

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 3 (1935)

**Artikel:** Mémoire sur l'étude générales de surfaces gauches minces

**Autor:** Laffaille, B.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4154>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **MÉMOIRE SUR L'ÉTUDE GÉNÉRALES DE SURFACES GAUCHES MINCES**

**ALLGEMEINE UNTERSUCHUNG DER REGELSCHALEN**

**GENERAL INVESTIGATION CONCERNING RULE-SHELLS**

B. LAFFAILE, Paris (France).

Une surface mince peut être caractérisée par le fait que son épaisseur présente une dimension négligeable par rapport à ses deux autres dimensions. Nous nous proposons dans ce mémoire, d'étudier une théorie générale des surfaces minces gauches. Nous divisons cette étude en trois parties, intitulées : Idées, Chantiers, Théories, qui résument succinctement l'état actuel de ces questions auxquelles nous nous sommes intéressés depuis plusieurs années. L'ordre dans lequel nous exposons ces trois parties montre bien quelle part intuitive et d'imagination a présidé au début de nos recherches.

Il est normal que ce travail intellectuel ait été conduit de cette façon.

Nous sommes, en effet, constructeur d'abord et non pas mathématicien. Le rôle du constructeur est de rechercher sous quelles formes il est avantageux de réaliser les équilibres dans l'espace pour répondre à un problème d'utilisation déterminé. Il nous a semblé que les propriétés constructives des surfaces gauches permettaient de résoudre fort économiquement de nombreux cas particuliers de couverture.

Les travaux de chantiers auxquels nous faisons allusion et dont nous donnons quelques exemples bien typiques montrent combien il y a une inter-pénétration profonde entre la théorie pure et les méthodes de mise en oeuvre.

Tel système de coffrage se montrera tellement avantageux qu'on n'hésitera pas à s'éloigner des conditions mathématiques les plus logiques pour choisir une forme plus appropriée aux mises en oeuvre quitte à voir se poser un problème mathématique moins simple. Et inversement, si l'analyse minutieuse des conditions mathématiques d'équilibre local permet de résoudre un problème avec rigueur et simplicité on devra, dans d'autres cas, demander au chantier de s'adapter et de faire effort.

C'est encore le rôle du constructeur de trancher ces questions qui ne relèvent, à priori, pas plus du chantier que de la théorie.

Dans la dernière partie théorique et plus spécialement mathématique nous avons cherché à généraliser le plus possible. Nous croyons ainsi indiquer un instrument de recherches et de contrôle plus souple que si nous nous étions contenté d'analyser les problèmes particuliers posés par les surfaces conoïdes ou en paraboloïdes hyperboliques que nous avions tout d'abord étudiées au début de nos travaux.

Nous tenons à signaler quelques uns de nos collaborateurs qui nous ont apporté une aide efficace dans le cours des recherches et travaux dont il va être question. En particulier M. J. Crossay pour l'étude et la réalisation des dispositifs de coffrage. M. L. Issenmann dans les relevés des mesures directes

faites au moment des essais sur des voiles gauches. M. L. Beschkine depuis 1932 a été notre collaborateur dans la plupart des études que nous avons eu à entreprendre.

### Idées.

Une feuille de papier est une surface mince; si nous la prenons par un des bords rectilignes elle est très peu rigide, elle fléchit. Etant donné précisément sa très faible épaisseur, son module d'inertie à la flexion plane est très faible (fig. 1).

Si nous incurvons le bord rectiligne que nous avons en mains tout en maintenant droit le bord opposé nous réalisons une surface développable qui semble présenter une rigidité beaucoup plus grande (fig. 2). Nous avons entre les mains, et, encastrée en nos mains une surface mince incurvée capable

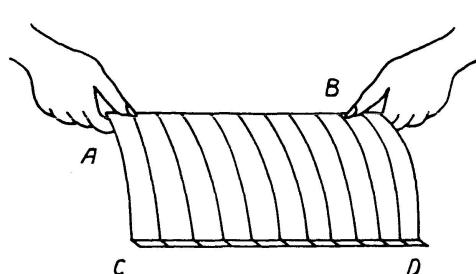


Fig. 1.

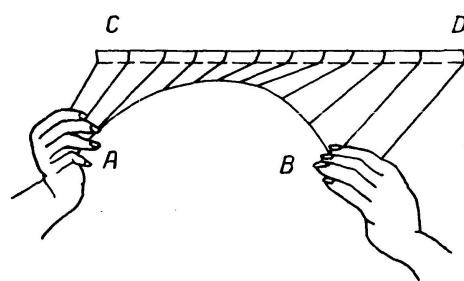


Fig. 2.

de se tenir elle-même en porte à faux.

La quantité de matières employée est la même dans les deux cas: c'est une feuille de papier.

Dans le premier cas elle était molle et présentait aux charges éventuelles un module d'inertie négligeable; dans le second cas elle est rigide.

On peut encore se faire une représentation de la rigidité propre d'une surface mince convenablement incurvée en examinant le cas d'une coupole. On a pu considérer pendant longtemps une telle construction comme formée par la superposition de pièces d'ossatures: fermes méridiennes, pannes suivant des parallèles et enfin hourdis minces de remplissage. Nous savons qu'il est possible de réaliser cette coupole en ne conservant que le simple hourdis calculé non plus comme un remplissage mais comme une surface mince incurvée. Les fermes et les pannes deviennent inutiles comme dans le cas ce la coquille d'un oeuf.

Nous pouvons encore comparer les deux cas suivants:

Considérons un disque circulaire plan très mince en fer blanc par exemple. Sa rigidité à la flexion est très faible et nous pouvons le plier entre nos mains. Si nous l'emboutissons en forme d'assiette creuse nous sommes surpris de constater combien cette même surface métallique est incomparablement plus rigide. Là encore la quantité de matière est restée la même, et, c'est l'introduction des courbures qui a transformé entièrement les conditions de résistance.

On peut multiplier ainsi les exemples faciles qui permettent de s'apercevoir que l'introduction des courbures conduit à changer le mécanisme même de la distribution des contraintes.

On peut penser, en premier lieu, que cette distribution revient à considérer l'équilibre de l'ensemble total de la surface incurvée comme si on

avait à faire à un solide ayant comme moment d'inertie celui de sa ligne moyenne incurvée.

Ainsi dans le premier exemple choisi de la feuille de papier encastrée sur une de ses rives courbe, on considère que la ligne  $EF$  est tendue, les lignes  $AC$  et  $BD$  comprimées (fig. 3). De telle sorte que nous retrouvons à la section d'enca斯特ment une section totale résistante suivant la théorie classique de la résistance des matériaux.

On conçoit combien une telle façon d'envisager l'utilisation des surfaces incurvées présente d'intérêt.

Tout d'abord on tend, vers l'utilisation en vue de la résistance, de ce qui était considéré jusqu'ici comme une simple paroi de remplissage. On supprime ainsi les éléments d'ossature calculés comme éléments strictement porteurs. Ce qui permet d'alléger sensiblement les ouvrages et de les rendre plus économiques.

De plus cette utilisation des propriétés des surfaces à courbures multiples permet de concevoir avec beaucoup de liberté des modes de disposition dans

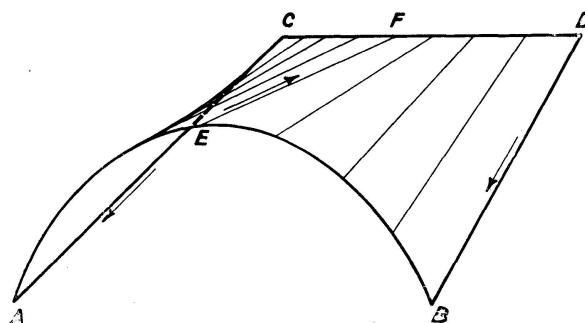


Fig. 3.

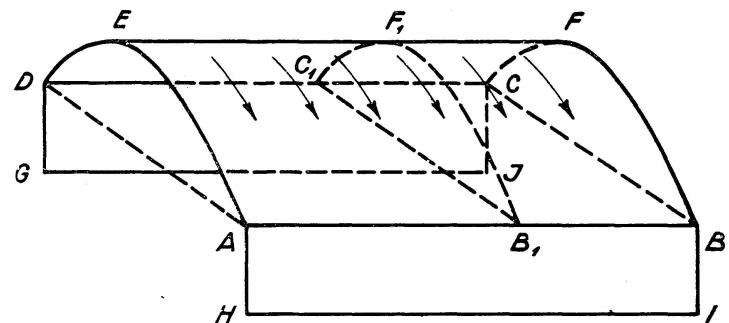


Fig. 4.

l'espace pouvant répondre à des cas nombreux d'utilisation précise. Il en résulte au point de vue architecture la possibilité de réaliser, par exemple, des schémas de couverture très divers, avec sheds, avec éclairage astral, avec points d'appuis disposés au gré du plan.

Nous attirons l'attention sur un côté particulier de cette même question, relatif à l'utilisation „partielle“ des propriétés des surfaces gauches minces.

Il s'agit de considérer de telles surfaces comme n'utilisant les propriétés des courbures inverses que sous l'effet de systèmes particuliers de charges bien définies.

Un exemple simple nous permet d'illustrer ce point de vue qui nous paraît aussi important dans les constructions courantes que le point de vue plus général de l'emploi systématique de telles surfaces gauches.

Il arrive souvent que le plan général d'un bâtiment à couvrir permet de compter sur l'appui de deux murs porteurs parallèles. C'est même le cas le plus fréquemment rencontré pour les ateliers, les halles, les hangars.

A condition que les appuis continus soient résistants — et l'adjonction d'un simple tirant convenable sous tendant la couverture permet de s'en assurer — la couverture la plus économique à réaliser est celle dont la ligne moyenne coïncide avec le funiculaire des charges les plus permanentes. On réalise, en effet, dans ce cas, au flambage près, un équilibre funiculaire (fig. 4).

On se rend compte qu'un tel système en équilibre est cependant restreint dans son utilisation. Tout d'abord dans le cas où les charges extérieures présentent un funiculaire différent de la ligne moyenne de la voûte: c'est le cas

des charges dissymétriques. D'autre part on conçoit que même dans le cas primitif de charges, les phénomènes de flambage prennent rapidement une importance considérable.

Nous avons pu, pour notre part, résoudre le problème du transport de l'action des forces dissymétriques sur des tympans rigides en conservant à la construction la forme de voûte cylindrique avec appuis porteurs continus (I) mais nous avons été cependant limités dans le choix de l'écartement des fermes rigides. En particulier pour une portée de 50 mètres nous nous sommes fixés  $AB_I = 8$  mètres.

Si maintenant nous incurvons cette surface à simple courbure de telle sorte qu'elle se présente sous la forme d'un voile gauche nous voyons que la tenue au flambage est incomparablement améliorée et que le report sur les rives des efforts dissymétriques se produit encore plus facilement que dans le cas de la surface simplement cylindrique.

Une telle surface gauche est sensiblement cylindrique sous l'effet d'un certain système de charges. Elle est gauche sous l'effet des charges quelconques dissymétriques (fig. 5).

