

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 3 (1935)

**Artikel:** Knickung der rechteckigen Platte bei veränderlicher Randbelastung

**Autor:** Ban, Shizuo

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4140>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# KNICKUNG DER RECHTECKIGEN PLATTE BEI VERÄNDERLICHER RANDBELASTUNG

FLAMBAGE D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE SOLLICITÉE AUX  
BORDS PAR UNE CHARGE VARIABLE.

BUCKLING OF A RECTANGULAR SLAB SUBJECTED TO VARIABLE  
MARGINAL LOADING.

Prof. SHIZUO BAN, Kioto (Japan).

## Einleitung.

Wenn es sich um die Knickung der Platte handelt, so beschränkt sich die Untersuchung stets auf das Problem, das hauptsächlich mit der lokalen Sicherheit der eisernen Bauteile zu tun hat. Neuerdings wird aber eine Schale oder Scheibe als neues Tragwerk in die Eisenbetonkonstruktion eingeführt, wodurch ermöglicht wird, einen großen Raum mit einer außergewöhnlich leichten Konstruktion zu überdecken. Da diese Tragwerke sehr dünnwandig gebaut werden können, verlangt bei deren Entwurf die Frage der Stabilität besondere Beachtung, indem zuweilen Knickungsfälle zu berücksichtigen sind, die bei der eisernen Konstruktion selten vorkommen. Zum Beispiel werden in einer Teilscheibe des Faltwerks Normalspannungen und Schubspannungen, deren Verteilung in Längs- und Querrichtung eine andere ist<sup>1)</sup>, zugleich hervorgerufen. Um die Stabilität des Faltwerks theoretisch verfolgen zu können, haben wir noch viele Knickprobleme in bezug auf die Platte unter verschiedenen Spannungszuständen und Randbedingungen in Betracht zu ziehen. Der Verfasser gibt vorliegend eine angenäherte Lösung für eine rechteckige Platte, die an einem Seitenpaar linear veränderlich belastet ist. Die Stützung der Platte ist so angenommen, daß sie an drei Seiten  $x = 0$ ,  $y = 0$  und  $y = b$  unbeweglich und an der vierten, der Belastung parallel laufenden Seite elastisch gestützt ist.

## Erster Abschnitt. Lösung durch die Differenzgleichung.

1. Die Differentialgleichung der Knickfläche und ihre Anwendung auf die gleichmäßig gedrückte Platte.

Wir verlegen den Koordinatenursprung in eine Ecke der Platte und lassen die Platte von den Seiten  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  und  $y = b$  begrenzt sein. Bezeichnen wir mit  $w$  die Durchbiegung der Platte, mit  $N$  die Plattensteifigkeit<sup>2)</sup> und ferner mit  $n_y(x)$  die Belastung, die auf den Rändern  $y = 0$  und  $y = b$  in  $x$ -Richtung wirkt, so lautet bekanntlich die Differentialgleichung

<sup>1)</sup> Über die Verteilung der Spannung in Faltwerk geben folgende Aufsätze Auskunft: EHLER, Beton und Eisen, 1930, S. 281. CRAEMER, Beton und Eisen, 1930, S. 276. GRUBER, I. Abhandlung d. I. V. B. H., 1932.

<sup>2)</sup> NADAI, Elastische Platten.

der Knickfläche

$$N \Delta \Delta w = -n_y(x) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (1)$$

wobei die Druckspannung als positiv gerechnet ist.

Da die Platte an den Rändern  $y = 0$  und  $y = b$  gestützt ist, machen wir den Ansatz

$$w = X \cdot \sin \lambda y, \quad (2)$$

wo

$$\lambda = \frac{m\pi}{b} \quad (3)$$

und  $X$  eine Funktion von  $x$  ist. Die Fläche (2) befriedigt für das Seitenpaar  $y = 0$  und  $y = b$  die Grenzbedingungen. Die neu eingeführte Funktion  $X$  ist so zu wählen, daß sie der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^4 X = + \frac{n_y(0)}{N} \lambda^2 X \quad (4)$$

und den Grenzbedingungen für das Seitenpaar  $x = 0$  und  $x = a$  genügt. Da die Platte an der Seite  $x = 0$  aufliegend gestützt ist, folgen nachstehende Bedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} |X|_{x=0} = 0 \\ \left| \frac{d^2 X}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

Wir stellen uns vor, daß die Platte bei  $x = a$  mit einer Randversteifung eingefast ist und die letztere bei der Knickung elastischen Widerstand leistet. Ferner nehmen wir an, daß sowohl die Randversteifung als auch die Platte an dem Rand  $x = a$  in dieselbe Sinuslinie

$$\zeta = X \sin \lambda y$$

verbogen werde. Aus der Differentialgleichung der elastischen Linie eines Balkens

$$EJ_b \frac{d^4 \zeta}{dy^4} = q(y)$$

erhalten wir die Belastung auf die Randversteifung:

$$q(y) = EJ_b \cdot X \cdot \lambda^4 \sin \lambda y,$$

wobei  $J_b$  das Trägheitsmoment der Randversteifung bedeutet. Diese Belastung muß mit der Stützkraft in dem Plattenschnitt  $x = a$  im Gleichgewicht sein, woraus folgt

$$N \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} = EJ_b \cdot X \cdot \lambda^4 \sin \lambda y$$

oder mit dem Ansatz (2)

$$\left| \frac{d^3 X}{dx^3} - \lambda^2 (2 - \nu) \frac{dX}{dx} \right|_{x=a} = \gamma \lambda^4 |X|_{x=a} \quad (6)$$

worin  $\gamma = EJ_b : N$  ist.

Zu der Voraussetzung, daß die Platte mit der Randversteifung biegungsfrei verbunden sei, tritt noch die Bedingung hinzu

$$\left| \frac{d^2 X}{dx^2} - \nu \lambda^2 X \right|_{x=a} = 0 \quad (7)$$

Um eine Vergleichsmöglichkeit zu bieten, gibt der Verfasser zuerst die strenge Lösung für eine gleichmäßig gedrückte Platte. Falls die Randbelastung gleichmäßig verteilt ist, erhalten wir aus Gl. (4) eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + (\lambda^2 - \mu^2) \lambda^2 X = 0 \quad (8)$$

worin 
$$\mu^2 = \frac{n\gamma}{N} \quad (9)$$

ist. Mit den Abkürzungen

$$\alpha_1 = \sqrt{\lambda(\mu + \lambda)}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\lambda(\mu - \lambda)} \quad (10)$$

läßt sich die Lösung von Gl. (8) in der Form

$$X = A \mathfrak{C}of \alpha_1 x + B \mathfrak{S}in \alpha_1 x + C \cos \alpha_2 x + D \sin \alpha_2 x$$

ausdrücken<sup>3)</sup>. Infolge der Randbedingungen auf der Seite  $x = 0$  verschwinden die Koeffizienten  $A$  und  $C$ . Der Ausdruck vereinfacht sich demnach zu

$$X = B \mathfrak{S}in \alpha_1 x + D \sin \alpha_2 x$$

Eliminiert man die übrigen Koeffizienten  $B$  und  $D$  an Hand der beiden Grenzbedingungen (6) und (7), so erhält man die Knickbedingung:

$$\left| \begin{array}{cc} (\alpha_1^2 - \nu \lambda^2) \mathfrak{S}in \alpha_1 a & (\alpha_2^2 + \nu \lambda^2) \sin \alpha_2 a \\ [\alpha_1^3 - \lambda^2 \alpha_1 (2 - \nu)] \mathfrak{C}of \alpha_1 a - \gamma \lambda^4 \mathfrak{S}in \alpha_1 a & [\alpha_2^3 + \lambda^2 \alpha_2 (2 - \nu)] \cos \alpha_2 a + \gamma \lambda^4 \sin \alpha_2 a \end{array} \right| = 0 \quad (11)$$

Setzen wir  $\gamma = \infty$  in Gl. (11) ein, so erhalten wir die bekannte Knickbedingung für eine ringsum frei gestützte Platte:

$$\sin \alpha_2 a = 0,$$

woraus sich für die Knickkraft

$$\frac{n}{N} a^2 = \pi^2 \frac{a^2}{b^2} \left( \frac{b^2}{a^2} + 1 \right)^2 \quad (12)$$

ergibt. Falls die Seite  $x = a$  ganz frei ist, setzen wir einfach  $\gamma = 0$  in Gl. (11) ein<sup>4)</sup>.

