Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 3 (1935)

Artikel: Considérations sur le calcul et la sécurité des pièces fléchies. Moments de rupture

Autor: Coppee, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4141

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CONSIDÉRATIONS SUR LE CALCUL ET LA SÉCURITÉ DES PIÈCES FLÉCHIES. MOMENTS DE RUPTURE.

BETRACHTUNGEN ÜBER DIE BERECHNUNG UND DIE SICHERHEIT DER AUF BIEGUNG BEANSPRUCHTEN BAUTEILE. BRUCHMOMENT.

REMARKS ON THE CALCULATION AND SAFETY OF PARTS SUBJECTED TO BENDING. MOMENT OF RUPTURE.

R. COPPEE, Ingénieur à Bruxelles.

Il est assez intéressant de constater les errements qui sont à la base des théories classiques du béton armé et de rechercher les différences pratiques auxquelles ils peuvent conduire.

Dans ce qui suit nous examinerons brièvement la valeur des hypothèses fondamentales du calcul des pièces fléchies, nous discuterons ensuite les méthodes d'application courante ou „des taux de sécurité" et, enfin, nous étudierons des méthodes nouvelles dites „de calcul à la rupture".

I. Considerations sur le calcul et la sécurité des pièces fléchies

Le calcul classique des pièces fléchies est basé sur trois hypothèses:

1. les sections transversales planes restent planes après déformation par flexion;
2. les tensions sont proportionnelles aux déformations;
3. la résistance du béton à la traction est à négliger.

La première hypothèse, ou de la conservation des sections planes, n'est rigoureuse qu'en l'absence d'effort tranchant et pour des matériaux homogènes. Lorsque le matériau est hétérogène, comme le béton armé, les sections ne restent pas absolument planes après déformation (sauf les sections de symétrie à la fois de formes, de liaisons et de sollicitation). Les deux matériaux associés ont en effet des propriétés fort différentes: tandis que la déformation de l'acier, dans les limites de l'élasticité, est pratiquement invariable dans le temps, celle du béton croît avec la durée de charge; il en résulte que les déformations de l'acier et du béton situés au même niveau ne sont pas identiques et qu'en conséquence il se produit avec le temps une décharge partielle du béton comprimé, au détriment de l'armature qu'il enrobe. La constatation est analogue pour la zône de traction, mais sans intérêt notoire, du fait que, par la troisième hypothèse, le béton est supposé inexistant dans cette zône.

La seconde hypothèse n'est vraie que pour des matériaux dont le diagramme tensions-déformations comporte une zône de proportionnalité. Elle est donc inadmissible pour le béton, dont la courbe tension-déformation se présente comme à la figure 1. Au diagramme 2 de la méthode classique il y a lieu de substituer l'un des diagrammes 3, 4 ou 5, dont la forme diffère selon la grandeur relative de la tension à la fibre extrême du profil. Pour une pièce peu sollicitée (τ_b égal au quart, par exemple, de la compression de rupture) on a un diagramme tel que 3, assez peu différent du diagramme

classique, mais, à la rupture, les tensions se répartissent comme au diagramme 5. Par conséquent, si l'on se réfère à la sécurité de rupture, c'est un diagramme tel que 5 qu'il faut considérer, et c'est une erreur d'introduire, comme le font les classiques, une fraction du taux de rupture dans des calculs issus d'un diagramme tel que 2.

La troisième hypothèse, qui suppose le béton inexistant dans la zône de traction, est acceptable en ce qui concerne la contribution des tractions du béton à la résistance du profil: nous montrerons plus loin, à l'occasion d'un calcul, que la prise en compte de ces tractions, autrement dit la suppression de cette troisième hypothèse, n'augmenterait le moment résistant que d'une quantité insignifiante. En fait, comme nous l'expliquerons plus loin, la présence de tractions de béton dans les tronçons adjacents à la section de rupture, réduit les compressions dans ces tronçons; il en résulte, par plasticité, une augmentation de résistance du béton à la compression dans la section de rupture et, en conséquence, un accroissement des moments de rupture d'autant plus important que dans les tronçons voisins non fissurés la contri-

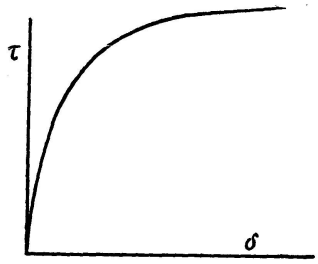

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

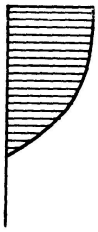
Fig. 4

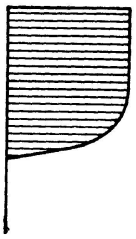
Fig. 5

bution relative du béton étiré est plus grande. Par ailleurs, la présence de béton dans la zône de traction modifie la grandeur des tensions par l'effet du retrait; ainsi, dans les sections non fissurées principalement, les tensions réelles diffèrent assez bien des tensions calculées par la méthode classique: ceci à l'avantage de l'acier, comprimé par le retrait du béton, et au désavantage du béton, comprimé dans la zône comprimée non armée. Il n'est pas inutile de se rendre compte de l'ordre de grandeur de ces tensions initiales dues au retrait.

Soit:

ω la section d'armature en traction, par unité de largeur de la pièce,
τ_a sa tension de compression par retrait,
τ_e la traction du béton au niveau de l'armature,
τ_b la compression du béton à l'extrémité du profil,
E_a le coéfficient d'élasticité de l'acier,
E_b le coéfficient d'élasticité du béton en compression,
E_e le coéfficient d'élasticité du béton en traction,
δ une déformation linéaire,
Δ le retrait du béton non armé.

Les tensions de béton par retrait sont d'un ordre qui autorise l'hypothèse d'une répartition triangulaire comme à la fig. 6.

On sait que le coéfficient d'élasticité du béton à traction est environ la moitié de celui du même béton en compression: nous posons $E_e = \frac{E_b}{2}$.

Or $$\frac{x}{\delta_b} = \frac{h-x}{\delta_e}. \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\delta_b}{\delta_b + \delta_e} \times h = \frac{\tau_b}{\tau_b + 2\tau_e} \times h \qquad (1)$$

La déformation de l'armature sous l'effet du retrait est égale au retrait total moins la déformation du béton par traction:

$$\delta_a = \Delta - \delta_e, \quad \text{d'où} \quad \tau_a = E_a \Delta - E_a \delta_e \tag{2}$$

Posons: $R = E_a \Delta$ (c'est la tension que l'acier prendrait sous une déformation égale au retrait du béton non armé).

$\frac{E_a}{E_e} = m$, rapport du module d'élasticité de l'acier au module d'élasticité du béton sous traction.

(2) peut s'écrire:

$$\tau_a = R - m\tau_e \tag{3}$$

Equation d'équilibre de projection:

$$\tau_b \times \frac{x}{2} + \omega \tau_a = \tau_e \times \frac{h-x}{2} + \tau_e d + \frac{\tau_e d^2}{2(h-x)} - \tau_e \omega \tag{4}$$

Introduisons dans cette équation la valeur de x donnée par (1), celle de τ_a donnée par (3), remplaçons ω par μh (μ = pourcentage) et d par εh. Il vient:

$$\tau_b^2\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) - 2\tau_e^2[1 + 2\mu(m-1) + 2\varepsilon + \varepsilon^2] + 2\mu R\tau_b + 4\mu R\tau_e -$$
$$- 2\tau_e\tau_b[\mu(m-1) + \varepsilon + \varepsilon^2] = 0 \tag{5}$$

Equation d'équilibre de rotation (autour d'un axe situé au niveau de l'armature):

$$\tau_b \frac{x}{2}\left(h - \frac{x}{3}\right) = \tau_e \frac{(h-x)^2}{6} + \tau_e \frac{d^2}{2} + \tau_e \frac{d^3}{6(h-x)}.$$

Introduisons dans cette équation la valeur de x donnée par (1) et d par εh; il vient, après simplifications:

$$\tau_b^3\left(2 - \frac{\varepsilon^3}{2}\right) + 3\tau_e\tau_b^2(2 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3) - 4\tau_e^3(1 + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3) - 6\varepsilon^2\tau_e^2\tau_b(2 + \varepsilon) = 0.$$

Pour $\varepsilon = 0{,}1$ cette équation devient:

$$1{,}995\,\tau_b^3 + 5{,}967\,\tau_e\tau_b^2 - 0{,}126\,\tau_b\tau_e^2 - 4{,}124\,\tau_e^3 = 0, \tag{6}$$

qui est satisfaite pour $\tau_b \approx 0{,}75\,\tau_e$.

Introduisant cette valeur dans (5), nous obtenons, après simplifications:

$$\tau_e = \frac{\mu R}{0{,}368 + \mu(m-1)} \tag{7}$$

et

$$\tau_a = R - m\tau_e = \frac{(0{,}368 - \mu)R}{0{,}368 + \mu(m-1)} \tag{8}$$

La valeur de m à introduire dans ces deux formules est le rapport du module d'élasticité de l'armature au module d'élasticité „moyen" du béton sous traction. Je dis „moyen" parce qu'il s'agit d'un module intermédiaire entre celui du début du durcissement, c'est-à-dire zéro, et celui du béton étiré, à l'instant considéré. Nous admettrons que la valeur de m correspondant au module moyen d'élasticité du béton depuis l'état initial jusqu'à l'état final vaut 40: ceci se justifie par le fait que $m = \frac{E_a}{E_e}$ vaut environ 20 à l'état final.

Il en résulte que:

$$\tau_e = \frac{\mu R}{0{,}368 + 39\mu} \quad \text{et} \quad \tau_a = \frac{0{,}368 - \mu}{0{,}368 + 39\mu} \times R.$$

Ainsi, pour $\mu = 0{,}01$ et $R = 0{,}0004 \times 2.200.000 = 880$ k/cm².

$$\tau_b = 0{,}75 \times \frac{0{,}01 \times 880}{0{,}368 + 0{,}39} = 8{,}7 \text{ k.p.cm}^2 \quad \text{et}$$

$$\tau_a = 880 \times \frac{0{,}368 - 0{,}01}{0{,}368 + 0{,}39} = 415 \text{ k.p.cm}^2.$$

τ_a est d'autant plus petit et τ_b d'autant plus grand que le pourcentage est plus important.

Ces calculs n'ont évidemment pas la prétention d'une absolue rigueur: ils donnent l'ordre de grandeur des tensions de retrait, et l'on voit que celles-ci sont loin d'être négligeables.

Nous en concluons qu'il est peu intéressant de rechercher, comme on le fait cependant couramment, les tensions de service par sollicitations extérieures si l'on omet d'y ajouter, avec leur signe, les tensions initiales que le retrait provoque. Ces tensions sont bien un effet de présence du béton en traction, que la méthode classique néglige.

La compression de l'acier par le retrait du béton est naturellement beaucoup moindre dans les sections fissurées que dans les sections pleines, du fait de la détente causée par la fissuration. Il n'en subsiste pas moins des tensions de retrait dans le béton et dans l'acier des sections non complètement fissurées: nous avons calculé, par un procédé analogue à celui exposé ci-dessus, que, pour une section fissurée jusqu'à mi-hauteur, un pourcentage de 0,01 et un retrait de 0,0004, la compression du béton serait: de 9,3 k/cm² tandis que celle de l'armature ne serait que de 46,3 k/cm². Nous répétons que ces calculs ne donnent que des ordres de grandeur.

Disons toutefois qu'au point de vue sécurité de rupture les tensions de retrait n'importent pas, car leur ensemble étant en équilibre de rotation n'augmente ni ne diminue le moment de rupture, autrement dit la résistance de rupture de la pièce.

Remarquons aussi qu'en posant comme postulat qu'à toute hauteur du profil les déformations du métal et du béton sont les mêmes, la méthode classique s'est embarassée d'un module *m*, parfois appelé coéfficient d'équivalence ou rapport du coéfficient d'élasticité de l'armature au soi-disant coéfficient d'élasticité du béton comprimé.