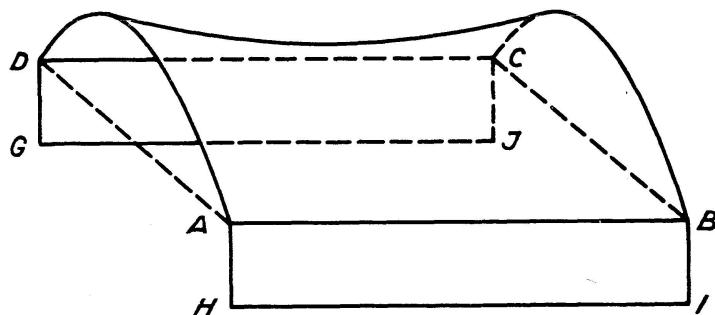


Fig. 5.

Ce simple exemple est donné ici à titre d'indication pour mettre en garde contre la tendance que l'on pourrait avoir quelques fois de trop généraliser l'emploi de nouvelles surfaces et d'abandonner les façons plus classiques de construire qui ont donné cependant de multiples preuves de leur légitimité.

Ce même exemple montre la souplesse et l'étendue du domaine de l'imagination dans ces sortes de formes. Pour alimenter cette imagination, il nous paraît que le travail sur maquette est particulièrement fructueux.

Il permet également de se rendre compte d'une façon précise des problèmes de construction posés.

Il ne faut pas perdre de vue, en effet, qu'il s'agit en fin de compte de construire, c'est à dire de réaliser d'une façon économique et durable des ouvrages importants par leurs dimensions. De multiples questions viennent alors se greffer sur le problème principal. Il faudra étudier les dispositifs des retombées, l'agencement des rives, les manoeuvres des coffrages mobiles s'il s'agit de constructions en béton armé.

L'emploi des maquettes permet de concrétiser simplement ces questions et de les résoudre en imaginant les formes les mieux adaptées.

Nous donnons aux figures 6 et 7 des photographies de moules pour maquettes de surfaces à courbures inverses.

Ces moules sont en très léger carton ; ils ont été employés pour comparer des modes de retombées de surfaces gauches à rives curvilignes et à rives rectilignes.

Les maquettes mêmes des surfaces que nous reproduisons aux figures 8 et 9 nous ont permis encore de mieux faire comprendre aux exécutants de quoi il s'agissait. En effet, souvent à la lecture d'un simple dessin, ceux-ci éprouvent quelques difficultés à imaginer exactement de telles surfaces qui ne leur sont pas encore familières.

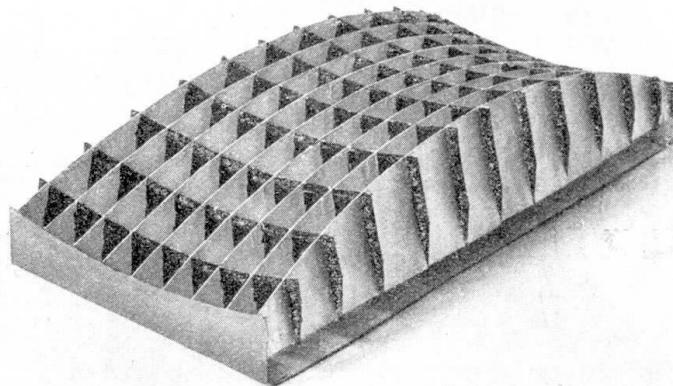


Fig. 6.

Nous mêmes, aussi, avons également bénéficié de pouvoir manipuler facilement à l'aide de ces maquettes ces surfaces, dont les propriétés sur les rives nous ont permis certaines résolutions heureuses des problèmes de transport de forces.

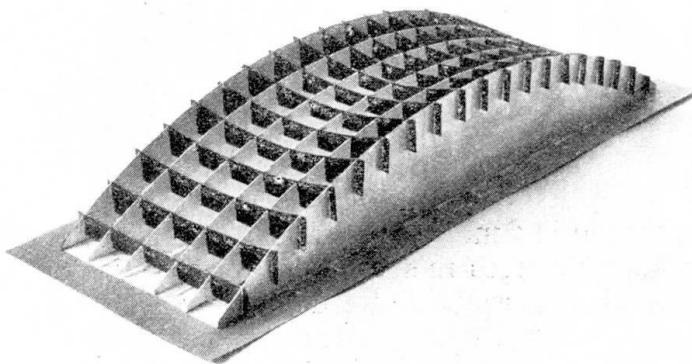


Fig. 7.

Si on applique, par exemple des forces  $f$  sur la rive  $CD$  — rive curviligne (fig. 10) d'une surface gauche  $ABCD$  — on remarque que ces forces  $f$  se transportent en  $A$  et  $B$  comme si la surface était une poutre plane.

Certains gauchissements permettent ce transport d'une façon simple, d'autres semblent conduire les contraintes, sur la surface, suivant des directions plus compliquées. Nous verrons dans la partie théorique de ce mémoire comment par la considération des asymptotiques nous pouvons résoudre ces problèmes que l'examen des observations expérimentales nous avait permis de poser.

Ici, d'ailleurs, le rôle de l'analyse mathématique dont nous donnons quelques aperçus ci après, dépasse, à notre avis, le stade classique d'application

pratique où on le cantonnait dans le domaine de la résistance des matériaux. Les mathématiques ne présentaient alors qu'un rôle de contrôle de formes simples: un poteau sera-t-il écrasé, une poutre se rompra-t-elle sous les flexions?

Ici, dans ce domaine, les mathématiques permettent de prévoir d'une façon tellement générale les répercussions sur des formes résistantes, de l'action des forces quelconques par rapport à des rives ou à des contours systématisés, qu'elles deviennent à leur tour un mode intellectuel de penser.

Ce mode, à ce degré, alimente l'imagination constructive non plus seulement pour indiquer des limites matérielles (épaisseur, dimensions, portées) mais bien au même titre qu'une réelle connaissance architecturale.

Cette connaissance d'ailleurs est cependant toujours nécessaire et comprend dans notre esprit la pratique des œuvres et des moyens matériels dont disposent les chantiers.

### Chantiers.

Nous allons décrire succinctement quelques chantiers et réalisations de surfaces gauches minces en béton armé.

Nous envisagerons le cas d'une surface conoïde en porte à faux qui correspondait à la réalisation d'une marquise sur quai. Nous décrirons ensuite la construction d'une surface conoïde reposant sur des rives portantes parallèles. Enfin nous donnerons quelques explications et renseignements sur les essais jusqu'à rupture que nous avons fait effectuer sur une construction d'essai à Dreux en 1933. Ces dernières mesures nous ont permis de contrôler expérimentalement le bien fondé des théories générales.

#### Conoïde en porte à faux.

En 1929 nous avons eu à étudier la construction d'un magasin à Cazaux. Le programme prévoyait deux marquises latérales régnant sur une longueur de 110 mètres.

Nous avons préjeté de réaliser cette marquise par une série d'éléments en voile mince gauche sans nervures.

La longueur du porte à faux était de sept mètres. Chaque conoïde couvrait une largeur de six mètres vingt cinq; la hauteur de la flèche à la racine curviligne était de trois mètres. L'épaisseur du voile en béton armé de cinq centimètres. L'épaisseur totale de la marquise rapportée en plan, y compris les renforcements des rives, était de six centimètres et demi (fig. 11).

La mise en œuvre de ces éléments en conoïdes se fit à l'aide d'un coffrage mobile dont la manœuvre était grandement facilitée par suite de la forme en dépouille du voile gauche (fig. 12). Des surcharges de l'ordre de trois cents kilos par mètre carré ne décelèrent que des flèches insignifiantes tant était grande la rigidité d'un tel ensemble. A l'intérieur du bâtiment nous avons également prévu de porter un lanterneau central à l'aide de deux conoïdes (fig. 13). Toutes ces constructions en voile mince se sont montrées extraordinairement rigides malgré leur très faible épaisseur.

La mise en œuvre de ces travaux eut lieu en 1931.

#### Conoïdes reposant sur des rives portantes parallèles.

Cette même année 1931 nous avons fait réaliser à Romilly la couverture d'un magasin comportant deux nefs de vingt sept mètres cinquante de portée et 110 mètres de longueur.

L'ossature générale, les piliers, les poutres de ponts roulants, le quai et la couverture étaient en béton armé (fig. 14).

La couverture se compose de deux files de quatorze éléments de voûtes de 27 m 50 de portée et de 7 m 50 de largeur environ. Chaque élément de voûte est une surface conoïde par une droite  $f_3$  se déplaçant parallèlement à

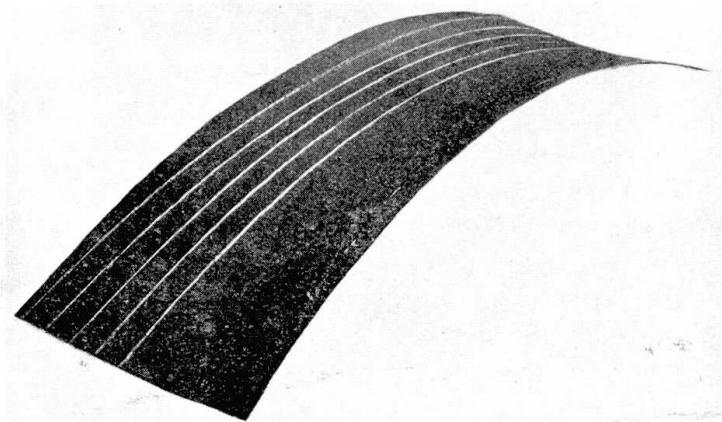


Fig. 8.

un plan vertical passant par  $BE$  sur deux directrices; une directrice curviligne  $ACB$  et une directrice rectiligne  $DE$  (fig. 15). Le secteur limité par la directrice curviligne est contenu dans un plan oblique. Ce secteur reçoit les vitrages. La succession de ces éléments de voûte constitue une couverture

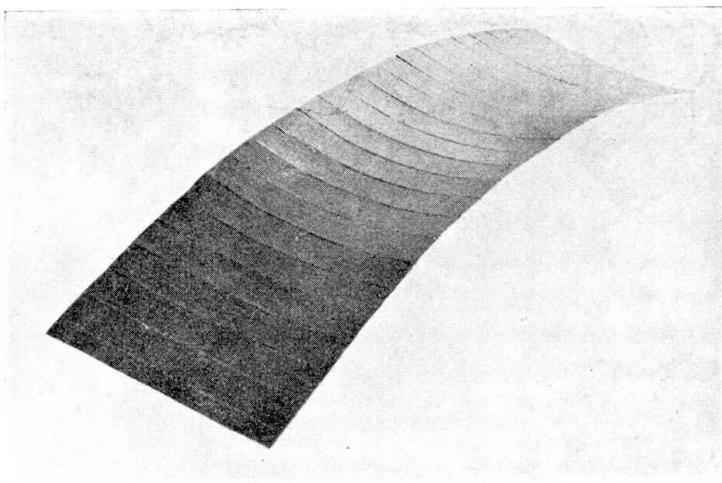


Fig. 9.

en sheds permettant un éclairage abondant de l'intérieur de l'édifice. Il n'y a aucune nervure ou poutre dans l'organisation de la surface gauche. Le voile qui couvre ainsi une surface en plan de plus de deux cents mètres carrés a une épaisseur moyenne de six centimètres et demi. Le couronnement de l'arc curviligne présente une surépaisseur de dix centimètres. Des meneaux en béton raidissent le vitrage et relient le tirant  $DE$  d'un élément de voûte à l'arc curviligne de l'élément suivant (fig. 16).

