de 2 mm d'épaisseur.

Le hangar est entièrement démontable. Les assemblages fixes sont réalisés par soudure à l'arc sans aucune rivure.

I° Couverture.

Les voûtes sont en tôle de 3 mm. Chaque élément d'un côté de la poutre centrale est formé de 6 tronçons démontables, reliés par un joint axial — génératrice supérieure des voûtes — et par deux joints transversaux.

Chaque tronçon couvre environ 11,5 m × 2,27 m, deux tronçons réalisent une voûte complète de 11,5 m × 4,54 m, trois voûtes accolées constituent une poutre de 34 m.

En section droite, une voûte est un arc de cercle de 150° environ d'angle au centre, de 2,10 m de rayon et de 1,70 m de flèche. Des deux côtés de l'arc sont soudés deux chêneaux en tôle de 3 mm à 4 mm (suivant les conditions de résistance), de 20 cm de largeur chacun.

Le joint axial supérieur est réalisé par 2 cornières 40 × 20 × 3 soudées sur la tôle et boulonnées entre elles. Le joint entre cheneaux est réalisé par boulonnage des 2 relevés. Ces deux joints sont protégés par des tôles de 8/10 mm formant recouvrement.

Les joints par recouvrement entre tronçons sont réalisés par boulonnage des tôles entre un plat de serrage de 4 mm et une cornière de 35 × 35 × 4 intérieure, qui sert de raidisseur.

Un tronçon de 11,5 m est formé par 8 tôles soudées bout à bout. A la soudure entre 2 tôles un raidisseur (cornière 40 × 20 × 3) sert de support de soudure.

En plus de ces raidisseurs au droit des soudures, des raidisseurs intermédiaires sont soudés aux tôles, de manière à obtenir un espacement de raidisseurs de 0,70 m environ.

Un raidisseur sur quatre est remplacé par une panne.

Cette panne est constituée par 2 membrures (cornière basse de 35 × 35 × 3[5], cornière haute de 40 × 20 × 3) et un treillis à 45° soudé, en cornières de 25 × 25 × 3. Les hors-cornières de la panne sont de 22 cm. Ces pannes, comme les raidisseurs, sont soudées sur les tôles.

Un ensemble démontable comprend ainsi 8 tôles cintrées avec tous leurs raidisseurs et pannes soudés.

Aux joints supérieurs et inférieurs, les pannes et raidisseurs sont assemblés par couvre-joints.

Les voutes ne peuvent pas supporter de poussée horizontale dans le sens perpendiculaire à leur portée, car elles n'ont pas de résistance en torsion. Aussi, la première et la dernière voûtes sont renforcées par un treillis en poutres-caissons qui forme un contreventement à plat dans le plan des chêneaux. Le profil d'une voûte est donc refermé par ce treillis et la voûte peut résister à des efforts horizontaux. Ces poutres caissons sont formés de 4 cornières réunies par un treillis à 45° environ. Les cornières utilisées varient de 25 × 25 × 3 à 50 × 50 × 5. Ces poutres sont assemblées sur des goussets soudés sous les chêneaux.

Les poutres au vent ainsi constituées s'appuient sur les longs pans et la poutre centrale.

II° Poutre centrale.

La poutre centrale est formée par deux poutres jumelées à âmes pleines distantes de 80 cm. Les voûtes sont continuées à travers les poutres grâce à deux amorces soudées de chaque côté de l'ensemble des deux poutres et une tôle cintrée placée dans l'intervalle entre ces deux poutres.

Les poutres ont 2.10 m de hauteur.

L'âme a 5 mm d'épaisseur. Elle est raidie par des cornières 60 × 40 × 5 et 60 × 60 × 6 distantes de 30 à 50 cm, placées alternativement d'un côté et de l'autre de l'âme et soudées à celle-ci par leur nez.

