Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 3 (1935)

Artikel: Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers
Autor: Stüssi, Fritz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4159

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DIE STABILITÄT DES AUF BIEGUNG BEANSPRUCHTEN TRÄGERS.

LA STABILITÉ DE LA POUTRE SOLLICITÉE À LA FLEXION

STABILITY OF A GIRDER SUBJECT TO BENDING

Dr. sc. techn. FRITZ STÜSSI, Privatdozent an der Eidg. Technischen Hochschule, Zürich.

1. Grundgleichungen.

Das Stabilitätsproblem des auf Biegung beanspruchten Trägers ist für einige einfache Belastungsfälle von Prandtl [1]) für Träger mit Rechteckquerschnitt und von Timoshenko [2]) für I-Träger gelöst worden. Das hier vorgelegte baustatische Verfahren beruht auf der Berechnung von elastischen Formänderungen und ist bei beliebiger Belastungsanordnung und bei beliebiger Auflagerung anwendbar. Es liefert die Kipplast, wie die kritische Belastung nach Prandtl bezeichnet wird, ähnlich wie beim bekannten Verfahren von Vianello [3]) für Knickstäbe, mit fortgesetzter Annäherung aus dem Vergleich zweier Formänderungskurven. Die Genauigkeit kann beliebig gesteigert werden.

Bei Stabilitätsproblemen ist die kritische Belastung durch den Übergang vom stabilen zum labilen Gleichgewicht gekennzeichnet. Ist die Belastung gleich der kritischen, so verursacht eine beliebig kleine Störung des Gleichgewichtszustandes das Unstabilwerden des gedrückten Stabes („Knicken") oder des auf Biegung beanspruchten Balkens („Kippen"). Nehmen wir beispielsweise an, die Gleichgewichtsstörung werde durch eine kleine Ausbiegung e_0 der Stab- oder Trägermitte verursacht, so können wir die kritische Belastung als diejenige definieren, unter welcher die kleine Ausbiegung „unendlich groß" [4]) wird.

In Fig. 1 ist ein ursprünglich gerader Balken in verformtem Zustand skizziert. Infolge der gedachten kleinen Ausbiegung y_0 treten Torsionsmomente T auf, die ihrerseits eine Verdrehung φ der Balkenquerschnitte bewirken. Dadurch liefert nun das Biegungsmoment M_1 der äußern Kräfte eine Komponente M_2, die die seitliche Ausbiegung um den Betrag

$$y_1 = \alpha \cdot y_0 \tag{1}$$

[1]) L. PRANDTL: Kipperscheinungen. Ein Fall von instabilem elastischem Gleichgewicht. Diss. München, 1899.

[2]) S. TIMOSHENKO: Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1910. — S. TIMOSHENKO: Sur la Stabilité des Systèmes élastiques. Annales des Ponts et Chaussées, 1913. — S. TIMOSHENKO: Stability of plate girders subjected to bending. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Kongreß Paris 1932, Vorbericht. — S. TIMOSHENKO: Strength of Materials. New York, Van Nostrand Co., 1930.

[3]) L. VIANELLO: Z. d. Ver. deutsch. Ing., 1898.

[4]) Selbstverständlich wird die Ausbiegung nicht unendlich groß, sondern nur so groß, daß der Stab zerstört wird.

vergrößert. War die Form der Ausbiegung y_0 passend gewählt, nämlich so, daß y_1 zu y_0 ähnlich verläuft[5]), so muß die durch y_1 verursachte Vergrößerung der Ausbiegung den Wert $y_2 = \alpha \cdot y_1$ erreichen. Der Endwert y kann somit angeschrieben werden zu

$$y = y_0 \cdot (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 \cdots\cdots) = y_0 \cdot \frac{1}{1-\alpha}. \tag{2}$$

Das Tragwerk ist unstabil für $\alpha = 1$, weil dafür, auch bei sehr kleiner anfänglicher Ausbiegung y_0, der Endwert y sehr große Werte erreicht. Analog ergibt sich die Beziehung zwischen einer angenommenen Querschnittsverdrehung φ_0 und ihrem Endwert φ:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \frac{1}{1-\alpha}. \tag{2a}$$

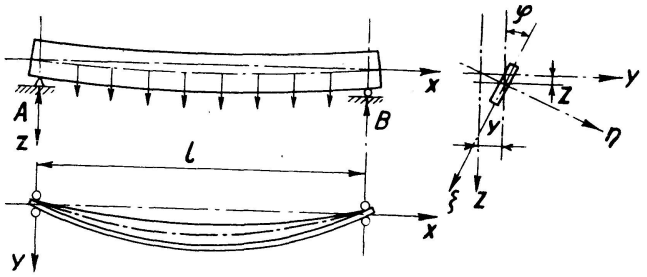


Fig. 1.

In Fig. 2 ist ein durch die Schnitte x und $x + dx$ begrenztes Balkenelement, bezogen auf ein Hilfskoordinatensystem ξ, η, ζ, herausgezeichnet, wobei die angreifenden Momente durch ihre Achsen dargestellt sind. Die Belastung ist auf Trägeroberkante angreifend angenommen; der davon herrührende Beitrag wird sein Vorzeichen wechseln, wenn die Last am untern Trägerrand angreift, bezw. verschwinden bei Lastangriff im Schwerpunkt. Da die vorkommenden Winkel im betrachteten Zustand klein sind, setzen wir ihren Cosinus gleich eins und den Sinus gleich dem Tangens, bezw. gleich dem Winkel und lesen folgende Momentengleichgewichtsbedingung bezüglich der ξ-Achse ab:

$$-T + (T + dT) + (M_2 + dM_2) \cdot d\gamma - (M_1 + dM_1) \cdot d\delta - (Q + dQ) \cdot d\eta$$
$$+ (Q + dQ) \cdot \varphi \cdot d\zeta + p \cdot \frac{h}{2} \cdot \varphi \cdot dx = 0.$$

Die Werte $d\eta$ und $\varphi \cdot d\zeta$ sind kleine Größen höherer Ordnung. Wir lassen Produkte mit ihnen und die übrigen vernachlässigten Größen weg und erhalten mit

$$d\gamma = \zeta'' \cdot d\xi, \qquad d\delta = \eta'' \cdot d\xi$$

den Zuwachs des Torsionsmomentes von x bis $x + dx$ zu

$$dT = -M_2 \cdot \zeta'' \cdot d\xi + M_1 \cdot \eta'' \cdot d\xi - \frac{p \cdot h}{2} \cdot \varphi \cdot dx. \tag{3}$$

---

[5]) D. h. in diesem Fall entspricht die gewählte Ausbiegung der Lösung der Differentialgleichung des Stabilitätsproblems. Sind y_0 und y_1 einander nicht ähnlich, so ergibt sich die charakteristische Ausbiegungskurve durch eine genügend oft durchgeführte Wiederholung der im Abschnitt 2 dargestellten Berechnung.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie liefert uns den Wert der zweiten Differentialquotienten von ζ und η zu

$$\zeta'' = -\frac{M_1}{B_1}, \qquad \eta'' = -\frac{M_2}{B_2}, \tag{4}$$

wenn der einfacheren Schreibweise wegen die Biegungssteifigkeiten mit $B = E \cdot J$ bezeichnet werden. Setzen wir $d\xi = dx$, so erhalten wir mit der Abkürzung

$$B_2' = B_2 \cdot \frac{B_1}{B_1 - B_2} \text{ [6]} \tag{5}$$

die folgende Grundgleichung des betrachteten Problems:

$$\frac{dT}{dx} + \frac{M_1 \cdot M_2}{B_2'} + \frac{p \cdot h}{2} \cdot \varphi = 0. \tag{6}$$

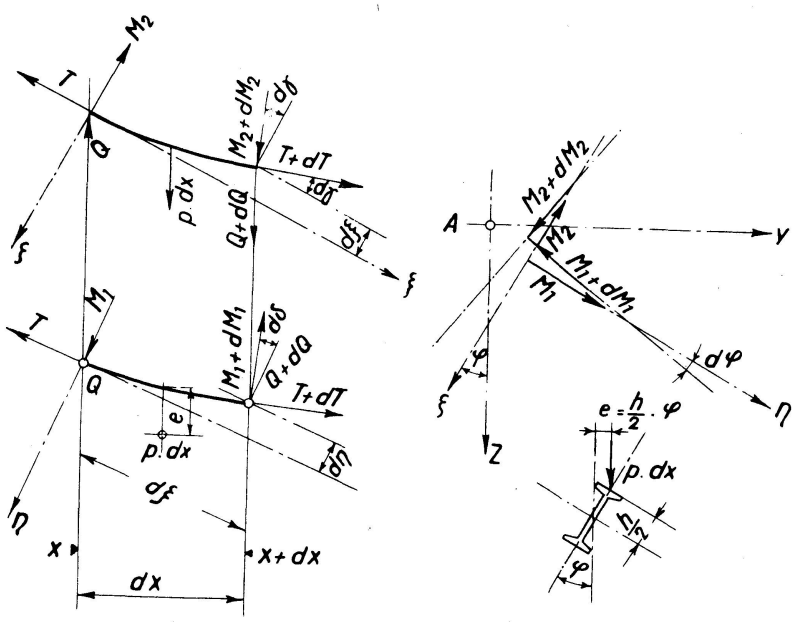


Fig. 2.