La surface gauche de la sousface du voile a été blanchie à la chaux. Elle renvoie sur le sol la lumière par réflexion et d'autant mieux qu'aucune diagonale ni soffite ne crée des zones d'ombre (fig. 17).

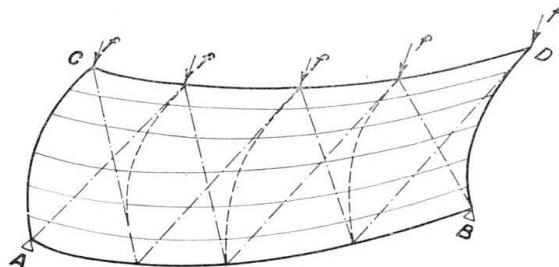


Fig. 10.

Il peut paraître intéressant, puisque nous étudions plus particulièrement l'application, sur des chantiers, des surfaces gauches, de donner quelques détails concernant la mise en oeuvre et l'exécution.

Nous avons recherché dans la conduite de notre étude à aménager la forme des voiles en vue d'obtenir une grande facilité d'exécution et une

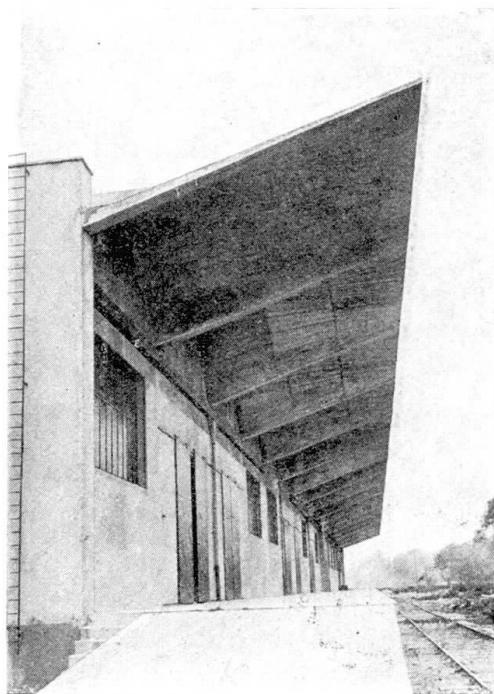


Fig. 11.

Marquise de 110 m de longueur, conoïde en porte à faux. Cazaux (France).  
Vordach von 110 m Länge. Auskragende Kegelschale. Cazaux (Frankreich).  
Cantilevered roof of 110 m length; conoidal surface. At Cazaux (France).

cadence rapide d'avancement des travaux. Il est très onéreux de revenir après coup pour couler des poutres, voiles ou meneaux sur des amorces laissées en attente.

Nous avons voulu réaliser une voûte qui se coulât entièrement en une seule fois (fig. 18). Nous avons réalisé pour cela un moule en bois dont la face supérieure reproduisait la surface à mouler y compris le secteur curvi-

ligne contenant les vitrages. Les meneaux en béton qui sont les seules pièces prismatiques, avaient une section en dépouille de telle façon que leur décoffrage se faisait en même temps que l'abaissement général du cintre (fig. 19).

L'ossature générale de ce cintre se compose de quatre poutres en bois, à treillis, à membrures parallèles et étrésillonées entre elles. Sur ce bâti rigide nous avons réalisé la surface gauche.

Dans chacune des poutres à treillis les montants verticaux se prolongent à la partie supérieure et portent des pannes dirigées suivant les génératrices de la surface. Sur ces pannes et parallèlement au plan des secteurs curvilignes de tête nous avons disposé des cercles en planches espacées de cinquante centimètres environ. C'est sur ce dernier bâti que sont clouées les planches rainées et rabattées formant le coffrage jointif suivant les génératrices. Le tympan de tête porte en creux les meneaux; les voiles d'extrémité du tympan ont été

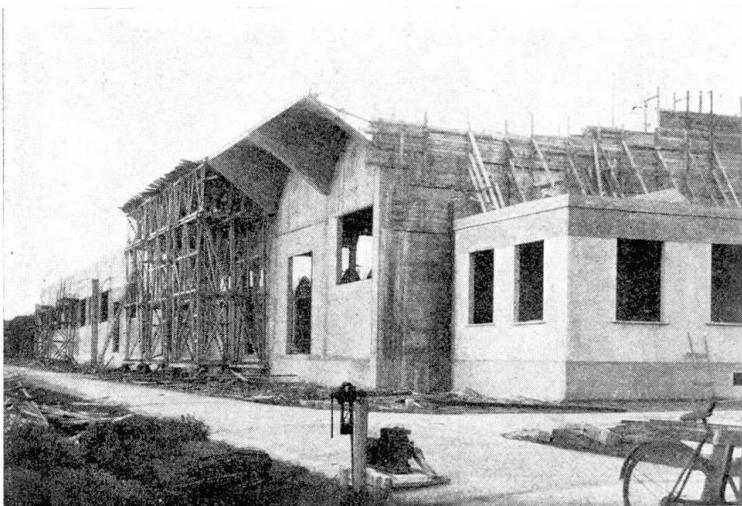


Fig. 12.

Marquise de 110 m de longueur. Manoeuvre des coffrages. Cazaux (France).

Schalung des Vordaches von 110 m Länge. Cazaux (Frankreich).

False work for cantilevered roof at Cazaux.

exécutés à double coffrage; les écartements entre les parois sont maintenus par de petits dés en béton qui restent dans le voile après la prise et le durcissement du béton.

L'ensemble du moule ainsi constitué repose sur trois tréteaux (fig. 20) par l'intermédiaire de coins en bois dur permettant le réglage en hauteur dans la position exacte.

La montée et la descente du coffrage se fait au moyen de quatre treuils tirant à brin direct sur simples poulies de retour. Ces poulies étaient placées sur la poutre du futur pont roulant.

L'ensemble de ce coffrage était très léger, il correspondait à une épaisseur moyenne de quatorze centimètres de bois en plan.

Voici le détail des manœuvres effectuées: Mise en place. Le moule est amené en place sur des lories composés de paires de roues et de bastaings.

Il est levé à l'aide des quatre treuils. Sous le coffrage suspendu on vient glisser les trois tréteaux (fig. 21). On cale le coffrage à l'aide de coins. On détend les câbles des treuils.

On dispose alors les armatures de tout l'ensemble d'une voûte y compris celles des tympans vitrés. On coule le béton. La manœuvre de décintrement est également fort simple.

On desserre les coins de calage avec précaution de façon à mettre la voûte en charge sans à coups. Le coffrage se trouve décollé de quelques centimètres. On peut alors vérifier la bonne tenue de la voûte qui vient d'être décintrée sans courir aucun danger grave de rupture.

On tend les câbles des treuils pour soulever à nouveau le cintre et permettre ainsi de dégager les tréteaux. Le cintre se trouve suspendu.

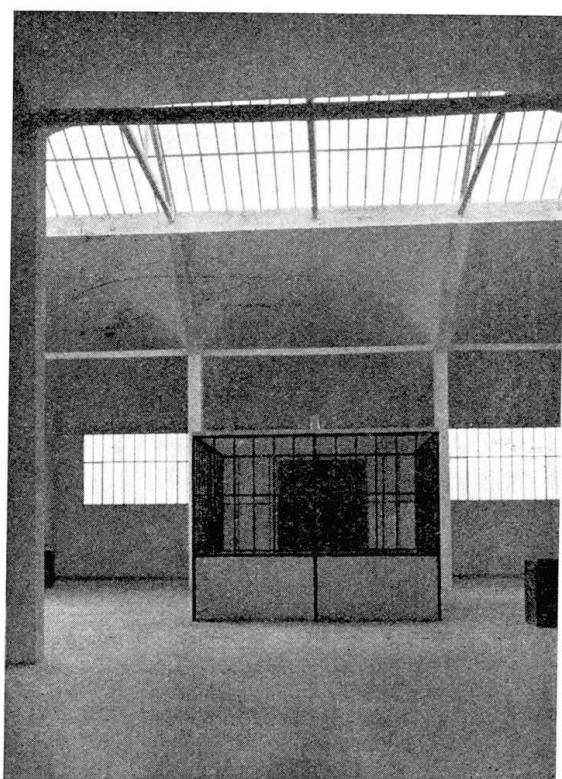


Fig. 13.

Conoïdes supportant au lanterneau. Cazaux (France). — Kegelschale mit Oberlicht. Conoidal surface with openings.

On abaisse le cintre jusqu'au sol au moyen des treuils. Il vient reposer sur les lories. On le roule à sa position suivante; on change les treuils de place et les mêmes opérations recommencent.

Ces différentes manœuvres de décintrement et de remise en place demandaient quatre heures et occupaient une dizaine d'ouvriers.

On a pu se rendre compte par cet exemple détaillé que la compléxité de la réalisation d'une surface gauche n'est qu'apparente.

Il est nécessaire de faire un choix judicieux du module de construction et de ses dimensions pour permettre un réemploi économique de la surface de coffrage. C'est le rôle normal de l'auteur d'un projet de s'intéresser non seulement à la partie proprement technique et aux calculs, mais encore de juger en constructeur du meilleur usage économique à tirer des formes qu'il imagine.

D'autres applications de couvertures dans lesquelles nous avons fait emploi des surfaces gauches ont été réalisées au cours des années 1931 à

1933. Nous signalons entre autres des couvertures à grande portée à Reims, à Châlons-Bouy, à Charleville, à Chartres. Nous donnons quelques documents photographiques sur ces travaux (fig. 22, 23, 24, 25).

### Double auvent d'essais à Dreux.

En 1933, l'entreprise Rouzaud et fils de Paris nous a obligemment offert de construire un bâtiment en béton armé dans lequel nous ferions usage de surfaces minces gauches — le bâtiment était construit à titre d'essais — les essais devant être poussés jusqu'à la rupture.

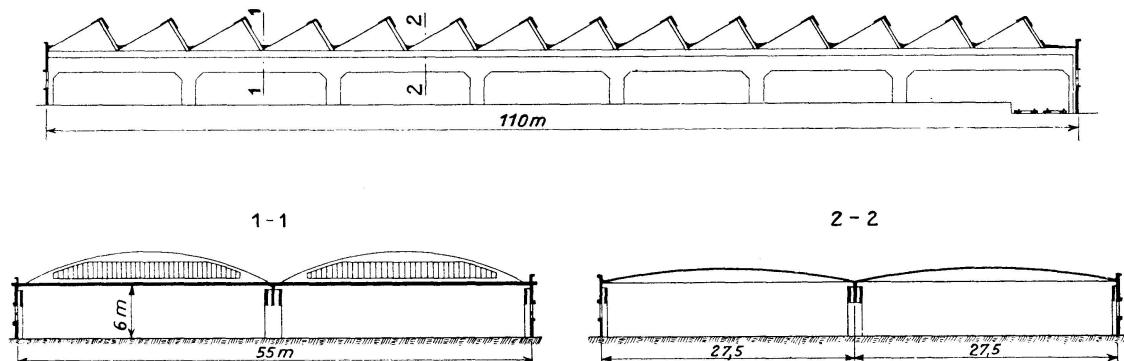


Fig. 14.