Die numerische Rechnung mit  $\nu = 0$  und  $a:b = 1$  liefert

$$\frac{n}{N} a^2 = 4\pi^2 \quad \text{für } \gamma = \infty$$

$$\frac{n}{N} a^2 = 15,16 \quad \text{für } \gamma = 0$$

und 
$$\frac{n}{N} a^2 = 24,00 \quad \text{für } \gamma = 0,558 a.$$

## 2. Übergang zum Differenzenausdruck.

Sehen wir von der gleichmäßig verteilten Belastung ab, so stoßen wir auf Schwierigkeiten, die Grundgleichung (4) zu lösen. In diesem Fall empfiehlt es sich, die Gl. (4) in Differenzenform zu bringen, wie man sie bei

<sup>3)</sup> NÁDAI, Elastische Platten.

<sup>4)</sup> Dieselbe Bedingung wurde 1913 von TIMOSHENKO aufgestellt. Vgl. Z. Math. u. Phys. 1913.

Platten- oder Scheibenproblemen seit Jahren verwendet<sup>5)</sup>. Mit diesem Ausdruck läßt sich die Knicklast nach der Methode der elastischen Gelenkkette errechnen, die Henky für die Knickung des Stabwerkes benutzt hatte<sup>6)</sup>. Da wir nur mit der Grundgleichung (4) zu tun haben, brauchen wir keine partielle Differenzgleichung zu nehmen, und die Berechnung wird deshalb so einfach wie bei der Stabknickung.

Für eine linear veränderliche Belastung

$$n_y(x) = n_0 + n \cdot x \quad (13)$$

entsteht

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 \left( \lambda^2 - \frac{n_0 + n_1 x}{N} \right) X = 0 \quad (14)$$

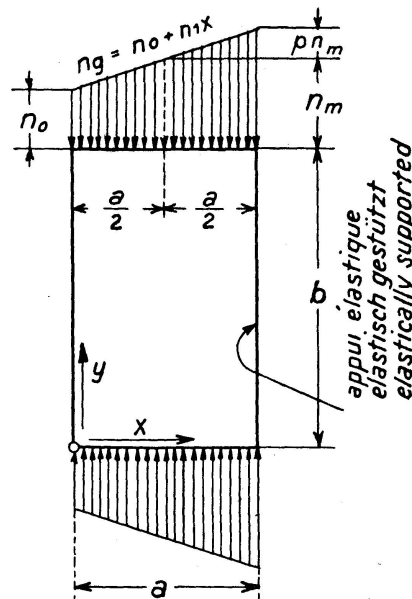
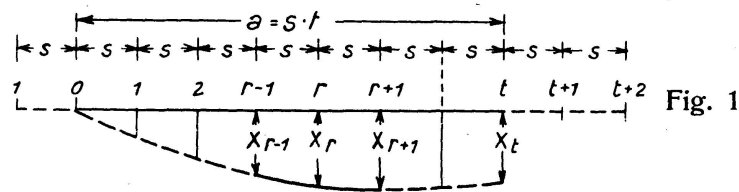


Fig. 2

Um den Differentialquotienten als Differenzenquotienten ausdrücken zu können, teilen wir die ganze Strecke  $a$  in  $t$  gleiche Intervalle  $s$  ein, und ersetzen eine beliebige Strecke der  $X$ -Kurve  $X_{r-1}$ ,  $X_r$ ,  $X_{r+1}$  durch eine Parabel, deren Gleichung lautet (Fig. 2)

$$X = \frac{X_{r+1} - 2X_r + X_{r-1}}{2s^2} x^2 + \frac{X_{r+1} - X_{r-1}}{2s} x + X_r$$

<sup>5)</sup> H. MARCUS, *Elastische Gewebe*, 1924. H. BAY, *Über den Spannungszustand in hohen Trägern*, 1931.

<sup>6)</sup> HENKY, *Der Eisenbau*, 1920.

Die ersten und zweiten Differenzenkoeffizienten dieser Ersatzkurve an der Stelle  $r$  sind angenähert

$$X^I = \frac{dX}{dx} = \frac{X_{r+1} - X_{r-1}}{2s} \quad (15)$$

$$X^{II} = \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{X_{r+1} - 2X_r + X_{r-1}}{s^2} \quad (16)$$

Eine analoge Überlegung führt weiter zu

$$X^{III} = \frac{d^3X}{dx^3} = \frac{X_{r+2} - 2X_{r+1} - 2X_{r-1} + X_{r-2}}{2s^3} \quad (17)$$

$$X^{IV} = \frac{d^4X}{dx^4} = \frac{X_{r+2} - 4X_{r+1} + 6X_r - 4X_{r-1} + X_{r-2}}{s^4} \quad (18)$$

Damit ist es gelungen, die notwendigen Differentialquotienten als Differenzenausdruck zu geben.

Setzen wir Gl. (16) und (18) in Gl. (14) ein, so geht letztere in eine Differenzengleichung über:

$$X_{r-2} - k_1 X_{r-1} + \left( k_2 - \lambda^2 s^4 \frac{n_0 + n_1 r s}{N} \right) X_r - k_1 X_{r+1} + X_{r+2} = 0 \quad (19)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{wo} \\ \text{und} \end{array} \right\} \begin{array}{l} k_1 = 4 + 2\lambda^2 s^2 \\ k_2 = 6 + 4\lambda^2 s^2 + \lambda^4 s^4 \end{array} \quad (20)$$

ist. In vorliegenden Untersuchungen werden wir stets die mittlere Druckspannung  $n_m$  berechnen, und es empfiehlt sich demnach, folgenden Ansatz

$$\left. \begin{array}{l} n_m = n_0 + n_1 \frac{st}{2} \\ p \cdot n_m = n_1 \frac{st}{2} \end{array} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{oder umgekehrt} \\ \text{und} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n_1 = \frac{2n_m p}{st} \\ n_0 = (1-p)n_m \end{array} \quad (22)$$

einzuführen. Wir bezeichnen mit  $p$  die Ungleichförmigkeit der Belastung: Unter  $p = 0$  verstehen wir eine gleichmäßige und unter  $p = 1$  bzw.  $p = -1$  eine Verteilung der Belastung so, daß sie längs des Randes  $x = 0$  bzw.  $x = a$  verschwindet. Mit den Ansätzen (22) und ferner mit

$$\frac{n_m}{N} = \mu^2 \quad (23)$$

erhalten wir aus Gl. (19)

$$X_{r-2} - k_1 X_{r-1} + \left\{ k_2 - \lambda^2 \cdot s^4 \cdot \mu^2 \left[ 1 - \left( 1 - 2 \frac{r}{t} \right) p \right] \right\} X_r - k_1 \cdot X_{r+1} + X_{r+2} = 0, \quad (24)$$

$$r = 1, 2, \dots, t.$$

Zunächst wollen wir die Randbedingungen als Differenzenausdruck angeben. Wir denken uns die Knickfläche über die Grenzlinien  $x = 0$  und  $x = a$  ausgedehnt und fügen noch die Teilpunkte  $-1$ ,  $t + 1$  und  $t + 2$  hinzu. Die Grenzbedingungen am Rand  $x = 0$  fordern

$$X_0 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{X_{-1} - 2X_0 + X_1}{s^2} - \lambda^2 \nu X_0 = 0$$

$$\text{oder} \quad X_0 = 0 \quad \text{und} \quad X_{-1} = -X_1 \quad (25)$$

Am anderen Rand  $x = a$  soll das Biegemoment verschwinden, d. h.