Or, ce postulat est inutile et contraire aux réalités: le béton et l'armature situés au même niveau ne se déforment pas identiquement; ainsi que nous l'avons rappelé au début de cette étude, les déformations du béton grandissent, dans une certaine mesure, avec la durée de chargement, tandis que celles de l'armature restent pratiquement invariables.

Il n'est d'ailleurs guère possible d'assigner une valeur convenable à ce module *m* du fait que le coéfficient d'élasticité du béton varie dans de larges limites et sous de multiples incidences: la granulométrie et la nature des agrégats et du ciment, le dosage en ciment et en eau, la compacité, le degré d'humidité, les mises en charges précédentes, l'âge et la charge.

Si le postulat de la méthode classique était admissible, il s'imposerait d'ailleurs de donner à *m* une valeur différente à chaque niveau du profil, parce qu'il n'y a en réalité pas de coéfficient d'élasticité du béton ou que ce rapport de tension à déformation du béton varie avec la tension, donc avec la distance à la fibre neutre.

On conçoit que la valeur à donner à ce coéfficient *m* soit fort discutée; en fait elle diffère beaucoup selon les réglements: d'aucuns la fixent à 10,

d'autres à 15, d'autres à 20 et, fort heureusement, ces différences ne font guère varier les résultats pour la flexion simple. Au fait, la valeur attribuée à *m* apparait comme un facteur d'aménagement des formules en vue de résultats en concordance avec les essais de rupture pour les bétons moyens et les pourcentages ordinaires.

Nous avons dit que l'introduction de ce coéfficient *m* dans le calcul des pièces fléchies était inutile: nous montrerons plus loin que des expressions fort simples s'obtiennent par la seule résolution des équations d'équilibre des tensions et de la sollicitation extérieure, sans qu'il soit utile d'admettre l'identité de déformation de l'acier et du béton situés au même niveau. Ces nouvelles théories ont l'avantage de mettre en évidence l'influence du pourcentage et d'autres propriétés intéressantes qui n'apparaissent pas avec les anciennes formules.

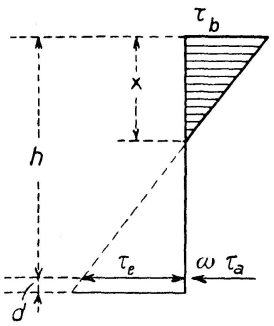

Fig. 6

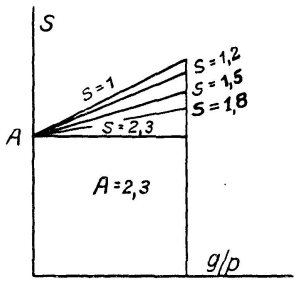

Fig. 7

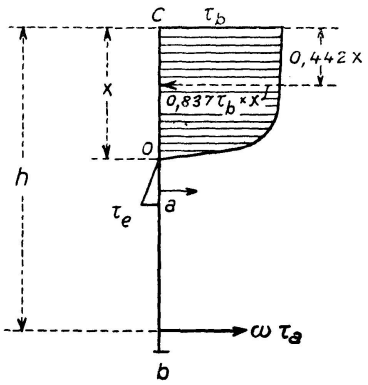

Fig. 8

Presque tous les traités de béton armé contiennent des tableaux qui donnent les sections de béton et d'armature pour une valeur de *m* et des taux de travail déterminés du béton et de l'acier: on serait tenté de croire, à lire ces traités, qu'à des taux déterminés ne correspond qu'une section. Rien n'est cependant plus faux et plus contraire aux faits expérimentaux. Les formules qui font abstraction de *m* mettent ce fait en évidence, que pour des taux de travail et une sollicitation donnés il y a une infinité de sections possibles.

* * *

Si la méthode classique de calcul est loin d'être parfaite, l'application qu'on en fait généralement n'est pas moins mauvaise.

Le fait d'introduire des taux de sécurité ou fractions des taux de rupture dans les formules classiques fausse la notion de la sécurité car, ainsi que nous l'avons déjà observé ci-dessus, la répartition des tensions est telle qu'au diagramme 5 à la rupture et non pas comme au diagramme 2 qui est à la base des formules: le rapport des taux de rupture aux taux de sécurité introduits n'est donc pas le coéfficient de sécurité de la pièce.

Par ailleurs, l'introduction de taux de sécurité consiste à admettre, pour toutes les pièces d'une même construction, la même sécurité aux charges permanentes et aux surcharges. Il est cependant incontestable que la sécurité aux surcharges doit être plus grande que celle au poids mort, puisque ce dernier n'est pas susceptible des mêmes augmentations que les surcharges: la sécurité aux surcharges est d'ailleurs surtout celle qui intéresse les usagers.

Ainsi, dans l'application usuelle, la sécurité aux surcharges varie considérablement avec le poids mort des pièces; comme, d'autre part, dans une même construction le rapport du poids mort aux surcharges peut varier notablement d'une pièce à l'autre, on a en fait une sécurité aux surcharges différente en de nombreux endroits de la construction: une même construction n'a pas partout la même sécurité aux surcharges! Le calculateur qui emploie ce procédé ignore ainsi généralement quelle est la sécurité qu'il donne effectivement aux surcharges et il est dans l'impossibilité de l'indiquer à l'usager.

Examinons à quelles différenecs cette application usuelle peut conduire pour la sécurité aux surcharges.

Soit:

g le poids mort ou la charge permanente,
p la surcharge,
s la sécurité désirée au poids mort,
S la sécurité effective aux surcharges,
A le coéfficient de sécurité total, poids mort plus surcharge, soit le rapport du taux de rupture au taux de sécurité.

Ceci implique: $$g \times s + p \times S = A(g + p),$$

d'où $$S = (A - s)\frac{g}{p} + A \qquad (1)$$

Ainsi, pour $$A = 2{,}5 \quad \text{et} \quad s = 1{,}5, \quad S = \frac{g}{p} + 2{,}5 \qquad (1')$$

Cette expression donne le coéfficient de sécurité effectif aux surcharges lorsqu'on admet une sécurité de 1,5 aux charges mortes et 2,5 pour l'ensemble poids mort et surcharges.

Pour	$g = 0{,}2\,p$	$S = 2{,}7$
	$g = 0{,}4\,p$	$S = 2{,}9$
	$g = 0{,}6\,p$	$S = 3{,}1$
	$g = 0{,}8\,p$	$S = 3{,}3$
	$g = 1{,}0\,p$	$S = 3{,}5$
	$g = 1{,}5\,p$	$S = 4{,}0$

Les rapports $g/p = 0{,}2$ et 0,4 se remontrent fréquemment en constructions métalliques, et ceux de 0,6, 0,8, 1 et 1,5 dans les constructions en béton armé. Ceci donne la raison pour laquelle des constructions en béton armé, dont le coéfficient de sécurité total A est moindre que celui de constructions métalliques, ont en fait des sécurités de même ordre ou supérieures à celles-ci pour les surcharges. Le coéfficient de sécurité total des pièces fléchies en béton armé étant généralement voisin de 2,3 (pour le calcul par la méthode classique), la sécurité effective aux surcharges, lorsqu'on admet une sécurité de 1,5 au poids mort, vaut:

pour	$g = 0{,}6\,p$	$S = 2{,}78$
	$g = 0{,}8\,p$	$S = 2{,}94$
	$g = 1{,}0\,p$	$S = 3{,}10$
	$g = 1{,}5\,p$	$S = 3{,}50$

Nous donnons, fig. 7, en un diagramme, les variations de S en fonction de g/p pour différentes valeurs de s.

Ceci s'applique essentiellement aux pièces qui, par leur position, sont fléchies sous leur propre poids.

Pour les pièces en béton armé disposées debout et à flexion prépondérante, le coéfficient de sécurité aux surcharges n'est que le coéfficient total, soit, avec les taux usuels, 2,3 environ: il en est ainsi pour les poteaux, les parois de silos, de réservoirs et de murs de soutènement.

Par conséquent la méthode des taux de sécurité donne en réalité une sécurité beaucoup moindre aux pièces verticales sollicitées latéralement qu'aux pièces horizontales ou inclinées.

Remarquons entre parenthèse que la considération qui précède, relative aux coéfficients de sécurité des pièces fléchies, est également vraie pour les pièces comprimées. Il est absurde d'admettre la même sécurité aux charges permanentes qu'aux surcharges, par exemple pour les colonnes des étages inférieurs des batiments en béton armé à plusieurs étages: généralement, si l'on désire une sécurité de 3 aux surcharges, une sécurité de 2 paraîtra suffisante aux charges permanentes. Ainsi, pour $\frac{g}{p} = 1,5$ (les poids morts sont généralement prépondérants pour les colonnes inférieures des immeubles à plusieurs étages), $s = 2$ et $S = 3$, le coéfficient de sécurité total résultera de: $2g + 3p = (g + p) A$ et vaudra 2,4. Donc, dans ce cas le taux de travail pourrait être les $\frac{1}{2,4}$ du taux de rupture. Si ce dernier est de 180 k. p. cm², le taux de travail pourra être de 180: 2,4 = 75 k. p. cm² aux charges mortes plus surcharges dans les conditions ci dessus et abstraction faite des conditions de flambement et des flexions secondaires.

Pour réaliser une sécurité uniforme aux surcharges, rien de tel que de faire le calcul au stade de rupture: introduire les taux de rupture dans l'expression du moment de rupture de la pièce, et écrire que ce dernier vaut la somme du moment dû au poids mort ou aux charges permanentes multiplié par s et du moment dû aux surcharges multiplié par S.

Ceci appelle une remarque en ce qui concerne le béton armé.

Les pièces à pourcentage d'armature normal ou faible et à béton de bonne résistance se rompent dès que la limite d'élasticité du métal est atteinte: ceci provient de ce que le béton, qui n'est généralement pas capable d'un allongement supérieur à 1,5/1000, se fend dans la zône étirée dès que le métal atteint sa limite d'élasticité, et se crevasse lorsqu'au delà de cette limite le métal s'écoule; l'écrasement du béton comprimé s'éffectue alors immédiatement.

Par conséquent, pour le béton armé, les éléments à introduire dans les formules de rupture sont le taux de rupture du béton par compression et la limite apparente d'élasticité de l'armature.

II. Moments de rupture.

Les moments de rupture caractérisent la force des pièces fléchies. (Nous n'examinons pas ici la résistance aux efforts tranchants.)

Nous considérons successivement:

1. les pièces à section rectangulaire armées en traction seulement,
2. les pièces à section en T armées en traction seulement,
3. les pièces à section rectangulaire armées en traction et en compression.

1. Pièces à section rectangulaire armées en traction seulement.

Nous admettons qu'au stade de rupture:

1. La section est fendue dans la zône de traction sur une certaine hauteur *ab*.

2. La section de rupture, primitivement plane, est restée plane sur la hauteur *ac* de béton non fissuré: en conséquence, le diagramme tensions-déformations sera le même que celui de l'essai de compression sur cubes.

3. Ce dernier diagramme est celui indiqué par M. Schreyer (1er Congrès des Ponts et Charpentes 1932. Rapport final pages 502 à 505), traduit par la loi hyperbolique: $\delta \times 10^3 = \frac{0{,}63\,\tau^2}{1{,}1-\tau}$. Il en résulte qu'à la rupture le diagramme des compressions de béton a les caractéristiques données à la fig. 8: la résultante des compressions vaut $0{,}837\ \tau_b \times x$ et elle se trouve à $0{,}442\ x$ de la fibre extrême comprimée.

Le point *a*, d'arrêt de la fissure de traction, ne coïnciderait avec la fibre neutre que si la résistance du béton à la traction était nulle. Comme en fait cette résistance existe, le point *a* se trouve sous *o* et les tractions, que nous supposons reparties selon un triangle sur la hauteur *oa*, apportent quelque résistance à la pièce.

Nous établirons des formules qui prennent en compte cette contribution du béton étiré et nous verrons ensuite ce qu'elles deviennent lorsqu'on en fait abstraction.

