Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 3 (1935)

Artikel: Elastisch eingespannte Säulen
Autor: Nøkkentved, Chr.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4156

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 24.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELASTISCH EINGESPANNTE SÄULEN

COLONNES A ENCASTREMENT ÉLASTIQUE

COLUMNS ELASTICALLY FIXED

Professor Dr. techn. CHR. NØKKENTVED, Kopenhagen.

Einleitung.

In zahlreichen Fällen sind die in der Praxis vorkommenden Säulen als einzelne Glieder einer Konstruktion elastisch eingespannt. Als Beispiel hierzu können Druckstäbe in Fachwerkkonstruktionen genannt werden, wo die Knotenpunktssteifigkeit, die die sogenannten sekundären Spannungen erzeugt, die elastische Einspannung darstellt. Man kann auch an Säulen denken, die Bestandteile einer Rahmenkonstruktion sind; hier behandelt man die Säule in Wirklichkeit als einen gebogenen Balken, dessen Momente man ausschließlich aus der Rahmenwirkung bestimmt. Erst bei der Bemessung der Säule nimmt man Rücksicht auf die Säulenbeanspruchung, doch wurde dies bisher nicht korrekt durchgeführt. Weiter nimmt man keine Rücksicht auf den Einfluß, den die Säulenbeanspruchung auf den übrigen Teil des Rahmens ausübt; dieser Einfluß kann in gewissen Fällen von Bedeutung sein, da sich die Momentenverteilung in der Säule infolge der Säulendurchbiegung ändert; damit ändern sich die Momente in den elastischen Einspannungen der Säule, sodaß kein Gleichgewicht mehr in dem betreffenden Knotenpunkt herrscht.

Im ersten Abschnitt dieses Artikels soll der ganz allgemeine Fall behandelt werden, daß eine Säule teils durch eine Belastungsfläche (Querkräfte) und teils durch Einspannmomente beansprucht ist. Im zweiten Abschnitt werden Säulen behandelt, die jeweils das einzige belastete Feld der Konstruktion darstellen, im dritten solche, die nur durch Einspannmomente beansprucht sind, und schließlich soll der vierte Abschnitt zeigen, wie man den in den Formeln enthaltenen kritischen Säulendruck, P_E, bestimmt.

Es werden nur Systeme mit geraden Stäben und konstantem Trägheitsmoment innerhalb eines jeden Stabes behandelt.

I. Elastisch eingespannte Säulen, beansprucht durch Querkräfte und bereits vorhandene Einspannmomente.

Die in Fig. 1 gezeichnete Säule $a\,b$ wird durch die dargestellte Belastungsfläche belastet gedacht; die Belastungsfläche zusammen mit eventuellen Belastungen von anderen Teilen der Konstruktion erzeugt die bereits vorhandenen Momente in a und b.

$$\left.\begin{aligned} M_{ab,o} &= M_o \\ M_{ba,o} &= c \cdot M_o \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Unter den bereits vorhandenen Momenten versteht man solche, die sich ohne Berücksichtigung der Säulenwirkung vorfinden, z. B. die einfachen Rahmenmomente, die man unmittelbar aus einer gewöhnlichen Rahmenberechnung erhält[1]).

Unter dem Säulendruck P biegt sich die Säule weiter durch, wodurch die Reaktionsmomente ΔM_{ab} und ΔM_{ba} entstehen. Die resultierenden Momente sind dann:

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= M_{ab,o} + \Delta M_{ab} \\ M_{ba} &= M_{ba,o} + \Delta M_{ba} \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

Hieraus erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \Delta M_{ab} &= M_{ab} - M_o \\ \Delta M_{ba} &= M_{ba} - c M_o \end{aligned}\right\} \tag{1b}$$

Die resultierenden Winkeldrehungen in a und b ergeben sich dann zu:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_a &= \frac{l}{6EJ} M_o(2+c) + \alpha_{oa} - (M_{ab} - M_o)\,\tau_{ab} \\ \zeta_b &= \frac{l}{6EJ} M_o(2c+1) - \alpha_{ob} + (M_{ba} - c M_o)\,\tau_{ba} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

τ_{ab} und τ_{ba} ist ein Maß für die elastische Einspannung in a beziehungsweise in b, da τ_{ab} die Winkeldrehung der Einspannung in a für das Moment $M_{ab} = 1$ ist[2]).

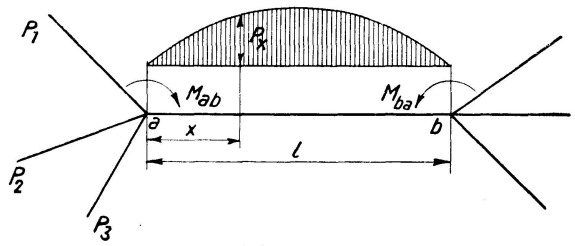

Fig. 1.

α_{oa} und α_{ob} sind die Winkeldrehungen in den Punkten a und b, wenn die Belastungsfläche auf den einfach unterstützten Balken $a\,b$ einwirkt; beide Winkeldrehungen werden positiv in der gleichen Richtung wie M_{ab} und M_{ba} auf der Abbildung gerechnet. Ausgedrückt durch den Inhalt F der einfachen Momentenfläche und ihre Schwerpunktsabstände ξ und ξ' von a beziehungsweise b, sind die Winkeldrehungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{oa} &= \frac{F\xi'}{lEJ}; \qquad \alpha_{ob} = \frac{F\xi}{lEJ} \\ \text{oder:} \qquad \mu_{ab}\alpha'_{oa} &= \frac{F\xi'}{l^2}; \quad \mu_{ab}\alpha'_{ob} = \frac{F\xi}{l^2} \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

---

[1]) Eine Untersuchung von Säulen, die durch bereits vorhandene Momente in den Endpunkten beansprucht sind, ist von D. H. Young durchgeführt im ersten Band der „Abhandlungen", Zürich 1932, herausgegeben von der „Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau", S. 507. Young behandelt jedoch nur einfach unterstützte Säulen, weswegen die Untersuchung sehr begrenzt ist.

[2]) Im wesentlichen werden die gleichen Bezeichnungen gebraucht wie in A. Ostenfeld: Die Deformationsmethode. J. Springer, Berlin 1926.

Wir führen hier den Begriff „Steifigkeitskoeffizient" für die verschiedenen Stäbe[3]) ein, nämlich:

$$\mu_{ab} = \frac{J_{ab}\, l_c}{J_c\, l_{ab}} \tag{3}$$

wo J_c und l_c ein konstantes Trägheitsmoment bezw. eine konstante Länge bedeuten; wir führen ebenso ein:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha'_{oa} = \alpha_{oa}\frac{EJ_c}{l_c}; \quad \alpha'_{ob} = \alpha_{ob}\frac{EJ_c}{l_c} \\ &\text{und analog für andere Größen:} \\ &\zeta' = \zeta\frac{EJ_c}{l_c}; \quad \tau' = \tau\frac{EJ_c}{l_c} \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

Für die Gleichungen (2) kann man nun schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \mu_{ab}\zeta'_a &= M_o\left(\frac{1}{6}(2+c) + \mu_{ab}\tau'_{ab} + \frac{\mu_{ab}\alpha'_{oa}}{M_o}\right) - M_{ab}\mu_{ab}\tau'_{ab} \\ &= M_o\zeta'_{oa} - M_{ab}\mu_{ab}\tau'_{ab} \\ \mu_{ab}\zeta'_b &= -M_o\left(\frac{1}{6}(2c+1) + c\mu_{ab}\tau'_{ba} + \frac{\mu_{ab}\alpha'_{ob}}{M_o}\right) + M_{ba}\mu_{ab}\tau'_{ba} \\ &= -M_o\zeta'_{ob} + M_{ba}\mu_{ab}\tau'_{ba} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hierbei ist:

$$\left.\begin{aligned} \zeta'_{oa} &= \frac{1}{6}(2+c) + \mu_{ab}\tau'_{ab} + \frac{\mu_{ab}\alpha'_{oa}}{M_o} \\ \zeta'_{ob} &= \frac{1}{6}(2c+1) + c\mu_{ab}\tau'_{ba} + \frac{\mu_{ab}\alpha'_{ob}}{M_o} \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Aus dem Aufbau der Formeln (4) ersieht man, daß die Größe $M_o\zeta'_{oa}$ die Winkeldrehung des Punktes a ist, die von einer Belastung links außerhalb des Feldes herrührt. Dies erkennt man auch, wenn man den ersten Ausdruck in (4a) umschreibt zu:

$$\frac{1}{6}(2+c) + \frac{\mu_{ab}\alpha'_{oa}}{M_o} = \zeta'_{oa} - \mu_{ab}\tau'_{ab}\,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung gibt die Winkeldrehung des Balkens $a\,b$ im Punkte a an, die rechte Seite muß dann die Winkeldrehung der Einspannung ausdrücken; ζ'_{oa} rührt her von einer außerhalb liegenden Ursache, $\mu_{ab}\cdot\tau'_{ab}$ von der Einwirkung des Balkens $a\,b$ auf die Einspannung.