$$\left. \frac{d^2 X}{dx^2} - \nu \lambda^2 X \right|_{x=a} = 0$$

$$\text{oder} \quad \frac{X_{t+1} - 2X_t + X_{t-1}}{s^2} - \lambda^2 \nu X_t = 0,$$

woraus folgt

$$X_{t+1} = (2 + \nu \lambda^2 s^2) X_t + X_{t-1} \quad (26)$$

Das Gleichgewicht der Stützkraft am Plattenende  $x = a$  bedingt

$$X_{t+2} - 2X_{t+1} + 2X_{t-1} - X_{t-2} - (2 - \nu) \lambda^2 s^2 (X_{t+1} - X_{t-1}) = 2\nu s^3 \lambda^4 X_t$$

Setzen wir Gl. (26) in die obige ein, so ergibt sich

$$X_{t+2} = X_{t-2} - 2(k_1 - 2 + \nu \lambda^2 s^2) X_{t-1} + [2k_1 - 4 + \nu(2 - \nu) \lambda^4 s^4 + 2rs^3 \lambda^4] X_t \quad (27)$$

Nun schreiben wir Gl. (24) für jeden Teilpunkt  $r = 1, 2, \dots, t$  an und erhalten dadurch  $t$  Gleichungen, die jedoch  $t + 4$  Unbekannte einschließlich  $X_{-1}, X_0, X_{t+1}$  und  $X_{t+2}$  enthalten. Die vier Unbekannten lassen sich ohne weiteres an Hand der Gleichungen (25), (26) und (27) eliminieren. Es entstehen nun  $t$  Gleichungen mit  $t$  Unbekannten  $X_1, X_2, \dots, X_t$ , deren Elimination die Knickbedingung liefert.

### 3. Berechnung der Knickkraft.

Wir zeigen hier beispielsweise eine Anwendung des oben erwähnten Verfahrens mittels der Differenzgleichung, indem wir die Breite  $a$  in vier Teile zerlegen. Wir setzen demnach  $s = \frac{a}{4}$  und  $t = 4$  in Gl. (24) ein und wenden dieselbe auf die Teilpunkte 1, 2, 3 und 4 an.

Für  $r = 1$ :

$$X_{-1} - k_1 X_0 + [k_2 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 - 0,5p)] X_1 - k_1 X_2 + X_3 = 0.$$

Wegen  $X_0 = 0$  und  $X_{-1} = -X_1$  erhalten wir

$$[k_2 - 1 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 - 0,5p)] X_1 - k_1 X_2 + X_3 = 0. \quad (a)$$

Für  $r = 2$ :

$$-k_1 X_1 + (k_2 - \lambda^2 s^4 \mu^2) X_2 - k_1 X_3 + X_4 = 0. \quad (b)$$

Für  $r = 3$  und  $r = 4$ :

$$X_1 - k_1 X_2 + [k_2 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + 0,5p)] X_3 - k_1 X_4 + X_5 = 0$$

$$X_2 - k_1 X_3 + [k_2 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + p)] X_4 - k_1 X_5 + X_6 = 0.$$

Durch Einsetzung der Randbedingungen gemäß Gl. (26) und (27) gehen die letzten zwei Gleichungen über in

$$X_1 - k_1 X_2 + [k_2 - 1 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + 0,5p)] X_3 - (k_1 - 2 + \nu s^2 \lambda^2) X_4 = 0 \quad (c)$$

$$2X_2 - 2(k_1 - 2 + \nu s^2 \lambda^2) X_3$$

$$+ [k_2 - 4 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + p) - k_1 s^2 \lambda^2 \nu + \nu(2 - \nu) \lambda^4 s^4 + 2rs^3 \lambda^4] X_4 = 0 \quad (d)$$

Durch Elimination der Unbekannten  $X_1, X_2, X_3$  und  $X_4$  in den Gl. (a), (b),

(c) und (d) erhalten wir die gesuchte Knickbedingung:

$$\begin{vmatrix} k_2 - 1 - \Phi_1 & -k_1 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 - \Psi_2 & -k_1 & 1 \\ 1 & -k_1 & k_2 - 1 - \Psi_3 & -(k_1 - 2 + \nu s^2 \lambda^2) \\ 0 & 1 & -(k_1 - 2 + \nu s^2 \lambda^2) & \frac{1}{2} [k_2 - 4 - \Psi_4 - k_1 \nu s^2 \lambda^2 + \nu (2 - \nu) \lambda^4 s^4 + 2rs^3 \lambda^4] \end{vmatrix} = 0 \quad (28)$$

worin die Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 - 0,5 p), \\ \Psi_2 &= \lambda^2 s^4 \mu^2, \\ \Psi_3 &= \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + 0,5 p), \\ \Psi_4 &= \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + p), \\ k_1 &= 4 + 2 \lambda^2 s^2, \\ k_2 &= 6 + 4 \lambda^2 s^2 + \lambda^4 s^4 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

und eingeführt sind.

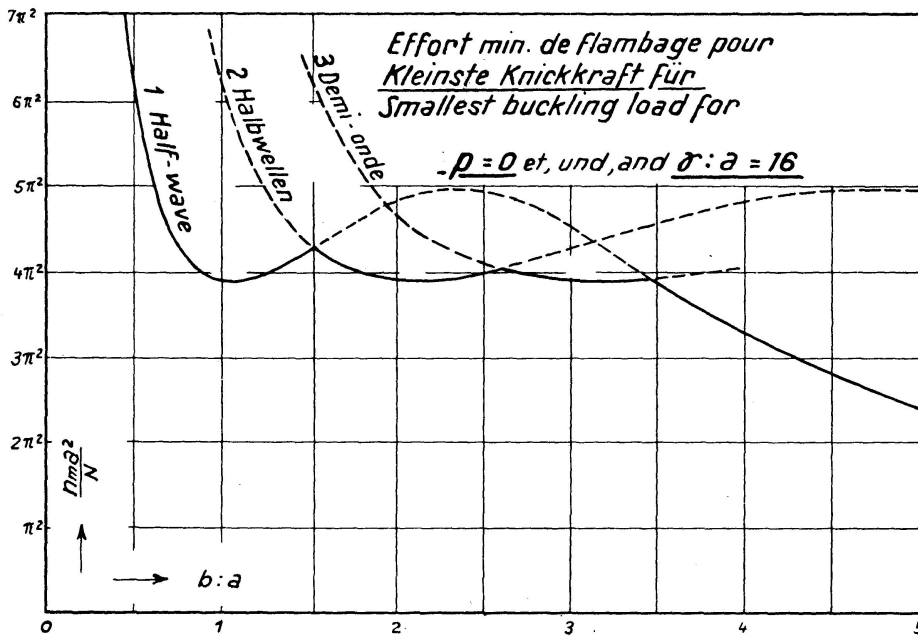


Fig. 3

Die numerische Berechnung mit  $\nu = 0$ ,  $a:b = 1$  und  $\lambda = \pi:b$  liefert die Bedingung

$$\begin{vmatrix} 7,8479 - (1 - 0,5p) \lambda^2 s^4 \mu^2 & -5,2337 & 1 & 0 \\ -5,2337 & 8,8479 - \lambda^2 s^4 \mu^2 & -5,2337 & 1 \\ 1 & -5,2337 & 7,8479 - (1 + 0,5p) \lambda^2 s^4 \mu^2 & -3,2337 \\ 0 & 1 & -3,2337 & 2,4240 - \frac{1}{2} (1 + p) \lambda^2 s^4 \mu^2 + rs^3 \lambda^4 \end{vmatrix} = 0,$$

aus der die nachstehende Knickkraft errechnet wird.