Den Wert des seitlichen Biegungsmomentes M_2 erhalten wir durch Betrachtung des Momentengleichgewichts bezüglich der z-Achse am Teil $A - x$ des verformten Balkenfeldes $A - B$ (Figur 3). Um die gesuchten Grundgleichungen in möglichst allgemeiner Form zu erhalten, wurde angenommen, daß auf den Auflagerquerschnitt A Einspannmomente M_{1A} und M_{2A} einwirken sollen, die entweder als äußere Belastungen oder infolge (starrer oder elastischer) Einspannung des Balkenendes auftreten können. Im letzteren Fall stehen für die Bestimmung dieser Einspannmomente die entsprechenden Elastizitätsbedingungen zur Verfügung. Im Gegensatz zu diesen Einspannmomenten M_{1A} und M_{2A} ist das Torsionsmoment T_A unerläßlich zur Herstellung des Gleichgewichts des ausgebogenen Balkens; bei Symmetrie in Belastung und Konstruktion genügt eine Gleichgewichtsbedingung zur Bestimmung von $T_A = T_B$, während in unsymme-

[6]) Durch Einführung von B'_2 statt B_2 wird die lotrechte Durchbiegung (Hauptbiegung) berücksichtigt. Dieser Einfluß, der übrigens schon von PRANDTL untersucht wurde, ist bei schmalen Trägern nicht groß: für I NP 20 ist z. B. $B'_2 = E \cdot 124$ cm^4 gegenüber $B_2 = E \cdot 117$ cm^4.

trischen Belastungsfällen eine Elastizitätsbedingung beigezogen werden muß. Der Auflagerquerschnitt A soll durch Torsionsmomente T_A elastisch um den Winkel φ_A verdreht werden können. Beachten wir, daß die Winkel klein sind, so liefert Fig. 3 die Beziehung:

$$-\overline{M_{2A}} - \overline{T_A \cdot z_A} + \overline{M_{1A} \cdot \varphi_A} + M_2 + T \cdot z' - M_1 \cdot \varphi = 0,$$

wenn wir mit $\overline{M_A} = M_A + Q_{MAB} \cdot x$ die Ordinate im Schnitt x des durch die Einspannmomente M_A und M_B bestimmten Trapezes bezeichnen. Die Momente M_2 und T sind kleine Größen, weil sie durch die als klein vorausgesetzten Verformungen y und φ entstehen. Im allgemeinen sind auch die lotrechten Durchbiegungen z und ihre Ableitungen klein; sie besitzen jedoch gegenüber y und φ bestimmte endliche Werte, sodaß die Produkte $T \cdot z'$ nicht von vornherein vernachlässigt werden dürfen. Dagegen zeigt eine einfache Überlegung, daß die Produkte $T \cdot z'$ vom Verhältnis der Torsionssteifigkeit $C = G \cdot J_d$ zur Biegungssteifigkeit $B_1 = E \cdot J_1$ abhängig ist; da für die

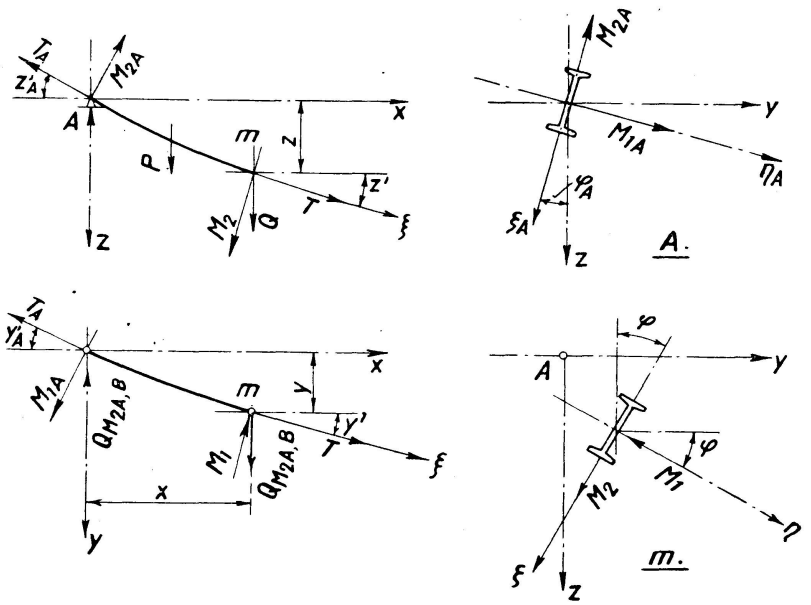


Fig. 3.

in der Konstruktionspraxis verwendeten Trägerquerschnitte in der Regel C kleiner ist als $\frac{1}{2}$ % von B_1, und da dieses Verhältnis $C:B_1$ zugleich die obere Grenze für den Einfluß der Produkte $T \cdot z'$ auf den Wert der kritischen Belastung darstellt, sollen diese vernachlässigt werden. Damit ergibt sich M_2 zu

$$M_2 = \overline{M_{2A}} - \overline{M_{1A} \cdot \varphi_A} + M_1 \cdot \varphi \,. \tag{7}$$

Das Biegungsmoment M_1 ist, abgesehen von vernachlässigbar kleinen Nebeneinflüssen, gleich dem Moment der äußern Lasten.

Die Gleichungen (6) und (7) bilden die Grundlage zur Bestimmung der kritischen Belastung von beliebig gelagerten und durch beliebig angeordnete, jedoch in der Hauptträgheitsebene wirkende Belastungen beanspruchten Balken.

2. Balken mit Rechteckquerschnitt.

Bei Torsionsaufgaben haben wir zu unterscheiden zwischen Querschnittsformen, bei denen, wenigstens angenähert, eine „reine" Verdrehung möglich

ist, und andern, zu denen vornehmlich die I-Querschnitte gehören, bei denen durch die Verdrehung in einzelnen Querschnittsteilen Biegungsmomente, sog. Flanschbiegungsmomente auftreten, wodurch der Verdrehungswinkel gegenüber reiner Torsion oft wesentlich vermindert wird. Zu der ersten Gruppe gehören erfahrungsgemäß die Rechteckquerschnitte, bei denen die gegenseitige Verdrehung $d\varphi$ zweier benachbarter Querschnitte infolge eines Torsionsmomentes T dargestellt wird durch die Beziehung:

$$d\varphi = \frac{T}{C} \cdot dx; \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{C}. \tag{8}$$

Hierbei ist C die Verdrehungssteifigkeit, $C = G \cdot J_d$, wobei für Baustahl und genügend schmale Rechtecke gesetzt werden kann:

$$G = \frac{3}{8} \cdot E, \qquad J_d = \frac{1}{3} \cdot h \cdot d^3.$$ [7])

Durch Differentiation der Gleichung (8) folgt bei konstantem Balkenquerschnitt

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{dT}{dx}; \tag{8a}$$

setzen wir daraus $\frac{dT}{dx}$ in Gleichung (6) ein, so erhalten wir die Differentialgleichung des Stabilitätsproblems für Balken mit konstantem Rechteckquerschnitt:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{M_1 \cdot M_2}{B_2' \cdot C} + \frac{p \cdot h}{2C} \cdot \varphi = 0. \tag{9}$$

Dabei ist M_2 durch Gleichung (7) bestimmt.

Der Rechnungsgang zur Bestimmung der kritischen Belastung ist nun einfach folgender: Wir nehmen eine mit den Auflagerbedingungen verträgliche Verdrehungskurve φ_0 an, deren größte Ordinate wir mit φ_{0m} bezeichnen wollen, und berechnen damit die Kurve der Werte M_2 und daraus das zweite Glied der Gleichung (9). Das dritte Glied ist nur vorhanden, sofern die Belastung nicht in Balkenachse angreift. Daraus erhalten wir durch zweimalige Integration eine Kurve φ_1, aus deren Ordinatenverhältnis zur angenommenen φ_0-Kurve der Wert α und damit aus $\alpha = 1$ der Wert der kritischen Belastung bestimmt ist. Sind angenommene und erhaltene φ-Kurve einander nicht ähnlich, so ist der berechnete Wert der Kipplast eine erste Annäherung, der durch Wiederholung der Berechnung mit der erhaltenen φ-Kurve beliebig verbessert werden kann.