Entsprechend bedeutet $M_o\cdot\zeta'_{ob}$ die Winkeldrehung des Punktes b, die von einer Belastung rechts außerhalb des Feldes herrührt.

Mit
$$M_{ba} = K\cdot M_{ab} \tag{5}$$
findet man das Moment M_x in einem beliebigen Punkte des Balkens mit dem Abstand x von a:

$$M_x = Py + M_{ab}\frac{l-x}{l} + KM_{ab}\frac{x}{l} + M_{x,o} \tag{6}$$

[3]) Siehe Ostenfelds obenerwähntes Buch.

$M_{x,o}$ ist das statisch bestimmte Moment, wenn die Belastungsfläche auf den einfach unterstützten Balken $a\,b$ wirkt.

Die Differentialgleichung der Biegelinie ist:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -Py - M_{ab}\frac{l-x+Kx}{l} - M_{x,o} \tag{7}$$

Durch Integration findet man:

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1\cos ax + C_2\sin ax - \frac{M_{ab}}{P}\,\frac{l-x+Kx}{l} - \frac{M_{x,o}}{P} \\ &+ \frac{d^2M_{x,o}}{dx^2}\cdot\frac{1}{Pa^2} - \frac{d^4M_{x,o}}{dx^4}\cdot\frac{1}{Pa^4}\cdots\cdots {}^{4)} \\ &\text{Hier kann man einsetzen:} \\ &\frac{d^2M_{x,o}}{dx^2} = -p_x;\quad \frac{d^4M_{x,o}}{dx^4} = -\frac{d^2p_x}{dx^2}\cdots\cdots, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

wo p_x die Ordinate der Belastungsfläche ist und $a = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$.

Die Lösung der Differentialgleichung enthält eine Reihe von Differentialquotienten von p_x. Kann man p_x in einer endlichen Potenzenreihe ausdrücken,

---

[4]) Diese Integralform kann ganz allgemein wie folgt angegeben werden:
Die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y - f(x)$$

hat das Integral:

$$y = C_1\cos ax + C_2\sin ax - \frac{f(x)}{a^2} + \frac{f''(x)}{a^4} - \frac{f^{IV}(x)}{a^6}\cdots\cdots \tag{8a}$$

Wenn $f(x)$ eine Funktion ist derart, daß

$$f''(x) = -b^2f(x);\quad f^{IV}(x) = -b^2f''(x)\cdots\cdots$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} y &= C_1\cos ax + C_2\sin ax - \frac{f(x)}{a^2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4} + \cdots\cdots\right) \\ &= C_1\cos ax + C_2\sin ax - \frac{f(x)}{a^2-b^2} \end{aligned} \tag{8b}$$

Beispiel: $f(x) = k\sin bx$

$$y = C_1\cos ax + C_2\sin ax - \frac{k\sin bx}{a^2-b^2}.$$

Wenn $f(x)$ eine Funktion ist derart, daß

$$f''(x) = b^2f(x);\quad f^{IV}(x) = +b^2f''(x)\cdots\cdots$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} y &= C_1\cos ax + C_2\sin ax - \frac{f(x)}{a^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4} + \cdots\cdots\right) \\ &= C_1\cos ax + C_2\sin ax - \frac{f(x)}{a^2+b^2} \end{aligned} \tag{8c}$$

Beispiel: $f(x) = k\,e^{bx}$

$$y = C_1\cos ax + C_2\sin ax - \frac{k\,e^{bx}}{a^2+b^2}.$$

Die zwei Integrale (8 b) und (8 c) gelten gleichgültig, ob

$$\frac{b}{a} > 1 \quad\text{oder}\quad \frac{b}{a} < 1.$$

Im allgemeinen kann man den Ausdruck (8 a) nur gebrauchen, wenn die Reihe konvergent ist.

so wird die Anzahl der Differentialquotienten ebenfalls endlich. Um fertige Formeln ableiten zu können, wollen wir voraussetzen, daß p_x eine endliche Potenzenreihe ist, wo x höchstens in der 3. Potenz vorkommt; dabei wird dann der Ausdruck für y nicht mehr Glieder als die aufgeschriebenen enthalten. Gleicherweise wollen wir voraussetzen, daß p_x eine kontinuierliche Funktion ist, da man sonst keine durchgehende Integration durchführen kann.

Wenn diese Voraussetzungen nicht zutreffen, muß man eine besondere Berechnung auf Grund der allgemeinen Gleichung (8) durchführen.

Unter den gemachten Voraussetzungen hat man:

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 \cos ax + C_2 \sin ax - \frac{M_{ab}}{P}\,\frac{l-x+Kx}{l} - \frac{M_{x,o}}{P} - \frac{p_x}{Pa^2} + \frac{d^2 p_x}{dx^2}\cdot\frac{1}{Pa^4} \\ \frac{dy}{dx} &= -a\,C_1 \sin ax + a\,C_2 \cos ax - \frac{M_{ab}}{P}\cdot\frac{K-1}{l} + \frac{Q_{x,o}}{P} - \frac{d\,p_x}{dx}\cdot\frac{1}{Pa^2} + \frac{d^3 p_x}{dx^3}\cdot\frac{1}{Pa^4} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Die Bedingungen $x = 0$, $y = 0$ und $x = l$, $y = 0$ geben:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{M_{ab}}{P} + \frac{p_A}{Pa^2} - p''_A\,\frac{1}{Pa^4} \\ C_2 &= \frac{M_{ab}}{P}\cdot\frac{K-\cos al}{\sin al} + \frac{p_B - p_A \cos al}{Pa^2 \sin al} + \frac{p''_A \cos al - p''_B}{Pa^4 \sin al} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

wo:
$$p''_A = \left(\frac{d^2 p_x}{dx^2}\right)_A; \quad p''_B = \left(\frac{d^2 p_x}{dx^2}\right)_B$$

Die Bedingung $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = \zeta_a$ gibt

$$\left.\begin{aligned} \mu_{ab}\zeta'_a = M_o \zeta'_{oa} - M_{ab}\mu_{ab}\tau'_{ab} &= \frac{M_{ab}}{al}\cdot\frac{K-\cos al}{\sin al} - \frac{M_{ab}}{(al)^2}(K-1) \\ &+ \frac{p_B l^2 - p_A l^2 \cos al}{(al)^3 \sin al} - \frac{R_A l}{(al)^2} + \frac{p''_A l^4 \cos al - p''_B l^4}{(al)^5 \sin al} - \frac{p'_A l^3}{(al)^4} + \frac{p'''_A l^5}{(al)^6} \end{aligned}\right\} \quad (10a)$$

Hieraus findet man:

$$M_{ab} = \frac{c_a}{f_{ab} + K}\cdot\frac{(al)^2 \sin al}{al - \sin al}, \quad (11a)$$

wo c_a und f_{ab} unter den Formeln (11) angegeben sind.