Für	$\gamma = \infty$	$p = 0:$	$\frac{n_m}{N} a^2 = 3,801 \pi^2 = 37,51$
	$\gamma = 0,$	$p = 0:$	$= 15,04$
	$\gamma = 0,$	$p = 1:$	$= 10,06$
	$\gamma = 0,555a,$	$p = 0:$	$= 24,00$
	$\gamma = 0,12575a,$	$p = 1:$	$= 24,00$

Durch Vergleich mit den genauen Werten ist zu ersehen, daß der Unterschied gegenüber der allseitig gestützten Platte ziemlich groß ist, was darauf beruht, daß die vierzeilige Determinante in diesem Fall in die dreizeilige übergeht. Für eine allseitig gelagerte Platte ist es empfehlenswert, die Breite in fünf gleiche Intervalle zu teilen, weil die Knicklast ohne erhöhten Rechenaufwand erhältlich ist. Mit  $\gamma = \infty$  und  $t = 5$  erhalten wir die Knickbedingung:

$$\begin{vmatrix} k_2 - 1 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 - 0,6p) & -k_1 & 1 & 0 \\ -k_1 & k_2 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 - 0,2p) & -k_1 & 1 \\ 1 & -k_1 & k_2 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + 0,2p) & -k_1 \\ 0 & 1 & -k_1 & k_2 - 1 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + 0,6p) \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

Nehmen wir  $a : b = 1$  und demnach auch

$$k_1 = 4 + 2\lambda^2 s^2 = 4,78957 \quad \text{und} \quad k_2 = 6 + 4\lambda^2 s^2 + \lambda^4 s^4 = 7,73500$$

an, so berechnet sich die bessere Annäherung der Knicklast zu

$$\frac{n_m}{N} a^2 = 3,870 \pi^2 \quad \text{für } p = 0$$

und 
$$\frac{n_m}{N} a^2 = 3,762 \pi^2 \quad \text{für } p = 1.$$

Bemerkenswert ist, daß bei der allseitig gestützten Platte die mittlere Knicklast durch die Verteilung der Belastung nicht wesentlich beeinflusst wird.

## Zweiter Abschnitt. Lösung nach der Arbeitsmethode.

### 4. Bedingungsgleichung der kleinsten Arbeit.

Um die Arbeitsmethode durchführen zu können, muß man zuerst die Biegungsfläche in nachstehender Form voraussetzen:

$$w = c_1 w_1(xy) + c_2 w_2(xy) + \dots \quad (30)$$

Die in ihr auftretende Funktion  $w_k(xy)$  wird zweckmäßig so gewählt, daß sie für sich den Randbedingungen der Platte bereits genügt. Die Anwendung des Prinzips der kleinsten Arbeit führt bekanntlich zu der Bedingung<sup>7)</sup>:

$$\delta \iint \frac{n_y}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy = N \delta \iint \left[ \frac{(\Delta w)^2}{2} - (1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] + \delta e_a'' \quad (31)$$

In Gl. (31) ist wiederum die Druckkraft als positiv bezeichnet;  $e_a''$  stellt die Energie der Randscherkräfte und Randmomente dar.

Wir kehren zu unserem Problem zurück und machen den Ansatz

$$w = X \sin \lambda y, \quad (32)$$

worin

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots$$

ist.  $X_k$  ist mithin eine Funktion von  $x$ , die die Randbedingungen an der Stelle  $x = 0$  und  $x = a$  befriedigt. Führt man den Ansatz in Gl. (31) ein,

<sup>7)</sup> NÁDAI, Elastische Platten, S. 277.

so tritt  $\int_0^b \sin^2 \lambda y dy$  oder  $\int_0^b \cos^2 \lambda y dy$  aus jedem Doppelintegral aus. Da die Stützkraft für  $x = a$   $EJ_b X|_{x=a} \lambda^4 \sin \lambda y$  und die Bewegung der Platte in der Krafrichtung  $X|_{x=a} \sin \lambda y$  ist, so berechnet sich die Arbeit der Stützkraft zu

$$e_a'' = \frac{1}{2} EJ_b \lambda^4 |X^2|_{x=a} \int_0^b \sin^2 \lambda y dy.$$

Wegen  $\int_0^b \sin^2 \lambda y dy = \int_0^b \cos^2 \lambda y dy$  wird das Integral in bezug auf  $y$  aus der Gleichung (31) ausgeschaltet und es verbleibt

$$\partial \int \frac{1}{2} \frac{n_y}{N} \lambda^2 X^2 dx = \partial \left[ \int \frac{1}{2} (X'' - \lambda^2 X)^2 dx + (1-\nu) \lambda^2 \int X X'' dx + (1-\nu) \lambda^2 \int (X')^2 dx + \frac{1}{2} r |X|_{x=a} \lambda^4 \right] \quad (33)$$

Die Bedingung (33) dient zur Bestimmung der Knicklast.

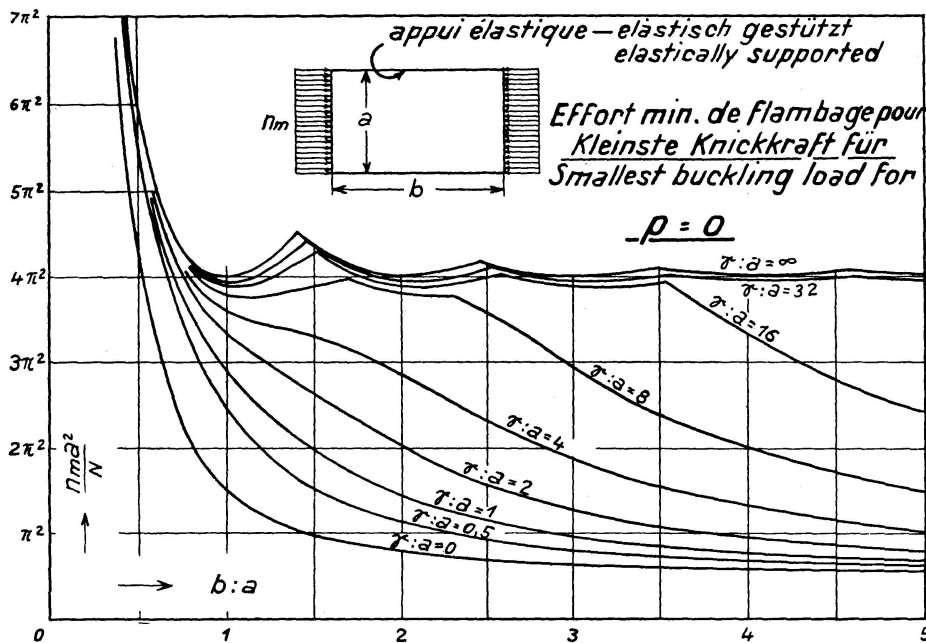


Fig. 4

### 5. Anwendung der Arbeitsmethode.

Als Biegungsfläche nehmen wir eine Näherungsfunktion

$$w = c \left( x + \beta a \sin \frac{\pi}{a} x \right) \sin \lambda y \quad (34)$$

an, die den Randbedingungen längs den Seiten  $x = 0$ ,  $y = 0$  und  $y = b$  völlig genügt. Die Randbedingungen für Seite  $x = a$  werden durch eine passend ausgewählte Größe von  $\beta$  hinreichend genau befriedigt.