Les tables sont formées par les deux moitiés d'un I. T. L. A. coupé en deux et soudé en haut et en bas de l'âme. Sauf aux extrêmités où le I. T. L. A. est un profilé 180 × 180, dans toute la poutre le profilé adopté est 280 × 280, renforcé localement par des plats atteignant 260 × 24 au droit du poteau central.

Les poutres sont entretoisées entre elles, d'une part, par les voûtes qui les traversent, d'autre part, par des plans de raidissement espacés de 4 m environ.

Ces plans sont formés par deux *X* superposés en cornières (40 × 40 × 4 à 70 × 70 × 7) encadrés par des cornières horizontales à la hauteur des membrures et de la génératrice d'intersection de la voûte et du plan de raidissement, et par des montants faisant partie des raidisseurs d'âme.

Le poteau avant est en *V* formé de deux poutres caissons (deux faces en tôle de 8 mm, deux faces en treillis, cornières membrures de 100 × 100 × 10, section 400 × 300).

La base du poteau est à rotule (les pièces sont en acier moulé). L'axe d'articulation est perpendiculaire à la poutre.

Le poteau arrière est en poutre caisson, formé de quatre cornières de 90 × 90 × 9 réunies par du treillis. La tête et le pied du poteau sont articulés dans les deux sens. Les rotules sont en acier moulé, les axes sont forgés.

III° Longs pans.

Ils sont réalisés avec de la tôle ondulée de 8/10 mm fixée sur des lisses par des boulons soudés sur les lisses; les lisses sont des I. P. N. de 80 sauf la lisse supérieure qui recouvre la tôle et qui est constituée par un ⊏ *PN* 100.

Le haut des longs pans (sur 2.50 m) est vitré avec 1/3 de chassis ouvrants. Les poteaux sont en I. P. N. 220, espacés de 4,54 m sur les longs pans latéraux et de 5,88 m sur le long pan arrière.

Les longs pans sont portés par des murettes en béton armé, en forme de ⊏ de 50 cm de hauteur et 12 cm d'épaisseur.

Les voûtes, sur les longs pans latéraux, sont terminées par des tympans demi-circulaires en tôle de 2,5 mm raidie par des cornières.

IV° Stabilité générale.

Dans le sens de la profondeur, la stabilité générale est assurée par les poutres au vent décrites dans la couverture. La poussée sur les 2 côtés du hangar est reprise par la voûte qui travaille en poutre horizontale dans son ensemble et transmet les efforts jusqu'à la poutre centrale qui avec ses poteaux constitue un portique tenant le renversement.

Dans le sens transversal, la stabilité est assurée par deux contrefiches en caisson avec deux poteaux en caisson (remplaçant les poteaux courants de longs pans) qui supportent les poussées sur les longs pans transmises par cisaillement dans les voûtes jusqu'aux têtes des contrefiches.

V° Portes.

Les portes sont formées de 14 panneaux roulant sur le sol et se logeant dans un garage latéral.

Les panneaux sont formés par 7 éléments en tôle pliée (ayant l'aspect d'un Zorès) assemblés entre eux par rivets et boulons.

VI° Poids total.

Non compris les portes, le hangar pèse au total 283.000 kgs, soit 62 kg/m².

Chapitre II. Matériaux utilisés.

Les tôles de 8/10 mm sont en acier doux (limite élastique 24, limite de rupture 42) avec un indice de corrosion de 1 mgr/cm²/24 H à l'essai à l'acide sulfurique (cahiers des charges de la Marine et de l'Air).

Les autres tôles et les profilés sont en acier Ac 54, conforme aux spécifications du cahier des charges des Ponts et Chaussées:

limite élastique: 36 kg/mm²
limite de rupture: 54 kg/mm²
allongement: 20 %

Ces aciers sont à environ 0,3 % de chrome, 0,3 % de cuivre et moins de 0,25 % de carbone. Leur indice de corrosion est de 6 mgr/cm²/24 H.

Chapitre III. Conditions de calcul.