Sheds gauches Romilly (France) — Regelschalens-Sheds in Romilly (Frankreich)  
Skew-shell sheds in Romilly (France).

Nous nous sommes tout d'abord attaché à pouvoir mesurer directement sur ces voiles gauches les contraintes développées sur l'effet des charges.

Pour cela nous avons eu recours aux appareils de Monsieur Mabboux et de Monsieur l'Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées Coyne.

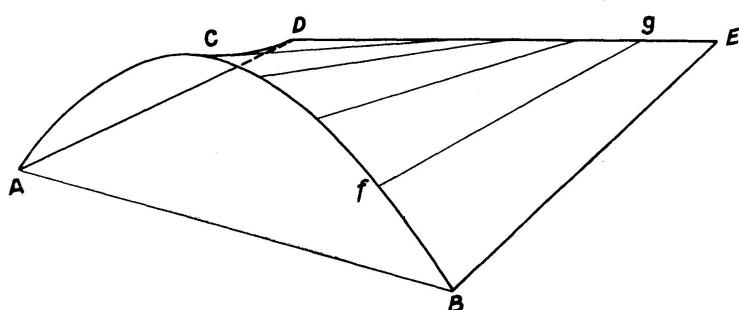


Fig. 15.

Ces appareils nous ont été aimablement prêtés par le laboratoire de l'Ecole des Ponts et Chaussées de Paris. Monsieur l'Ingénieur des Ponts et Chaussées Mary a bien voulu suivre ces essais qui ont porté sur une période de plus d'une année.

Nous ne décrirons pas spécialement les appareils de mesures employés. Cette description ne correspondant pas au cadre de ce mémoire.

Nous indiquerons seulement que l'appareil de Monsieur Mabboux est un instrument très pratique et très souple de photoélasticimétrie. L'appareil Coyne est une corde vibrante protégée par un tube métallique noyé dans le béton à essayer.

Voici les caractéristiques du bâtiment que nous avons fait construire (fig. 26).

C'est une construction ayant deux grands porte à faux. Les dimensions sont indiquées sur le schéma de la figure 26. L'épaisseur des voiles gauches est de cinq centimètres. Il n'y a aucune nervure sur le voile. Seules les di-

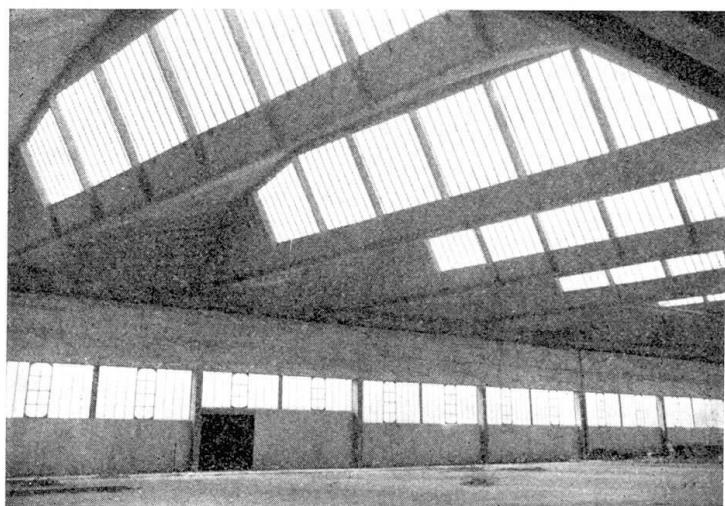


Fig. 16.

Sheds gauches. Romilly (France). — Kegelschalen Sheds. Romilly (Frankreich).  
Sawtooth-sheds with skew surfaces et Romilly (France).

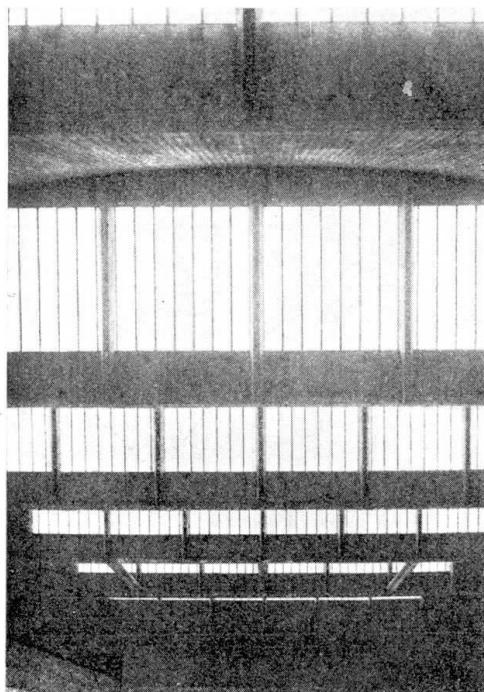


Fig. 17.

Vitrages sheds. Remarquer la forme en dépouille de la section des meneaux.  
Fensterwände der Sheds. Man beachte die Form der Querschnitte der Fensterposten.  
Sash-side of sheds. Notice the cross-sections of window-posts.

rectrices légèrement curvilignes *JK*, *Kb*, *JL* et *LH* ont été renforcées par une nervure saillante.

Les photographies des fig. 27, 28 et 29 montrent bien l'aspect général

du bâtiment. La photographie 29 indique avec quelle facilité on a pu procéder au décintrement.

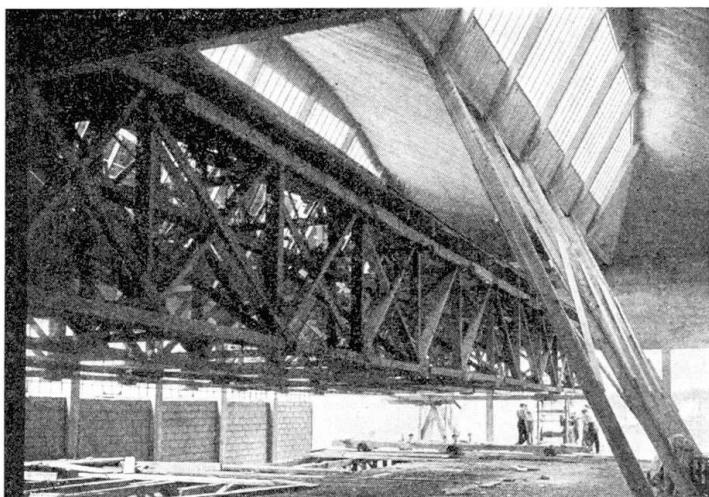


Fig. 18.

Sheds gauches. Le centre suspendu sur les câbles manoeuvrés par les treuils. Les fers à vitrage ont été posés avant le décintrement. Romilly (France).

Regelflächen-Sheds. Das Lehrgerüst ist an Drahtseilen aufgehängt, die durch Winden betätigt werden. Die Fenstergitter wurden vor dem Ausrüsten verlegt. Romilly (Frankr.).

Skew surface sheds. False-work is suspended from cables which are actuated by winches. The sash-steel was laid before the false-work was removed.

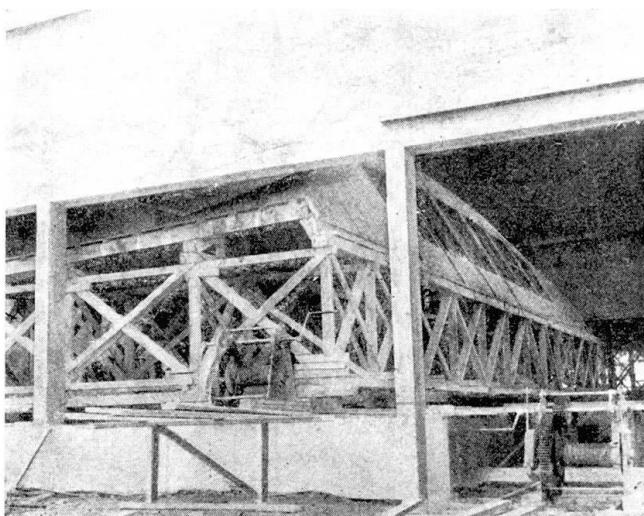


Fig. 19.

Le cintre est entièrement baissé, il repose sur les chariots. Romilly (France).

Das Lehrgerüst ist ganz abgesenkt, es ruht auf den Rollwagen. (Romilly (Frankreich)).

False-work completely lowered and rests on the carriages.

Voici comment ont été disposés les appareils de mesure:

Sur un quart de la surface totale de la toiture, dans la partie  $AEKL_1H_1G$  nous avons disposé 32 miroirs Mabboux et 12 tubes sonores Coyne; un treizième tube fut disposé dans le tirant  $IG$ .

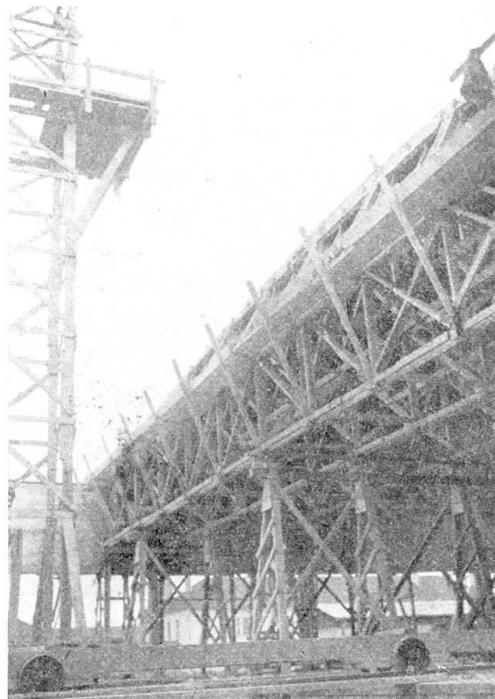


Fig. 20.

Le cintre est en place sur les tréteaux. Au premier plan le chariot sur voie de 0,60 m servant à la translation du cintre au sol. Romilly.

Das Lehrgerüst ruht auf den Querböcken. Im Vordergrund ist der Rollwagen von 0,60 m Spurweite sichtbar, der zur Verschiebung des Lehrgerüstes in tiefer Lage dient. Romilly.

The false-work rests on the supports. In fore-ground a carriage of 0,60 m gauge for moving the lowered false-work into place.