Die Bedingung $x = l$, $\frac{dy}{dx} = \zeta_b$ gibt:

$$\left.\begin{aligned} \mu_{ab}\zeta'_b = -M_o \zeta'_{ob} + M_{ab} K \mu_{ab}\tau'_{ba} &= -M_{ab}\frac{\sin al}{al} + M_{ab}\frac{K-\cos al}{al \sin al}\cdot\cos al \\ &- M_{ab}\frac{K-1}{(al)^2} + \frac{R_B l}{(al)^2} + \frac{p_B l^2 \cos al - p_A l^2}{(al)^2 \sin al} + \frac{p''_B l^4 \cos al - p''_A l^4}{(al)^5 \sin al} \\ &- \frac{p'_B l^3}{(al)^4} + \frac{p'''_B l^5}{(al)^6} \end{aligned}\right\} \quad (10b)$$

Hieraus findet man:

$$M_{ab} = \frac{c_b}{K f_{ba} + 1}\cdot\frac{(al)^2 \sin al}{al - \sin al} \quad (11b)$$

Man setzt die zwei Ausdrücke für M_{ab}, (11 a) und (11 b) einander gleich und erhält:

$$\frac{c_a}{f_{ab}+K} = \frac{c_b}{K f_{ba}+1} \tag{10c}$$

$$K = \frac{c_a - c_b f_{ab}}{c_b - c_a f_{ba}} \tag{11c}$$

Wir haben nun folgende Ausdrücke zur Berechnung der Momente:

$$\left.\begin{aligned}
M_{ab} &= \frac{c_a f_{ba} - c_b}{f_{ab} f_{ba} - 1} \cdot \frac{(al)^2 \sin al}{al - \sin al} \\
M_{ba} &= \frac{c_b f_{ab} - c_a}{f_{ab} f_{ba} - 1} \cdot \frac{(al)^2 \sin al}{al - \sin al} = K \cdot M_{ab} \\
K &= \frac{c_a - c_b f_{ab}}{c_b - c_a f_b}
\end{aligned}\right|$$

$$f_{ab} = \frac{\mu_{ab}\tau'_{ab}(al)^2 \sin al - al\cos al + \sin al}{al - \sin al}; \quad f_{ba} = \frac{\mu_{ab}\tau'_{ba}(al)^2 \sin al - al\cos al + \sin al}{al - \sin al}$$

$$\left.\begin{aligned}
c_a &= M_o \zeta'_{oa} + \frac{R_A l}{(al)^2} + \frac{p_A l^2 \cos al - p_B l^2}{(al)^3 \sin al} - \frac{p''_A l^4 \cos al - p''_B l^4}{(al)^5 \sin al} + \frac{p'_A l^3}{(al)^4} - \frac{p'''_A l^5}{(al)^6} \\
c_b &= M_o \zeta'_{ob} + \frac{R_B l}{(al)^2} + \frac{p_B l^2 \cos al - p_A l^2}{(al)^3 \sin al} - \frac{p''_B l^4 \cos al - p''_A l^4}{(al)^5 \sin al} - \frac{p'_B l^3}{(al)^4} + \frac{p'''_B l^5}{(al)^6} \\
\zeta'_{oa} &= \frac{1}{6}(2+c) + \mu_{ab}\tau'_{ab} + \frac{\mu_{ab}\alpha'_{oa}}{M_o}; \quad \zeta'_{ob} = \frac{1}{6}(2c+1) + c\,\mu_{ab}\tau'_{ba} + \frac{\mu_{ab}\alpha'_{ob}}{M_o} \\
al &= \pi\sqrt{\frac{P}{P_E}} \\
M_x &= M_{ab}\frac{\sin a(l-x)}{\sin al} + M_{ba}\frac{\sin ax}{\sin al} \\
&\quad + \frac{1}{(al)^2}\left(p_A l^2 \frac{\sin a(l-x)}{\sin al} + p_B l^2 \frac{\sin ax}{\sin al} - p_x l^2\right) \\
&\quad - \frac{1}{(al)^4}\left(p''_A l^4 \frac{\sin a(l-x)}{\sin al} + p''_B l^4 \frac{\sin ax}{\sin al} - \frac{d^2 p_x}{dx^2} \cdot l^4\right)
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Man ersieht aus der Formel für M_x, daß alle Glieder mit Ausnahme von zwei $\sin a\,l$ im Nenner und $\sin a\,x$ oder $\sin a\,(l-x)$ im Zähler enthalten. Ist $a\,l = \pi$, so ist $\sin a\,l = 0$ und $\sin a\,x = \sin a\,(l-x)$. Alle diese Glieder kann man also ordnen, sodaß man die Funktion $\sin a\,x$ erhält, die mit einem Faktor multipliziert wird, dessen Nenner null ist und dessen Zähler ebenfalls null sein muß, damit der Faktor endlich bleibt. Man erhält dann:

$$M_{ab} + M_{ba} = -\frac{(p_A + p_B)\,l^2}{\pi^2} + \frac{(p'_A + p''_B)\,l^4}{\pi^4} \tag{12}$$

Für volle Symmetrie, sowohl in Belastung als auch bezüglich Einspannungen, erhält man:

$$M_{ab} = M_{ba} = -\frac{p_A l^2}{\pi^2} + \frac{p''_A l^4}{\pi^4} \tag{12a}$$

M_{ab} und M_{ba} sind also in diesem Falle unabhängig von M_o und $\mu\tau'$.

Zur Benützung bei der Ausrechnung sind in der folgenden Tabelle die Werte f_{ab} oder f_{ba} für verschiedene Werte von $\mu\tau'$ und $\sqrt{\frac{P}{P_E}}$ angegeben, ebenso die Werte für die Funktion $\frac{(a\,l)^2 \sin a\,l}{a\,l - \sin a\,l}$.

$\frac{al}{\pi} = \sqrt{\frac{P}{P_E}}$	$\frac{(al)^2 \sin al}{al - \sin al}$	f					
		$\tau' = 0$	0,25	0,50	1,00	3,00	5,00
0,	6,000	2,000	3,500	5,000	8,000	20,00	32,00
0,125	5,910	1,985	3,483	4,940	7,900	19,72	31,54
0,250	5,580	1,940	3,335	4,730	7,520	18,68	29,84
0,375	5,040	1,860	3,120	4,380	6,900	16,98	27,06
0,500	4,330	1,750	2,872	3,920	6,080	14,74	23,40
0,625	3,430	1,631	2,488	3,350	5,060	11,92	18,78
0,750	2,385	1,444	2,040	2,637	3,830	8,60	13,37
0,875	1,225	1,235	1,541	1,847	2,460	4,91	7,36
1,000	0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,00	1,00
1,10	— 0,978	0,793	0,549	0,304	— 0,185	— 0,579	
1,20	— 1,910	0,564	0,086	— 0,391			
1,30	— 2,770	0,328	— 0,365	— 1,057			
1,40	— 3,450	0,0776	— 0,785				
1,412	— 3,520	0	— 0,880				
1,50	— 3,890	— 0,175	— 1,148				
1,60	— 4,020	— 0,418					
1,70	— 3,750	— 0,641					
1,80	— 3,020	— 0,826					
1,90	— 1,760	— 0,952					
2,00	0	— 1,000					

Da man für f_{ab} schreiben kann:

$$f_{ab} = f_i + \mu_{ab}\,\tau'_{ab}\,\frac{(al)^2 \sin al}{al - \sin al} \tag{12b}$$

wo f_i dem Werte $\mu\tau' = 0$ entspricht, d. h. den in der 3. Spalte der Tabelle angegebenen Werten von f, kann man sehr leicht durch Interpolation den richtigen Wert von f_{ab} finden unter Benützung der drei ersten Spalten der Tabelle.