A. Le bâtiment doit être calculé sous les deux systèmes de charges suivants:

1° Charges S_1 comprenant:

Le poids mort,
Les charges de neige: 75 kg/m² sans vent
25 kg/m² avec vent.
Le vent défini par:

Une pression de 45 kg/m² sur les surfaces frappées.
Une dépression de 45 kg/m² sur les surfaces non frappées.
Une pression variant de + 45 kg/m² à — 45 kg/m² à l'intérieur du hangar.
Le vent est supposé horizontal.
Les variations de température: ± 30°.

2° Charges S_2 comprenant:

Le poids mort diminué de 1/3.
Les charges de neige et de vent majorées de 1/3.
Les variations de température.

B. Les taux de travail admissibles sont les suivants (acier Ac. 54):

Aciers laminés en traction ou compression:	24 kg/mm²
Aciers laminés en cisaillement:	12 kg/mm²
Boulons en cisaillement:	6,6 kg/mm²
Boulons à l'arrachement:	3,3 kg/mm²
Variation des efforts au droit des assemblages boulonnés:	36 kg/mm²

Le coefficient de majoration de flexion dû au flambage dans les pièces comprimées, d'après les études faites au Ministère de l'Air, est:

$$\frac{1}{1-\frac{3N}{\Gamma S}}$$

S : section de la pièce
N: effort normal

$$\Gamma = R\,\frac{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{R}{c}\right)^{3/2}}{1+\frac{R}{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{R}{c}\right)^{5/2}}$$

R: limite de rupture de l'acier (54 kg/mm²)

$$c = \pi^2 E \frac{r^2}{l^2} \text{ (limite d'Euler)}$$

r : rayon de giration de la pièce
l : longueur de la pièce.

On admet de plus que toutes les pièces comprimées ont une flèche égale au $\frac{1}{1600}$ième de la portée.

3ème partie.

Calculs pratiques.

Dans cette partie, nous nous occupons des conditions de réalisation du hangar décrit dans la 2ème partie.

Chapitre I. Considérations relatives au flambage.

Le flambage de tubes en compression le long des génératrices a été étudié par divers auteurs (voir en particulier la monographie parue dans les recueils des publications du „National Advisory Committee for Aeronautics": Technical report N° 473 par E. Lundquist „Strength tests of thin-walled cylinders in compression").

Il semble d'après ces études que les raidisseurs ont une faible influence sur la charge critique, qui est définie par une relation du type:

$$n_c = kE\frac{e}{r}$$

n_c: fatigue critique en compression.
k: coefficient expérimental qui varie beaucoup avec la manière dont on réalise le tube et qui, par celà même peut dépendre des dimensions dans d'assez larges mesures.
e: épaisseur du tube.
r: rayon du tube.
E: module d'élasticité.

On voit que les raidisseurs n'apparaissent pas dans cette expression.

Nous avons effectué, préalablement à la construction d'une voûte d'essai, des expériences sur des portions de tubes (tôles cintrées) à l'échelle des bâtiments que nous avions en vue.

Ces essais ont été faits aux Forges et Aciéries de la Marine et d'Homécourt, à St-Chamond, à l'aide d'une presse hydraulique de 200 Tonnes.

La tôle cintrée était placée debout sur le plateau inférieur (mobile) de la presse. Le contact entre les plateaux et la tôle était réalisé par des cales en bois qui assuraient une assez bonne répartition des pressions.

Les tôles réalisaient un développement de 5 m et une hauteur de 1,00 m. Les expériences ont été faites avec et sans raidisseur transversal intermédiaire. Celui-ci améliorait la résistance au flambage dans certains cas; par contre, dans d'autres cas, il n'avait aucune efficacité. Les deux bords latéraux de la tôle étaient pliés deux fois à angle droit, de manière à réaliser des [qui servaient de raidisseurs latéraux.

Nous avons trouvé des résultats en bon accord avec les résultats indiqués dans le rapport précité. On peut admettre que, pour des tôles cintrées aux environs de 2 m à 2,50 m de rayon, la charge critique se trouve aux environs de 15 à 18 kg/mm². Il en résulte que si l'on fait travailler la tôle à 5 ou 6 kg/mm², on obtient un coefficient de sécurité réel de 3.