Das Gleichgewicht der Randscherkräfte bedingt

$$N \left| \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right|_{x=a} = EJ_b |X|_{x=a} \lambda^4 \sin \lambda y$$

oder

$$\left| \frac{d^3 X}{dx^3} - \lambda^2 (2-\nu) X \right|_{x=a} = \gamma \cdot \lambda^4 a,$$

woraus folgt

$$\beta = \frac{\lambda^2 a^2 \frac{\gamma}{a} + 2 - \nu}{\left(\frac{\pi^2}{\lambda^2 a^2} + 2 - \nu\right) \pi} \quad (35)$$

Aus der Gleichung für die Fläche (34) geht hervor, daß wir an der Seite  $x = a$  noch ein unausgeglichenes Randmoment  $-\nu \lambda^2 a$  haben, das durch die Krümmung  $C x \sin \lambda y$  verursacht wird. Um diese verbleibenden Spannungen auszugleichen, müssen wir an demselben Rand eine Zusatzkraft anbringen. Unter der Voraussetzung, daß die Zusatzkraft keinen Einfluß ausübt, kann die Knicklast berechnet werden. Dabei ist zu beachten, daß die Arbeit der Zusatzkraft nicht in Rechnung gezogen wird, weil sie stets an Ort und Stelle ausgeglichen ist.

Da unsere Fläche (34) nur eine Konstante  $c$  enthält, reicht an Stelle der Gl. (33) die Stabilitätsbedingung in der Form

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \frac{n_y}{N} \lambda^2 X^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int (X'' - \lambda^2 X)^2 dx + (1-\nu) \lambda^2 \int X X'' dx + (1-\nu) \lambda^2 \int (X')^2 dx + \frac{1}{2} r |X^2|_a \lambda^4 \end{aligned} \quad (36)$$

aus. Die Funktion  $X$  lautet aus Gl. (34)

$$X = c \left( x + \beta a \sin \frac{\pi}{a} x \right)$$

und kann in die Form

$$X = c(X_1 + \beta a X_2) \quad (37)$$

umgeschrieben werden, wo

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} X_1 &= x \\ X_2 &= \sin \frac{\pi}{a} x \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

ist. Durch Einsetzung der Gl. (37) läßt sich die rechte Seite der Gl. (36) in die Form

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2} \int (X'' - \lambda^2 X)^2 dx + (1-\nu) \lambda^2 \int X X'' dx + (1-\nu) \lambda^2 \int (X')^2 dx + \frac{1}{2} r |X^2|_a \lambda^4 \\ &= c \left[ A + B \beta a + C (\beta a)^2 + \frac{1}{2} r a^2 \lambda^4 \right] \end{aligned}$$

bringen, wo

$$A = \frac{1}{2} \int_0^a (X_1'' - \lambda^2 X_1)^2 dx + (1-\nu) \lambda^2 \left[ \int_0^a X_1 X_1'' dx + \int_0^a (X_1')^2 dx \right]$$

$$B = \int_0^a (X_1'' - \lambda^2 X_1)(X_2'' - \lambda^2 X_2) dx + (1-\nu) \lambda^2 \int_0^a (X_1 X_2'' + X_1'' X_2) dx + 2(1-\nu) \int_0^a (X_1' X_2') dx$$

und

$$C = \frac{1}{2} \int_0^a (X_2'' - \lambda^2 X_2)^2 dx + (1-\nu) \lambda^2 \left[ \int_0^a X_2 X_2'' dx + \int_0^a (X_2')^2 dx \right]$$

ist. Führt man die Ansätze (38) in obige Gleichungen ein, so erhalten wir

$$A = \frac{1}{6} a^3 \lambda^4 + (1-\nu) \lambda^2 a,$$

$$B = \frac{a^2}{\pi} \left( \lambda^4 + \nu \lambda^2 \frac{\pi^2}{a^2} \right)$$

$$C = \frac{1}{4} a \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2$$

und demnach

$$\frac{e_1}{c} = \frac{1}{6} a^3 \lambda^4 + (1-\nu) \lambda^2 a + \frac{\lambda^2 a^2}{\pi} \left( \lambda^2 + \nu \frac{\pi^2}{a^2} \right) \beta a + \frac{1}{4} a \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2 \beta^2 a^2 + \frac{1}{2} r a^2 \lambda^4$$

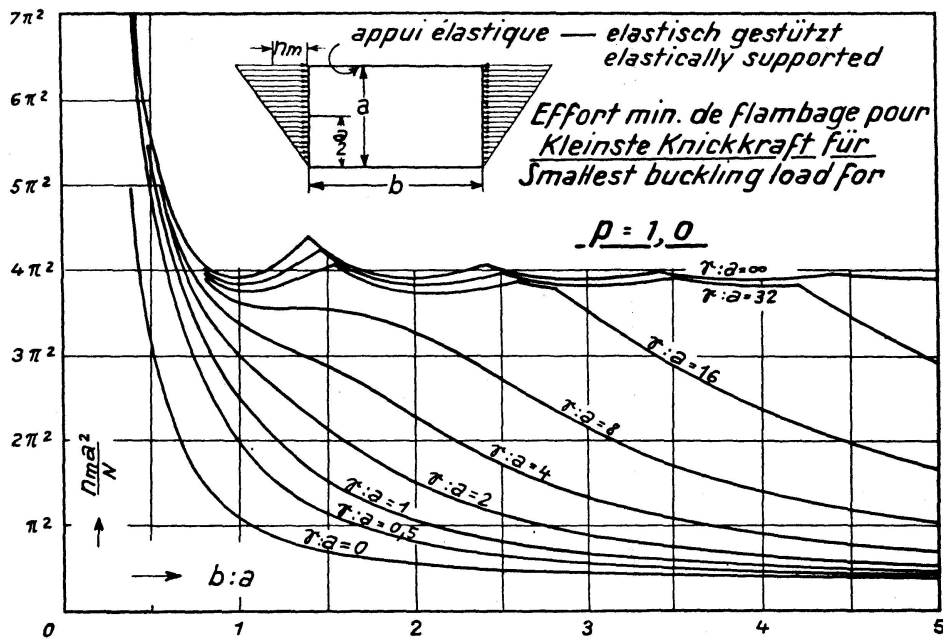


Fig. 5

Anschließend berechnen wir die linke Seite der Gl. (36). Da die Belastung  $n_y = n_0 + n_1 x$  ist, läßt sie sich in der Form

$$e_2 = \int \frac{1}{2} \frac{n_y}{N} \lambda^2 (X)^2 dx$$

$$= \frac{c}{2} \frac{n_0}{N} \lambda^2 [D + E\beta a + F(\beta a)^2] + \frac{c}{2} \frac{n_1}{N} \lambda^2 [D' + E'\beta a + F'(\beta a)^2]$$

ausdrücken, worin  $D, E$  usw. nachstehende Abkürzungen sind:

$$D = \int_0^a X_1^2 dx = \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} a^3$$

$$E = 2 \int_0^a X_1 X_2 dx = \int_0^a x \sin \frac{\pi}{a} x dx = 2 \frac{a^2}{\pi}$$

$$F = \int_0^a X_2^2 dx = \int_0^a \sin^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) dx = \frac{a}{2}$$

$$D' = \int_a^a x^3 dx = \frac{1}{4} a^4$$

$$E' = 2 \int_0^a x^2 \sin \frac{\pi}{a} x dx = 2 \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 (\pi^2 - 4)$$

$$F' = \int_0^a x \sin^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) dx = \frac{a^2}{4}$$

Es ergibt sich demnach

$$\frac{e_2}{c} = \frac{1}{2} \frac{n_0}{N} \lambda^2 a^3 \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \beta + \frac{1}{2} \beta^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{n_1 a}{a} \lambda^2 a^3 \left[ \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} (\pi^2 - 4) \beta + \frac{1}{4} \beta^2 \right].$$