II. Die betrachtete elastisch eingespannte Säule ist das einzige belastete Feld; Belastung durch Querkräfte.

In diesem Falle ist:

$$\zeta'_{oa} = \zeta'_{ob} = 0. \tag{13}$$

Setzt man dies in den Formeln (11) ein, so findet man M_{ab} und M_{ba}. Besonders sei angegeben:

Einflußlinie für M_{ab}:

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} = \frac{l}{1 - f_{ab} f_{ba}} \cdot \frac{\sin al}{(al - \sin al)^2} \Big[& \mu_{ab}\,\tau'_{ab}\,(al)^2 \left(\sin a\,(l-x) - \frac{l-x}{l} \sin al\right) \\ & + al\left(\frac{x}{l} + \frac{l-x}{l} \cos al - \cos a\,(l-x)\right) + \sin ax + \sin a\,(l-x) - \sin al \Big] \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Für gleichmäßig verteilte Totalbelastung erhält man:

$$M_{ab} = \frac{p\,l^2(1 - f_{ba})}{1 - f_{ab}\,f_{ba}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sin al - \frac{1 - \cos al}{al}}{al - \sin al} \tag{15}$$

III. Elastisch eingespannte Säulen, die nur durch Einspann-Momente belastet sind.

In diesem Falle erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
c_a &= M_o\,\zeta'_{oa} = M_o\left(\frac{1}{6}(2 + c) + \mu_{ab}\,\tau'_{ab}\right)\\
c_b &= M_o\,\zeta'_{ob} = M_o\left(\frac{1}{6}(2c + 1) + c\,\mu_{ab}\,\tau'_{ba}\right)\\
M_{ab} &= M_o\,\frac{\zeta'_{oa}\,f_{ba} - \zeta'_{ob}}{f_{ab}\,f_{ba} - 1} \cdot \frac{(al)^2 \sin al}{al - \sin al}\\
M_{ba} &= M_o\,\frac{\zeta'_{ob}\,f_{ab} - \zeta'_{oa}}{f_{ab}\,f_{ba} - 1} \cdot \frac{(al)^2 \sin al}{al - \sin al} = K \cdot M_{ab}\\
K &= \frac{\zeta'_{oa} - \zeta'_{ob}\,f_{ab}}{\zeta'_{ob} - \zeta'_{oa}\,f_{ba}}\\
M_x &= M_{ab}\,\frac{\sin a\,(l - x)}{\sin al} + M_{ba}\,\frac{\sin ax}{\sin al}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die Formel für M_x zeigt, daß M_x eine periodische Funktion ist; die halbe Periodenlänge findet man, indem man

$$a x_1 = \pi \quad \text{setzt;} \quad x_1 = \frac{\pi}{a}.$$

Wenn $x_1 = l$, d. h. $a\,l = \pi$ ist, findet man $M_{ab} = -M_{ba}$; da $a\,l = \pi\sqrt{\frac{P}{P_E}}$ ist, hat man also für $\sqrt{\frac{P}{P_E}} = 1$, ohne Berücksichtigung des Wertes von τ'_{ab}, τ'_{ba} und den bereits vorhandenen Momenten, $M_{ab} = -M_{ba}$.

Durch Differentiation des Ausdruckes für M_x findet man:

$$M_{max} = M_{ab}\,\frac{1}{\sin al} \cdot \sqrt{1 + K^2 - 2K\cos al}. \tag{17}$$

Die Stelle von M_{max} ist bestimmt durch den Abstand von a durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} ax = \frac{K - \cos al}{\sin al}. \tag{17a}$$

Die Formel für M_{max} soll angewendet werden bei:

$$\left.\begin{array}{l}
M_{ba} \cdot \sec al > M_{ab} > M_{ba}\cos al\\
\text{Für } M_{ab} < M_{ba}\cos al \text{ ist } M_{max} = M_{ba} \text{ und befindet sich in } b\\
\text{„ } M_{ab} > M_{ba}\sec al \text{ „ } M_{max} = M_{ab} \text{ „ „ „ „ } a
\end{array}\right\} \tag{17b}$$

Besondere Fälle.

Mit den angegebenen Formeln kann man den allgemeinen Fall behandeln. Wir wollen besonders den Belastungsfall betrachten, wo eine Belastung in einem Feld links vom Punkte a Momente in der Säule erzeugt, während die Konstruktion rechts von a unbelastet ist.

In diesem Falle hat man:

$$\left.\begin{aligned} \zeta'_{ob} &= \frac{1}{6}(2c+1) + c\,\mu_{ab}\,\tau'_{ba} = 0 \\ c &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+3\,\mu_{ab}\,\tau'_{ba}} \\ \zeta'_{oa} &= \frac{1}{4}\,\frac{1+4\,\mu_{ab}\,\tau'_{ba}}{1+3\,\mu_{ab}\,\tau'_{ba}} + \mu_{ab}\,\tau'_{ab} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= M_o\,\frac{\zeta'_{oa}\,f_{ba}}{f_{ab}\,f_{ba}-1}\cdot\frac{(al)^2\sin al}{al-\sin al} \\ K &= -\frac{1}{f_{ba}} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Für $a\,l = 0$ wird der letzte Ausdruck zu:

$$K = -\frac{1}{2+6\,\mu_{ab}\,\tau'_{ba}} = c$$

1. Volle Einspannung in b.

Es ist:

$$\left.\begin{aligned} \tau'_{ba} &= 0 \\ \zeta'_{oa} &= \tfrac{1}{4} + \mu_{ab}\,\tau'_{ab}\,; \quad c = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \tag{18a}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= M_o\,\frac{(\frac{1}{4}+\mu_{ab}\,\tau'_{ab})\,f_i}{f_{ab}\,f_i-1}\cdot\frac{(al)^2\sin al}{al-\sin al} \\ K &= -\frac{1}{f_i}\,; \quad f_i = \frac{-al\cos al+\sin al}{al-\sin al} \end{aligned}\right\} \tag{19a}$$

f_i ist der Wert, den f_{ab} oder f_{ba} bei voller Einspannung annimmt.

M_{max} findet man im Punkt a für $a\,l \leqq \frac{1}{2}\pi\sqrt{2}$.

Für $a\,l \geqq \frac{1}{2}\pi\sqrt{2}$ findet man M_{max} aus der Formel (17).

Fig. 2 zeigt den Verlauf der Momente M_{ab}, M_{ba} und M_{max} bei verschiedenen Werten von $a\,l$. Als Abszisse ist $\sqrt{\frac{P}{P_E}} = \frac{al}{\pi}$ aufgetragen ($P_E = \frac{\pi^2\cdot E\,J}{l^2}$, d. h. der Eulerwert für eine an beiden Enden einfach unterstützte, mittig belastete Säule, die unterhalb der Proportionalitätsgrenze beansprucht ist); als Ordinaten sind die Werte der Momente aufgetragen, wobei M_o gleich 1,0 gesetzt ist; es ist eine Schar von Kurven für verschiedene Werte von $\mu_{ab}\,\tau'_{ab}$ gezeichnet.

Läßt man für eine Säule die Kraft P von Null an wachsen, d. h. $\sqrt{\frac{P}{P_E}}$ wächst ebenso von Null an, so sieht man, daß M_{ab} abnimmt und M_{ba} wächst; das letztere leuchtet ohne weiteres ein. Das Abnehmen von M_{ab} entsteht als

Folge der Einspannung oben, weil die Säule bei wachsendem P zum stärkeren Ausbiegen neigt und dabei die Einspannung oben entlastet. Wenn $\sqrt{\frac{P}{P_E}} = \sqrt{2}$ ist, wird M_{ab} sogar Null und wird dann für noch größere Werte von P negativ. Dieser Übergang von positiven Werten über Null zu negativen Werten muß eben auch eintreten, in dem Maße wie P wächst.