Nous admettons que la traction de rupture du béton vaut les 15 % de la compression de rupture: $\tau_e = 0{,}15\ \tau_b$, ou $E_e\,\delta_e = 0{,}15\ E_b\,\delta_b$ ou encore, puisque le coéfficient d'élasticité à traction du béton vaut sensiblement la moitié du coéfficient d'élasticité du béton comprimé: $\delta_e = 0{,}3\ \delta_b$.

Or, la première hypothèse donne

$$\frac{\delta_b}{\delta_e} = \frac{x}{\overline{oa}} \quad \text{soit} \quad \frac{\delta_b}{\delta_e} = \frac{1}{0{,}3} = \frac{x}{\overline{oa}} \quad \text{ou} \quad \overline{oa} = 0{,}3\,x.$$

Pour simplifier les développements qui suivent, nous considérons une pièce de largeur unité ($b = 1$).

Ecrivons les équations d'équilibre dans le plan de flexion:

Equation de projection sur l'axe de la pièce:

$$0{,}837\ \tau_b \times x = \omega\,\tau_a + \frac{0.3\,x \times 0.15\,\tau_b}{2} \qquad \text{d'où, si nous posons}$$

$$\mu = \frac{\omega}{h} \quad (\mu = \text{pourcentage}): \qquad x = \frac{\mu\,\tau_a}{0.8145\,\tau_b} \times h \tag{1}$$

Equation de rotation autour d'un axe situé au niveau de l'armature:

$$0.837\ \tau_b\,x\,(h - 0{,}442\,x) - \frac{0{,}15\,\tau_b \times 0{,}3\,x}{2}\left[h - \left(x + \frac{2}{3} \times 0{,}3\,x\right)\right] = M,$$

ce qui donne, après avoir remplacé x par sa valeur (1):

$$\left(1 - 0{,}516\,\frac{\mu\,\tau_a}{\tau_b}\right)\mu\,\tau_a\,h^2 = M \tag{2}$$

Si nous avions admis que τ_e valait les 10 % au lieu des 15 % de τ_b, nous aurions obtenu

$$\overline{oa} = 0{,}2\,x \quad \text{et les équations}$$

$$0{,}837\,\tau_b \times x = \omega\,\tau_a + \frac{0.2\,x \times 0{,}1\,\tau_b}{2}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\mu\,\tau_a}{0{,}827\,\tau_b} \times h \qquad (1')$$

et $$0{,}837\,\tau_b\,x\,(h - 0{,}442\,x) - \frac{0{,}1\,\tau_b \times 0{,}2\,x}{2}\left[h - \left(x + \frac{2}{3} \times 0{,}2\,x\right)\right] = M$$

d'où $$\left(1 - 0{,}522\,\frac{\mu\,\tau_a}{\tau_b}\right)\mu\,\tau_a\,h^2 = M \qquad (2')$$

Si nous avions négligé le béton en traction, nous aurions en:

$$0.837\,\tau_b \times x = \omega\,\tau_a \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\mu\,\tau_a}{0{,}837\,\tau_b} \times h \quad \text{et} \quad 0.837\,\tau_b\,x\,(h - 0{,}442\,x) = M$$

d'où: $$\left(1 - 0{,}528\,\frac{\mu\,\tau_a}{\tau_b}\right)\mu\,\tau_a\,h^2 = M \qquad (2'')$$

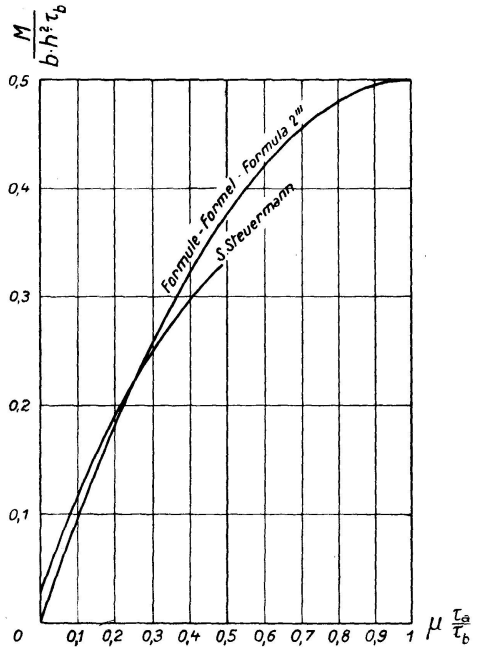

Fig. 9

Section rectangulaire armée en traction seulement.

Einfach armierter Rechteckquerschnitt.

Rectangular section with tensile reinforcement only.

Si enfin nous avions négligé les tractions du béton et admis un diagramme rectangulaire des compressions, nous aurions obtenu:

$$\tau_b \times x = \omega\,\tau_a \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\mu\,\tau_a}{\tau_b} \times h, \quad \text{et} \quad \tau_b \times x \times \left(h - \frac{x}{2}\right) = M$$

d'où en remplaçant x pas sa valeur ci-dessus:

$$\left(1 - 0.5\,\frac{\mu\,\tau_a}{\tau_b}\right)\mu\,\tau_a\,h^2 = M \qquad (2''')$$

D'une façon générale, le moment résistant s'exprime par

$$\left(1 - K\,\frac{\mu\,\tau_a}{\tau_b}\right)\mu\,\tau_a\,h^2,$$

où K varie depuis $\frac{2}{3}$ dans l'hypothèse du diagramme triangulaire de la théorie classique, jusqu'à 0,5 dans l'hypothèse d'un diagramme rectangulaire des compressions.

La comparaison des formules (2), (2′), (2″) et (2‴) montre que les tractions de béton au-dessus de la fissure, quelle que soit leur grandeur, n'apportent qu'une très faible contribution à la résistance, que ces formules diffèrent peu l'une de l'autre et que la formule (2‴), la plus commode, peut les remplacer toutes. Pour fixer les idées:

avec $\tau_a = 2600$ k. p. cm², $\tau_b = 200$ k. p. cm² et $\mu = 0{,}01$ on a:

formule (2) : $M = 24{,}255\ h^2$
formule (2′) : $M = 24{,}235\ h^2$
formule (2″) : $M = 24{,}214\ h^2$
formule (2‴) : $M = 24{,}310\ h^2$.

La distance x, de la fibre neutre o à la fibre extrême comprimée c ne peut évidemment pas être plus grande que h. Ainsi, l'expression $x = \frac{\mu \tau_a}{\tau_b} \times h$, dans le cas où on néglige les tractions de béton et où l'on admet un diagramme rectangulaire des compressions, a pour valeur limite h:

$$\frac{\mu \tau_a}{\tau_b} h \leq h \quad \text{soit} \quad \frac{\tau_a}{\tau_b} \leq \frac{1}{\mu} \tag{3}$$

Dans cette expression, τ_a et τ_b sont des valeurs simultanées à la rupture. Cette relation (3) donne la valeur limite du rapport des tensions de l'armature et du béton à la rupture, en fonction du pourcentage. Ainsi, par exemple, pour $\mu = 4{,}5$ % et $\tau_{b\,28j.} = 100$ k. p. cm², $\tau_a < \frac{100}{0{,}045}$ ou 2220 k. p. cm². Dans ce cas la limite d'élasticité de l'armature ne pourra pas être atteinte et la rupture se produira par écrasement du béton: c'est le phénomène courant de rupture des pièces en béton peu résistant et fortement armées.

Si par contre le pourcentage est relativement faible pour un béton assez résistant, c'est-à-dire si $\mu < \frac{\tau_{b\,28j}}{\tau_{a\ \text{limite d'élasticité}}}$ les fissures du béton dans la zône de traction deviennent des fentes dès que le métal atteint sa limite apparente d'élasticité, et ces fentes deviennent des crevasses qui grandissent dès qu'au dela de cette limite le métal s'écoule sous charge constante tandis que le béton comprimé s'écrase simultanément.

La formule (2‴) peut s'écrire $\frac{M}{\tau_b \times b h^2} = \left(1 - 0{,}5\, \mu \frac{\tau_a}{\tau_b}\right) \frac{\mu \tau_a}{\tau_b}$; c'est une parabole du 2^d degré en fonction de μ ou de $\frac{\mu \tau_a}{\tau_b}$. Le sommet de cette parabole a pour abcisse $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 1$ et pour ordonnée $\frac{M}{\tau_b \times b h^2} = 0{,}5$. En vertu de la condition (3) cette courbe est valable jusqu'à $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 1$, c'est-à-dire jusqu'à son sommet. Nous traçons cette courbe à la fig. 9.

Exemple d'application.

Soit une pièce dont les flexions de service sont de 500 kgm pour les charges permanentes et 750 kgm pour les surcharges.

On désire une sécurité de 1,5 aux charges permanentes et de 3 aux surcharges. La pièce doit avoir 20 cm de largeur; elle sera armée à 0,8 % et

son béton sera caractérisé par $\tau_{b\,28j.} = 150$ k. p. cm² tandis que la limite apparente d'élasticité de l'acier est de 2600 k. p. cm².

Il s'agit de calculer la hauteur et l'armature de la pièce. Le moment de rupture sera de $1{,}5 \times 500 + 3 \times 750 = 3000$ kgm. La formule (2''') donne:

$$\frac{3000{,}00}{20 \times 150 \times h^2} = \left(1 - 0{,}5 \times \frac{0{,}008 \times 2600}{150}\right) \times \frac{0{,}008 \times 2600}{150}$$

La valeur du second membre se lit au diagramme de la fig. 9. Cette formule donne ainsi $h = 27{,}8$ cm.

$$\omega = 0{,}008 \times 20 \times 27{,}8 = 4{,}46 \text{ cm}^2, \text{ soit } 4\ \Phi\ 12 \text{ et } H = 30 \text{ cm.}$$

Autres méthodes.

Parmi les autres méthodes de calcul à la rupture, les plus remarquables sont celles de Mr. S. Steuermann et de Mr. F. Gebauer. Nous les examinerons successivement.

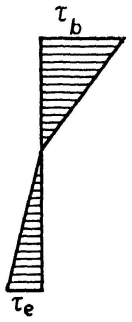

Fig. 10

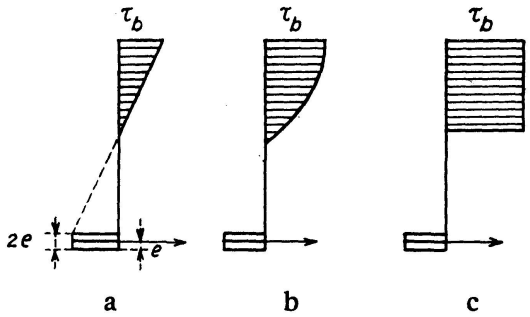

Fig. 11

a) Méthode de Steuermann (Beton und Eisen, nos. des 20 février et 5 mars 1933).

En partant d'un diagramme triangulaire des compressions et des tractions du béton (fig. 10), l'auteur aboutit à la formule suivante:

$$\frac{M}{b h^2} = \frac{\tau_b \tau_e + 3 \mu \tau_a \tau_b - 2 (\mu \tau_a)^2}{3 (\tau_e + \tau_b)} \quad \text{ou, pour } K = \frac{\tau_e}{\tau_b} \text{ et } \varrho = \frac{\mu \tau_a}{\tau_b}:$$

$$\frac{M}{\tau_b b h^2} = \frac{K + 3 \varrho - 2 \varrho^2}{3 (1 + K)},$$

expression d'une parabole du 2^d degré en fonction de ϱ pour une valeur définie de K. Ces paraboles ont toutes leur sommet sur la verticale $\varrho = 0{,}75$ et ne sont valables que jusqu'à $\varrho = 0{,}50$ (valeur pour laquelle $x = h$ et $\frac{M}{\tau_b b h^2} = \frac{1}{3}$ quel que soit K).