Ersetzt man die Belastungen  $n_0$  und  $n_1 a$  vermöge der Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} n_0 &= (1-p) n_m \\ n_1 a &= 2p n_m \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

durch  $n_m$  und  $p$ , so entsteht

$$\frac{e_2}{c} = \frac{1}{2} \frac{n_m}{N} \lambda^2 a^3 \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \beta + \frac{1}{2} \beta^2 + p \left\{ \frac{1}{6} + 2 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \frac{\beta}{\pi} \right\} \right].$$

Aus der Bedingung  $e_1 = e_2$  folgt der Näherungswert der Knickkraft:

$$\frac{n_m}{N} a^2 = \frac{\frac{1}{3} a^2 \lambda^2 + 2(1-\nu) + \frac{2}{\pi} (\lambda^2 a^2 + \nu \pi^2) \beta + \frac{1}{2} a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2 \beta^2 + \gamma \lambda^2 a}{\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \beta + \frac{1}{2} \beta^2 + p \left[ \frac{1}{6} + 2 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \frac{\beta}{\pi} \right]} \quad (40)$$

Denken wir uns den Fall, in dem  $\gamma = \infty$ , somit auch  $\beta = \infty$  ist, so erhalten wir aus Gl. (40) die mittlere Knickkraft:

$$\frac{n_m}{N} a^2 = a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Knickkraft einer allseitig gestützten Platte unabhängig vom Ungleichförmigkeitsgrad  $p$  ist, was jedoch nur in erster Annäherung der Fall ist. Hätten wir die verbogene Fläche in der Form

$$w = \left( c_1 \sin \frac{\pi}{a} x + c_2 \sin \frac{2\pi}{a} x \right) \sin \lambda y$$

angenommen, so würde sich eine bessere Annäherung der Knickkraft aus<sup>8)</sup>

$$\begin{aligned} & \left( \lambda^2 \frac{n_m}{N} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{32}{9\pi^2} p \right)^2 \right] - \lambda^2 \frac{n_m}{N} \left[ \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2 + \left( 4 \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2 \right] \\ & + \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2 \left( 4 \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

berechnen.

Die so errechnete Knickkraft ist, wie nachstehender Vergleich zeigt, genau genug dem Wert

$$\frac{n_m}{N} = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2 \left[ 1 - \left( 0,01 + 0,015 \frac{a^2}{b^2} \right) p^2 \right] \quad (43)$$

angenähert.

<sup>8)</sup> Eine analoge Gleichung wurde von TIMOSHENKO veröffentlicht. Vgl. Der Eisenbau, 1921.

Tabelle I

b : a	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
$\frac{n_m a^2}{N \pi^2}$ aus Gl. (42)	7,59	4,88	4,06	3,91	4,05	4,39
$\frac{n_m a^2}{N \pi^2}$ aus Gl (43)	7,54	4,87	4,06	3,90	4,04	4,39

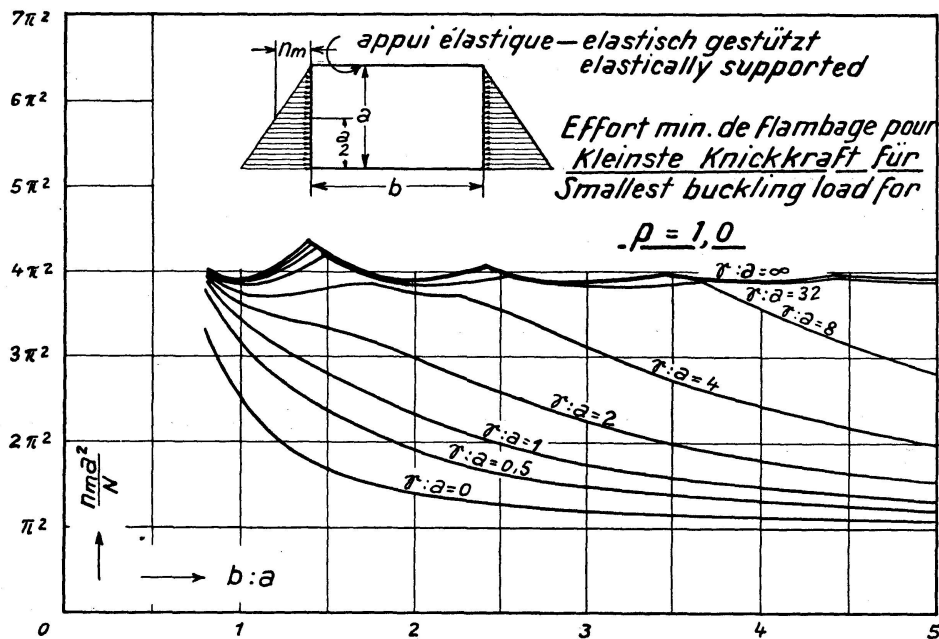


Fig. 6

Aus diesem Grund empfiehlt es sich, den Faktor

$$\frac{1}{2} a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2 \beta^2$$

in Gl. (40) mit dem Koeffizienten

$$k = 1 - \left( 0,01 + 0,015 \frac{a^2}{b^2} \right) p^2 \tag{44}$$

zu multiplizieren. Die mittlere Knickkraft wird demnach aus

$$\frac{n_m a^2}{N} = \frac{\frac{1}{3} a^2 \lambda^2 + 2(1-\nu) + \frac{2}{\pi} (\lambda^2 a^2 + \nu \pi^2) \beta + \frac{1}{2} a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2 \beta^2 k + r \lambda^2 a}{\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \beta + \frac{1}{2} \beta^2 + p \left[ \frac{1}{6} + 2 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \frac{\beta}{\pi} \right]} \tag{45}$$

ermittelt.

Sonderfall 1. Falls  $\gamma = \infty$  und  $p = 0$  ist, stimmt die aus Gl. (45) erhaltene Knickkraft mit dem genauen Wert

$$\frac{n_m a^2}{N} = a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2 \tag{46}$$

überein.

Sonderfall 2. Für  $\gamma = \infty$  erhalten wir die Knickkraft

$$\frac{n_m}{N} a^2 = a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2 \left[ 1 - \left( 0,01 + 0,015 \frac{a^2}{b^2} \right) p^2 \right], \quad (47)$$

die eine verlässliche Genauigkeit besitzt.

Sonderfall 3. Falls die Platte an drei Rändern aufliegt, während sie an einem zur Belastung parallel laufenden Rand ganz frei gestützt ist, braucht man in Gl. (35) und (45) einfach  $\gamma = 0$  einzusetzen. Mit dem Beiwert

$$\beta = \frac{2 - \nu}{\left( \frac{\pi^2}{\lambda^2 a^2} + 2 - \nu \right) \pi} \quad (48)$$

berechnet sich die Knickkraft aus

$$\frac{n_m}{N} a^2 = \frac{\frac{1}{3} a^2 \lambda^2 + 2(1-\nu) + \frac{2}{\pi} (\lambda^2 a^2 + \nu \pi^2) \beta + \frac{1}{2} a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2 \beta^2 k}{\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \beta + \frac{1}{2} \beta^2 + p \left[ \frac{1}{6} + 2 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \frac{\beta}{\pi} \right]} \quad (49)$$

Für  $p = 0$  gibt Gl. (49) eine bessere Annäherung als die von Timoshenko abgeleitete Formel:

$$\frac{n_m}{N} a^2 = a^2 \lambda^2 + 6(1 - \nu) \quad (50)^9)$$

Die nach der Arbeitsmethode ermittelten Knickkräfte sind nebst den auf anderem Wege berechneten Werten in Tabelle II und III zusammengestellt.