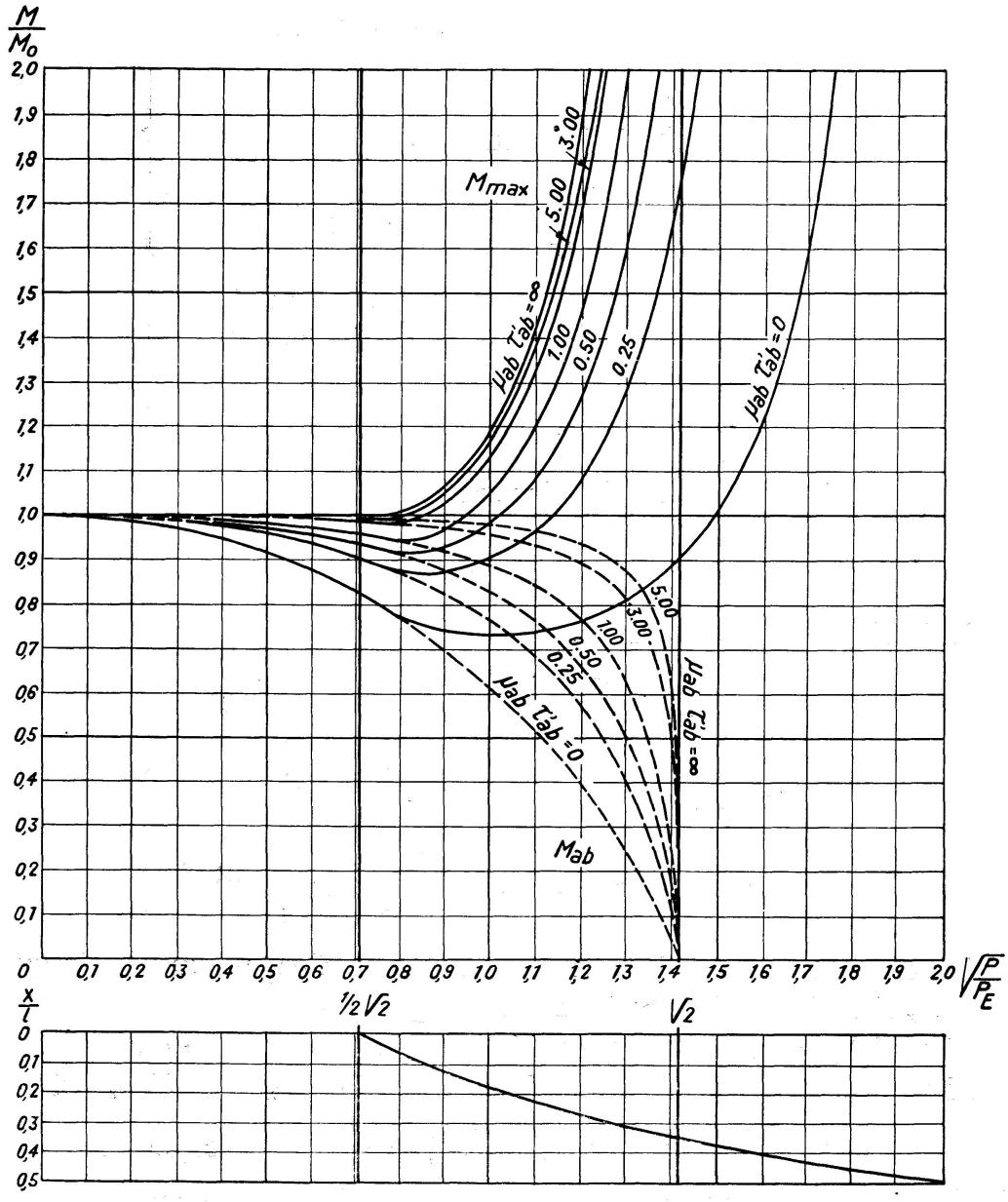

Fig. 2.

M_{max} se trouve à une distance x du point A.
M_{max} befindet sich im Abstand x vom Punkt A.
M_{max} occurs at a distance x from point A.

M_{max} befindet sich im Punkt a und ist gleich M_{ab}, solange $\sqrt{\frac{P}{P_E}} \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Wächst $\sqrt{\frac{P}{P_E}}$ über diesen Wert hinaus, so entfernt sich die Stelle von M_{max}

vom Punkt a. Der Wert $\frac{x}{l}$ für den Maximumspunkt ist durch eine Kurve unten auf der Zeichnung angegeben.

Für $\sqrt{\frac{P}{P_E}} = 1$ (d. h. $a\,l = \pi$) ist, wie schon gesagt, $M_{ab} = -M_{ba}$. Die entsprechende Momentenkurve zeigt Fig. 3.

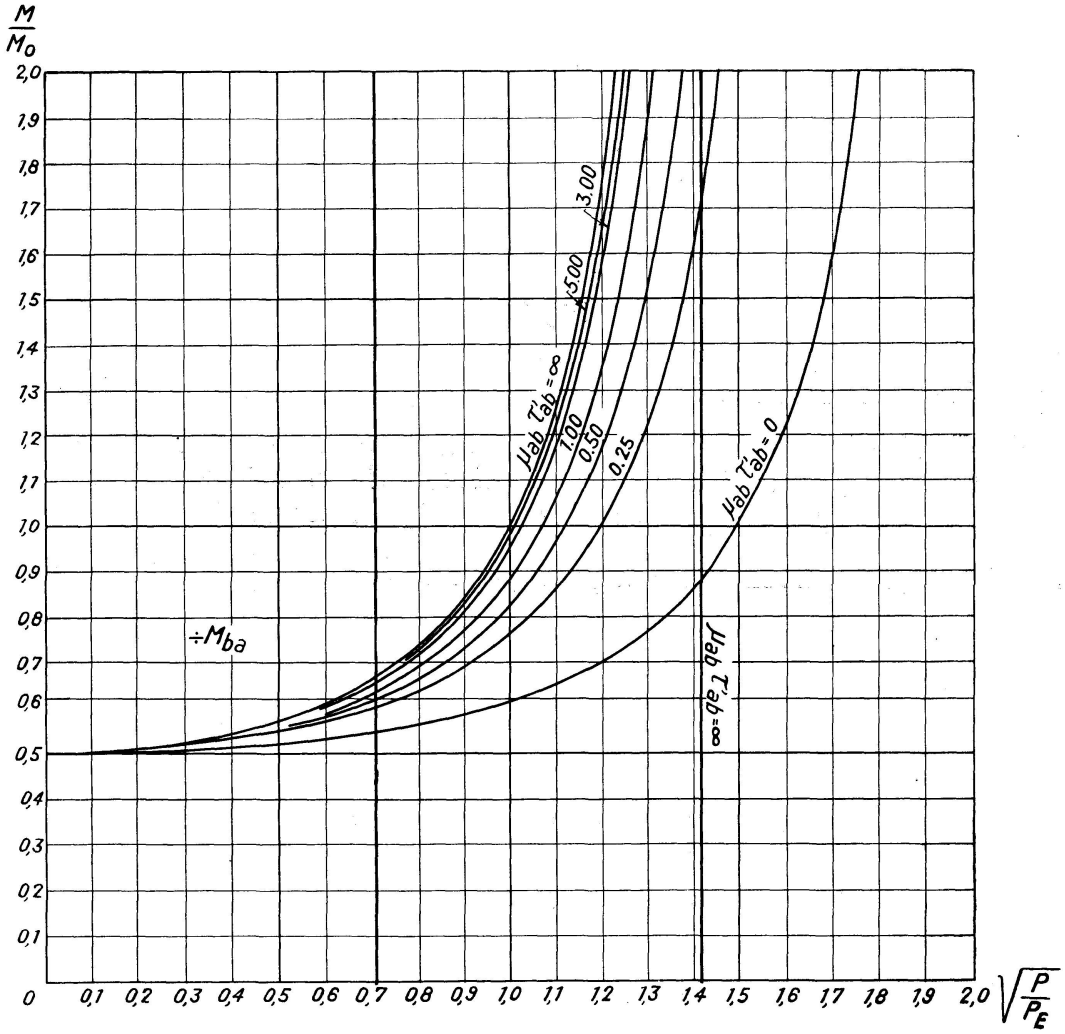

Fig. 2a.