Pour $K = 0{,}1$, on a $\frac{M}{\tau_b b h^2} = \frac{0{,}1 + 3 \varrho - 2 \varrho^2}{3{,}3}$

Nous avons tracé cette courbe sur la fig. 9.

Les bases de cette méthode sont critiquables:

1° Au stade de rupture, le diagramme des compressions du béton n'est pas un triangle comme Mr. Steuermann le suppose.

2° Dans les sections de rupture il n'y a pas de tractions de béton jusqu'à l'armature: ces sections sont en effet fissurées dans la zône de traction bien avant la rupture.

La formule de Mr. Steuermann donne des résultats assez satisfaisants jusqu'aux pourcentages moyens, et inférieurs à la réalité pour les pourcentages importants.

Nous considérons par conséquent cette formule comme une recherche, plus ou moins satisfaisante, d'adaptation des calculs aux résultats.

b) Méthode de Mr. le Dr. Ing. F. Gebauer (Beton und Eisen, 5 mai 1934).

Mr. Gebauer établit 3 formules, chacune pour l'un des trois diagrammes ci-contre (fig. 11). Ceux-ci diffèrent entre eux par la variation des compressions de béton et ils ont ceci de commun qu'ils supposent des tractions de béton égales à $\alpha \tau_b$ sur une hauteur $2e$ dont le centre est l'armature (situé à la distance e de la fibre extrême de béton étiré).

D'après l'auteur ces tractions de béton seraient l'équivalent d'une compression initiale dans l'armature sous l'effet du retrait du béton qui l'enrobe. Ceci revient à poser que le retrait du béton contribue à la résistance des pièces fléchies.

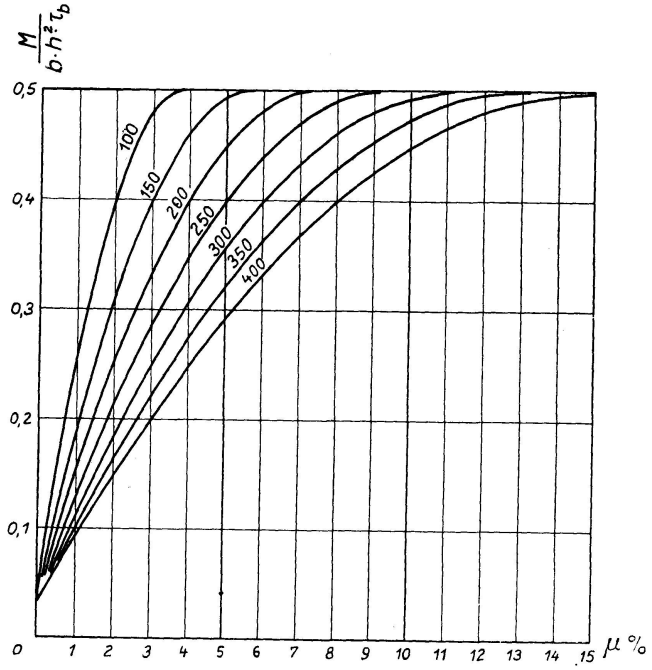

Fig. 12

Profil rectangulaire armé en traction seulement.

Einfach armierter Rechteckquerschnitt.

Rectangular section with tensile reinforcement only.

[Formule de Mr. le Dr. Ing. Gebauer.]

Mr. Gebauer contrôle ses trois formules par de nombreux résultats d'essais. Malheureusement, la précision des mesures de la résistance du béton sur cubes et de la limite apparente d'élasticité de l'armature employée, est, pour la plupart de ces essais (notamment ceux de Moller, Bach, Saliger etc.), insuffisante pour un bon contrôle des formules. Il n'est d'ailleurs permis de considérer, pour la comparaison à une même formule, que les essais effectués de façon identique et notamment avec des charges semblablement disposées: on enregistre en effet des résistances de rupture supérieures par charge isolée au milieu d'une pièce que par charges symétriques ou moment constant sur une certaine longueur (ceci est un effet de la plasticité du matériau).

La comparaison qu'effectue Mr. Gebauer de ses propres essais et de ses formules comporte par ailleurs une erreur fondamentale: L'auteur omet de tenir compte du poids propre dans le calcul par ses formules, alors que cependant ce poids propre intervient pour 2 à 3 % dans l'essai de rupture; de

ce fait la moyenne des différences est de 2,3 % au lieu de 0,2 % donné par l'auteur pour le calcul par sa troisième formule.

Cependant cette formule issue de l'hypothèse d'un diagramme rectangulaire des compressions est celle qui donne les chiffres les plus voisins des résultats expérimentaux.

Elle s'écrit:

$$\frac{M}{\tau_b b h^2} = \left[\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} + \left(\frac{2e}{h} - \mu\right)\alpha\right] \times \left[1 - 0{,}5\left\{\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} + \left(\frac{2e}{h} - \mu\right)\alpha\right\}\right].$$

Pour $\alpha = 0{,}10$ (c'est-à-dire des tractions de béton égales au dizième de la compression de rupture) et $e = 0{,}15\ h$, cette formule devient:

$$\frac{M}{b h^2 \tau_b} = \left[\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} + (0{,}3 - \mu)\,0{,}1\right] \times \left[1 - 0{,}5\left\{\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} + (0{,}3 - \mu) \times 0{,}1\right\}\right]. \qquad (4)$$

La fig. 12 donne ces courbes pour $\tau_a = 2600$ k. p. cm² et $\tau_{b\ 28j.} = 100$, 150, 200, 250, 300, 350 et 400 k. p. cm². Les mêmes courbes sont applicables à $\tau_a = 3500$ k. p. cm² et aux valeurs de τ_b ci-dessus multipliées par le rapport $\frac{3500}{2600}$, des limites élastiques des deux nuances d'acier.

La limite d'application de la formule de Mr. Gebauer résulte de la condition que $x < h$, soit

$$\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} + \left(\frac{2e}{h} - \mu\right)\alpha < 1 \quad \text{ou, pour} \quad \alpha = 0{,}1 \quad \text{et} \quad \frac{e}{h} = 0{,}15:$$

$$\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} + (0{,}3 - \mu) \times 0{,}1 < 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}97 + 0{,}1\,\mu.$$

La justification des formules de Mr. Gebauer par la considération du retrait n'est toutefois pas satisfaisante: il est inexact que le retrait intervienne dans la résistance de rupture par flexion.

On peut s'en rendre compte par le calcul élémentaire suivant.

Soit:

τ_b la compression du béton sous retrait et flexion,
τ_F la traction de l'armature par flexion simple,
τ_R la compression initiale dans l'armature par retrait du béton.

Considérons une section de largeur unité et écrivons les équations d'équilibre dans le plan de flexion.

Equation de projection: $\tau_b x + \omega \tau_R = \omega \tau_F$ d'où, en posant $\mu = \frac{\omega}{h}$ (pourcentage): $x = \frac{\mu}{\tau_b}(\tau_F - \tau_R) \times h$ (1)

Equation de rotation:

$$\tau_b \times \left(h - \frac{x}{2}\right) = M \quad \text{d'où, en remplaçant } x \text{ par sa valeur}$$

donnée par (1): $\left(1 - 0{,}5\,\mu \frac{\tau_F - \tau_R}{\tau_b}\right) \times \mu(\tau_F - \tau_R)\,h^2 = M.$

La valeur limite de $\tau_F - \tau_R$ dans cette formule de rupture est évidemment la limite apparente d'élasticité de l'armature. Par conséquent les valeurs de τ_F et de τ_R considérées isolément n'importent pas; seule leur différence est à considérer et c'est une limite

déterminée, la limite apparente d'élasticité de l'armature employée. La compression de l'armature par retrait du béton n'augmente donc pas la résistance de la pièce.

Cette conclusion est, cela va de soi, indépendante de l'hypothèse faite sur la répartition des compressions du béton.

Elle était d'ailleurs évidente a priori: les tensions de retrait donnant un moment nul avant chargement ne peuvent non plus donner aucun moment à la rupture.

Dans une discussion qui a suivi la publication de la théorie de Mr. le Dr. Ing. Gebauer, Mr. le Dr. Ing. Bittner a tenu le raisonnement suivant: la compression initiale dans l'acier par retrait de béton est équilibrée par des tractions de béton; lorsque la pièce est progressivement mise en charge, la compression dans l'acier diminue progressivement puis l'acier se met en traction tandis que les tractions du béton qui l'enrobe grandissent; dès que la résistance à traction du béton est atteinte, le béton se fissure: à ce moment la traction que ce béton supportait se transmet à l'acier et, comme elle est équivalente à la compression initiale de l'acier, cette dernière se trouve annulée; le retrait n'a donc rien apporté à la rupture.

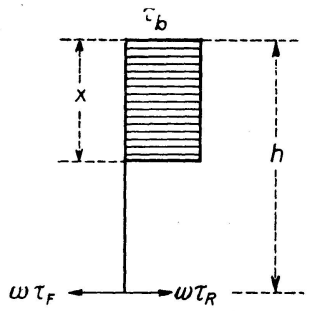

Fig. 13

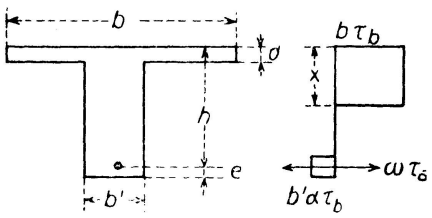

Fig. 14

Nous pensons que la plasticité du matériau peut seule expliquer que, pour les pièces à faible pourcentage, les charges de rupture sont plus grandes que celles données par notre formule et par celle de Mr. Steuermann et assez voisines de celles calculées par la formule de Mr. Gebauer. Dans une pièce faiblement armée, la contribution du béton étiré est effective dans les tronçons non fissurés voisins de la section de rupture; il en résulte que, dans ces tronçons, la compression du béton est sensiblement moindre que dans la section fissurée ou de rupture; ainsi dans les pièces faiblement armées, le béton comprimé dans la section de rupture est compris entre des bétons notablement moins sollicités: en conséquence ce béton est capable d'une compression supérieure à la résistance sur cubes.

Ce phénomène est naturellement d'autant plus marqué que la pièce est plus faiblement armée. Les formules de Mr. Gebauer, qui admettent des tractions indépendantes du pourcentage, donnent précisément aussi des excédents d'autant plus grands que le pourcentage est plus petit: c'est pour cette raison qu'elle concorde particulièrement bien avec les résultats d'essais. Tout se passe donc „comme si" l'hypothèse de Mr. Gebauer sur l'action du retrait était vraie.

Voyons ce que donnerait l'application de la formule (4) ou de Mr. Gebauer à l'exemple traité ci-dessus.

Nous rappelons qu'il s'agit de calculer la hauteur et l'armature d'une pièce de 20 cm. de largeur, armée à 0,8 % et devant donner 3000 Kgm. à la

rupture à 28 jours; les taux sont: $\tau_{b\,28\,j.} = 150$ k. p. cm² et $\tau_{a\,\text{limite élastique}} = 2600$ k. p. cm².

La formule (4) donne:

$$\frac{3000{,}00}{20 \times 150\, h^2} = \left[0{,}008 \times \frac{2600}{150} + (0{,}3 - 0{,}008) \times 0{,}1\right] \times$$
$$\times \left[1 - 0{,}5 \left\{0{,}008 \times \frac{2600}{150} + (0{,}3 - 0{,}008) \times 0{,}1\right\}\right]$$

La valeur du 2^d membre se lit au diagramme de la fig. 12.

Cette formule donne $h = 25{,}5$ cm., d'où $\omega = 0{,}008 \times 20 \times 25{,}5 = 4{,}08$ cm², soit $3\,\Phi 12$ et $1\,\Phi 10$ et $H = 28$ cm.

2. Profil en T armé en traction seulement.

Nous distinguerons deux cas:

A. la partie comprimée sous flexion comprend la table du T,

B. la partie inférieure de l'âme est seule comprimée, l'armature de traction se trouvant dans la table (c'est ce qui se présente aux liaisons hyperstatiques des nervures des planchers).