Die zweimalige Integration wird mit den Mitteln der Baustatik derart durchgeführt, daß man die zu integrierende Funktion als Belastung auffaßt und zu ihr ein Seilpolygon zeichnet, bezw. rechnet. Die Lage der Schlußlinie hat dabei den Randbedingungen zu entsprechen. Die Balkenlänge wird in eine mehr oder weniger große Anzahl von gleichen Feldern Δx eingeteilt, über welche gewöhnlich ein geradliniger Verlauf der Belastungsfunktion angenommen wird. Eine wesentliche Verbesserung gegenüber dieser Trapezmethode wird dadurch erhalten, daß man näherungsweise ein über zwei Felder verlaufendes Kurvenstück durch eine Parabel ersetzt und daraus die Knotenlast für den mittleren Teilpunkt als Auflagerkraft der Belastungsfläche bestimmt. Die Ordinaten des Seilpolygons zu diesen Knotenlasten entsprechen

[7]) Genauer $J_d = (h - 0{,}63\ d) \cdot d^3 : 3$ für $h \geqq 4\,d$.

in den Teilpunkten den Ordinaten der Seilkurve. Mit den Bezeichnungen der Fig. 4 ergibt eine elementare Rechnung folgende Knotenlasten:

für einen Zwischenpunkt:

$$K_m = \frac{\Delta x}{12} \cdot (u_{m-1} + 10\, u_m + u_{m+1}) \tag{10}$$

für einen Endpunkt $m - 1$ (oder für einen Unstetigkeitspunkt):

$$K'_{m-1} = \frac{\Delta x}{24} (7\, u_{m-1} + 6\, u_m - u_{m+1}), \tag{10a}$$

für einen Endpunkt $m + 1$ mit horizontaler Tangente in $m + 1$:

$$K'_{m+1} = \frac{\Delta x}{12} (5\, u_{m+1} + u_m). \tag{10b}$$

Falls die Querschnittswerte über die Balkenlänge veränderlich sind, so ist die Seilpolygonberechnung zu ersetzen durch zwei Einzelintegrationen,

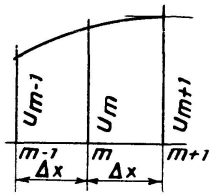


Fig. 4.

die wir am einfachsten je als Flächenberechnungen durchführen. Zunächst ist aus Gleichung (6) durch Summation das Torsionsmoment T zu berechnen, wobei die Veränderlichkeit von B'_2 durch Einführung einer „reduzierten" Belastungsfläche berücksichtigt wird. Aus dem Torsionsmoment ergibt sich auf gleiche Weise der Verdrehungswinkel φ, wobei die Veränderlichkeit der Verdrehungssteifigkeit C zu berücksichtigen ist. (Bei Unsymmetrie ist T_B als überzählige Größe aus der Elastizitätsbedingung für φ_B zu bestimmen.) Dabei nehmen wir wieder näherungsweise parabelförmigen Funktionsverlauf über je zwei Felder an und erhalten nach der Simpson'schen Regel die Fläche zwischen $m - 1$ und $m + 1$ zu

$$F_{m-1}^{m+1} = \frac{\Delta x}{3} (u_{m-1} + 4\, u_m + u_{m+1}). \tag{11}$$

Bei ungerader Felderzahl nehmen wir je den Funktionsverlauf von $m - 1$ bis $m + 1$ und von m bis $m + 2$ als Parabel an und erhalten als Mittelwert

$$F_m^{m+1} = \frac{\Delta x}{24} (-\, u_{m-1} + 13\, u_m + 13\, u_{m+1} - u_{m+2}). \tag{11a}$$

Auf diese Weise ist auch bei kleiner Felderzahl eine praktisch genügende Genauigkeit erreichbar.

Wir skizzieren nun die Durchrechnung einzelner Belastungsfälle:

a) Einfache Balken.

Infolge der freien Drehbarkeit um y- und z-Achse verschwinden die Einspannmomente M_{1A} und M_{2A}, sodaß sich Gleichung (7) vereinfacht zu

$$M_2 = M_1 \cdot \varphi.$$

Damit liefert Gleichung (6), wenn die Belastung zunächst in Balkenachse angreift:

$$\frac{dT}{dx} + \frac{M_1^2 \cdot \varphi}{B_2'} = 0.$$

Sind die Querschnittswerte B'_2 und C über die Balkenlänge konstant, so ergibt sich die vereinfachte Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{M_1^2 \cdot \varphi}{B_2' \cdot C}\,^{8)} = 0. \tag{12}$$

Gewöhnlich darf der Auflagerquerschnitt als in seiner Ebene unverdrehbar festgehalten angenommen werden: $\varphi_A = 0$. Bei elastischer Verdrehbarkeit dagegen ist φ_A entsprechend dem Auflagertorsionsmoment T_A einzusetzen. Ohne besondere Bemerkung ist hier stets $\varphi_A = 0$.

Bei Belastung durch ein konstantes Biegungsmoment $M = M_1$ ist die Differentialgleichung (12) identisch mit derjenigen des zentrisch belasteten Druckstabes. Wir schließen daraus, daß die maßgebende Verdrehungskurve eine Sinuskurve ist:

$$\varphi_0 = \varphi_{0m} \cdot \sin\frac{\pi \cdot x}{l}.$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (12) ein, so erhalten wir durch zweimalige Integration unter Beachtung der Randbedingungen ($\varphi = 0$ für $x = 0$ und $x = l$, $\varphi' = 0$ für $x = \frac{l}{2}$) die Verdrehungskurve φ_1:

$$\varphi_1 = \frac{M^2}{B_2' \cdot C} \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \varphi_0 = \alpha \cdot \varphi_0.$$

Aus $\alpha = 1$ ergibt sich der kritische Wert des Biegungsmomentes:

$$M_{kr.}^2 = \pi^2 \cdot \frac{B_2' \cdot C}{l^2}, \qquad M_{kr.} = \pi \cdot \frac{\sqrt{B_2' \cdot C}}{l}. \tag{13}$$

In Fig. 5 ist der einfache Balken mit Einzellast P in Balkenmitte mit den zugehörigen Kurven zur Berechnung der Kipplast (φ, M_1, $M_1^2 \cdot \varphi$ und zugehörige Seilkurve) dargestellt. Mit den für Balkenmitte eingeschriebenen Zahlenwerten ergibt sich die Kipplast zu

$$P_{kr.} = 16{,}94 \cdot \frac{\sqrt{B_2' \cdot C}}{l^2}. \tag{14}$$

Wenn die Belastung am obern Trägerrand statt in Balkenachse angreift, so entsteht das in Fig. 5 ebenfalls skizzierte zusätzliche Torsionsmoment ΔT, woraus sich in Balkenmitte die zusätzliche Verdrehung $\Delta\varphi_m$ ergibt:

$$\Delta\varphi_m = \frac{P \cdot h \cdot l}{8 \cdot C} \cdot \varphi_{0m}.$$

Da einerseits der Einfluß dieser Verschiebung des Lastangriffspunktes in der Regel nicht sehr groß ist und andrerseits eine mäßige Veränderung der Form der maßgebenden Verdrehungskurve nur eine unwesentliche Veränderung der kritischen Last zur Folge hat, dürfen wir auch hier ohne großen Fehler die für den Grundfall ermittelte Verdrehungskurve φ als maßgebend betrachten.

---

8) Form der Differentialgleichung bei PRANDTL.

Die Form der $\Delta\varphi$-Kurve ist nicht mehr ähnlich zur φ-Kurve, sodaß $\Delta\alpha$ für jeden Trägerpunkt verschieden groß ist. Im Sinne unserer Ableitung ist offensichtlich nicht die Vergrößerung von φ eines einzelnen Punktes, sondern die Gesamtheit aller dieser Veränderungen maßgebend. Wir bestimmen deshalb $\Delta\alpha$ als Mittelwert aus dem Flächenvergleich von $\Delta\varphi$-Kurve zu φ_0-Kurve:

$$F(\Delta\varphi) = \frac{P \cdot l^2 \cdot h}{16 \cdot C} \cdot \varphi_{0m}, \qquad F(\varphi_0) = 0{,}58778 \cdot l \cdot \varphi_{0m};$$

somit

$$\Delta\alpha = \frac{F(\Delta\varphi)}{F(\varphi_0)} = 0{,}21266 \cdot P \cdot l \cdot \frac{h}{2C}.$$

Setzen wir $\alpha = 1$:

$$1 = \frac{1}{286{,}92} \cdot \frac{P^2 \cdot l^4}{B_2' \cdot C} + 0{,}21266 \cdot \frac{P \cdot l \cdot h}{2C}.$$

so erhalten wir mit der Abkürzung

$$a = \frac{2l}{h} \cdot \sqrt{\frac{C}{B_2'}} \tag{15}$$

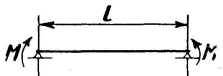
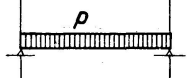
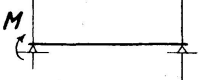
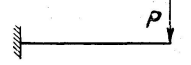
die kritische Belastung zu

$$P_{kr.} = 16{,}94 \cdot \frac{\sqrt{B_2' \cdot C}}{l^2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{3{,}24}{a^2}} - \frac{1{,}80}{a}\right). \tag{14a}$$

Greift P am untern Trägerrand an, so wechselt das Vorzeichen des letzten Gliedes im Klammerausdruck.

Tabelle 1 enthält die Werte der kritischen Belastung für die häufigsten Belastungsfälle des einfachen Balkens.

Tabelle 1.