Man beachte, daß die Linie $a_1\,b_1$ Tangente an die Momentenkurve im Punkt b_1 ist. Dies erklärt sich daraus, daß das Moment in einem beliebigen Punkt in zwei Teile zerfällt:

1. M_1, das unmittelbar von den Momenten M_{ab} und M_{ba} in den Endpunkten der Säule erzeugt wird, und
2. M_2, das das Moment $P \cdot y$ ist. Da die Säule in b eingespannt ist, muß dieser letztere Teil der Momentenkurve den erstgenannten tangieren.

Für $\sqrt{\frac{P}{P_E}} = \sqrt{2}$ ist, wie schon gesagt, $M_{ab} = 0$ für jeden Wert von $\mu_{ab}\,\tau'_{ab}$. Wie wir bereits gesehen haben, nimmt M_{ab} ab, wenn P wächst. Lassen wir nun P wachsen, bis $M_{ab} = 0$ ist, so muß P für eine an einem Ende ein-

gespannte, am anderen Ende frei unterstützte Säule gerade den Eulerwert erreicht haben, d. h. $P = 2 P_E$. Bei kleinerem P würde sich die Säule auszurichten suchen, in a würde dann ein Moment entstehen; bei größerem P würde die Säule die Tendenz haben, auszubiegen, wobei in a ein Moment entgegengesetzt dem erstgenannten entstehen würde. M_{ab} nimmt deswegen den Wert Null an, wenn $\sqrt{\frac{P}{P_E}} = \sqrt{2}$ ist.

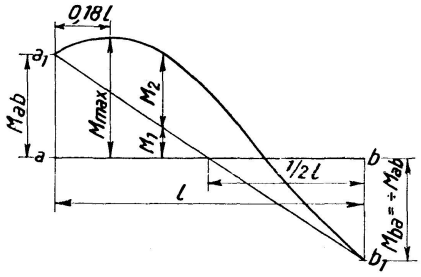

Fig. 3.

Bei einem gewissen Wert von $\sqrt{\frac{P}{P_E}}$ abhängig von $\mu_{ab}\,\tau'_{ab}$, findet man, daß M_{ab}, M_{max} und M_{ba} alle ∞ werden. Der entsprechende Wert von P ist die kritische Belastung der Säule, ohne Rücksicht auf die Größe der bereits vorhandenen Momente, daher auch für eine mittig belastete Säule gültig. Alle Kurven in Fig. 2 haben für entsprechende Abszissen $\left(\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)_{krit.}$ lotrechte

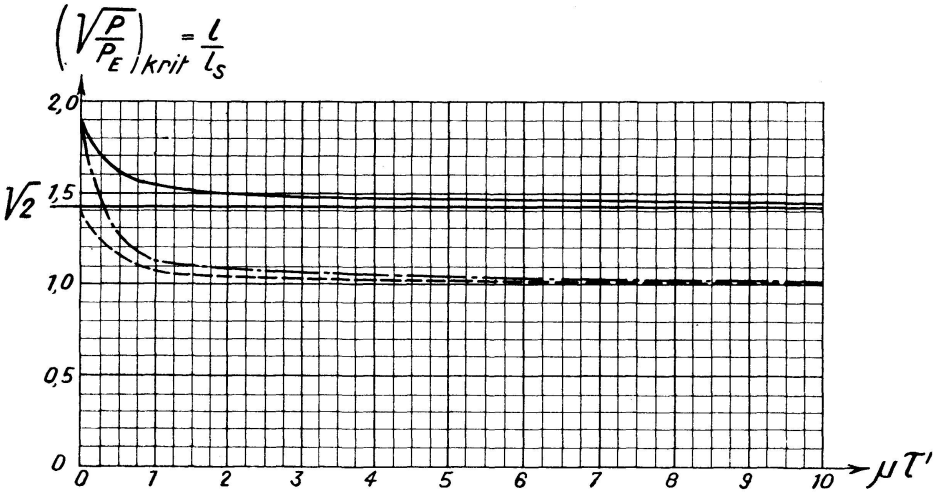

Fig. 4.

Asymptoten. Für $\tau'_{ab} = 0$ (volle Einspannung) ist die Asymptoten-Abszisse $\sqrt{\frac{P}{P_E}} = 2$, für $\tau'_{ab} = \infty$ (einfache Unterstützung) $\sqrt{\frac{P}{P_E}} = \sqrt{2}$.

In Fig. 4 gibt die voll ausgezogene Kurve die Abhängigkeit zwischen $\mu_{ab}\,\tau'_{ab}$ (Abszisse) und dem kritischen Wert von $\sqrt{\frac{P}{P_E}}$ (Ordinate) an. Wie man später im IV. Abschnitt sehen wird, ist die Größe $\left(\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)_{krit.}$ gleich dem

Verhältnis zwischen der wirklichen und der freien Säulenlänge. Wir setzen deshalb $\left(\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)_{krit.} = \frac{l}{l_s}$.

2. Einfache Unterstützung in b.

Man hat hier:

$$\left.\begin{aligned} \tau'_{ba} &= \infty \\ \zeta'_{oa} &= \tfrac{1}{3} + \mu_{ab}\,\tau'_{ab}; \qquad c = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18b}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= M_o\,\frac{\frac{1}{3} + \mu_{ab}\,\tau'_{ab}}{f_{ab}} \cdot \frac{(al)^2 \sin al}{al - \sin al} \\ M_{ba} &= 0; \quad M_x = M_{ab}\,\frac{\sin a\,(l-x)}{\sin al}; \quad M_{max} = \frac{M_{ab}}{\sin al} \end{aligned}\right\} \tag{19b}$$

Aus der letzten Formel erkennt man, daß für $a\,l \leqq \frac{\pi}{2}$ $M_{max} = M_{ab}$ ist und sich im Punkt a befindet. Für $a\,l > \frac{\pi}{2}$ befindet sich M_{max} in dem durch die Gleichung bestimmten Punkt:

$$a\,(l-x) = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{l-x}{l} = \frac{\frac{\pi}{2}}{al} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{P}{P_E}}}.$$

Die M_{ab} und M_{max} entsprechenden Kurven zeigt Fig. 5, die analog der Fig. 2 gezeichnet sind.

Wie in Fig. 2 nimmt M_{ab} mit wachsendem $\sqrt{\frac{P}{P_E}}$ ab; für $\sqrt{\frac{P}{P_E}} = 1$ ist M_{ab} Null, was auch ganz einleuchtend ist. Die Abhängigkeit zwischen $\mu_{ab}\,\tau'_{ab}$ und $\left(\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)_{krit.} = \frac{l}{l_s}$ zeigt Fig. 4 als eine punktierte Kurve.

Außerdem ist die Abhängigkeit zwischen $\mu_{ab}\,\tau'$ und $\left(\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)_{krit.} = \frac{l}{l_s}$ für gleichgroße elastische Einspannung in a und b als eine strichpunktierte Linie dargestellt.

3. Einfache Unterstützung in a.

Will man die in diesem Artikel gewonnenen Resultate in den gewöhnlichen Rahmenberechnungssystemen verwenden (dies soll in einem späteren Artikel geschehen), so benötigt man das Moment, das der Winkeldrehung $\zeta'_a = 1$ entspricht. Dieser Wert von M_{ab} wird ϱ_{ab} genannt.

Man findet ϱ_{ab} unter Benützung von (10a):

$$\left.\begin{aligned} \mu_{ab}\,\zeta'_a &= \frac{M_{ab}}{al} \cdot \frac{K - \cos al}{\sin al} - \frac{M_{ab}}{(al)^2}(K-1) \\ &= M_{ab}\,(K + f_i)\,\frac{al - \sin al}{(al)^2 \sin al} \end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

f_i ist der Wert von f_{ba} bei voller Einspannung.