A. *La partie comprimée sous flexion comprend la table du T.*

Nous admettrons qu'à la rupture les compressions du béton se répartissent selon un rectangle comme à la fig. 14. Cette hypothèse est plus rapprochée encore de la réalité pour la section T que pour la section rectangulaire, du fait de la prépondérance de la table.

Nous admettrons aussi que la plasticité du matériau donne un moment complémentaire provoqué par le béton des parties non fissurées et par conséquent indépendant du pourcentage: cet accroissement de résistance, dû au voisinage de la section de rupture, sera supposé équivalent à celui que produiraient des tractions de béton sur une hauteur $2e$ dont le centre est l'armature. Nous reprenons en somme le diagramme donné par Mr. Gebauer pour la section rectangulaire, mais nous lui donnons une justification différente.

Ecrivons les équations d'équilibre dans le plan de flexion.

Equation de projection sur l'axe de la pièce:

$$[db + b'(x - d)]\, \tau_b = \omega\, \tau_a + (2e b' - \omega)\, \alpha\, \tau_b \tag{1}$$

d'où:

$$x = \frac{\omega}{b'} \times \frac{\tau_a}{\tau_b} + \left(2e - \frac{\omega}{b'}\right) \alpha - d\,\frac{b}{b'} + d \tag{2}$$

Equation de rotation autour d'un axe situé au niveau de l'armature:

$$db\left(h - \frac{d}{2}\right) \tau_b + (x - d)\, b' \left(h - d - \frac{x - d}{2}\right) \tau_b = M \tag{3}$$

d'où, en remplaçant dans cette équation $x - d$ par sa valeur extraite de (2):

$$db\left(h - \frac{d}{2}\right) + b'(h - d)\left[\frac{\omega}{b'}\,\frac{\tau_a}{\tau_b} - d\,\frac{b}{b'} + \left(2e - \frac{\omega}{b'}\right)\alpha\right]$$
$$- \frac{1}{2}\left[\frac{\omega}{b'}\,\frac{\tau_a}{\tau_b} - d\,\frac{b}{b'} + \left(2e - \frac{\omega}{b'}\right)\alpha\right]^2 \times b' = \frac{M}{\tau_b}$$

Posons: $\omega = \mu b h$, $\frac{b}{b'} = \varrho$, $\frac{d}{h} = \varphi$ et $\frac{e}{h} = \varepsilon$.

Introduisons ces valeurs dans l'équation précédente; nous obtenons finalement:

$$\varphi\left(1-\frac{\varphi}{2}\right)+(1-\varphi)\left[\mu\frac{\tau_a}{\tau_b}-\varphi+\left(\frac{2\varepsilon}{\varrho}-\mu\right)\alpha\right]-\frac{\varrho}{2}\left[\mu\frac{\tau_a}{\tau_b}-\varphi+\left(\frac{2\varepsilon}{\varrho}-\mu\right)\alpha\right]^2=\frac{M}{b\,h^2\tau_b}$$

ou:

$$\varphi\left(1-\frac{\varphi}{2}\right)+\left[\mu\frac{\tau_a}{\tau_b}-\varphi+\left(\frac{2\varepsilon}{\varrho}-\mu\right)\alpha\right]\times\left[1-\varphi-\frac{\varrho}{2}\left\{\mu\frac{\tau_a}{\tau_b}-\varphi+\left(\frac{2\varepsilon}{\varrho}-\mu\right)\alpha\right\}\right]=\frac{M}{b\,h^2\tau_b} \quad (4)$$

Cette formule est assez compliquée.

Par ailleurs, lorsque la table est relativement large, le pourcentage d'armature rapporté à l'âme de la poutre est d'une importance telle que la contribution du béton de l'âme par l'application de notre dernière hypothèse ne représente qu'une partie infime du moment de rupture.

On négligera généralement ce petit complément de résistance.

Il en résultera une formule plus commode, que nous traduirons en diagrammes pour son application pratique.

On obtient cette formule en faisant $\alpha = 0$ dans (4):

$$\varphi\left(1-\frac{\varphi}{2}\right)+\left(\mu\frac{\tau_a}{\tau_b}-\varphi\right)\times\left[1-\varphi-\frac{\varrho}{2}\left(\mu\frac{\tau_a}{\tau_b}-\varphi\right)\right]=\frac{M}{b\,h^2\tau_b} \quad (5)$$

Pour une valeur de ϱ donnée, elle est représentée par des paraboles du 2^d degré, fonctions de $\mu\frac{\tau_a}{\tau_b}$, pour des φ donnés.

Leur sommet a pour abcisse $\mu\frac{\tau_a}{\tau_b}=\frac{1-\varphi}{\varrho}+\varphi$ et pour ordonnée

$$\frac{M}{b\,h^2\tau_b}=\varphi\left(1-\frac{\varphi}{2}\right)+\frac{(1-\varphi)^2}{2\,\varrho}.$$

Les limites d'application de la formule (5) résultent des deux conditions $x \geq d$ et $x \leq h$; la condition $x \geq d$ donne $\mu\frac{\tau_a}{\tau_b} \geq \varphi$, et la condition $x \leq h$ ou

$$\mu\frac{b}{b'}h\frac{\tau_a}{\tau_b}-d\frac{b}{b'}+d \leq h \quad \text{donne} \quad \mu\frac{\tau_a}{\tau_b} \leq \varphi+\frac{1-\varphi}{\varrho}.$$

La formule (5) est donc applicable depuis $\mu\frac{\tau_a}{\tau_b}=\varphi$ jusqu'à

$$\mu\frac{\tau_a}{\tau_b}=\varphi+\frac{1-\varphi}{\varrho},$$

abscisse du sommet de la parabole.

En deçà de la limite $\mu\frac{\tau_a}{\tau_b}=\varphi$, donnée par la condition $x \leq d$, c'est-à-dire lorsque la fibre neutre se trouve dans la table, c'est notre formule (2‴) des pièces rectangulaires qui est d'application. La courbe représentative de notre formule (2‴) est tangente à celle de la formule (5) ci-dessus, au point correspondant à $\mu\frac{\tau_a}{\tau_b}=\varphi$.

Nous donnons, fig. 15, 16, 17, 18 et 19, les diagrammes pour $\varrho = 2$, 3, 4, 5 et 6; chacun de ces diagrammes comporte les branches de courbes (formule 5) correspondant à $\varphi = 0{,}10$ 0,15 0,20 0,30 et 0,40.

Exemples d'application.

Une poutre T a une table de largeur $b = 120$ cm. et d'épaisseur $d = 6$ cm. Son âme a une largeur $b' = 30$ cm.

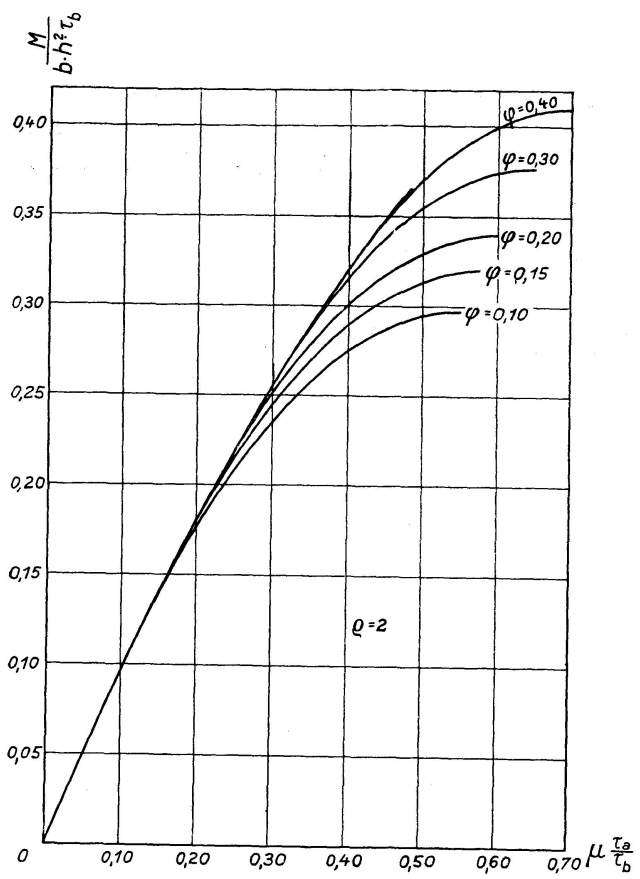

Fig. 15

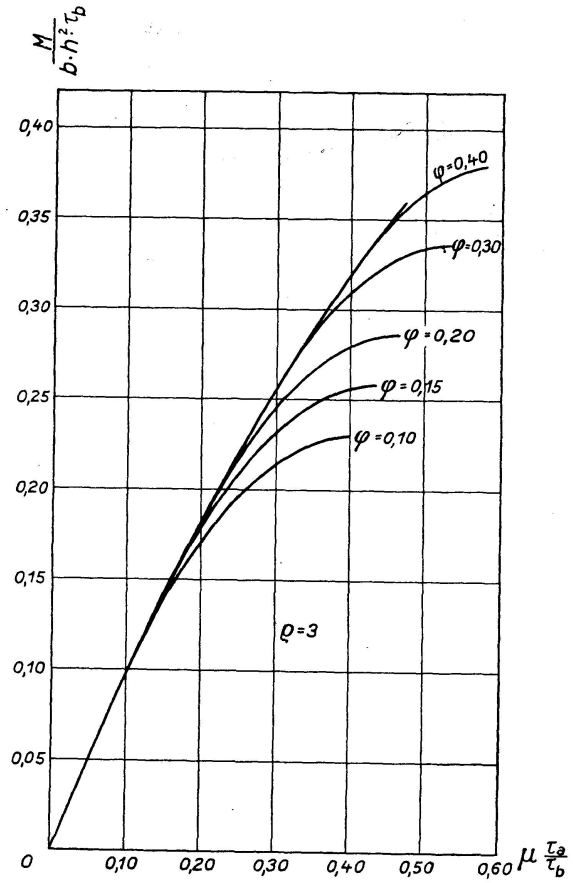

Fig. 16

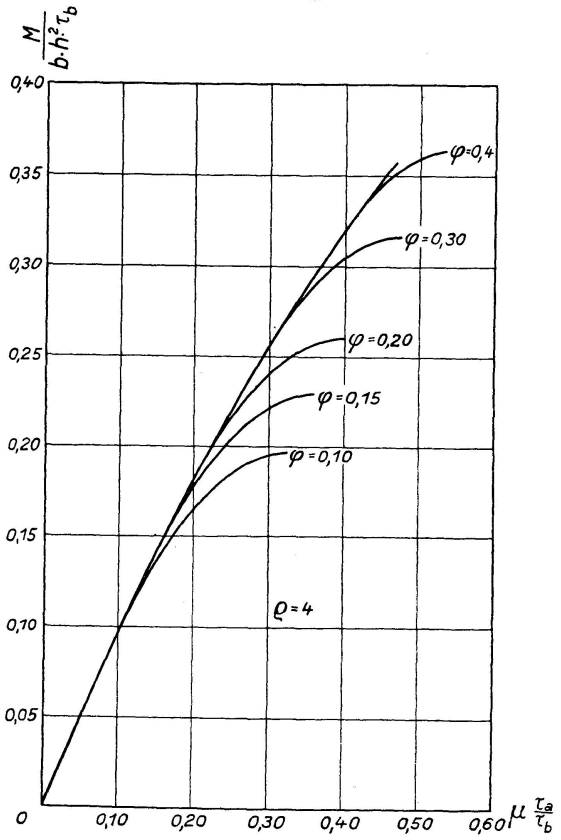

Fig. 17

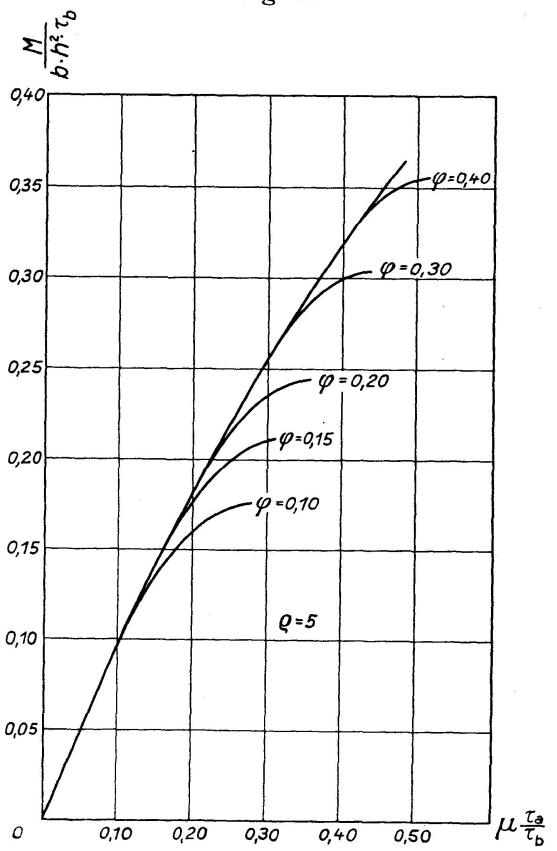

Fig. 18

Poutres T à table comprimée. — Rippenquerschnitt mit gedrückter Platte.
T-beam with flange in compression.