	Belastungsfall	M_{max}	Rechteckbalken Last im Schwerpkt.	Flanschbiegung	Last oben / unten
a		M	$M_{kr} = \pi \cdot \frac{\sqrt{B_2' \cdot C}}{l}$	$\beta_1 = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{a^2}}$	$\beta_2 =$
b		$\frac{p l^2}{8}$	$p_{kr} = 28{,}31 \frac{\sqrt{B_2' \cdot C}}{l^3}$	$\sqrt{1 + \frac{10{,}0}{a^2}}$	$\sqrt{1 + \frac{2{,}10}{a^2}} - \frac{1{,}45}{a}$
c		$\frac{P \cdot l}{4}$	$P_{kr} = 16{,}94 \frac{\sqrt{B_2' \cdot C}}{l^2}$	$\sqrt{1 + \frac{10{,}2}{a^2}}$	$\sqrt{1 + \frac{3{,}24}{a^2}} - \frac{1{,}80}{a}$
d		M	$M_{kr} = 5{,}56 \frac{\sqrt{B_2' \cdot C}}{l}$	$\sqrt{1 + \frac{11{,}2}{a^2}}$	
e		$P \cdot l$	$P_{kr} = 4{,}01 \frac{\sqrt{B_2' \cdot C}}{l^2}$	$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2}$	$\sqrt{1 + \frac{1{,}69}{a^2}} - \frac{1{,}30}{a}$

gilt im elastischen Bereich

b) Konsolträger.

Die Berechnung der Kipplast des Konsolträgers mit Einzellast P am freien Ende ist in Fig. 6 skizziert. Zu beachten sind die Randbedingungen: $T = 0$ für $x = l$, $\varphi = 0$ für $x = 0$. Im übrigen ist die Berechnung die gleiche wie für den einfachen Balken. Bei Unterteilung der Spannweite l in 6 Teile ergibt sich nach unserer Berechnung

$$P_{kr.} = 4{,}014 \cdot \frac{\sqrt{B_2' \cdot C}}{l^2}; \tag{16}$$

die Vorzahl $k = 4{,}014$ weicht von der von Prandtl gefundenen (4,0126) um nur 0,03 % ab.

Bei Lastangriff in Trägeroberkante liefert unsere Näherungsberechnung den Wert der Vorzahl k zu

$$k = 4{,}014 \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1{,}69}{a^2}} - \frac{1{,}30}{a}\right). \tag{16a}$$

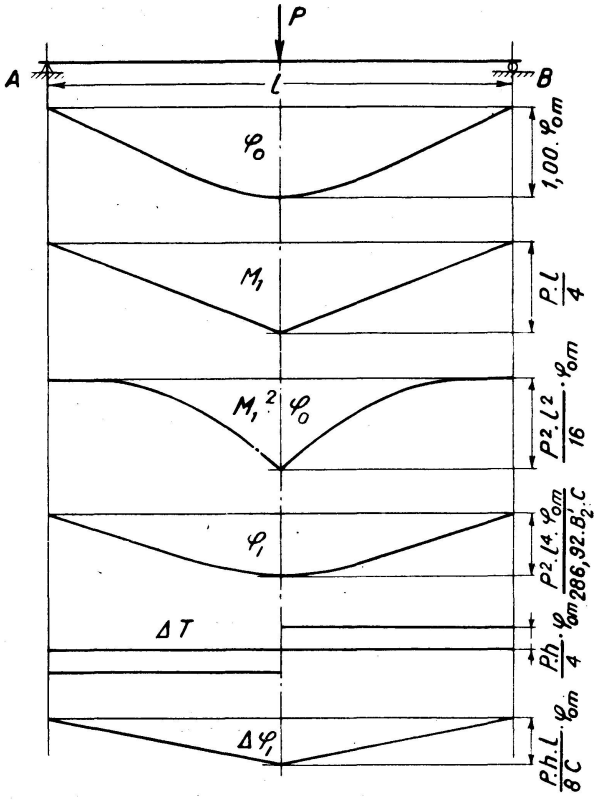


Fig. 5.

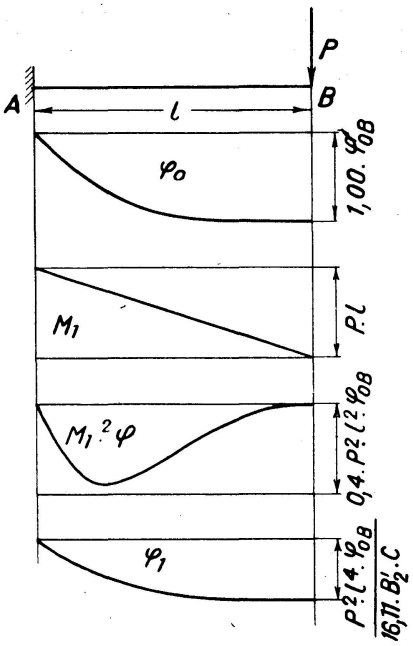


Fig. 6.

c) Elastisch eingespannte Balken.

Wir drücken die elastische Drehbarkeit der Auflager durch die Trägerabmessungen aus. Für den in Fig. 7 skizzierten Belastungsfall mit gleichmäßig verteilter Belastung p wurde angenommen:

$$z_A' = -\frac{M_{1A} \cdot l}{3B_1}, \qquad y_A' = -\frac{M_{2A} \cdot l}{3B_2}, \qquad \varphi_A = 0.$$

Zunächst ist das seitliche Biegungsmoment $M_2^0 = M_1 \cdot \varphi$ mit angenommener φ-Kurve zu bestimmen, das bei freier seitlicher Drehbarkeit auftreten würde. Das zugehörige Stützenmoment ergibt sich aus der Elastizitätsbedingung

$$M_{2A} \cdot a_{11} + M_{2B} \cdot a_{12} + a_{10} = 0,$$

wobei in a_{11} die elastische Drehbarkeit des Auflagers zu berücksichtigen ist und a_{10} die $1 : B_2$-fache Auflagerkraft der Momentenfläche M_2^0 bedeutet. Das Seilpolygon zur $M_1 \cdot M_2 : B'_2 \cdot C$-Fläche ergibt den Verdrehungswinkel φ_1, dessen Vergrößerung gegenüber der angenommenen Verdrehungskurve den Wert der kritischen Belastung liefert. Diese besitzt im Beispiel der Fig. 7 gegenüber dem in beiden Richtungen frei drehbar gelagerten Balken einen

rd. 2,16-fachen Wert. Fig. 8 enthält die Berechnung der Kipplast für den im übrigen gleichen Träger wie in Fig. 7, wenn sich die Auflagerquerschnitte um den Winkel

$$\varphi_A = 0{,}10 \cdot \frac{T_A \cdot l}{C}$$

elastisch verdrehen. T_A wird als Inhalt der $M_1 \cdot M_2 : B'_2$-Fläche über die halbe Spannweite bestimmt. Infolge dieser kleinen elastischen Verdrehbarkeit nimmt der Wert der kritischen Belastung gegenüber dem Beispiel der Fig. 7 um rd. 17 % ab.

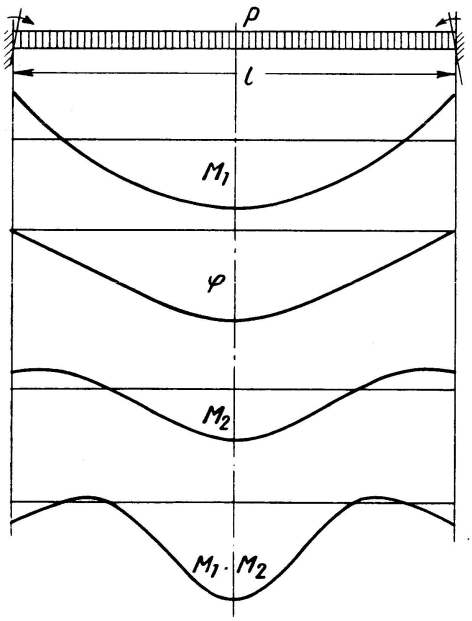


Fig. 7.

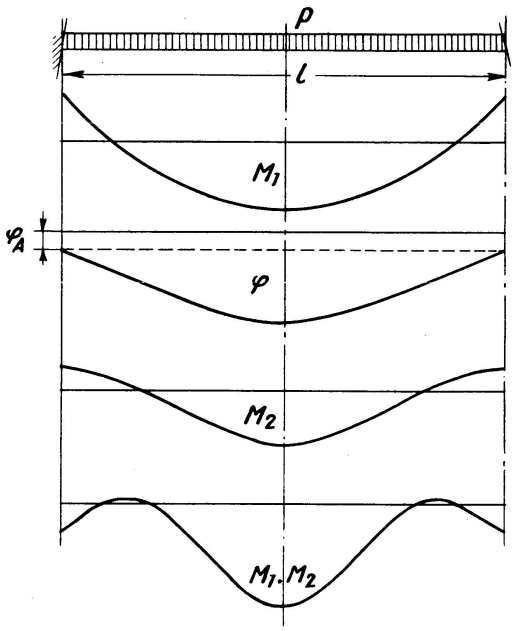


Fig. 8.

d) Einfluß einer gleichzeitig wirkenden Druckkraft S.