Setzt man hierin

$$\zeta'_a = 1, \quad M_{ab} = \varrho_{ab} \text{ und } K = -\frac{1}{f_{ba}} \text{ (siehe (19))},$$

so erhält man:

$$\varrho_{ab} = \mu_{ab} \frac{f_{ba}}{f_{ba} f_i - 1} \cdot \frac{(al)^2 \sin al}{al - \sin al} \tag{20}$$

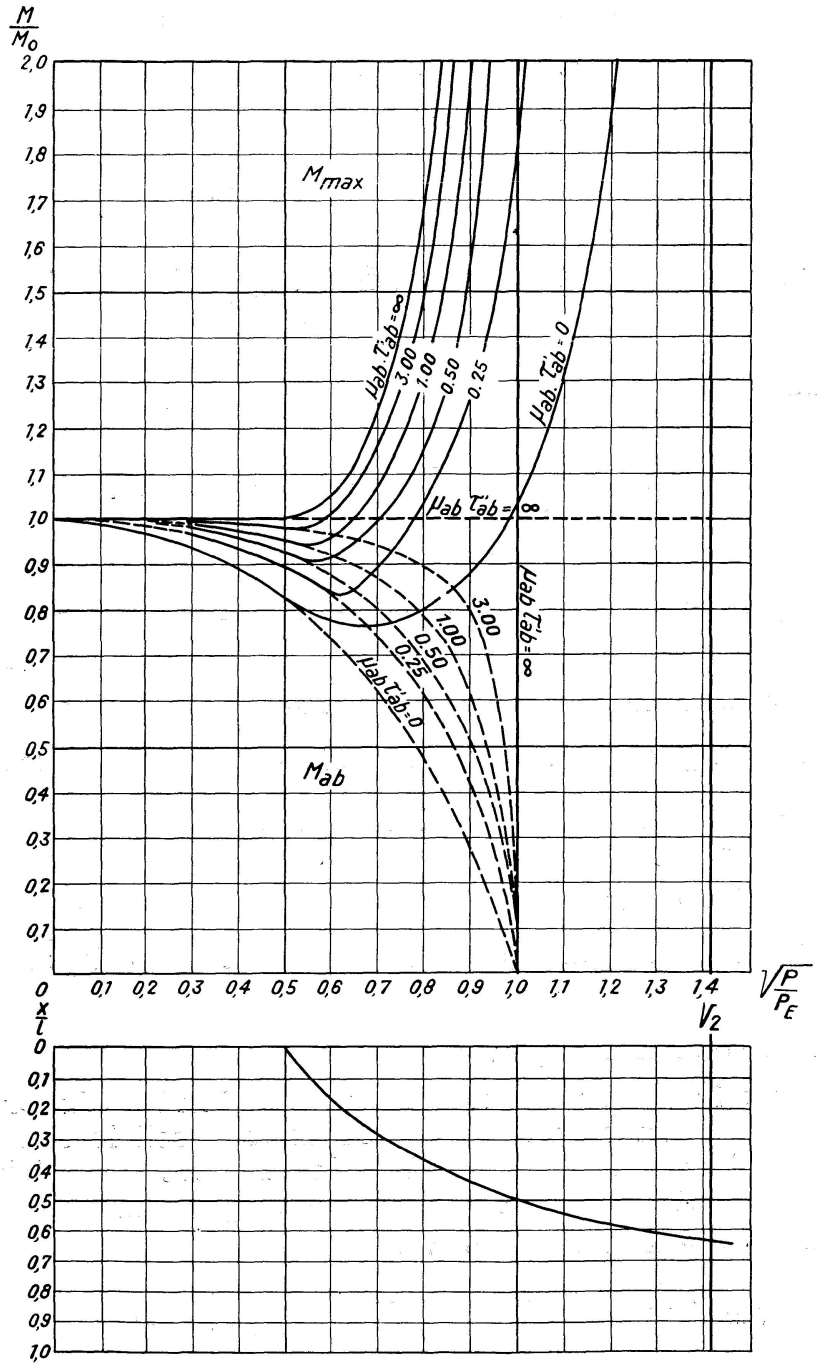

Fig. 5.
M_{max} se trouve à une distance x du point A.
M_{max} befindet sich im Abstand x vom Punkt A.
M_{max} occurs at a distance x from point A.

IV. Bestimmung von P_E.

Um die Kurven in den Figuren 2, 4, 5 und 6 und die angegebenen Formeln anwenden zu können, muß man den Ausdruck $P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^3}$ etwas näher betrachten; er ist bekanntlich die Eulerformel, und es bestehen demnach keine Schwierigkeiten, wenn die Spannungen in der Säule überall unterhalb der Proportionalitätsgrenze liegen. Überschreiten dagegen die Spannungen diese Grenze, so variiert der Elastizitätskoeffizient mit der Spannung, die selbst von Punkt zu Punkt sowohl über dem Querschnitt wie auch in Längsrichtung der Säule variiert. In diesem Falle läßt sich daher eine exakte Berechnung nicht durchführen.

Geht man indessen auf den Gedankengang ein, der der Engesser-Kármán-Formel zu Grunde liegt und von P. M. Frandsen[5]) weiter entwickelt ist, so kann man mit guter Annäherung mit dem Wert von E rechnen, der der mittleren Spannung der Säule, d. h. $\sigma = \frac{P}{F}$ entspricht.

Ist also σ größer als die Proportionalitätsgrenze, so muß man den σ entsprechenden Wert von E bestimmen und ihn in die Eulerformel einsetzen. Die Bestimmung von E kann unmittelbar mit Hilfe der Arbeitskurve des Materiales erfolgen. Da man diese jedoch selten zur Hand hat, soll hier ein anderes Verfahren angegeben werden.

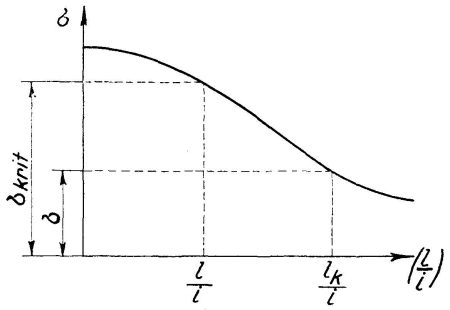

Fig. 6.

Für jedes Material gilt nach Engesser-Kármán und P. M. Frandsen, daß man den kritischen Säulendruck für eine mittig belastete, einfach unterstützte Säule aus der modifizierten Eulerformel finden kann:

$$\sigma_{krit.} = \frac{\pi^2 E_1 J}{l^2 F} \tag{21}$$

wo E_1 den $\sigma_{krit.}$ entsprechenden Wert des Elastizitätskoeffizienten bedeutet.

Den Wert von $\sigma_{krit.}$ für die verschiedenen Materialien findet man gewöhnlich mit Hilfe der sogenannten Säulenformeln, z. B.: Stahl:

$$\sigma_{krit.} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \qquad \text{für} \quad \sigma_{krit.} < \sigma_P$$

$$\sigma_{krit.} = \sigma_B - \gamma\left(\frac{l}{i}\right)^2 \qquad \text{für} \quad \sigma_{krit.} > \sigma_P$$

[5]) Zeitschrift des Technischen Vereins Kopenhagen, 1920, S. 139—151, und Erster Band der „Abhandlungen", Zürich 1932, herausgegeben von der „Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau", S. 195—203.

Spröde Materialien:

$$\sigma_{krit.} = \frac{\sigma_B}{1 + \alpha \left(\frac{l}{i}\right)^2} \quad \text{usw.}$$

Betrachtet man nun die verschiedenen Säulenkurven als „Eulerkurven mit variablem E", so kann man den einem gewissen Wert von $\sigma = \frac{P}{F}$ entsprechenden Wert von E_1 als Punkt der Säulenkurve mit der Ordinate σ finden. Wenn dieser Punkt die Abszisse $\frac{l_k}{i}$ hat, so findet man:

$$\sigma = \frac{\pi^2 E_1 i^2}{l_k^2}; \qquad E_1 = \frac{\sigma l_k^2}{\pi^2 i^2} \tag{22}$$

Hieraus erhält man:

$$\sqrt{\frac{P}{P_E}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_E}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\frac{\pi^2 E_1 i^2}{l^2}}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\frac{\pi^2 \sigma l_k^2 i^2}{\pi^2 i^2 l^2}}} = \frac{l}{l_k} \tag{23}$$

Der Wert von $\sqrt{\frac{P}{P_E}}$ kann also gleich dem Verhältnis zwischen der wirklichen Säulenlänge l und der Säulenlänge l_k gesetzt werden, für die σ die kritische Spannung ist, oder P der kritische Druck, wenn die Säule als einfach unterstützt gerechnet wird.