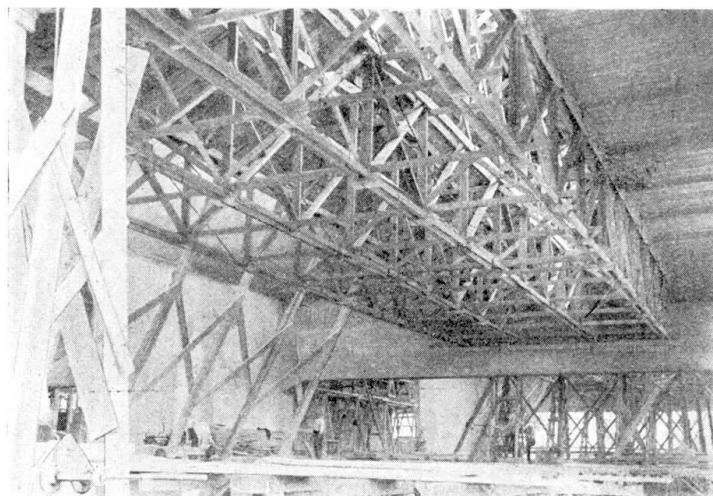


Fig. 21.

Les tréteaux de calage sont enlevés. Le cintre est suspendu aux cables. Die Unterstützungsböcke sind entfernt. Das Lehrgerüst hängt an Drahtseilen an der Kranbahn.

The supports have been removed. False-work is suspended from cables.

Les figures 30 et 31 montrent la position de ces différents appareils. La figure 32 est une phase du ferraillage du voile gauche ainsi que la photographie 32 bis. Le tableau 33 représente l'état des contraintes mesurées sous

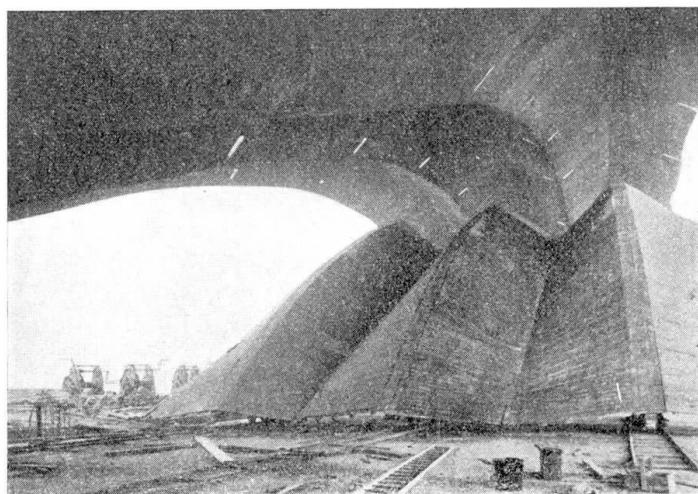


Fig. 22.

Reims. Voûtes conoïdes portée 60 m; décentrement de 1100 m<sup>2</sup> en une seule opération. Kegelschalen-Gewölbe, Spannweite 60 m; Ausrüsten von 1100 m<sup>2</sup> durch eine einzige Tätigkeit.

Conoidal surface vault of 60 m span; removing of 1100 m<sup>2</sup> false work in a single operation.

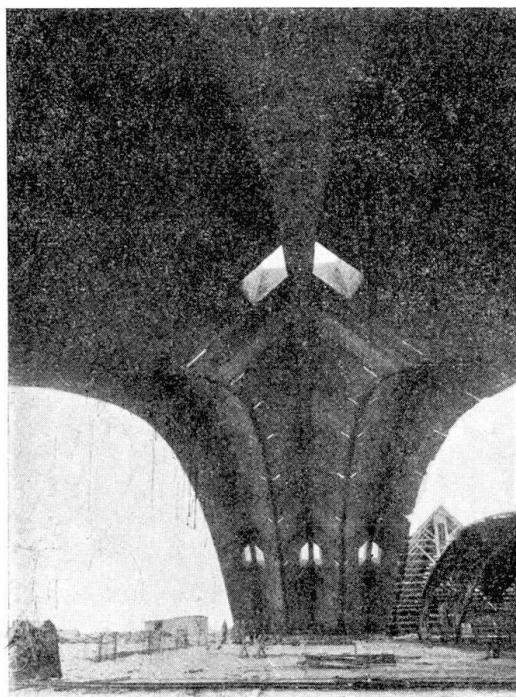


Fig. 22 bis. Voûtes gauches, portée 60 m. — Regelschalengewölbe, Spannweite 60 m. Skew surface vault; span 60 m.

l'effet d'une charge uniforme, les flèches indiquent les directions des contraintes principales de compression mesurées et calculées. On remarquera quelques divergences d'allure sur certains points. Ces divergences sont sur-

tout sensibles sur certaines rives, elles correspondent pour la plupart à des contraintes locales de flexion au voisinage de ces rives.

D'une façon générale les phénomènes observés ont suivi nettement l'allure que l'on pouvait prévoir par le calcul. En particulier, lors d'essais ultérieurs sous des charges plus importantes poussées jusqu'à la rupture nous avons constaté la présence de fissures  $\alpha\beta$  et  $\gamma\delta$  dirigées exactement suivant



Fig. 23. Voûtes 50 m et 30 m. Voiles gauches épaisseur 0,06 m.  
Regelschalengewölbe von 50 und 30 m Spannweiten und 6 cm Dicke.  
Skew surface vaults of 30 and 50 m span; 6 cm thick.

la direction calculée correspondant aux tractions. Ces fissures d'ailleurs n'ont pas compromis sensiblement la solidité du voile qui a pu être déchargé et

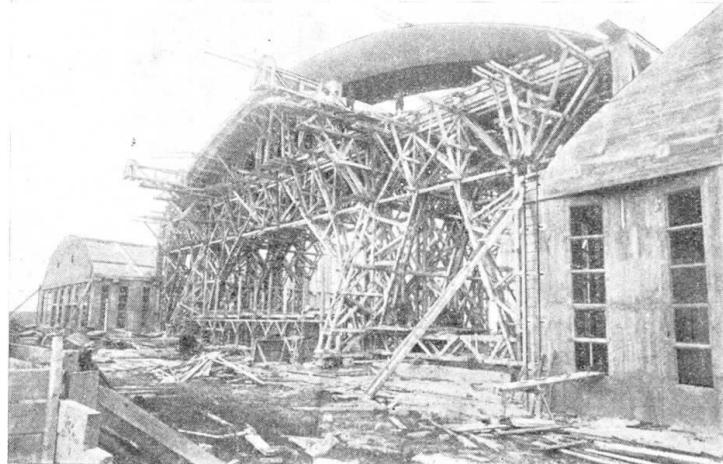


Fig. 23bis. Arc 50 m. Voûte gauche conoïde épaisseur 0,06 m. — Bogen 50 m Spannweite. Kegelförmiges Regelschalengewölbe von 6 cm Dicke. — Arch of 50 m span. Conoidal skew surface 6 cm thick.

rechargé à nouveau et plusieurs fois par la suite sous des systèmes de charges différentes.

Parmi les cas de charges les plus intéressants nous devons noter une charge de quatre tonnes localisée sur 10 mètres carrés environ, à l'extrémité de l'auvent et dans la partie centrale.

La rupture définitive d'un auvent a été obtenue à la fin de la série des essais par application d'efforts alternés sur la rive rectiligne d'extrémité du

porte à faix. L'amplitude des plus grandes déformations sous l'effet de ces charges atteignait quarante centimètres à l'extrémité.

### Théorie.

Les développements mathématiques qui vont suivre ont été l'aboutissement de recherches posées à l'occasion de problèmes concrets de construction.



Fig. 24.

Coffrage marquise 7 m porte à faux conoïde double avec les épaisseur 0,05 m.  
Vordachschalung von 7 m Auskragung. Doppelte Kegelschalen von 5 cm Dicke.  
Forms for a 7 m cantilevered roof. Double conoidal surface 5 cm thick.

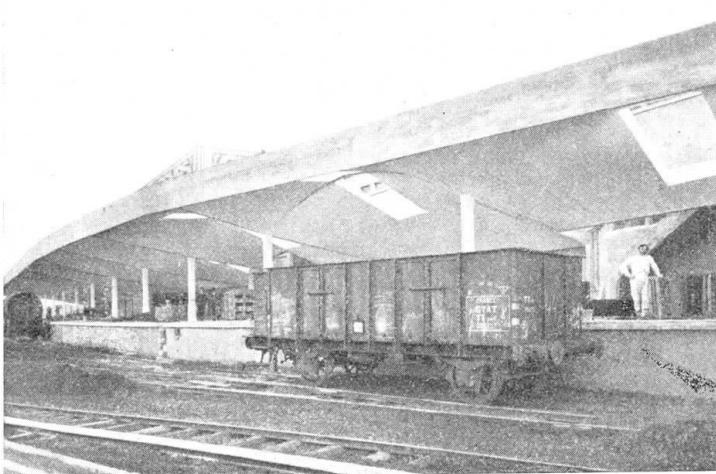


Fig 24 bis. Voile gauche en marquises doubles accolées, épaisseur 0,05 m. — Vordach als doppelte Regelschale, 5 cm. Dicke. — Cantilever-roof in the shape of twin skew surfaces. Thickness 5 cm.

Nous les présentons ici sous une forme théorique et générale, mais dans notre esprit ils n'ont été que peu à peu élaborés; ces calculs mathématiques n'étant que les aides précieux pour contrôler la stabilité des formes imaginées par le constructeur.

Nous allons retrouver dans ces développements présents l'illustration de ce que nous disions à la fin de la première partie de la note lorsque nous

indiquions l'influence des connaissances mathématiques sur l'esprit d'imagination.

Nous nous proposons d'étudier l'équilibre général d'une surface à courbures quelconques.

Nous exprimons l'état de contrainte du voile par trois composantes que nous définissons plus loin. Pour que ces trois contraintes soient suffisantes pour définir totalement l'état élastique de la surface — au lieu des six composantes de la théorie de l'élasticité — les hypothèses suivantes doivent être réalisées.

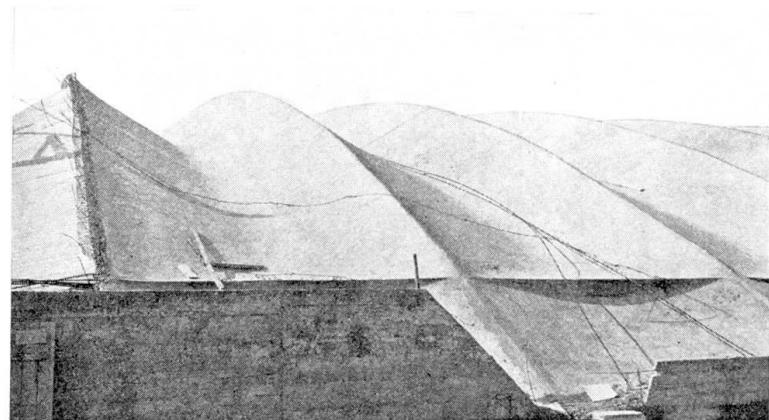


Fig. 25. Voûtes gauches de 50 m de portée, épaisseur 0,05 m. — Regelschalengewölbe von 50 m Stützweite und 5 cm Dicke. — Skew surface vaults of 50 m span, 5 cm thick.