Les moments sollicitants sont:

15 000 Kgm. pour les charges mortes,

12 000 Kgm. pour les surcharges.

La sécurité aux charges mortes sera de 1,5 et celle aux surcharges, de 3. La limite d'élasticité de l'armature est de 2600 k. p. cm² et la compression de rupture du béton à 28 jours est de 130 k. p. cm².

1er problème.

On s'impose un pourcentage d'armature de 1 %.

Il s'agit de calculer la hauteur et l'armature.

Le moment de rupture vaudra:

$1{,}5 \times 15\,000 + 3 \times 12\,000 = 58\,500$ Kgm. ou 58 500.00 Kgcm.

On a $\varrho = \frac{b}{b'} = \frac{120}{30} = 4$, de sorte qu'on fera usage du diagramme de la fig. 17.

$$\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}010 \times \frac{2600}{130} = 0{,}20.$$

Nous procédons par approximations successives:

supposons que la hauteur qu'on obtiendra donne $\varphi = 0{,}10$.

A $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}20$ correspond, sur la courbe de $\varphi = 0{,}10$, une valeur de

$$\frac{M}{b h^2 \tau_b} = 0{,}165, \quad \text{d'où} \quad h = \sqrt{\frac{58500{,}00}{120 \times 130 \times 0{,}165}} = 47{,}7 \text{ cm},$$

hauteur à laquelle correspond $\varphi = \frac{6}{47{,}7} = 0{,}126$ au lieu de $\varphi = 0{,}10$ supposé a priori.

Supposons $\varphi = 0{,}15$. A $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}20$ correspond, sur la courbe de $\varphi = 0{,}15$ une valeur de

$$\frac{M}{b h^2 \tau_b} = 0{,}176, \quad \text{d'où} \quad h = \sqrt{\frac{58500{,}00}{120 \times 130 \times 0{,}176}} = 46{,}2 \text{ cm}.$$

hauteur à laquelle correspond $\varphi = \frac{6}{46{,}2} = 0{,}130$ au lieu de 0,15 supposé.

Le φ réel est donc compris entre les 2 valeurs 0,126 et 0,130.

Nous admettrons $\varphi = 0{,}128$, d'où $h = \frac{6}{0{,}128} = 47$ cm. et $\omega = 0{,}01 \times 120 \times 47 = 56{,}3$ cm² soit 12 Φ 25 et $H = 53$ cm.

2ème problème.

La hauteur totale est limitée à 44 cm sous dalle, soit 50 cm. dalle comprise. Il s'agit de calculer l'armature.

Comme ci-dessus, le moment de rupture est de 58 500.00 Kgcm.

Nous admettons que $h = 50$ cm. — 7 cm. = 43 cm., d'où $\varphi = \frac{6}{43} = 0{,}1395$

et
$$\frac{M}{b h^2 \tau_b} = \frac{58500{,}00}{120 \times 43^2 \times 130} = 0{,}203.$$

A ces deux valeurs correspond, par interpolation au diagramme de la fig. 17, $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}26$ d'où $\mu = \frac{0{,}26 \times 130}{2600} = 0{,}013$ et $\omega = 0{,}013 \times 120 \times 43 = 67{,}1$ cm² soit 14 Φ 25.

B. *La partie inférieure de l'âme du T est seule comprimée, l'armature de traction se trouvant dans la table.*

C'est la sollicitation courante des nervures des planchers continus aux raccords à leurs supports, poutres, colonnes ou murs.

La méthode classique dimensionne trop largement ces sections, du fait qu'elle néglige l'intervention du béton et de l'armature de la dalle.

Il est évident que le travail à traction du béton de la table, dans les tronçons non fissurés, réduit les compressions du béton plus encore pour le profil ⊥ que pour le profil rectangulaire: la différence entre les compressions dans la section de rupture et celles des sections immédiatement voisines étant donc plus considérable, l'étreinte transversale l'est aussi et, en conséquence, le profil est capable d'un moment de rupture plus important.

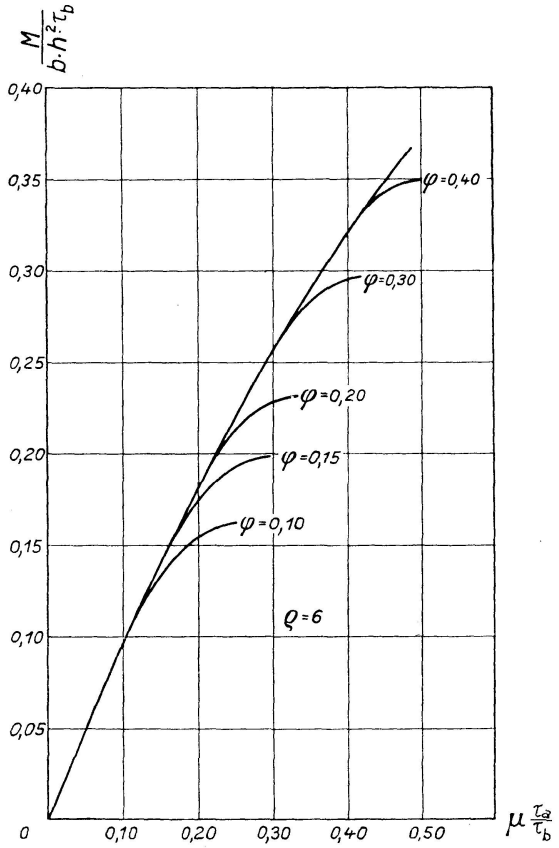

Fig. 19

Poutres T à table comprimée.

Rippenquerschnitt mit gedrückter Platte.

T-beam with flange in compression.

L'accroissement de résistance dû à „l'influence des tronçons adjacents" est toutefois moindre que celui qui correspondrait à des tractions de béton s'exerçant sur $2\,eb$ ou sur db dans la section de rupture.

Nous n'appliquerons l'hypothèse de Mr. Gebauer qu'à la partie rectangulaire $b'h$ du profil, négligeant donc l'effet des tractions du béton sur la largeur $(b—b')$ de la dalle dans les tronçons adjacents: ceci donnera quelque excès de sécurité, pour la raison susdite.

Mais, dans l'expression du moment de rupture, nous ajouterons à l'armature de traction située au droit de la nervure, l'armature longitudinale de la dalle sur la largeur $(b—b')$, pour autant que cette dernière armature ne soit pas déjà sollicitée à traction du fait des flexions de la dalle.

Le moment de rupture s'exprimera donc par la formule (4) du calcul des pièces à section rectangulaire (formule traduite en diagramme à la fig. 12), sauf à y remplacer b par b'.

Exemple d'application.

Une poutre ⊥ dont les dimensions extérieures imposées sont celles de la fig. 21, est sollicitée à ses liaisons par un moment de rupture de 30000 Kgm.

L'armature longitudinale de la dalle, sur la largeur 120 cm. — 30 cm. = 90 cm., est de 1,8 cm²: elle ne travaille pas sous la flexion de la dalle.

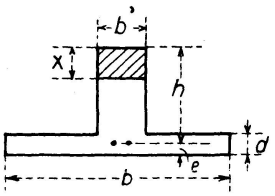

Fig. 20

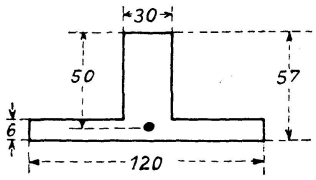

Fig. 21

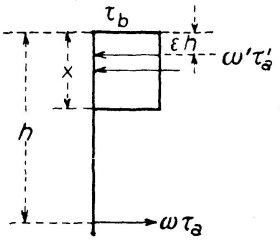

Fig. 22

La limite d'élasticité de l'armature est de 2600 k. p. cm² et la compression du béton sur cubes à 28 jours est de 200 k. p. cm².

Il s'agit de déterminer l'armature de la nervure.

On a:
$$\frac{M}{b \cdot h^2 \cdot \tau_b} = \frac{3000000}{30 \times 50^2 \times 200} = 0{,}20,$$

d'où, par la courbe $\tau_b = 200$ de la fig. 12: $\mu = 1{,}5\,\%$ et $\omega = 0{,}015 \times 30 \times 50 - 1{,}8 = 20{,}7$ cm².

3. Profil rectangulaire armé en compression et en traction.

Nous étudions ce problème dans deux conditions:

A. Nous faisons abstraction de la contribution des tronçons adjacents à la section de rupture;

B. Nous tenons compte de l'action des tronçons adjacents.

Par action des tronçons adjacents nous entendons l'accroissement de résistance dû à l'action de frettage des zônes comprimées des tronçons non fissurés adjacents à la section de rupture.

Les compressions dans les tronçons adjacents sont moindres que celles de la section de rupture, du fait de la contribution des tractions du béton dans les tronçons non fissurés. La différence des compressions des tronçons adjacents et de la section de rupture donne lieu à une étreinte transversale et, en conséquence, à une augmentation de résistance à compression dans la section de rupture. Il y correspond un accroissement de moment de rupture.

Il est possible de chiffrer cette majoration de résistance en procédant par approximations successives.

On détermine d'abord le moment de rupture de la pièce pour les caractéristiques de l'acier et du béton employés: limite apparente d'élasticité de l'acier et compression du béton sur cubes à l'âge considéré. On calcule ensuite la compression maxima qui correspond à ce moment de rupture dans le tronçon non fissuré immédiatement voisin. L'étreinte latérale vaut le produit par le coéfficient de Poisson, de la différence entre la compression sur cubes et la compression calculée dans le tronçon non fissuré. A cette étreinte

correspond, par la courbe de résistance intrinsèque par exemple, une compression de rupture supérieure à la compression sur cubes admise a priori. Mais à cette plus grande compression correspond aussi un plus grand moment de rupture, qu'on détermine, et, dans la section infiniment voisine non fissurée, une compression différente de celle calculée d'abord. Le produit par le coéfficient de Poisson, de la différence entre la compression dans la section de rupture et la compression dans le tronçon non fissuré donne une nouvelle étreinte transversale et, par suite, une nouvelle compression de rupture et un nouveau moment de rupture: celui-ci est très voisin du moment définitif.

Un tel calcul est forcément long et peu pratique.