Das seitliche Biegungsmoment in einem ausgebogenen einfachen Balken beträgt

$$M_2 = M_1 \cdot \varphi + S \cdot y; \tag{17}$$

somit ist, wenn wir den untergeordneten Einfluß der Hauptbiegung nicht berücksichtigen:

$$B_2 \cdot y'' = -(M_1 \cdot \varphi + S \cdot y), \tag{18}$$

woraus wir durch Berechnung des Seilpolygons wieder y erhalten. Um die beiden Klammerglieder $M_1 \cdot \varphi$ und $S \cdot y$ addieren zu können, setzen wir vorübergehend

$$S = \varepsilon \cdot M_1^2 : C. \tag{19}$$

Die Verdrehung φ ist durch den Zusammenhang

$$C \cdot \varphi'' = M_1 \cdot y'' \tag{20}$$

gegeben. Die Berechnung der Kipplast ist nun folgende: Annahme einer Ausbiegungskurve y_0 mit zugehöriger zweiter Ableitung y_0''; aus letzterer wird nach Gl. (20) die Verdrehungskurve φ als Seilkurve berechnet. Damit und für einen bestimmten Wert von ε (Gl. (19)) wird nach Gl. (18) y_1'' bestimmt, woraus sich y_1 als Seilkurve ergibt. Der Vergleich von y_1 und y_0 liefert mit $\alpha = 1$ den Wert des kritischen Momentes und daraus nach Gl. (19) den der zugehörigen Druckkraft S.

Für den Fall eines konstanten Biegungsmomentes sind y- und φ-Kurven sinusförmig; zwischen Biegungsmoment M und Druckkraft S ergibt sich damit die Beziehung:

$$M_{kr.} = M^0_{kr.} \cdot \sqrt{1 - \frac{S}{S_E}}; \qquad S_{kr.} = S_E \cdot \left(1 - \frac{M^2}{M^{0\,2}_{kr.}}\right). \tag{21}$$

Dabei bedeutet $M^0_{kr.}$ das Kippmoment des Balkens ohne Druckkraft und S_E die Eulersche Knicklast des momentenfreien Balkens.

Fig. 9 zeigt den Verlauf der Gleichungen (21). Falls M nicht konstant ist, ist die maßgebende Ausbiegungskurve y vom Wert ε abhängig. Die für zwei andere Belastungsfälle in Fig. 9 eingetragenen Kurven zeigen jedoch, daß Gl. (21) mit praktisch genügender Genauigkeit allgemein verwendet werden kann. Gl. (21) gilt auch bei beliebiger Lagerungsart, wenn dabei die entsprechenden Werte von $M^0_{kr.}$ und S_E eingesetzt werden. Falls S eine Zugkraft ist, wechselt in der ersten Form von Gl. (21) das Vorzeichen von S.

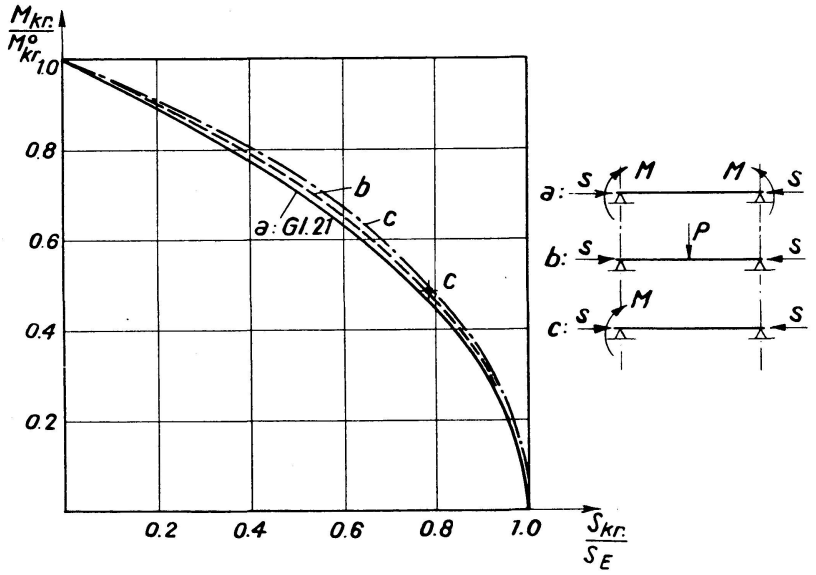


Fig. 9.

Trotzdem Träger mit Rechteckquerschnitt in der Konstruktionspraxis keine Bedeutung besitzen, sind die Untersuchungen dieses Abschnitts auch für die Praxis nicht unwichtig, weil sich die noch zu bestimmenden Werte der Kipplast von I-Trägern mit zunehmender Schlankheit den für schmale Rechteckquerschnitte geltenden Werten derart mehr und mehr nähern, daß diese untere Grenzwerte für die Kipplast von auf Biegung beanspruchten Trägern überhaupt darstellen.

3. Balken mit I-Querschnitt.

Bei der Verdrehung von Trägern mit I-Querschnitt handelt es sich auch annäherungsweise nicht mehr um reine Torsion, da die Flanschen, die bei einer Verdrehung φ eine seitliche Ausbiegung $\frac{h}{2} \cdot \varphi$ erleiden, diese nicht mehr spannungsfrei mitmachen können. Aus dieser Flanschausbiegung, entgegengesetzt oben und unten, folgt mit Hilfe der Differentialgleichung der elastischen Linie die Größe der Flanschbiegungsmomente zu

$$M_{Fl.} = -B_{Fl.} \cdot \frac{h}{2} \cdot \varphi''. \tag{22}$$

$B_{Fl.}$ bedeutet die Biegungssteifigkeit eines Flansches und kann bei I-Trägern mit genügender Genauigkeit der halben seitlichen Trägersteifigkeit B_2 gleichgesetzt werden [9]). Die Flanschquerkräfte, d. h. die ersten Ableitungen der Flanschbiegungsmomente,

$$Q_{Fl.} = -B_2 \cdot \frac{h}{4} \cdot \varphi''' - \frac{dB_2}{dx} \cdot \frac{h}{4} \cdot \varphi'' \tag{23}$$

bilden zusammen ein Torsionsmoment $Q_{Fl.} \cdot h$ und die Betrachtung des Gleichgewichts zwischen äußern und innern Torsionsmomenten liefert die Beziehung

$$T = C \cdot \varphi' - \frac{h^2}{4}\left(B_2 \cdot \varphi''' + \frac{dB_2}{dx} \cdot \varphi''\right), \tag{24}$$

die bei konstanten Querschnittswerten in die von Timoshenko aufgestellte Form

$$T = C \cdot \varphi' - \frac{B_2 \cdot h^2}{4} \cdot \varphi''' = C \cdot \varphi' - C \cdot \frac{l^2}{a^2} \cdot \varphi''' \tag{24a}$$

übergeht. Dabei hat die Abkürzung a^2 die durch Gl. (15) gegebene Bedeutung, nur ist hier B_2 statt B'_2 einzusetzen. Auch ist die Trägerhöhe h hier genau genommen zwischen den Flanschschwerpunkten zu messen.

Die Verdrehungssteifigkeit C des I-Querschnittes setzt sich auf Grund des Prandtlschen Membrangleichnisses aus den Verdrehungssteifigkeiten der den Querschnitt bildenden schmalen Rechtecke zusammen; der so erhaltene Wert ist jedoch nach den Versuchen von A. Föppl etwas zu klein, hauptsächlich wegen des Einflusses der Gabelungspunkte, den C. Weber [10]) untersucht hat. Nach diesen Untersuchungen darf gesetzt werden:

$$C = G \cdot J_d = G \cdot 1{,}25 \cdot \sum \frac{h \cdot d^3}{3}. \tag{25}$$

Die Gleichungen (6), (7) und (24) umschreiben zusammen das Stabilitätsproblem des auf Biegung beanspruchten Balkens mit I-Querschnitt. Eine Lösung der Aufgabe in geschlossener Form mit elementaren Funktionen ist nur bei konstantem Biegungsmoment M_1 und bei konstantem Balkenquerschnitt möglich. Unter diesen Voraussetzungen ist z. B. für einen einfachen Balken wieder

$$\varphi = \varphi_m \cdot \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Durch Differentiation der Gl. (24 a) und Einsetzen in Gl. (6) erhalten wir für den einfachen Balken die Differentialgleichung

$$-\frac{l^2}{a^2} \cdot \varphi'''' + \varphi'' + \frac{M_1^2 \cdot \varphi}{B_2' \cdot C} = 0. \tag{26}$$

Für M = konst. erhalten wir durch Einsetzen von φ und seiner Ableitungen direkt den Wert des kritischen Momentes zu

---

[9]) Bei I-Trägern mit ungleichen Flanschen ist für $B_{Fl.}$ ein Mittelwert $2 B_o \cdot B_u : (B_o + B_u)$ einzusetzen, der sich aus der Gleichgewichtsbedingung $Q^o_{Fl.} = Q^u_{Fl.}$ ergibt (s. S. Timoshenko: Method of Analysis of statical and dynamical Stresses in Rail. Proceedings of the second Intern. Congress for applied Mechanics, Zürich 1926).

[10]) C. Weber: Der Verdrehungswinkel von Walzeisenträgern. Föppl-Festschrift. Berlin 1924. Der Korrekturfaktor wird dort für einen Träger I B 22 mit 1,27 bis 1,28 angegeben.

$$M_{kr.} = \pi \cdot \frac{\sqrt{B_2' \cdot C}}{l} \cdot \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{a^2}} = \pi \cdot \frac{\sqrt{B_2' \cdot C}}{l} \cdot \beta_1 . \tag{27}$$

Das Kippmoment des I-Trägers unterscheidet sich vom entsprechenden Wert für den Rechteckbalken durch den Faktor β_1, der sich mit wachsendem Wert von $a^2 = \frac{4\,C \cdot l^2}{B_2 \cdot h^2}$ der Einheit nähert.