Ces essais ont été contrôlés par des essais sur les voûtes plates réalisées à notre usine et décrites plus haut. Dans les conditions réelles d'emploi (charges réparties sur une voûte de 30 m de portée), les fatigues correspondant à la rupture sont environ triples des fatigues admises pour le calcul de l'ouvrage dans les conditions de surcharges indiquées plus haut.

Chapitre II. Calcul de la couverture.

a) Efforts dans la tôle — Formules générales.

Les formules établies dans la 1ère partie peuvent être notablement simplifiées dans le cas de voûtes cylindriques au lieu de surfaces de révolution.

Nous reprenons le calcul complet dans ce cas.

Soient:

n_1 la fatigue normale sur un élément parallèle aux génératrices du cylindre.
n_2 la fatigue normale sur un élément normal aux génératrices.
t la fatigue de cisaillement sur ces deux éléments.
R le rayon du cylindre.
N l'effort normal par unité de surface du cylindre divisé par l'épaisseur de la tôle.
T l'effet tangentiel (perpendiculaire aux génératrices).

Les équations d'équilibre sont:

$$n_1 = NR \tag{1}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial n_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial t}{\partial x} = T \tag{2}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial \alpha} + \frac{\partial n_2}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

α est l'angle définissant la position du point considéré, l'origine étant prise sur l'axe de symétrie de la voûte.

x est l'abscisse comptée sur les génératrices.

Nous déduisons de l'équation (2):

$$t = \int_0^x \left(T - \frac{\partial n_1}{\partial \alpha}\frac{1}{R}\right) dx + f(\alpha).$$

L'origine des x étant prise au milieu du panneau, nous posons alors:

$$t = t' + t''$$

$$t' = \int_0^x \left(T - \frac{\partial n_1}{\partial \alpha}\frac{1}{R}\right) dx$$

$$t'' = f(\alpha).$$

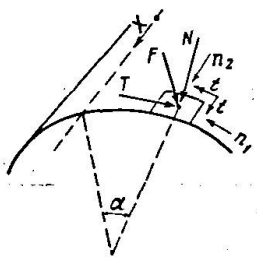

Fig. 11.

t'' est constant dans l'intervalle compris entre deux pannes distantes de $2L$. C'est l'effort tranchant d'ensemble.

t' est l'effort tranchant local; il est nul au milieu d'un panneau (partie de la tôle comprise entre deux pannes).

D'autre part, l'équation (3) donne:

$$n_2 = -\int \frac{\partial (t' + t'')}{R \partial \alpha} dx + \varphi(\alpha)$$

$$= \underbrace{-\left[\int_0^x \frac{\partial t'}{R \partial \alpha} dx - \int_0^L \frac{\partial t'}{R \partial \alpha} dx\right]}_{n_2'} \underbrace{-\left[\frac{x}{R} f'(\alpha) + F(\alpha)\right]}_{n_2''}$$

n_2' est l'effort normal local; il est nul sur les bords d'un panneau.

n_2'' est l'effort normal d'ensemble; il doit être le même sur les bords de deux panneaux consécutifs.

D'après ce qui a été exposé dans la première partie on peut poser:

$$n_2'' = \frac{M v}{I}$$

en négligeant la contraction due à l'effort transversal n_1 qui est négligeable.

Puisque n_2'' ne dépend plus de la loi de charge sur le panneau, on déduit t'' qui, comme en résistance des matériaux classiques, est défini par:

$$t'' = \frac{A T}{e I}$$ (A: moment statique au droit d'une section définie par α)

Les quantités n''_2 et t'' sont ainsi définies comme si la charge était concentrée au droit des pannes et T constant dans chaque panneau.

Les quantités n_2' et t' représentent l'influence de la répartition des charges sur le panneau.