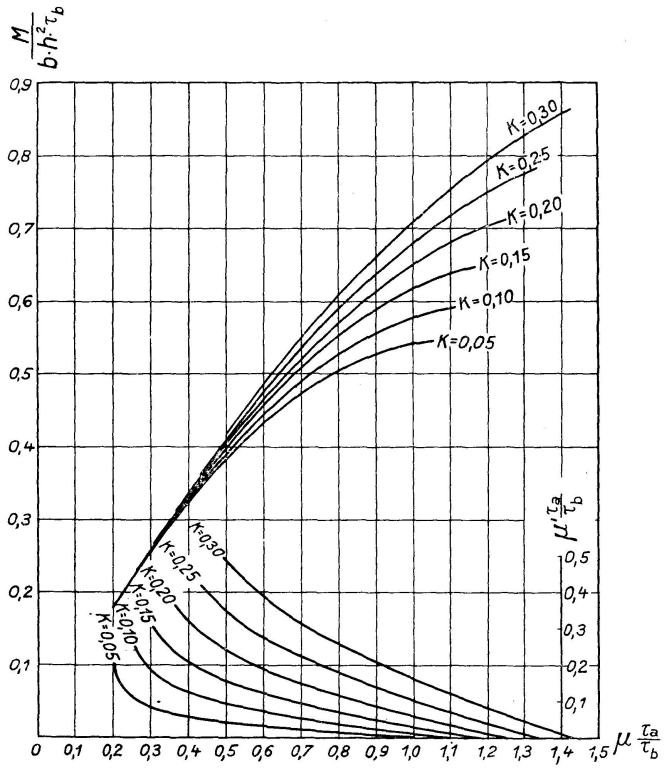

Fig. 23

Profil rectangulaire armé en traction et en compression.
$\varepsilon = 0{,}15$.

Rechteckquerschnitt mit Zug- und Druckarmierung.
$\varepsilon = 0{,}15$.

Rectangular section with both tensile and compressive reinforcement.
$\varepsilon = 0{,}15$.

Nous mettrons le problème en formules „commodes", en posant que la majoration de résistance due à l'action des tronçons adjacents est la même que celle qui serait procurée par des tractions de béton s'exerçant sur une hauteur $2e$ au pourtour de l'armature de traction: nous reprenons en somme l'hypothèse de Mr. le Dr. Ing. Gebauer en lui donnant une autre interprétation. Nous avons vu, à l'occasion du calcul des pièces à simple armature, que les formules issues de cette hypothèse sont en bonne concordance avec les faits d'expériences.

A. Il est fait abstraction de la contribution des tronçons adjacents à la section de rupture.

Nous admettons que le diagramme des tensions de compression, au stade de rupture, est un rectangle.

L'armature de compression ω', travaillant à τ'_a se trouve à une distance εh de la fibre extrême comprimée du profil.

Pour simplifier les développements qui suivent, nous considérons une pièce de largeur unité ($b = 1$).

L'équation d'équilibre de projection sur l'axe de la pièce donne:

$$\tau_b \cdot x + \omega' \tau'_a = \omega \tau_a \tag{1}$$

d'où $x = \dfrac{\omega \tau_a - \omega' \tau'_a}{\tau_b}$ ou, si nous posons $\omega' \tau'_a = K \omega \tau_a$ et $\omega = \mu h$ ($\mu =$ pourcentage d'armature de traction):

$$x = \mu (1 - K) \frac{\tau_a}{\tau_b} h \tag{2}$$

Equation de rotation autour d'un axe situé au niveau de la résultante des compressions du béton:

$$\omega \tau_a \times \left(h - \frac{x}{2}\right) + \omega' \tau'_a \left(\frac{x}{2} - \varepsilon h\right) = M \tag{3}$$

ou:

$$\mu h \tau_a \left(h - \frac{x}{2}\right) + K \mu h \tau_a \times \left(\frac{x}{2} - \varepsilon h\right) = M$$

et, en remplaçant dans cette équation x par sa valeur donnée par (2):

$$\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} \times \left[1 - \frac{(1-K)^2}{2} \times \mu \frac{\tau_a}{\tau_b} - \varepsilon K\right] = \frac{M}{h^2 \tau_b} \tag{4}$$

(expression analogue à la formule (2‴) des pièces rectangulaires armées en traction seulement).

Pour déterminer le pourcentage μ' d'armature comprimée, en fonction de μ, de K et des caractéristiques des matériaux, nous remarquerons que: $\dfrac{\tau'_a}{\tau_b} = \dfrac{x - \varepsilon h}{h - x}$, si nous supposons que les sections transversales primitivement planes sont restées planes après déformation.

Remplaçons dans cette équation de condition x par sa valeur donnée par (2):

$$\tau'_a = \tau_a \times \frac{\mu (1 - K) \dfrac{\tau_a}{\tau_b} - \varepsilon}{1 - \mu (1 - K) \dfrac{\tau_a}{\tau_b}} \quad \text{et, comme} \quad \mu' h \tau'_a = K \mu h \tau_a :$$

$$\mu' = K \mu \frac{\tau_a}{\tau'_a} = K \mu \times \frac{1 - \mu (1 - K) \dfrac{\tau_a}{\tau_b}}{\mu (1 - K) \dfrac{\tau_a}{\tau_b} - \varepsilon} \tag{5}$$

ou, pour la traduction en diagrammes des valeurs $\mu' \dfrac{\tau_a}{\tau_b}$ en fonction de $\mu \dfrac{\tau_a}{\tau_b}$ et de K pour un ε donné:

$$\mu' \frac{\tau_a}{\tau_b} = K \times \mu \frac{\tau_a}{\tau_b} \times \frac{1 - \mu (1 - K) \dfrac{\tau_a}{\tau_b}}{\mu (1 - K) \dfrac{\tau_a}{\tau_b} - \varepsilon} \tag{6}$$

Nous donnons au diagramme de la fig. 23, les courbes représentatives de (4) et (6) pour les valeurs de $K = 0{,}05$ 0,10, 0,15, 0,20 0,25 0,30 et $\varepsilon = 0{,}15$.

Les courbes (6) ont une asymptote verticale à $\mu \dfrac{\tau_a}{\tau} = \dfrac{\varepsilon}{1 - K}$. Elles rencontrent l'axe des $\mu \dfrac{\tau_a}{\tau_b}$ à $\mu \dfrac{\tau_a}{\tau_b} = \dfrac{1}{1 - K}$.

Les paraboles représentatives de (4) ne sont donc valables qu'entre ces mêmes limites.

D'autre part, comme il n'est pas logique que $\mu' > \mu$, nous donnerons comme limite inférieure aux courbes représentatives de (4) et de (6) celles qui résultent de la condition $\mu' = \mu$.

Ces diagrammes sont pleins d'enseignements:

aux asymptotes verticales des courbes (6) correspond une fibre neutre passant au centre des armatures ω': $x = \varepsilon h$;

il est souvent plus économique d'augmenter le pourcentage d'armatures de traction plutôt que d'armer en compression;

la considération du diagramme rectangulaire des compression (c'est-à-dire du stade de rupture) fait apparaître pour les armatures comprimées une contribution moindre que celle que la théorie classique accuse;

cette contribution n'est réellement intéressante que pour de très fortes valeurs de $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b}$, c'est-à-dire pour de gros pourcentages d'armatures de traction et des bétons de faible résistance ou pour des aciers à haute limite élastique.

Exemple d'application.

Une pièce dont les dimensions extérieures sont limitées à $b = 20$ cm., H totale $= 40$ cm., est sollicitée par un moment de 2000 Kgm. pour les charges permanentes et 3000 Kgm. pour les surcharges.

On désire une sécurité de 1,5 aux charges permanentes et de 3 aux surcharges.

Les matériaux employés ont pour caractéristiques:

limite apparente d'élasticité de l'acier: 2600 k. p. cm²;

compression du béton sur cubes à 28 jours: 100 k. p. cm².

Le problème consiste à déterminer l'armature la plus économique.

Des données ci-dessus on déduit:

M de rupture $= 1{,}5 \times 2000 + 3 \times 3000 = 12\,000$ Kgm.

$h = 40$ cm. $- 6$ cm. $= 34$ cm.

$$\frac{M}{b\,h^2\,\tau_b} = \frac{1200000}{20 \times 34^2 \times 100} = 0{,}52.$$

Chacune des courbes représentatives de (4) donne, sur l'horizontale $\frac{M}{b\,h^2\,\tau_b} = 0{,}52$, une valeur de $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b}$ à laquelle correspond, sur les courbes représentatives de (6) une valeur de $\mu' \frac{\tau_a}{\tau_b}$. L'armature minima est donnée par le minimum de la somme des deux lectures $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b}$ et $\mu' \frac{\tau_a}{\tau_b}$.

On lit successivement:

pour $K = 0{,}30$ $\quad \mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}650$ $\quad \mu' \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}175$ $\quad (\mu + \mu') \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}65 + 0{,}175 = 0{,}825$

pour $K = 0{,}25$ $\quad \mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}675$ $\quad \mu' \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}115$ $\quad (\mu + \mu') \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}675 + 0{,}115 = 0{,}790$

pour $K = 0{,}20$ $\quad \mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}700$ $\quad \mu' \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}075$ $\quad (\mu + \mu') \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}700 + 0{,}075 = 0{,}775$

pour $K = 0{,}15$ $\quad \mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}730$ $\quad \mu' \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}042$ $\quad (\mu + \mu') \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}730 + 0{,}042 = 0{,}772$

pour $K = 0{,}10$ $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}775$ $\mu' \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}020$ $(\mu + \mu') \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}775 + 0{,}020 = 0{,}795$

pour $K = 0{,}05$ $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}860$ $\mu' \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}005$ $(\mu + \mu') \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}860 + 0{,}005 = 0{,}865$

Le pourcentage minimum résulte donc des lectures faites pour $K = 0{,}15$,

soit $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}730$ d'où $\mu = 0{,}730 \times \frac{100}{2600} = 0{,}0281$

$\mu' \frac{\tau_a}{\tau_b} = 0{,}042$ d'où $\mu' = 0{,}042 \times \frac{100}{2500} = 0{,}00162$

d'où $\omega = 0{,}0281 \times 20 \times 34 = 19{,}10 \text{ cm}^2$

et $\omega' = 0{,}00162 \times 20 \times 34 = 1{,}10 \text{ cm}^2$.

B. Il est tenu compte de la contribution des tronçons adjacents à la section de rupture.

Avec les mêmes hypothèses qu'au 1 ° ci-dessus, nous admettons que la contribution des tronçons adjacents équivaut à celle de traction de béton sur une hauteur $2e$ dont le centre est l'armature de traction, e étant la distance de l'armature de traction à la fibre extrême du béton étiré.

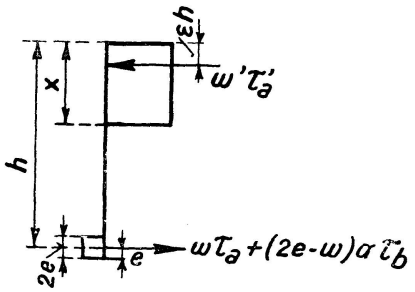

Fig. 24

L'équation d'équilibre de projection sur l'axe de la pièce donne:

$$\tau_b x + \omega' \tau'_a = \omega \tau_a + (2e - \omega) \alpha \tau_b \cdot \text{ (en supposant } b = 1) \tag{1}$$

Posons $\omega' \tau'_a = K [\omega \tau_a + (2e - \omega) \alpha \tau_b]$.

En introduisant cette valeur dans (1) nous obtenons:

$$x = \left[\omega \frac{\tau_a}{\tau_b} + (2e - \omega) \alpha\right] \times (1 - K). \tag{2}$$

Equation d'équilibre de rotation autour d'un axe situé au niveau de la résultante des compressions du béton:

$$[\omega \tau_a + (2e - \omega) \alpha \tau_b] \times \left(h - \frac{x}{2}\right) + \omega' \tau'_a \left(\frac{x}{2} - \varepsilon h\right) = M \tag{3}$$

et, en remplaçant dans cette équation x par sa valeur extraite de (2):

$$\frac{M}{b h^2 \tau_b} = \left[\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} + \left(\frac{2e}{h} - \mu\right) \alpha\right] \times \left[1 - \frac{(1-K)^2}{2} \left\{\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} + \left(\frac{2e}{h} - \mu\right) \alpha\right\} - \varepsilon K\right]$$

ou, si nous posons $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} + \left(\frac{2e}{h} - \mu\right) \alpha = X$:

$$\frac{M}{b h^2} = X \left[1 - \frac{(1-K)^2}{2} X - \varepsilon K\right] \times \tau_b \tag{4}$$

expression analogue à celle obtenue au 1 ° ci-dessus.