Im allgemeinen ergibt sich die Bestimmung der Kipplast von I-Trägern am einfachsten durch eine numerische Auflösung der Differentialgleichung (24), wodurch der den Träger auf Torsion beanspruchende Anteil t

$$t = C \cdot \varphi' \tag{28}$$

des Drehmomentes T bestimmt wird. Die Integration von t bezw. das Seilpolygon zu t' liefern dann die Verdrehungskurve φ.

Ein einfaches und recht genaues numerisches Auflösungsverfahren derartiger Differentialgleichungen ergibt sich durch Betrachtung der Eigenschaften des Seilpolygons, Fig. 10. Wir fassen t als Ordinaten des mit der Poldistanz $H = 1$ gezeichneten Seilpolygons auf. t'' sei die zugehörige Be-

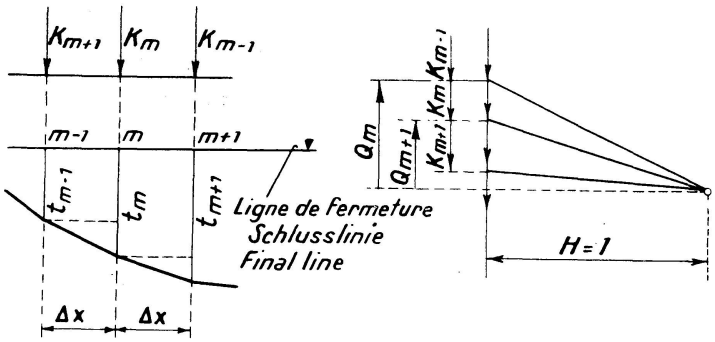


Fig. 10.

lastungsfunktion, deren Knotenlasten in den Teilpunkten wir mit K bezeichnen. Nach Fig. 10 ist

$$t_m = t_{m-1} + Q_m \cdot \Delta x,$$
$$t_{m+1} = t_m + Q_{m+1} \cdot \Delta x.$$

Beachten wir, daß $Q_m - Q_{m+1} = -K_m$, so folgt aus $t_m - t_{m+1}$ die Gleichung:

$$K_m = \frac{t_{m-1} - 2\,t_m + t_{m+1}}{\Delta x} . \tag{29}$$

Setzen wir den Wert der Knotenlast nach Gl. (10) ein, so erhalten wir für einen Zwischenpunkt m die Beziehung

$$t''_{m-1} + 10\,t''_m + t''_{m+1} = 12\,\frac{t_{m-1} - 2\,t_m + t_{m+1}}{\Delta x^2} . \tag{29a}$$

Nach Gl. (24 a) beträgt

$$t'' = \frac{a^2}{l^2} \cdot (t - T),$$

woraus in Verbindung mit Gl. (29 a) und wenn n die Zahl der Felder Δx bedeutet, die dreigliedrige Gleichung

$$-t_{m-1} \cdot (12\,n^2 - a^2) + t_m \cdot (24\,n^2 + 10\,a^2) - t_{m+1} \cdot (12\,n^2 - a^2)$$
$$= a^2 (T_{m-1} + 10\,T_m + T_{m+1}) = a^2 \cdot \Sigma\, T_m \tag{30}$$

hervorgeht. ΣT_m ist eine abgekürzte Schreibweise, deren Bedeutung aus Gl. (30) hervorgeht. Bei Unstetigkeits- oder Endpunkten ist ΣT_m entsprechend den Gleichungen (10a) oder (10b) zu modifizieren.

Gl. (30) läßt sich mit der Abkürzung $\gamma = n^2 : a^2$ noch etwas einfacher schreiben:

$$-(12\gamma - 1)\, t_{m-1} + (24\gamma + 10)\, t_m - (12\gamma - 1)\, t_{m+1} = T_{m-1} + 10\, T_m + T_{m+1}\,. \quad (30a)$$

Eine derartige Gleichung gilt für jeden Zwischenpunkt m. Für die End- oder Auflagerpunkte stehen uns folgende Randbedingungen zur Verfügung:

Auflagerpunkte. Bei freier seitlicher Drehbarkeit der Flanschen muß $t'_A = 0$ sein, da $t' = C \cdot \varphi''$, abgesehen von einem Multiplikationsfaktor, ja dem Flanschbiegungsmoment entspricht, das an dieser Stelle null sein muß. Nach Fig. 11 beträgt der Neigungswinkel der t-Kurve im Punkt A, wenn wir geradlinigen Verlauf der Belastungsfunktion t'' von A bis 1 annehmen:

$$t'_A = \frac{-t_A + t_1}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{6}(2\, t''_A + t''_1)$$

und die gesuchte Randbedingung $t'_A = 0$ ergibt sich zu

$$t_A(6\gamma + 2) - t_1(6\gamma - 1) = 2\, T_A + T_1\,. \quad (31)$$

Falls die Flanschen bei beiden Auflagern frei drehbar sind, ist es einfacher,

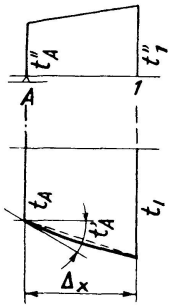


Fig. 11.

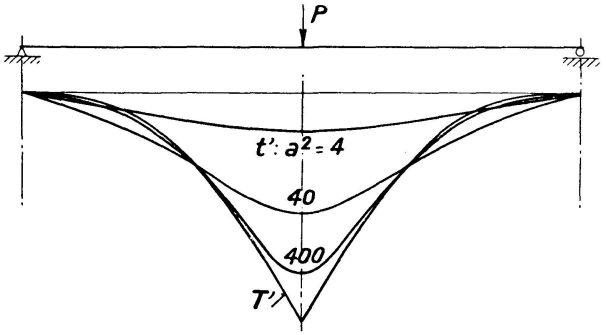


Fig. 12.

in Gl. (30) mit den Werten t' und T' zu rechnen, statt mit t und T. Bei Verwendung dieser „abgeleiteten Gleichung (30)" fallen infolge $t'_A = t'_B = 0$ einfach die beiden den Auflagerpunkten entsprechenden Gleichungen weg.

Falls die Flanschen seitlich starr eingespannt sind, besitzt ihre seitliche Ausbiegungskurve und folglich auch die φ-Kurve eine zur Balkenachse parallele Tangente im Auflagerpunkt: damit muß φ'_A und deshalb auch t_A null sein. Damit fallen bei Anwendung des unveränderten Gleichungssystems Gl. (30) die Auflagergleichungen weg.

Bei elastischer Einspannung der Flanschen drücken wir wieder den Einspannungsgrad durch die Balkenabmessungen aus; es sei

$$\varphi'_A \cdot \frac{h}{2} = \frac{M_{A\,Fl.} \cdot l}{\nu \cdot B_{Fl.}}\,.$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie des Flansches lautet:

$$\varphi''_A \cdot \frac{h}{2} = -\frac{M_{A\,Fl.}}{B_{Fl.}}\,.$$

Aus diesen beiden Ausdrücken folgt

$$\varphi''_A = -\varphi'_A \cdot \frac{\nu}{l}, \quad \text{oder} \quad t'_A = -t_A \cdot \frac{\nu}{l},$$

und die gesuchte Randbedingung lautet:

$$t_A \cdot \left[6\gamma\left(1+\frac{\nu}{n}\right)+2\right] - t_1 \cdot (6\gamma - 1) = 2\,T_A + T_1. \tag{31a}$$

Freie Endpunkte. Für das freie Ende i beispielsweise eines Konsolträgers läßt sich mit Hilfe der Gl. (10a) eine zu Gl. (30) analoge Gleichung aufstellen:

$$-t_{i-2} - t_{i-1} \cdot (24\gamma - 6) + t_i \cdot (24\gamma + 7) = -T_{i-2} + 6\,T_{i-1} + 7\,T_i. \tag{31b}$$

Die Auflösung des dreigliedrigen Gleichungssystems zur Bestimmung der Torsionsanteile t oder t' bietet keinerlei Schwierigkeiten.

Bei veränderlichem Querschnitt ist auch das von der Veränderung der seitlichen Biegungssteifigkeit herrührende zweite Klammerglied der Gl. (24) zu berücksichtigen. Dabei darf genau genug die durchschnittliche Veränderung von B_2 längs der Feldweite Δx eingesetzt werden. Für φ'' setzen wir angenähert

$$\varphi''_m = \frac{\varphi'_{m+1} - \varphi'_{m-1}}{2\,\Delta x},$$

wodurch wir im allgemeinen fünfgliedrige Gleichungen statt der dreigliedrigen Gl. (30) erhalten. Zu beachten ist, daß auch die Werte a^2 veränderlich sind.