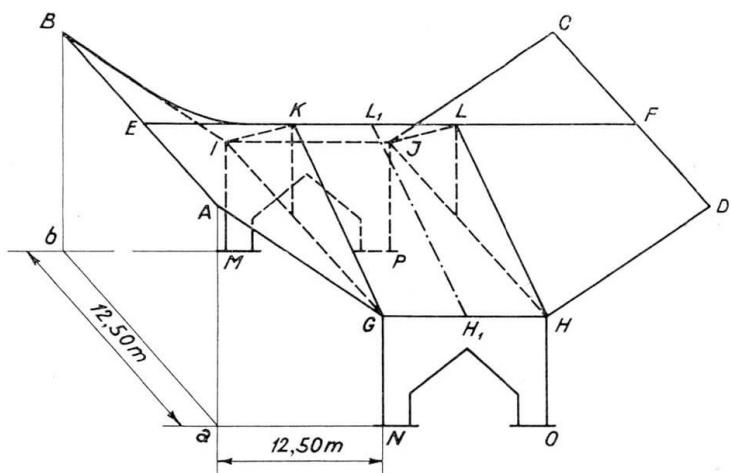


Fig. 26.

- a) l'épaisseur du voile est très faible par rapport aux autres dimensions.
- b) l'épaisseur du voile est très faible par rapport aux rayons de courbure en tous points.
- c) les forces agissant sur le voile ont un taux de variation relative faible sur la surface du voile — en particulier il n'y a pas de discontinuité de chargement ni de charges isolées —.
- d) les courbures ne changent que très peu entre l'état libre et l'état contraint; on vérifie cette condition à posteriori, en calculant les déformations. La variation de courbure donne une première approximation de la précision du calcul.

e) En vertu de (a) et de (d) et par l'application du problème de Saint-Venant, nous admettrons que les contraintes locales introduites par les liaisons aux limites de la surface ont une influence négligeable à une certaine distance de ces rives.

Nous basant sur ces hypothèses nous arrivons aux conclusions suivantes:

Si l'on considère des axes trirectangles  $O.X.Y.Z$ ,  $OX$ ,  $OY$  dans le plan tangent en un point de la surface moyenne du voile, les contraintes sont indé-



Fig. 27. Double duvent gauche. — Doppeltes Schutzdach als Regelfläche. — Cantilevered twin roofs with skew surface.

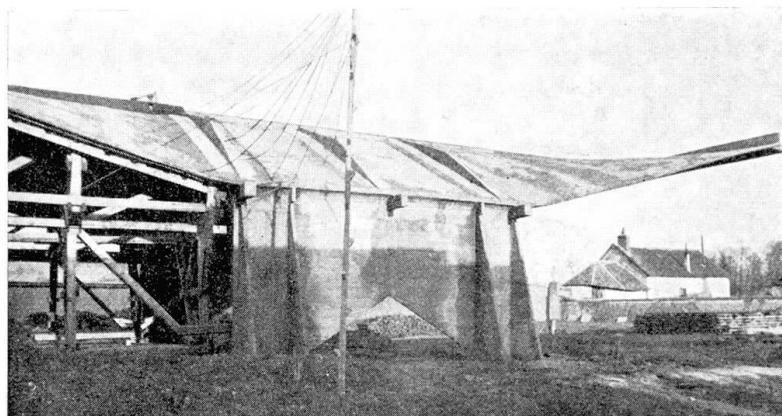


Fig. 28. Vue latérale. — Seitenansicht. — Side view.

pendantes des coordonnées ( $Z$ ) (position du point dans l'épaisseur du voile) et l'on a:

$$Y_z = Z_x = Z_z = 0.^1)$$

Les contraintes effectives sont

$$X_x \quad Y_y \quad X_y$$

fonctions de  $x$  et  $y$  seulement.

Nous pouvons dire qu'il n'y a ni flexion ni torsion locale dans la voile.

Les calculs qui suivent reposent sur ces considérations mais il ne faut pas oublier que les contraintes le long des poutres de rives doivent être calculées d'une façon spéciale.

<sup>1)</sup> Par exemple pour une voûte cylindrique en béton de 50 mètres de rayon de 0,05 d'épaisseur  $Z$  est de l'ordre de 1/1000 des contraintes non négligées.

Si par exemple nous supposons un cylindre soumis à des pressions et encastré par une base contre une plaque indéformable, les fatigues locales de flexion à l'encastrement atteignent la valeur

$$\frac{p \cdot R}{e} \sqrt{\frac{3}{1 - \sigma^2}} = 1,82 \frac{p \cdot R}{e}$$

$p$  étant la pression,  
 $R$  le rayon du cylindre,  
 $e$  l'épaisseur des parois supposées minces,  
 $\sigma$  le coefficient de Poisson égal à 0,3.

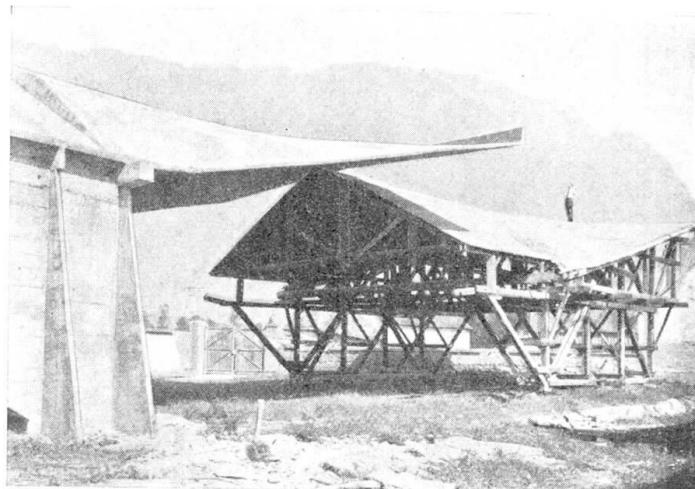


Fig. 29. Coffrage. — Schalung. — Forms and false-work.

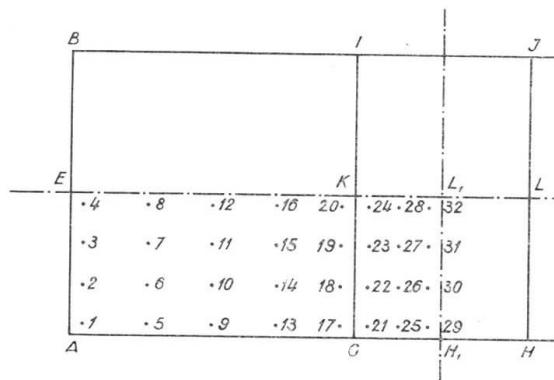


Fig. 30.  
Emplacement des pastilles obtiques  
Mabboux.

Anordnung der Spiegel System  
Mabboux.

Arrangement of mirrors  
(System Mabboux).

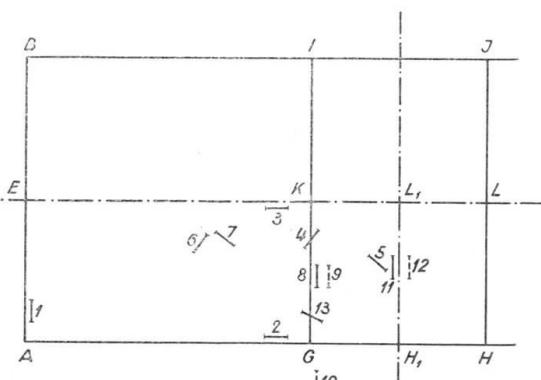


Fig. 31.  
Emplacements des tubes sonores Coyne. Les  
tubes 9 et 12 ont été placés sur la face supérieure  
des nervures  $KG$  et  $L_1 H_1$ . Le tube 10 a été  
place dans le tirant  $IG$ .

Anordnung der tönenden Rohre System Coyne.  
Die Rohre 9 und 12 wurden an der Oberfläche  
der Rippen  $KG$  und  $L_1 H_1$  und das Rohr 10  
im Zugband  $IG$  verlegt.

Arrangement of sound-pipes system Coyne.  
Pipes 9 and 12 were laid on the surface o.  
ridgis  $KG$  and  $L_1 H_1$ , pipe 10 in the bottomf  
chord  $IG$ .

La fatigue de tension étant  $\frac{pR}{e}$ , la valeur relative de la fatigue de flexion est 1,82, et, si l'on calcule les conditions de résistance par la théorie du plus grand cisaillement, la fatigue est localement multipliée par 2,82.

Il sera nécessaire de prendre les mêmes précautions si les conditions (c) ne sont pas réalisées, en particulier dans le cas de discontinuité de chargement.

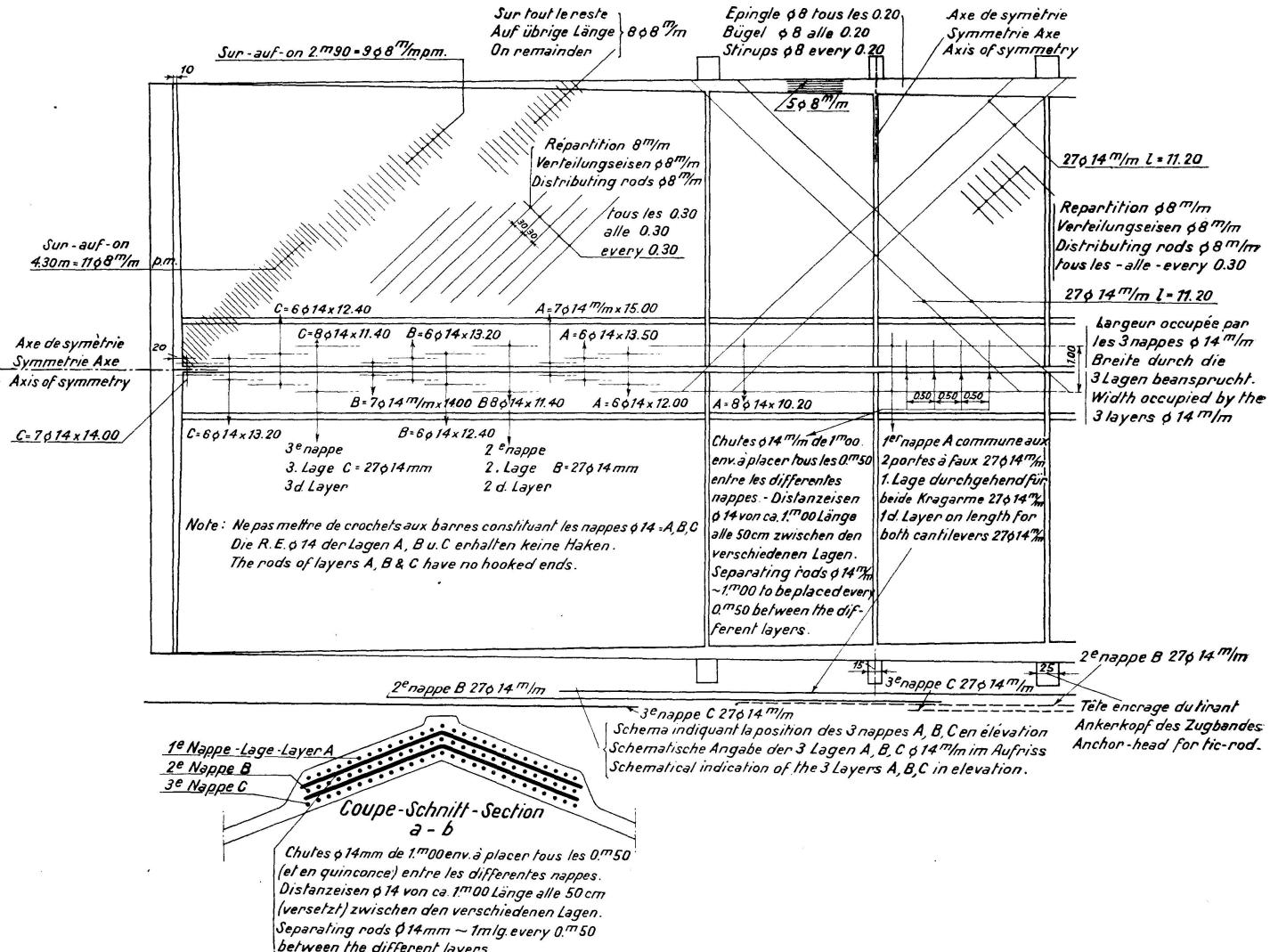


Fig. 32. Charges uniformes 200 kg/m<sup>2</sup>. — Gleichmäßig verteilte Last 200 kg/m<sup>2</sup>.  
Uniform load of 200 kg/m<sup>2</sup>.