Pour déterminer le pourcentage μ' d'armatures comprimées, en fonction de μ, de K et des caractéristiques des matériaux, nous remarquerons que $\frac{\tau'_a}{\tau} = \frac{x - \varepsilon h}{h - x}$, si nous supposons que les sections transversales primitivement planes sont restées planes après déformation.

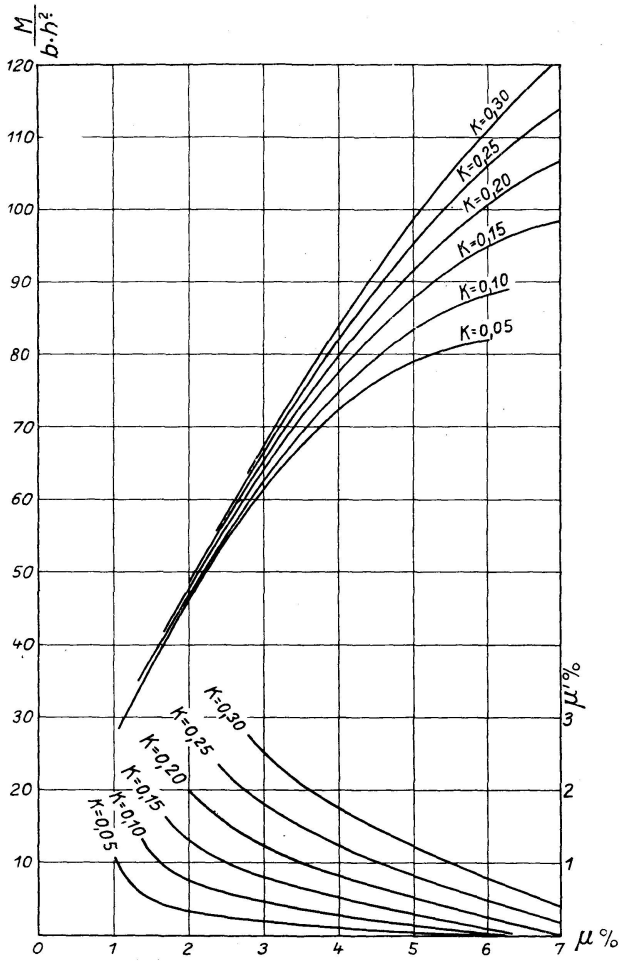

Fig. 25

Profil rectangulaire armé en traction et en compression.

Rechteckquerschnitt mit Zug- und Druckarmierung.

Rectangular section with both tensile and compressive reinforcement.

$\tau_a = 2600$ k. p. cm²
$\tau_b = 150$ k. p. cm²
$\varepsilon = 0{,}15$; $\alpha = 0{,}10$;
$\frac{e}{h} = 0.15$.

Remplaçons, dans cette équation de condition, x par sa valeur donnée par (2):

$$\tau'_a = \tau_a \times \frac{(1-K)\left[\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} + \left(\frac{2e}{h} - \mu\right)\alpha\right] - \varepsilon}{1-(1-K)\left[\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} + \left(\frac{2e}{h} - \mu\right)\alpha\right]} \quad \text{ou} \quad \tau'_a = \tau_a \times \frac{(1-K)X - \varepsilon}{1-(1-K)X}$$

et, comme $\mu' h \tau'_a = K\left[\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} + \left(\frac{2e}{h} - \mu\right)\alpha\right] \times h \times \tau_b = K X h \tau_b$:

$$\mu' = \frac{\tau_b}{\tau_a} \times K X \times \frac{1-(1-K)X}{(1-K)X - \varepsilon} \tag{5}$$

Nous donnons au diagramme de la fig. 25 les courbes représentatives de (4) et de (5) pour les valeurs de $K = 0{,}05\ 0{,}10\ 0{,}15\ 0{,}20\ 0{,}25\ 0{,}30$ $\varepsilon = 0{,}15$, $\frac{e}{h} = 0{,}15$, $\alpha = 0{,}10$ et $\frac{\tau_a}{\tau_b} = \frac{2600}{150}$

Les courbes (5) ont une asymptote verticale pour $X = \frac{\varepsilon}{1-K}$ ou $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = \frac{0{,}15}{1-K} - 0{,}10\ (0{,}30 - \mu)$. Elles rencontrent l'axe des $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b}$ pour $X = \frac{1}{1-K}$ soit à $\mu \frac{\tau_a}{\tau_b} = \frac{1}{1-K} - 0{,}10\ (0{,}30 - \mu)$.

Ces diagrammes, semblables aux précédents, conduisent aux mêmes conclusions.

Exemple d'application.

Une pièce dont les dimensions extérieures sont limitées à $b = 15$ cm., H totale $= 35$ cm., est sollicitée par un moment de 2000 Kgm. pour les charges permanentes et 2200 Kgm. pour les surcharges.

On désire une sécurité de 1,5 aux charges permanentes et de 3 aux surcharges.

Les matériaux employés ont pour caractéristiques:

limite apparente d'élasticité de l'acier: $\tau_a = 2600$ k. p. cm²;

compressions du béton sur cubes à 28 jours: $\tau_b = 150$ k. p. cm².

Le problème consiste à déterminer l'armature la plus économique.

Des données ci-dessus on déduit:

M de rupture $= 1{,}5 \times 2000 + 3 \times 2200 = 9600$ Kgm.

$h = 35$ cm $- 6$ cm $= 29$ cm.

$$\frac{M}{b\,h^2} = \frac{960000}{15 \times 29^2} = 76{,}1$$

Chacune des courbes représentatives de (4) donne, sur l'horizontale $\frac{M}{b\,h^2} = 76{,}1$, une valeur de μ à laquelle correspond, sur les courbes représentatives de (5), une valeur de μ'.

Nous lisons successivement:

pour $K = 0{,}30$	$\mu = 0{,}0350$	$\mu' = 0{,}0210$	d'où	$\mu + \mu' = 0{,}0560$
pour $K = 0{,}25$	$\mu = 0{,}0360$	$\mu' = 0{,}0140$	d'où	$\mu + \mu' = 0{,}0505$
pour $K = 0{,}20$	$\mu = 0{,}0375$	$\mu' = 0{,}0090$	d'où	$\mu + \mu' = 0{,}0465$
pour $K = 0{,}15$	$\mu = 0{,}0390$	$\mu' = 0{,}0055$	d'où	$\mu + \mu' = 0{,}0440$
pour $K = 0{,}10$	$\mu = 0{,}0415$	$\mu' = 0{,}0025$	d'où	$\mu + \mu' = 0{,}0440$
pour $K = 0{,}05$	$\mu = 0{,}0450$	$\mu' = 0{,}0010$	d'où	$\mu + \mu' = 0{,}0460$

$\mu + \mu'$ minimum résulte des lectures faites pour $K = 0{,}10$, soit $\mu = 0{,}0415$ et $\mu' = 0{,}0025$ d'où:

$$\omega = 0{,}0415 \times 15 \times 29 = 18{,}05 \text{ cm}^2,$$
$$\omega' = 0{,}0025 \times 15 \times 29 = 1{,}09 \text{ cm}^2.$$

Résumé.

L'auteur discute les bases de la théorie classique des pièces fléchies en béton armé et l'application qu'on en fait ordinairement par introduction de taux de sécurité ou fractions des taux de rupture des matériaux.

Il propose de faire le calcul au stade de rupture et d'adopter pour le poids propre une sécurité différente de celle aux surcharges.

En considérant seulement les conditions d'équilibre au stade de rupture (et faisant abstraction du coéfficient d'équivalence m dont les classiques se

sont embarrassés par l'adoption d'un postulat superfaitatoire et pratiquement faux), il détermine les expressions du moment de rupture successivement pour:

1. les pièces à section rectangulaire armées en traction seulement;
2. les pièces à section en T armées en traction seulement;
3. les pièces à section rectangulaire armées en traction et en compression.

Il admet l'expression donnée par Mr. le Dr. Ing. Gebauer pour les pièces à section rectangulaire mais il attribue le bon accord de cette expression et des résultats expérimentaux non pas au retrait mais à „l'influence des tronçons adjacents à la section de rupture": l'action de frettage des zônes comprimées des tronçons non fissurés adjacents à la section de rupture détermine un accroissement du moment de rupture. L'auteur indique une façon de chiffrer cette majoration de résistance par un calcul d'approximations successives qui fait usage de la courbe de résistance intrinsèque ou de la courbe des tensions principales.

L'étude est illustrée de diagrammes et d'exemples de calculs en vue de son application pratique.

Zusammenfassung.

Der Autor befaßt sich mit den Grundlagen der klassischen Theorie der auf Biegung beanspruchten Eisenbetonträger und deren allgemeiner Anwendung durch Einführung des Sicherheitsgrades oder Verhältnisse der Bruchwerte der Baustoffe.

Er schlägt vor, die Berechnung für das Bruchstadium durchzuführen und für das Eigengewicht einen Sicherheitsgrad anzunehmen, der von jenem für die Nutzlasten verschieden ist.

Indem er nur die Gleichgewichtsbedingungen im Bruchstadium betrachtet (und von der Berücksichtigung der Verhältniszahl m der Elastizitätsmodule absieht, mit welcher sich die klassischen Theorien durch eine unzureichende und praktisch falsche Annahme belastet haben), bestimmt er die Ausdrücke des Bruchmomentes für:

1. Rechteckquerschnitte, nur in der Zugzone armiert;
2. T-förmige Querschnitte, nur in der Zugzone armiert;
3. Rechteckquerschnitte, in der Zugzone und in der Druckzone armiert.

Er pflichtet dem von Dr. Gebauer für Rechteckquerschnitte aufgestellten Ausdruck bei, schreibt aber dessen gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen nicht dem Schwinden, sondern „dem Einfluß der dem Bruchquerschnitt benachbarten Teilen" zu. Die Wirkung der Umschnürung der gedrückten Zonen der nicht gerissenen benachbarten Teile des Bruchquerschnittes bestimmen eine Vergrößerung des Bruchmomentes. Der Autor gibt eine Berechnungsweise als eine für diese Vergrößerung des Widerstandes fortschreitende Annäherungsrechnung, die von der wirklichen Widerstandskurve oder der Kurve der Hauptspannungen Gebrauch macht.

Der Beitrag weist Diagramme und Rechnungsbeispiele auf, mit der Absicht, der praktischen Anwendung einen Weg zu öffnen.

Summary.

The author discusses the bases of the classical theory of bent members in reinforced concrete design and the application ordinarily made there of

by way of introducing safe stresses, safety factors or fractions of the ultimate strengths.

He proposes to make the calculation at the stage of failure and to adopt for the dead load a measure of safety differing from that for superimposed loads.

Considering only the conditions of equilibrium at the stage of rupture (and not entering the coefficient of equivalence m with which the classical theories have encumbered themselves by adopting a rather superficial postulate and which practically does not hold true) he successively determines the expressions of the moment of rupture for:

1. rectangular members with compressive reinforcement only;
2. T-beams with tensile reinforcement only;
3. rectangular members with both tensile and compressive reinforcement.

He agrees with Dr. Gebauer's expression for rectangular beams, but attributes the good accord of said expression with test-results not to shrinkage but rather to „the influence of fragments adjacent to the section of rupture": the hooping action of the compressed zones of nonfissured fragments adjacent to the place of rupture giving rise to an increase of the moment of rupture.

The author indicates a way of calculating this increase of resistance by a method of successive approximations making use of the curve of intrinsic resistance or the curve of principal stresses.

The paper is illustrated with diagrams and with numerical examples with a view of opening a way for practical application.