D'une manière plus exacte, étant donné qu'il y a un moment m dans la rive (chêneau) dû aux charges (poussées des voûtes) appliquées, on a:

$$n_2'' = \frac{(M - m) v}{I}$$

Quant à l'effort tranchant local, il est transporté aux pannes, soit par les forces t', soit par les efforts tranchants dans le chêneau considéré comme une poutre indépendante, avec des appuis formés par les pannes.

La quantité m étant de l'ordre de 1/1000 de M nous écrivons:

$$n_2'' = \frac{M v}{I}$$

$$t'' = \frac{A I}{e I}$$

$$n_1'' = 0.$$

Etant entendu que ces formules représentent la part des efforts totaux quand les charges sont concentrées aux pannes.

Efforts dans la tôle dans les différents cas de charge.

	N	T	n_1	t'	n_2'
Vent	N	0	NR	0	0
Poids mort	$V \cos \alpha$	$V \sin \alpha$	$VR \cos \alpha$	$2 V x \sin \alpha$	$V \frac{(L^2 - x^2) \cos \alpha}{R}$
Neige	$P \cos^2 \alpha$	$P \sin \alpha \cos \alpha$	$PR \cos^2 \alpha$	$3 P x \sin \alpha \cos \alpha$	$\frac{3}{2} \frac{P(L^2 - x^2)}{R} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$

Ces efforts n_1, t', n_2' ne dépassent pas 0,1 kg/mm².

Les seuls efforts à envisager sont donc n_2'' et t'', qui ne dépendent pas du mode d'application des charges.

Pour le calcul de l'effort tranchant et du moment de flexion, la poutre est calculée comme une poutre sur 3 appuis, l'appui central étant dénivelé par suite des flexions de la poutre centrale. Cette dénivellation n'est pas négligeable, eu égard aux hauteurs comparables des deux poutres et le faible taux de travail de la tôle des voûtes (inférieur à 6 kg/mm²). Le système global est hyperstatique, la dénivellation de l'appui modifiant la réaction d'appui et les efforts produits dans la poutre centrale.

b) Efforts dans les chêneaux.

Sur le chêneau agissent: les forces directement appliquées, les poussées $n_1 = NR$ dues à la voûte, les cisaillements t' dus à la voûte. Ces efforts sont repris par les pannes qui servent de points d'appui aux chêneaux. Sous ces charges, le chêneau est calculé comme une poutre continue sur appuis équidistants.

En dehors de ces efforts, le chêneau participe à la flexion générale de la voûte: efforts n_2'' et t''. Les poussées n_1 entrainent des moments de flexion de l'ordre de 400 kgm et des fatigues de l'ordre de 0,70 kg/mm². Les efforts n_2'' sont de l'ordre de 6 kg/mm².

c) Efforts dans les pannes.

Sur les pannes agissent: les forces directement appliquées, les actions des chêneaux définies précédemment, des efforts de cisaillement dus à la voûte. On a en effet, d'un côté de la panne:

$$t = t'_{+L} + t''_p,$$

de l'autre côté:

$$t = t'_{-L} + t''_{p+1}.$$

p et $p + 1$ étant les numéros d'ordre des panneaux entre pannes avec:

$$t''_p = \frac{A\,T_p}{eI}.$$

T_p étant l'effort tranchant au milieu du panneau d'ordre p.

Les deux efforts t ainsi définis étant différents, leur différence est transmise à la panne. On vérifie que la panne est en équilibre sous l'ensemble des forces ainsi définies. Elle est calculée comme un arc sans tirant soumis à l'ensemble de ces efforts.

Les moments maxima obtenus sont de l'ordre de 500 kgm avec des efforts normaux de l'ordre de 600 kg et des efforts tranchants de l'ordre de 300 kg (pannes espacées de 3 m environ l'une de l'autre).

La panne étant solidaire de la tôle de couverture ne peut flamber transversalement sous des charges de compression.

d) Calcul des voûtes de façade avant et arrière.