Tabelle II. Mittlere Knickkraft ( $n_m a^2/N$ ) der quadratischen Platte ( $\nu = 0$ ).

$p$	$\gamma$	Genauere Werte (Gl. 11)	Nach der Gelenk- kettenmethode (Gl. 28)	Nach der Arbeitsmethode (Gl. 45)
0	0	$4 \pi^2$	$3,85 \pi^2$ *	$4 \pi^2$
	$0,558a$	15,16	15,04	15,87
	$0,555a$	24,00	—	—
1	0	—	37,31*	38,50
	$1,248a$	—	10,07	10,58
		—	24,00	25,10
-1	0	—	37,31*	38,50
	$0,64a$	—	23,95	25,00
		—	30,00	31,90

\* Berechnet aus Gl. (28a).

<sup>9)</sup> NÁDAI, Elastische Platte, S. 284.

Tabelle III. Mittlere Knickkraft ( $n_m a^2/N$ ) der rechteckigen Platte mit einem freien Rand ( $\nu = 0$ ).

$p$	Methode		Werte für		
			$b/a = 2$	$b/a = 1$	$b/a = 0,5$
0	Nach Timoshenko	Gl. (50)	8,467	15,87	45,48
	Arbeitsmethode	Gl. (49)	8,210	15,30	44,70
	Differentialgleichung	Gl. (11)	8,096	15,16	44,50
1	Arbeitsmethode	Gl. (49)	5,965	10,95	32,80
	Differenzgleichung	Gl. (28)	5,240	10,07	28,72
-1	Arbeitsmethode	Gl. (49)	14,69	25,00	69,7 *
	Differenzgleichung	Gl. (28)	14,25	23,95	53,3

(\* Größer als die Knickkraft der allseitig gelagerten Platte.)

Der Tabelle III ist zu entnehmen, daß die Abweichung der Knickkraft nach der Arbeitsmethode insbesondere für die negativen Werte von  $p$  an Wichtigkeit gewinnt, wenn das Seitenverhältnis  $b/a$  sehr klein wird.

Tabelle IV. Erste Knickkraft der rechteckigen Platte ( $\nu = 0,15$ ).

$p$	$\gamma/a$	Werte $n_m a^2/N\pi^2$ für $b : a =$										
		0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,25	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0	6,77	4,52	3,31	2,09	1,53	1,17	0,97	0,78	0,64	0,58	0,56
	0,5	8,19	5,87	4,58	3,20	2,46	1,89	1,53	1,13	0,80	0,68	0,62
	1	8,30	6,05	4,83	3,57	2,91	2,37	1,98	1,45	0,96	0,77	0,68
	2	8,36	6,14	4,97	3,84	3,33	2,94	2,60	2,00	1,27	0,95	0,80
	4	8,39	6,20	5,06	4,01	3,62	3,43	3,30	2,85	1,86	1,32	1,04
	8	8,41	6,22	5,10	4,11	3,80	3,78	3,88	3,93	2,91	2,01	1,50
	16	8,41	6,24	5,12	4,15	3,90	3,98	4,25	4,81	4,52	3,31	2,41
	32	8,42	6,24	5,13	4,19	3,95	4,09	4,47	5,45	6,50	5,49	4,12
	$\infty$	8,42	6,25	5,14	4,20	4,00	4,20	4,70	6,25	11,11	18,07	27,04
1	0	4,93	3,29	2,40	1,51	1,09	0,83	0,68	0,54	0,43	0,39	0,38
	0,5	7,16	5,19	4,02	2,69	1,97	1,44	1,13	0,80	0,55	0,46	0,42
	1	7,35	5,47	4,39	3,16	2,47	1,91	1,52	1,04	0,66	0,52	0,46
	2	7,45	5,63	4,61	3,54	2,98	2,51	2,11	1,50	0,89	0,65	0,54
	4	7,49	5,73	4,74	3,78	3,37	3,10	2,85	2,25	1,32	0,90	0,70
	8	7,53	5,77	4,80	3,92	3,62	3,54	3,54	3,27	2,15	1,40	1,03
	16	7,53	5,79	4,84	3,99	3,75	3,82	4,02	4,32	3,53	2,37	1,67
	32	7,55	5,80	4,86	4,03	3,83	3,97	4,31	5,17	5,45	4,12	2,92
	$\infty$	7,55	5,81	4,88	4,06	3,90	4,12	4,62	6,16	10,98	17,87	26,77
-1	0	10,45	7,06	5,21	3,36	2,51	1,97	1,68	1,40	1,20	1,13	1,09
	0,5	7,87	6,00	4,94	3,79	3,18	2,69	2,35	1,91	1,48	1,30	1,21
	1	7,72	5,91	4,91	3,89	3,42	3,06	2,79	2,33	1,75	1,47	1,32
	2	7,63	5,86	4,89	3,97	3,62	3,44	3,32	2,98	2,25	1,79	1,54
	4	7,59	5,84	4,88	4,01	3,74	3,72	3,80	3,81	3,12	2,42	1,98
	8	7,57	5,83	4,88	4,04	3,82	3,91	4,16	4,65	4,48	3,55	2,81
	16	7,55	5,82	4,88	4,05	3,86	4,01	4,38	5,30	6,20	5,44	4,35
	32	7,55	5,81	4,88	4,07	3,88	4,07	4,50	5,77	7,92	8,12	6,97
	$\infty$	7,55	5,81	4,88	4,06	3,90	4,12	4,62	6,16	10,98	17,87	26,77

## 6. Kleinste Knickkraft und zugehörige Anzahl der Halbwellen.

Bei der allseitig gestützten, gleichmäßig gedrückten Platte geschieht die Knickung nicht immer in Halbwellen-Form. Für  $b:a = \sqrt{2}$  werden sich zwei, für  $b:a = \sqrt{6}$  drei Halbwellen bilden usw., und zwar auch in guter Annäherung, wenn die Belastung linear veränderlich verteilt ist. Falls dagegen eine zur Belastung parallel laufende Seite ganz frei ist, kommt die mehrwellige Knickform gar nicht in Betracht. Demnach ist zu schließen, daß die Wellenform, die die kleinste Knickkraft bestimmt, nicht nur von dem Seitenverhältnis  $b:a$ , sondern auch von der Steifigkeit der elastischen Stützung  $\gamma$  abhängig ist. Eine analoge Abhängigkeit wurde bereits bei der Stabknickung mit elastischen Zwischenstützen nachgewiesen<sup>10)</sup>. Um diese verwickelte Beziehung näher verfolgen zu können, berechnete der Verfasser zuerst die erste Knickkraft aus Gl. (45) für verschiedene Seitenverhältnisse und  $\gamma:a$ . Da es sich hier um eine Eisenbetonplatte handelt, nimmt der Verfasser  $\nu = 0,15$  an<sup>11)</sup>.

Die errechneten Werte von  $\frac{n_m a^2}{N \pi^6}$  für  $p = 0$ ,  $p = 1$  und  $p = -1$  sind in Tabelle IV zusammengestellt. Die fettgedruckten Werte unterscheiden sich von den anderen dadurch, daß sie nicht kleinste Knicklasten darstellen. Die Kurve I in Fig. 3 zeigt, wie sich der Wert  $\frac{n_m a^2}{N \pi^2}$  für  $p = 0$  und  $\gamma = 8a$  bei wachsendem Seitenverhältnis  $b:a$  verhält. Wird dieselbe Kurve mit 2, 3, ... fachen Abszissen eingetragen, so erhalten wir die Kurven II, III usw., die je der 2., 3., ... Knicklast entsprechen. Aus Fig. 3 ist zu ersehen, daß

für $b/a < 1,52$	die erste Knicklast,
für $1,52 < b/a < 2,60$	die zweite,
für $2,60 < b/a < 3,46$	die dritte
und für $3,46 < b/a$	die erste Knicklast wiederum die

kleinste und somit die bestimmende ist. Auf diese Weise läßt sich die kleinste Knickkraft feststellen. In Fig. 4, 5 und 6 ist die kleinste Knickkraft bildlich veranschaulicht. Aus den Abbildungen geht hervor, daß die zweite oder eine noch höhere Knickkraft gar nicht in Betracht kommt, solange nicht  $\gamma/a$  ca. 4 überschreitet. Bei gewöhnlicher Randversteifung überschreitet  $\gamma/a$  keinesfalls diese Grenzzahl, und die Berechnung der ersten Knicklast reicht zur Bestimmung der kleinsten Knicklast aus.