Der Berechnungsgang zur Bestimmung der Kipplast ist nun folgender: Auf Grund einer angenommenen φ-Kurve wird nach Gl. (7) die Kurve der Biegungsmomente M_2 berechnet, worauf Gl. (6) die Kurve T' liefert. Bei einfachen Balken (Flanschen frei drehbar) wird durch Auflösung des „abgeleiteten Gleichungssystems Gl. (30)" die Kurve t' bestimmt, aus der das zugehörige Seilpolygon die Verdrehungskurve φ_1 liefert. Die Bedingung $\alpha = 1$ ($\varphi_1 = \varphi_0$) liefert einen ersten Näherungswert der Kipplast, der durch Wiederholung der Berechnung beliebig verbessert werden kann. In allgemeineren Fällen (Einspannung) ist aus der T'-Kurve durch Summation die T-Kurve zu berechnen, entweder unter Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse oder, bei unsymmetrischen Fällen, unter Einführung einer überzähligen Größe T_B, wie bei gewöhnlichen statisch unbestimmten Systemen. Aus T folgt durch Auflösung des Gleichungssystems Gl. (30) die Kurve t, aus der durch Summation die Verdrehungskurve φ_1 bestimmt wird.

In Fig. 12 ist für einen einfachen Balken mit Einzellast P in Balkenmitte der Verlauf der Kurven $T' = M_1^2 \cdot \varphi : B'_2$ und, für die Werte $a^2 = 4$, 40 und 400, der Kurven t dargestellt, um den ausgleichenden Einfluß der Flanschbiegung zu veranschaulichen. Die zugehörigen Werte der Kipplast betragen:

$$P_{kr.} = 31{,}92\,\frac{\sqrt{B_2 \cdot C}}{l^2} \quad \text{für} \quad a^2 = 4$$

$$19{,}08 \qquad\qquad 40$$

$$17{,}20 \qquad\qquad 400.$$

Es liegt nahe, den Einfluß der Flanschbiegung auf dieselbe Form zu bringen wie beim Balken mit konstantem Biegungsmoment (Gl. (27)), d. h. das Verhältnis der Kipplast des I-Trägers zu derjenigen des Rechteckbalkens durch den Faktor

$$\beta_1 = \sqrt{1 + \mu^2 : a^2} \tag{32}$$

auszudrücken. Mit der Vorzahl für die Kipplast des Rechteckbalkens $k_0 = 16{,}94$ finden wir für die Werte $a^2 = 4, 40, 400$ die Werte $\mu^2 = 10{,}20, 10{,}76, 12{,}12$, d. h. nicht mehr einen konstanten Wert, wie für $M =$ konst. ($\mu^2 = \pi^2$). Wählen wir, um einen einfachen Ausdruck für die Kipplast zu bekommen, hier $\mu^2 = 10{,}20 =$ konst., so beträgt der dadurch begangene Fehler auf die Kipplast für $a^2 = 40$ bezw. 400 rund 0,6 bezw. 0,24 %.

Ähnlich wie im zweiten Abschnitt kann die Kipplast auch bestimmt werden, wenn die Belastung nicht in Trägerachse, sondern auf Trägeroberkante angreift. Die durchgeführten Berechnungen zeigen, daß der Einfluß dieser Verschiebung des Lastangriffspunktes, den wir durch einen Faktor β_2 ausdrücken wollen, bei nicht zu kleinen Werten von a^2 mit praktisch genügender Genauigkeit gleich groß angenommen werden darf wie beim Balken mit Rechteckquerschnitt.

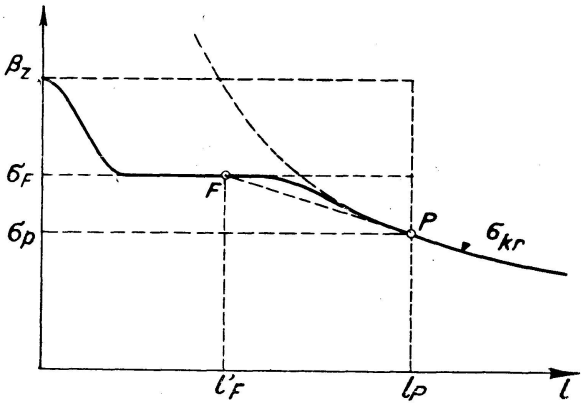


Fig. 13.

Die Werte der kritischen Belastung sind für einige häufige Belastungsfälle des einfachen Balkens in Tabelle 1 zusammengestellt. Für den Konsolträger, der ebenfalls aufgenommen ist und bei dem der Einfluß der Flanschbiegung sich nicht in der gleichen Form darstellen läßt wie beim einfachen Balken, ist der Faktor β_1 den Untersuchungen Timoshenkos entnommen.

Bei gleichzeitig wirkender Längskraft ist die Berechnung analog wie beim Rechteckbalken, nur ist statt Gleichung (20) die Beziehung

$$C\left(\varphi'' - \frac{l^2}{a^2} \cdot \varphi''''\right) = M_1 \cdot y'' \tag{20a}$$

(bei konstantem Querschnitt) zu berücksichtigen. Die Gleichungen (21) gelten auch beim I-Träger für $M =$ konst. genau und für allgemeine Belastungsanordnungen mit guter Annäherung. In Fig. 9 ist für einen einfachen Balken mit dreieckförmiger Momentenfläche für $a^2 = 10$ der dem Wert $\varepsilon = 0{,}5$ entsprechende Punkt C eingetragen.

4. Der unelastische Bereich.

Wenn an einer Stelle des Balkens die kritische Randspannung

$$\sigma_{kr.} = \frac{M_{kr.}}{W}$$

die Proportionalitätsgrenze überschritten hat, so ändern sich die Biegungssteifigkeiten B und die Verdrehungssteifigkeit C und die im zweiten und dritten Abschnitt abgeleiteten Beziehungen für die kritische Belastung gelten

nicht mehr. Wären die Veränderungen von B und C im unelastischen Bereich bekannt, so könnte die Berechnung der kritischen Belastung nach dem dargestellten Verfahren, wenn auch mit vermehrtem Arbeitsaufwand, durchgeführt werden. Der Bestimmung von B_2 und C stehen aber wesentlich größere Schwierigkeiten entgegen als z. B. der Bestimmung des Knickmoduls T_K bei gedrückten Stäben, sodäß wir vorläufig auf eine genaue Bestimmung der Kipplast im unelastischen Bereich verzichten müssen.

Nun liegen aber, wenigstens für die Konstruktionspraxis, die Verhältnisse recht günstig insofern, als aus der Kenntnis der kritischen Belastung im elastischen Bereich mit einiger Zuverlässigkeit auch auf den unelastischen Bereich geschlossen werden kann. Ein sehr kurzer Träger, $l = 0$, wird durch Überwindung der Zugfestigkeit β_z an der gezogenen Faser zu Grunde gehen. Aus Versuchen wissen wir, daß die Kippstabilität bei Trägern mittlerer Spannweite in der Nähe der Fließgrenze σ_F versagt. Die Kippspannungslinie wird also über einen gewissen Bereich in der Höhe σ_F verlaufen, um dann, von

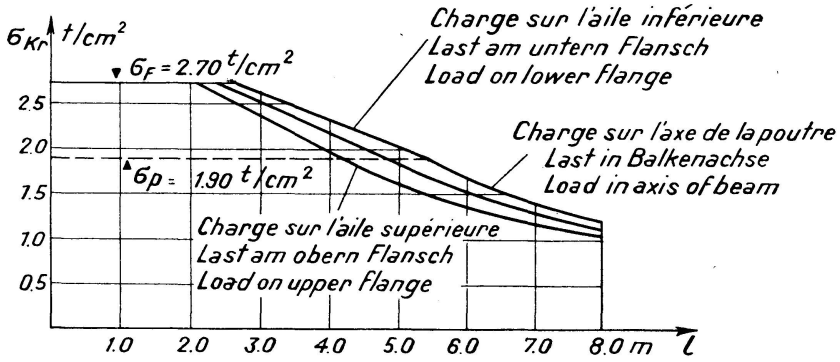


Fig. 14.

einem gewissen Punkte F an, stetig in den den elastischen Bereich der σ_{kr}-Linie darstellenden Ast überzugehen. Über die Lage des Punktes F können wir aussagen, daß seine Abszisse kürzer sein muß, als sie sich aus der Verlängerung der elastischen Kippspannungslinie ergeben würde. In Fig. 13 ist der Verlauf der Kippspannungslinie im Sinne dieser Überlegungen skizziert. Das Verhältnis von l'_F zu l_P wird für verschiedene Belastungsfälle verschieden groß sein. Fig. 13 zeigt aber, daß eine kleine Verschiebung des Punktes F die Größe von σ_{kr} zwischen σ_P und σ_F nicht stark beeinflußt, sodaß $l'_F : l_P$ für eine bestimmte Stahlsorte als konstant angenommen werden darf.