Si l'on fait supporter à une section formée d'une voûte et de deux chêneaux des forces horizontales placées à une hauteur quelconque par rapport à la voûte, celle-ci se tord sauf si les forces horizontales passent par une ligne appelée axe de torsion de la voûte et située à environ 50 cm au-dessus du sommet de la voûte.

Pour supporter des efforts quelconques, le profil de la voûte doit être refermé par un treillis horizontal reliant les deux chêneaux. Ce treillis, décrit

plus haut, absorbe 89 % de l'effort tranchant dû à des forces appliquées dans le plan des chéneaux (poussée des portes et du long pan arrière). Les 11 % restants de l'effort tranchant, ainsi que la totalité des moments de flexion horizontaux, sont absorbés par la voûte, dont les chêneaux sont renforcés en conséquence.

Conclusions.

Nous avons décrit succintement un mode de construction en tôle autoporteuse permettant de réaliser des constructions fort légères, le poids total du bâtiment décrit ci-dessus ne dépassant pas 62 kg au mètre carré. Pour des bâtiments de portée double — 70 m — avec couverture en arc avec tirant, le poids ne dépasserait pas 80 kgs au mètre carré, dans les mêmes conditions de calculs de résistance. Avec des poutres plates du type réalisé et des arcs-caissons supérieurs, on peut même arriver à un poids de 70 kgs au mètre carré (compris les longs pans).

Résumé.

L'étude résume les recherches poursuivies pendant deux ans pour réaliser la mise au point de couvertures de bâtiments métalliques sans ossature de support, la tôle de couverture se portant elle même. Nous avons divisé cette étude en trois parties:

1° Considérations théoriques.
2° Exemple de réalisation.
3° Détails de calculs dans ce dernier cas.

Dans la première partie nous examinons les modes de calcul des surfaces d'un certain type que nous appelons membranes à cadres, cette dénomination provenant de ce que la surface est constituée par la juxtaposition d'éléments formés d'une membrane métallique entourée d'un cadre rigide.

Dans la deuxième partie nous décrivons une réalisation inspirée de ces principes, qui consiste en une couverture formée de demi tubes accolés en tôle de 3 mm travaillant comme des poutres rectilignes sur trois appuis.

Dans la troisième partie nous détaillons le mode de calcul spécial à cette réalisation.

Zusammenfassung.

Die Untersuchung faßt die Forschungen zusammen, die während zwei Jahren unternommen worden sind. Sie sollen die Verwendung von stählernen Gebäudeabdeckungen ohne Traggerüst ermöglichen, wo sich die Dachhaut selber trägt. Wir haben diese Studien in drei Teile getrennt:

1. Theoretische Betrachtungen.
2. Ausführungsbeispiel.
3. Berechnungseinzelheiten für diesen Fall.

Im ersten Teil prüfen wir die Berechnungsarten einer Flächenart, die als Rahmenmembran bezeichnet wird. Diese Benennung rührt von der Überlagerung der Stahlmembranteile mit einem steifen Rahmen her.

Im zweiten Teil beschreiben wir eine Ausführung nach diesen Grundsätzen, die aus zusammengefügten Halbröhren von 3 mm Blechstärke besteht und die wie ein gerader Balken auf drei Stützen wirkt.

Der dritte Teil enthält die besondere Berechnungsart für diese Ausführung.

Summary.

The investigation summarises the research work carried out during the last two years and aims at making possible the use of steel roof covers without trusses for cases in which the roof covers are to be self-supporting. The study is divided into three parts:

1. Theoretical considerations.
2. Applied example.
3. Details of calculation for 2.

The first part concerns the examination of a particular type of surface, which is termed a framed membrane. This designation is derived from the superimposition of a rigid frame on the steel membrane.

The second part describes a structure based on these principles. This structure consists of a composition of halved tubes of 3 mm thick plates, carried on three supports in the same way as a straight beam.

The third part deals with the particular calculation of this structure.

Leere Seite
Blank page
Page vide