Hieraus sieht man auch, daß für $\left(\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)_{krit.} l_k$ gerade die sogenannte freie Säulenlänge l_s ist.

Selbstverständlich kann man gerade so gut das Zwischenglied σ_E einschieben, das man aus Formel (21) findet:

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E_1 J}{l^2 F} \tag{24}$$

wo $E_1 = \frac{\sigma l_k^2}{\pi^2 i^2}$ ist und l_k als Abszisse (multipliziert mit i) des Säulenkurvenpunktes mit der Ordinate σ gefunden wird.

Beispiel:

Man soll für einen Wert σ $\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_E}} = \frac{l}{l_k}$ bestimmen unter Benützung der Parabelformel bei dem betreffenden Material.

Aus der Parabelformel findet man:

$$\sigma = \sigma_B - \sigma_B \varkappa \left(\frac{l_k}{i}\right)^2; \qquad l_k = i \sqrt{\frac{\sigma_B - \sigma}{\sigma_B \varkappa}}$$

$$\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_E}} = \frac{l}{l_k} = \frac{l}{i} \sqrt{\frac{\sigma_B \varkappa}{\sigma_B - \sigma}} \tag{25}$$

Soll man für das Material die Rankineformel benützen, so findet man:

$$\sigma = \frac{\sigma_B}{1 + \alpha \left(\frac{l_k}{i}\right)^2}; \qquad l_k = i \sqrt{\frac{\sigma_B - \sigma}{\sigma \alpha}}$$

$$\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_E}} = \frac{l}{l_k} = \frac{l}{i} \sqrt{\frac{\sigma \alpha}{\sigma_B - \sigma}} \tag{25a}$$

Einen ganz allgemeinen Ausdruck, gültig für alle Materialien, kann man aus dem oben erwähnten Artikel von P. M. Frandsen ableiten; man findet:

$$\frac{l}{l_k} = \frac{l}{i} \sqrt{\frac{\sigma (\sigma_B - 2 \sigma_P) + \sigma_P^2}{(\sigma_B - \sigma) \pi^2 E_p}}, \tag{26}$$

wo σ_B die Bruchgrenze (Fließgrenze bei Stahl und anderen weichen Materialien), σ_P die Proportionalitätsgrenze und E_p die Größe des Elastizitätskoeffizienten bedeuten.

Für Stahl kann man setzen:

$$\sigma_P = \tfrac{1}{2} \sigma_B \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\sigma_B}{4 \pi^2 E_p}.$$

Für spröde Materialien:

$$\sigma_P = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\sigma_B}{\pi^2 E_p}.$$

Setzt man diese Werte in (26) ein, so erhält man (25) bezw. (25a).

Zusammenfassung.

Viele von den in der Praxis vorkommenden Säulen sind in den Endpunkten elastisch eingespannt, z. B. alle die in einer Rahmenkonstruktion eingehenden Druckstäbe. Solche Säulen werden entweder als ein durch Biegung beanspruchter Balken behandelt oder als eine Säule, die man aber behandelt ohne die Biegung, die Einspannung und die Säulenwirkung in der richtigen Weise zu kombinieren und ohne die Einwirkung des Säulendruckes auf die Einspannungsmomente und dadurch auf die übrigen Rahmenmomente zu berücksichtigen.

Es werden zuerst ganz allgemein elastisch eingespannte Säulen behandelt, beansprucht durch Querkräfte und bereits vorhandene Momente an den Unterstützungen. „Bereits vorhandene Momente" sind die Momente, die gefunden werden, wenn man keine Rücksicht auf die Säulenwirkung nimmt. Die Elastizität der Einspannung ist durch die Winkeldrehung τ gegeben, die das Moment $M = 1$ an der Einspannung erzeugt.

Der Verfasser gibt fertige Formeln zur Bestimmung sowohl der Einspannungsmomente als auch des Momentes in einem willkürlichen Punkt der Säule.

Spezielle Formeln sind angegeben für eine Säule, die nicht von Querkräften beansprucht wird. Besonders einfache Formeln werden gefunden für:

a) Vollkommene Einspannung in dem einen Endpunkt,
b) Einfache Unterstützung in dem einen Endpunkt.

Hierüber sind graphische Tabellen ausgearbeitet.

Dann wird nachgewiesen, wie die Größe $\sqrt{\frac{P}{P_E}}$, die den Einfluß des Säulendruckes bestimmt, festgelegt werden kann. Es ergibt sich, daß $\sqrt{\frac{P}{P_E}} = \frac{l}{l_k}$ wenn l die totale Säulenlänge und l_k die Säulenlänge ist, für welche P der kritische Säulendruck ist, wenn man mit einer einfach unterstützten Säule rechnet.

Résumé.

Les colonnes et poteaux que l'on rencontre dans la pratique sont pour une grande partie fixés élastiquement aux extrémités; c'est le cas, par exemple, de tous les éléments travaillant à la compression dans les cadres rigides. Ces éléments sont traités comme poutres sollicitées à la flexion ou comme colonnes, mais sans que l'on combine à proprement parler les influences de la flexion, de la rigidité et de l'effet de colonne. L'influence de la pression exercée par la colonne elle-même, sur les moments aux extrémités et par l'intermédiaire de ces derniers, sur les moments auxquels est soumis l'ensemble du cadre, a été également négligée.

L'auteur aborde tout d'abord d'une manière tout à fait générale la question des colonnes élastiquement encastrées, soumises à des efforts tranchants et à des moments préliminaires aux appuis. Par moments préliminaires, il entend ceux que l'on détermine sans tenir compte en aucune façon de l'effet de colonne. L'élasticité de l'encastrement est exprimée par la rotation angulaire τ que provoque à l'encastrement un moment $M = 1$.

L'auteur donne des formules spécialement établies pour la détermination des moments d'encastrement et des moments en un point arbitrairement choisi sur la colonne.

Il indique également des formules spéciales pour une colonne non soumise à des efforts tranchants, ainsi que des formules particulièrement simples pour les cas suivants:

a) encastrement complet à une extrémité,
b) simple appui à une extrémité.

Des graphiques ont d'ailleurs été établis à ce sujet.

Enfin, l'auteur montre comment la quantité $\sqrt{\frac{P}{P_E}}$ qui joue un rôle déterminant dans la pression de la colonne, peut être elle-même déterminée. Il montre que $\sqrt{\frac{P}{P_E}} = \frac{l}{l_k}$, l représentant la longueur de la colonne et l_k la longueur de colonne pour laquelle P représente la pression critique lorsque l'on considère le cas d'une colonne avec appui simple.

Summary.

Many of the columns met with in practice are elastically fixed at the ends, as for instance all compression members forming part of a rigid frame. Such members are treated either as beams or as columns, but without properly combining the influence of the bending, rigidity and column effect. The influence of the column pressure on the end moments, and through them on the moments of the whole frame, has also been neglected.

In the paper, elastically fixed columns, acted on by lateral forces and by preliminary moments at the supports, are first treated quite generally. "Preliminary moments" are moments found when no consideration is paid to the column effect. The flexibility of the fixing is expressed by the rotation τ, caused by the moment $M = 1$ at the support.

The author gives general formulae for determining the end moments as well as the moments at an arbitrary point of the column.

Special formulae are given for a column which is not acted on by lateral forces, and especially simple formulae for:

a) Rigid fixing at one end,
b) Hinged at one end.

For these cases graphic tables have been worked out.

Finally it is shown how the quantity $\sqrt{\frac{P}{P_E}}$, which is decisive for the influence of the column pressure, may be determined. Thus it is shown that $\sqrt{\frac{P}{P_E}} = \frac{l}{l_k}$, where l is the total length of the column, and l_k is the length of the column for which P is the critical column pressure when calculating with a column hinged at both ends.