### Équations générales d'équilibre.

La surface moyenne du voile est définie par l'équation:

$$z = f(x, y)$$

soient  $p, q, r, s, t$  les dérivées premières et secondes de  $z$  telles que

$$p = \frac{dz}{dx} \quad s = \frac{d^2z}{dx dy}$$

$$q = \frac{dz}{dy} \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}$$

$$r = \frac{d^2z}{dx^2} \quad \text{L'épaisseur } e \text{ fonction de } x \text{ et de } y.$$

Les forces appliquées sur un élément se projetant suivant  $dx$  et  $dy$  sont sur les trois axes

$$X dx dy, \quad Y dx dy, \quad Z dx dy.$$

Soient  $du$ ,  $dv$ , les longueurs se projetant suivant  $dx$ ,  $dy$ ,  $\omega$  est l'angle de  $du$  et  $dv$ . Nous définissons les contraintes sur l'élément  $dv$  par deux composantes:

$$\begin{aligned} n_1 &\text{ parallèle à } du, \\ t &\text{ parallèle à } dv. \end{aligned}$$

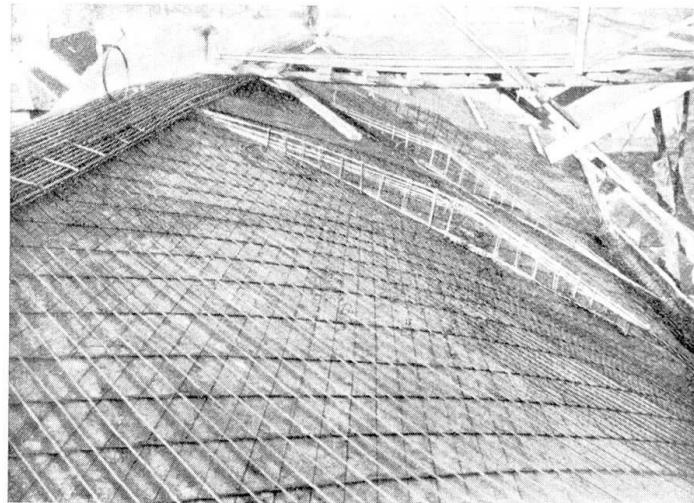


Fig. 32 bis.

Ferraillage du voile gauche. On aperçoit les tubes sonore Coyne disposées avant la coulée du béton.

Armierung der Regelfläche. Man beachtet die tönenden Rohre System Coyne, vor dem Betonieren verlegt.

Reinforcement of skew surfaces. Notice the sound-pipes (System Coyne) laid before concreting.

De même sur  $du$  agissent les contraintes unitaires:  $n_2$  et  $t$ .

L'équilibre des moments montre que les deux valeurs de  $t$  sont égales.

La construction du cercle de Mohr à partir de ces contraintes est la suivante:

On porte sur l'axe des cisaillements  $OM = t$ .

On trace  $MAB$  formant l'angle  $-\omega$  avec  $OM$  et on porte  $MA = n_1$ ,  $MB = n_2$ .

Le cercle de Mohr passe par  $A$  et  $B$ .

Son centre est immédiatement défini. On en déduit les contraintes principales en grandeur.

Les angles  $\alpha'$  et  $\alpha''$  définissent les directions principales.

Les cosinus directeurs correspondant à une direction  $\alpha$  définie par son angle  $\alpha$  avec  $MAB$  sont:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\cos(\alpha + \omega) \sqrt{1 + p^2(1 + q^2)} - pq \cos \alpha \sqrt{1 + q^2}}{1 + p^2 + q^2} \\ b &= \frac{\cos \alpha \sqrt{1 + q^2(1 + p^2)} - pq \cos(\alpha + \omega) \sqrt{1 + p^2}}{1 + p^2 + q^2} \\ c &= \frac{q \cos \alpha \sqrt{1 + q^2} + p \cos(\alpha + \omega) \sqrt{1 + p^2}}{1 + p^2 + q^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Les équations d'équilibre sont écrites en partant des contraintes réduites définies par les relations:

$$\begin{aligned} v_1 &= n_1 e \sqrt{\frac{1+q^2}{1+p^2}} \\ v_2 &= n_2 e \sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}} \\ \tau &= t \end{aligned} \quad (2)$$

Ces équations montrent que  $v_1$ ,  $v_2$ , et  $\tau$  sont les forces projetées sur  $X O Y$ , qui agissent sur l'unité de longueur prise suivant  $dx$  et suivant  $dy$ .

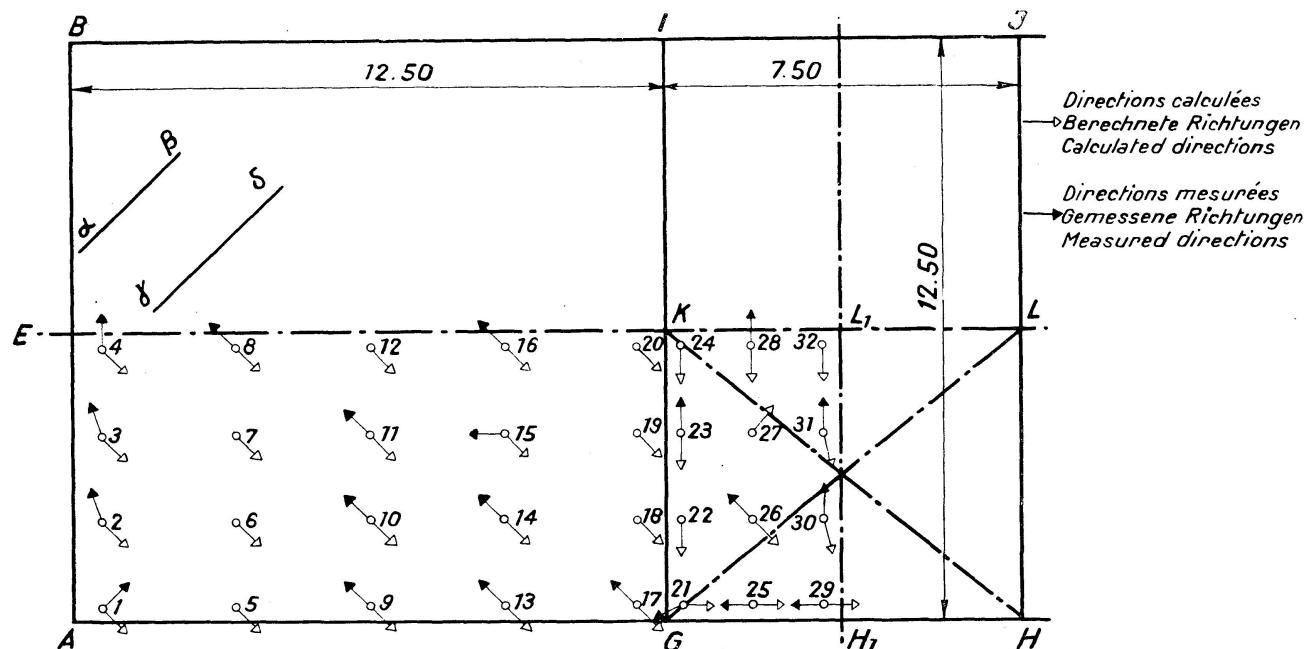


Fig. 33. Certaines pastilles se sont montrées inactives. — Einzelne Spiegel haben sich nicht gedreht. — Certain mirrors have not turned.

L'équilibre des forces projetées sur  $OX$  pour l'élément  $dx dy$  s'écrit:

$$v_1 dy - \left( v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x} dx \right) dy + \tau dx - \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx + X dx dy = 0$$

soit

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = X. \quad (3)$$

On a de même sur  $OY$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = Y. \quad (3')$$

Reste l'équation de projection sur  $OZ$ .

Remarquons que la composante sur  $OZ$  de la force projetée sur  $OX$  suivant  $v_1 dy$  est:

$$v_1 \frac{\partial z}{\partial x} dy = v_1 p \cdot dy$$

de même sur le côté parallèle on a la force

$$-\left[\nu_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_1 \frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] dy$$

de même pour  $\nu_2$  et  $\tau$ .

Il en résulte l'équation d'équilibre sur  $OZ$

$$z dx dy - \frac{\partial}{\partial x} (\nu_1 p) dy dx - \frac{\partial}{\partial y} (\nu_2 q) dx dy - \frac{\partial}{\partial x} (\tau q) dy dx - \frac{\partial}{\partial y} (\tau p) dx dy = 0$$

En développant et en divisant par  $dx dy$

$$z - \frac{\partial \nu_1}{\partial x} p - \nu_1 r - \frac{\partial \nu_2}{\partial y} q - \nu_2 t - \frac{\partial \tau}{\partial x} q - \tau s - \frac{\partial \tau}{\partial y} p - \tau s = 0$$

ou encore

$$z - p \left( \frac{\partial \nu_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) - q \left( \frac{\partial \nu_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) = \nu_1 r + 2s\tau + \nu_2 t$$

Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme suivante en remplaçant les termes entre parenthèses par leurs valeurs (3) et (3')

$$\nu_1 r + 2s\tau + \nu_2 t = Z - pX - qY. \quad (4)$$

En résumé nous avons

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = X$$

$$\frac{\partial \nu_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = Y$$

$$\nu_1 r + 2s\tau + \nu_2 t = Z - pX - qY.$$

Les deux premières équations sont vérifiées si l'on pose:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \xi \\ \nu_2 &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \eta \\ \tau &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = X \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = Y \quad (6)$$

La troisième relation devient alors:

$$r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2s \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + t \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = Z - \frac{\partial}{\partial x} (\xi p) - \frac{\partial}{\partial y} (\eta q) = V \quad (7)$$

Les équations (5) définissent entièrement  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  et  $\tau$  si l'on connaît  $\Phi$ ,  $\xi$  et  $\eta$  étant calculés par des quadratures.

L'équation (7) est une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. Elle a une infinité de solutions.