### Zusammenfassung.

Bei Anwendung der Arbeitsmethode ist es in erster Linie notwendig, eine passende Krümmungsfläche anzunehmen, die den Randbedingungen genügt. Bei komplizierten Randbedingungen muß man sich aber damit begnügen, eine den Randbedingungen möglichst entsprechende Fläche anzunehmen. Obwohl die vom Verfasser angenommene Krümmungsfläche nicht ganz den Randbedingungen angepaßt war, gelang es, die Knickkraft einer linear veränderlich gedrückten Platte mit elastischer Stützung hinreichend

<sup>10)</sup> S. BAN, Kenchiku Zasshi, Bd. 45, Nr. 551, 1931. B. KLEMPERER and H. B. GIBBONS, Z. f. angew. Math. u. Mech. 1933, H. 4.

<sup>11)</sup> Im Bereich der zulässigen Beanspruchung ist  $m = \nu^{-1} = 6$  bis 7 für Druckbeanspruchung und  $m = 9 \sim 10$  für Zugbeanspruchung. Vgl. Kongreßbericht der I. V. f. M., Zürich, 1931. GEHLER, Festigkeit, Elastizität und Schwinden von Beton.

genau zu ermitteln. Es ist aber noch darauf hinzuweisen, daß die nach der Arbeitsmethode ermittelte Knickkraft für kleine Seitenverhältnisse  $b/a$  von dem genauen Wert abweicht. Bei der Methode der elastischen Gelenkkette nach Henky bedarf es keiner Voraussetzung bezüglich der Krümmungsfläche und stets führt dieselbe zu einer guten Annäherung.

Auf Grund seiner Studien über den hier behandelten Knickfall gelangt der Verfasser zu folgenden Schlußfolgerungen:

1. Bei einer allseitig gelagerten Platte ist in erster Annäherung die mittlere Knickkraft  $n_m$  unabhängig von der Ungleichförmigkeit der Belastung.

2. Falls ein zur Belastung parallel laufender Rand ganz frei ist, vergrößert oder verkleinert sich die mittlere Knickkraft, je nachdem die Ungleichförmigkeit  $p$  negativ oder positiv ist.

3. Die Versteifung eines freien Randes erhöht die Knickkraft um so mehr, je größer deren Abmessung und je kleiner das Seitenverhältnis  $b/a$  wird. Ist aber die Randversteifung sehr groß, so entscheidet die zweite oder dritte Knickung die kleinste Grenzlast und eine weitere Erhöhung der Steifigkeit der Randversteifung vergrößert die Knickkraft nicht.

4. Die Anzahl der Halbwellen der Knickungsform, die die kleinste Knickkraft entscheidet, hängt vom Seitenverhältnis  $b/a$  und ferner von der Steifigkeit des Randes und der Ungleichförmigkeit der Belastung ab.

5. Über die zahlenmäßige Wiedergabe der Knickkraft für verschiedene Seitenverhältnisse, Randversteifungen und Ungleichförmigkeiten der Belastung geben die Fig. 4, 5 und 6 Auskunft.

### Résumé.

Pour la mise en application de la méthode de travail indiquée, il est nécessaire, en premier lieu, d'adopter une surface de courbure appropriée, qui satisfasse aux conditions en bordure. Lorsque ces dernières conditions sont complexes, on peut toutefois se contenter de considérer une surface satisfaisant à ces conditions dans toute la mesure du possible.

Quoique les surfaces de courbure adoptées par l'auteur ne correspondent pas d'une manière absolue aux conditions périphériques, il a néanmoins été possible de déterminer avec une précision suffisante, l'effort de flambage d'une dalle soumise à une compression variant linéairement et reposant sur un appui élastique.

Il importe d'attirer toutefois l'attention sur le fait que l'effort de flambage déterminé au moyen de la méthode indiquée, pour des rapports faibles entre les côtés, soit  $b/a$ , s'écarte de la valeur exacte. La méthode de la chaîne articulée élastique de Henky ne rend nécessaire aucune hypothèse au sujet de la surface de courbure et conduit toujours à une bonne approximation.

En se basant sur les études qu'il a effectuées dans le cas de flambage considéré, l'auteur a pu arriver aux conclusions suivantes:

1. Dans une dalle appuyée sur tous ses côtés, et en première approximation, l'effort moyen de flambage  $n_m$  est indépendant de la non-uniformité de la charge.

2. Dans le cas l'un des bords parallèle à la direction de l'application de la charge est entièrement libre, l'effort de flambage se trouve augmenté ou diminué suivant que la non-uniformité  $p$  est négative ou positive.

3. Le renforcement d'un bord libre élève l'effort de flambage dans des proportions d'autant plus grandes que les propres dimensions de ce bord sont

plus grandes et que le rapport  $b/a$  entre les côtés est lui-même plus faible. Si toutefois ce renforcement est très important, c'est la deuxième ou la troisième ondulation de flambage qui détermine la charge limite inférieure; une accentuation du renforcement de la rigidité en bordure n'améliore pas l'effort de flambage.

4. Le numéro d'ordre des demi-ondes de flambage qui déterminent l'effort minimum de flambage dépend du rapport  $b/a$  entre les côtés, ainsi que de la rigidité en bordure et de la non-uniformité de la charge.

5. Les figures 4, 5 et 6 donnent des indications sur les valeurs numériques de l'effort de flambage pour différents rapports entre les côtés, différentes valeurs du renforcement en bordure et différents régimes d'hétérogénéité de répartition de la charge.

### Summary.

In applying the method of work it is first of all necessary to assume a suitable surface of curvature that satisfies the conditions at the edges. With complicated conditions at the edges, however, one must be content with a surface complying as far as possible with these conditions. Although the surface of curvature assumed by the author does not quite comply with the conditions at the edges, he has nevertheless succeeded in determining the buckling load for an elastically supported slab submitted to linearly varying pressure. It must, however, be pointed out that the buckling load determined according to the method of work differs from the exact value when the ratio between the lengths of the sides, i. e.  $b/a$ , is small. Henky's method of the flexible articulated chain requires no assumption with regard to the curvature of the buckling surface and always gives a good approximation.

Based on his investigations of the case of buckling dealt with here, the author comes to the following conclusions:

1. In a slab supported on all sides, the mean buckling load  $n_m$  is independent, in a first approximation, of the non-uniformity of the loading.

2. When one edge parallel to the direction of loading is quite free, the mean buckling load increases or diminishes according to the non-uniformity  $p$  being negative or positive.

3. With a stiffened free edge, the greater its dimensions and the smaller the ratio  $b/a$  of the sides, the greater will be the buckling load. But if the marginal stiffening is very great, the second or third buckling determines the minimum limiting load, and a further increase of the stiffening does not allow the buckling load to be increased.

4. The number of half waves of the buckling form that determines the smallest buckling load, depends on the ratio  $b/a$  of the sides and also on the marginal stiffness and on the non-uniformity of the loading.

5. Figs. 4, 5 and 6 give information regarding the numerical values of the buckling load for different ratios of sides, marginal stiffenings and non-uniformities of loading.