Für Baustahl St. 37 wird σ_P zu rd. 1,9 t/cm² gefunden, während für σ_F etwa 2,7 t/cm² angenommen werden darf. Auf Grund dieser Werte ist in Fig. 14 der Verlauf der Kippspannungslinien für einen einfachen Balken aus I 20 bei gleichmäßig verteilter Belastung unter der Annahme

$$l'_F = 0{,}5 \cdot l_P$$

[11]) Der unelastische Bereich von Knickstäben wird in ähnlicher Weise durch die Tetmajersche Gerade mit für die Praxis jedenfalls genügender Genauigkeit umschrieben. Daß wir die Kippspannungslinie nicht über die Fließgrenze hinaus geführt haben, was in Analogie zur Tetmajerschen Geraden auch in Betracht gezogen werden könnte, hat seinen Grund in der Bewertung der charakteristischen Beanspruchungs- und Verformungsunterschiede zwischen Druckstab und Biegungsträger. In der Zugzone eines auf Biegung beanspruchten Trägers treten während des Fließvorganges jedenfalls wesentlich größere Formänderungen auf, als in einem Druckstab, sodaß dort auch die Fließgrenze einen wesentlich größeren Einfluß auf die Stabilität haben wird.

und unter Vernachlässigung des Verfestigungsbereichs aufgetragen [11]). Die Streuungen der Fließgrenze nach unten sind dabei jedenfalls dadurch gedeckt, daß auf Biegung beanspruchte Träger bei Fließbeanspruchung, infolge der nicht mehr linearen Spannungsverteilung, ein größeres Biegungsmoment aufnehmen können, als dem Wert $\sigma_F \cdot W$ entsprechen würde.

Bei der Bemessung von auf Biegung beanspruchten Bauteilen ist somit folgender Weg einzuschlagen: Aus den Trägerabmessungen ist zunächst $\sigma_{kr.}$ aus den Gleichungen des 2. und 3. Abschnittes zu bestimmen. Ist $\sigma_{kr.} > \sigma_P$, so daß $l'_F : l_P$ für eine bestimmte Stahlsorte als konstant angenommen werden

für $$l \leqq 0{,}5 \cdot l_P : \sigma_{kr.} = \sigma_F$$

für $$0{,}5 \cdot l_P \leqq l \leqq l_P : \sigma_{kr.} = \sigma_F - (\sigma_F - \sigma_P) \cdot \frac{l - 0{,}5 \cdot l_P}{0{,}5 \cdot l_P}.$$

Der zu wählende Sicherheitsgrad soll mit Rücksicht darauf, daß $\sigma_{kr.}$ für einen praktisch kaum zu verwirklichenden Idealfall [12]) (gerade Stabachse, Kraftangriff in Hauptträgheitsebene, homogenes Material) abgeleitet wurde, eher größer angenommen werden, als der Sicherheitsgrad gegen Erreichen der Fließgrenze bei gewöhnlicher Biegung.

5. Gebrauchsformeln für I-NP-Träger.

Für die Anwendungen ist es bequem, die Kipplast für die am häufigsten vorkommenden Belastungsfälle mit Hilfe einfacher Formeln mit praktisch genügender Genauigkeit rasch bestimmen zu können. Deshalb seien hier noch einige Gebrauchsformeln für einfache Balken mit $I - NP$ - Querschnitt mitgeteilt.

Tabelle 2.

I	J_1	W	J_2	$\frac{B_2'}{E}$	J_d	$\sqrt{B_2' \cdot C}$	$\frac{\sqrt{B_2' \cdot C}}{W}$	$96 + 7{,}7\,h$	$\frac{B_2}{C}$	$\sqrt{\frac{B_2}{C}}$
10	171	34,2	12,2	13,1	1,64	5960	174	173	19,8	4,45
20	2140	214	117	124	13,9	53400	250	250	22,5	4,74
30	9800	653	451	473	58,4	213800	327	327	20,6	4,54
40	29210	1460	1160	1210	174,1	590300	404	404	17,8	4,22
50	68740	2750	2480	2570	411	1321000	480	481	16,1	4,01
60	139000	4630	4670	4830	834	2582000	558	558	14,9	3,86

In Tabelle 2 sind die in Betracht kommenden Querschnittswerte für die (deutsche) I-Normalprofilreihe auszugsweise zusammengestellt, wobei angenommen wurde:

$$E = 2100\ \mathrm{t/cm^2}, \quad G = 3/8 \cdot E, \quad J_d = 1{,}25 \cdot \Sigma \frac{h \cdot d^3}{3}.$$

Es zeigt sich, daß der Querschnittswert $\sqrt{B_2 \cdot C} : W$ sehr genau durch eine Gerade dargestellt werden kann:

$$\frac{\sqrt{B_2' \cdot C}}{W} = 96{,}0 + 7{,}70 \cdot h,$$

[12]) Schon eine geringe Abweichung von diesen Voraussetzungen verursacht eine nennenswerte Verminderung der kritischen Belastung. Vergl. F. Stüssi: Exzentrisches Kippen. Schweiz. Bauzeitung 1935, Band 105, Nr. 11.

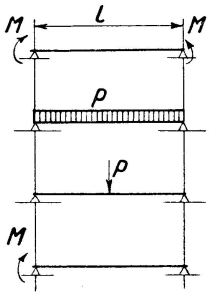
also nur linear von der Trägerhöhe h abhängig ist. Damit lassen sich die Grundwerte $\sigma^0_{kr.}$ der Kippspannung sehr einfach darstellen (Tab. 3).

Der Einfluß von Flanschbiegung und Lastangriffspunktverschiebung gegenüber Balkenachse ist abhängig von den Werten a und a^2. Da diese beiden Einflüsse ja nicht sehr groß sind, setzen wir näherungsweise $B_2 : C =$ konst. $= 20$ und erhalten

$$a^2 = \frac{4\,C \cdot l^2}{B_2 \cdot h^2} = 0{,}20 \cdot \frac{l^2}{h^2}; \quad a = 0.45 \cdot \frac{l}{h}.$$

Damit ergeben sich beispielsweise für gleichmäßig verteilte Belastung p folgende Werte der Korrekturfaktoren β:

Tabelle 3.

	Belastungsfall	M_{max}	σ^0_{kr} t/cm²	β_1	β_2
a		M	$\frac{1}{l}(302 + 24{,}2\,h)$	$1 + 24{,}7\,\frac{h^2}{l^2}$	
b		$\frac{p \cdot l^2}{8}$	$\frac{1}{l}(340 + 27{,}2\,h)$	$1 + 25{,}0\,\frac{h^2}{l^2}$	$1 \mp 3{,}22\,\frac{h}{l} + 5{,}2\,\frac{h^2}{l^2}$
c		$\frac{P \cdot l}{4}$	$\frac{1}{l}(407 + 32{,}6\,h)$	$1 + 25{,}5\,\frac{h^2}{l^2}$	$1 \mp 4{,}00\,\frac{h}{l} + 8{,}0\,\frac{h^2}{l^2}$
d		M	$\frac{1}{l}(534 + 42{,}8\,h)$	$1 + 28{,}0\,\frac{h^2}{l^2}$	

gilt für $\sigma_{kr} = \sigma^0_{kr} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \leqq \sigma_P$.

Einfluß der Flanschbiegung:

$$\beta_1 = \sqrt{1 + 10{,}0 : a^2} = \sqrt{1 + \frac{50\,h^2}{l^2}} \cong 1 + 25 \cdot \frac{h^2}{l^2}.$$

Lastangriff am obern (untern) Trägerrand:

$$\beta_2 = \sqrt{1 + 2{,}10 : a^2} \mp 1{,}45 : a \cong 1 \mp 3{,}22\,\frac{h}{l} + 5{,}2\,\frac{h^2}{l^2}.$$

Mit Hilfe der Zusammenstellung Tabelle 3 kann die kritische Spannung

$$\sigma_{kr.} = \sigma^0_{kr.} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2$$

für den elastischen Bereich leicht berechnet werden. Damit ist auch l_P, diejenige Spannweite, für die $\sigma_{kr.} = \sigma_P$ wird, bestimmt, womit sich der angenäherte Verlauf der Kippspannungslinie im unelastischen Bereich nach Abschnitt 4 ergibt.

Zusammenfassung.

Die kritische Belastung (Kipplast) von auf Biegung beanspruchten Trägern wird aus dem Vergleich von Formänderungskurven (Verdrehung oder seitliche Ausbiegung) des seitlich leicht ausgebogenen Balkens bestimmt. Die Rechnungsgenauigkeit kann dabei beliebig gesteigert werden.

Der Einfluß der Flanschbiegung bei der Torsion von I-Trägern wird durch numerische Auflösung der entsprechenden Differentialgleichung er-

halten, wobei freie Drehbarkeit oder elastische bezw. starre Einspannung der Flanschenden in den Randbedingungen ausgedrückt werden können.

Résumé.

La charge critique des poutres sollicitées à la flexion est déterminée à partir d'une comparaison entre les courbes de déformation (torsion ou déflexion latérale) d'une poutre légèrement incurvée. La précision du calcul peut être poussée à volonté.

L'influence de la flexion des ailes en cas de torsion des poutres en I est établie par résolution numérique de l'équation différentielle correspondante, les conditions d'appui des bords des ailes (torsion libre, encastrement élastique ou rigide) pouvant être exprimées dans les conditions des bords.

Summary.

The critical loading (buckling load) of beams and girders subject to bending is determined by comparing curves of deformation (torsion or lateral deflection) of a beam with slight lateral deflection. The accuracy of the computation thereby may be increased as desired.

The influence of flange-bending with I-beams subject to torsion is determined by the numerical solution of the corresponding differential equation, whereby the conditions of support at flange-ends (free support, elastic or resp. rigid restraint) may be expressed in the marginal conditions.