Suivant la nature des conditions aux limites, le problème de recherches des contraintes peut être entièrement défini par (7) ou bien peut exiger des équations supplémentaires.

L'équation (7) résumant uniquement des conditions d'équilibre de forces, par analogie avec les systèmes réticulaires, nous appelons voile isostatique

tout voile pour lequel les conditions aux limites (rives) sont suffisantes pour résoudre le problème avec la seule équation (7).

Dans le cas contraire nous aurions à faire à un voile dit hyperstatique.

Cette dénomination est adéquate parce que le problème est posé, non dans les termes d'un problème d'élasticité savoir:

„calculer les contraintes et les déformations connaissant le champ de forces de volume et le champ de forces de surface,“

mais bien, dans les termes d'un problème hyperstatique d'ingénieur:

„calculer les contraintes et les déformations étant donnés le champ de forces de volume (ici, en première approximation de surface) et les propriétés élastiques des liaisons d'appuis.“

Le problème est résolu par application du théorème de Castigliano:

„Si l'on exprime le potentiel interne en fonction des forces de volume et de surface statiquement indépendantes, la dérivée du potentiel interne par rapport à une quelconque de ces forces est égale au déplacement du point d'application de cette force sous l'action de toutes les forces données, ce déplacement étant donné sur la direction de la force.“

En particulier on a le théorème de Ménabréa „la dérivée du potentiel interne par rapport à une réaction d'appuis fixe est nulle“.

Le problème est plus complexe ici que dans le cas de systèmes réticulaires puisqu'il faut déterminer des fonctions rendant le potentiel minimum et non plus des forces isolées en nombre fini.

Le problème est pratiquement résolu en remplaçant la fonction continue par une suite de forces discontinues supposées constantes pour de petits éléments de rives.

L'expression générale du potentiel est:

$$\pi = \iint \frac{1}{E} \left[ \sqrt{1+p^2+q^2} (r^2 - r_1 r_2) (1+\sigma) + \frac{\frac{1}{2} [2 \tau p q + r_1 (1+p^2) + r_2 (1+q^2)]^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right] dx dy \quad (8)$$

Le problème étant supposé hyperstatique, l'équation (7) jointe aux conditions aux limites définit  $\Phi$  à des fonctions arbitraires près; les équations (5) définissent les contraintes que l'on introduit dans (8).

Les fonctions arbitraires doivent alors rendre  $\pi$  minimum, en ajoutant au besoin à  $\pi$  le potentiel interne des rives et des appuis.

Le problème est ainsi défini dans le cas général, il est fort complexe — nous l'avons cependant déjà résolu pour des cas concrets.

Il est cependant intéressant de chercher d'une manière précise dans quels cas le problème est isostatique. Dans ces cas, le problème revient, en effet, à chercher une fonction  $\Phi$  définie par l'équation différentielle (7) et dont les conditions aux limites sont suffisantes pour la définir d'une façon univoque<sup>2)</sup>.

### Etude des conditions aux limites.

Les rives sont des systèmes élastiques pouvant reporter certains efforts de direction déterminée ou de direction quelconque. De plus, sur ces rives peuvent agir des forces extérieures déterminées: par exemple un tympan reportant des cisaillements s'appuie sur une voûte cylindrique est, dans le cas

<sup>2)</sup> Etant donné que seules les dérivées seconde de  $\Phi$  ont un sens physique,  $\Phi$  ne sera jamais déterminé qu'à une fonction linéaire  $ax + by + c$ , près; ce qui ne présentera aucun inconvénient (de même qu'un potentiel n'est défini qu'à une constante près).

de pression de vent exerce sur cette voûte des pressions qu'elle reporte sur ses retombées.

Le tympan n'ayant pas de rigidité hors de son plan, la condition de rive s'écrit alors

$$v_1 = 0$$

(le tympan étant défini par  $x = x_0$ ).

Mais quand il y a des forces extérieures

$$v_1 = \lambda$$

$\lambda$  étant déterminé par les pressions agissant sur le tympan. Il en résulte

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \lambda - \xi \quad (9)$$

On obtient des conditions analogues en  $\Phi$  quelles que soient les conditions de rives.

Dans le second membre de (9) figurent  $\lambda$  et  $\xi$ . Nous ne les distinguerons plus dorénavant, et, dans ce cas particulier, par exemple, nous écrirons :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = H(y) \quad (10)$$

puisque  $x$  est constant et égal à  $x_0$ .

Si la rive avait une direction quelconque  $a$ , les équations d'équilibre autour d'un point auraient permis de calculer la quantité remplaçant  $\xi$  ( $\xi \cos^2 a + \eta \sin^2 a$ ).

Le calcul précédent, donné, à titre d'exemple, peut être généralisé, et, nous allons classer les rives qui peuvent se présenter dans la pratique constructive et écrire les équations aux limites correspondantes.

Les rives étant droites ou courbes (en projection sur  $XOY$ ) nous définissons en tout point d'une rive la direction de la tangente  $t$ , l'élément d'arc  $ds$ , la direction de la normale  $n$ , et le rayon de courbure  $R$ ;  $\Phi$  est une fonction de l'arc  $s$  sur la rive et a des dérivées le long de l'arc, le long de la tangente, et le long de la normale.

Aux termes dépendant de  $\xi$  et  $\eta$  près qui se transforment sans difficultés, on a toujours

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} \\ v_n &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$r_{n,s} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial t}$$

et de plus :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial t} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \end{aligned} \quad (12)$$

### Classification des rives.

#### 1. Rives complètes.

Nous appelons ainsi une rive supportant toute espèce d'efforts: massif en maçonnerie, mur très épais, appui sur le sol, poutre de retombée tra-

vaillant en flexion dans deux plans rectangulaires et supportant une voûte cylindrique. Dans tous ces cas, aucune condition n'existe pour la fonction  $\Phi$ .

### 2. Rives mixtes.

Ce sont des rives, limitées par un arc qui est supposé ne pas pouvoir travailler en flexion: cas des tympans des voûtes cylindriques qui ne supportent que des efforts dans leur plan et ne tiennent pas le renversement.

L'équation d'équilibre s'écrit (si l'on suppose que la rive ferme, par exemple, un cylindre parallèle à  $OZ$ ):

$$\frac{\partial}{\partial s} [(\nu_n - H) R] = -\tau_{s,n} \quad (13')$$

c'est à dire

$$R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \int \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{ds}{R} + HR \quad (13'')$$

En particulier dans le cas d'un tympan plan on retrouve l'équation (10).

L'équation (13'') ou sa forme (10) servira dans tous les cas où une voûte en voile mince est posée sur des murs ne tenant pas le renversement.

### 3. Rives de cisaillement (arêtes).

On peut envisager des voiles formés d'éléments se coupant suivant des arêtes. Dans ce cas, les efforts peuvent être transmis sous forme de cisaillements seulement.

Par application du premier membre de (13') il vient:

$$R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} = HR \quad (14)$$

### 4. Rives libres.

Dans le cas où le voile n'est pas limité par un système résistant, sur ces rives  $\nu_n$  et  $\tau_{n,s}$  sont nuls

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} + H_1 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial s} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + H_2 \end{aligned} \quad (15')$$

On déduit, ce qui permet de calculer  $\Phi$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  en tous points de la rive:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ R \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + H_1 \right) \right] = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + H_2 \quad (15'')$$

En résumé de la classification que nous venons de définir, nous dirons que les rives complètes n'introduisent pas de conditions; les rives mixtes et de cisaillement introduisent une condition; les rives libres introduisent deux conditions aux limites.

Ce résultat nous permet de préciser les conditions de résolution de l'équation (7) suivant sa nature, ce qui nous conduit à une classification des voiles.

## Classification des voiles.

L'équation différentielle (7)

$$r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2s \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + t \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = V \quad (7)$$

se comporte différemment (du point de vue des conditions aux limites) suivant qu'elle appartient au type elliptique, parabolique ou hyperbolique. C'est à dire suivant le signe de l'expression

$$\Delta = s^2 - rt. \quad (16)$$

Le signe de  $\Delta$  indique le sens des courbures de la surface

$$z = f(x, y).$$

On obtient alors les résultats suivants:

1. surface du voile convexe à courbures dans le même sens  $\Delta$  est négatif et l'équation est du type elliptique.
2. surface du voile à courbures opposées (ce que nous appelons surface gauche plus particulièrement)  $\Delta$  est positif, l'équation est du type hyperbolique.
3. surface du voile développable  $\Delta = 0$  l'équation est du type parabolique. Cette dernière famille de surfaces présente sur le cas particulier du simple cylindre l'avantage de propriétés spéciales au flambage.

*Premier cas — Surfaces convexes.*

Nous ne développerons pas ce cas. Nous l'avons envisagé pour montrer que cette étude particulière des surfaces à courbures inverses ou surfaces gauches gagne en clarté et en rigueur mathématique à être envisagée dans toute sa généralité. Nous indiquerons simplement pour ceux que la question intéresse les considérations suivantes:

Par généralisation des problèmes de Dirichlet et Neumann appliqués à des équations du type elliptique, on sait que, pour que le problème ait au moins une solution certaine quel que soit le cas de charge, il faut avoir une condition sur chaque rive et une seule.

Les rives doivent donc être toutes soit des rives mixtes soit des rives en cisaillement.

Si une rive libre est introduite, le problème est en général impossible en ce sens que la fonction  $\Phi$  présente des discontinuités et des valeurs multiples dans certaines régions. Le voile subira alors des flexions locales, et, suivant l'importance de la rive libre il y aura ou non rupture de l'ouvrage. Le problème ne peut être pratiquement résolu que dans le cas de rives libres de petites dimensions calculées comme introduisant simplement des contraintes locales. Il faudra faire appel à des théories d'élasticité plus générales.

Dans le cas où une partie des rives est du type „rive complète“, le problème devient hyperstatique et, pour le résoudre, il faut faire appel au théorème de Castiglione.

*Deuxième cas — Surfaces à courbures opposées.*

Les asymptotiques de la surface sont les caractéristiques (réelles) de l'équation en  $\Phi$ .

Soient  $u = F_1(x, y)$   
 $v = F_2(x, y)$   
les asymptotiques.

Les deux fonctions  $F$  sont définies par l'équation

$$t \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 - 2s \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} + r \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (17)$$

et l'équation en  $\Phi$  s'écrit sous forme canonique de Laplace:

$$0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \left[ t \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - 2s \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + r \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \left[ t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \left[ t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]$$

Dans ce cas on ne peut pas donner de solutions générales, comme au cas précédent, le problème dépend essentiellement de la position des rives par rapport aux asymptotiques.

Pour étudier le problème, prenons le système de coordonnées  $(u, v)$ . Le voile se projette suivant un contour fermé  $(C)$ . Pour que le problème ait une solution, et une seule, il faut:

1. qu'une partie des rives soit formée de rives complètes et qu'une autre partie soit formée de rives libres.

2. que, en tracant toutes les polygonales possibles formées d'éléments parallèles aux directions  $u$  et  $v$ , chaque polygonale étant terminée sur une rive libre et sur une rive complète (les rives mixtes donnant les sommets de la polygonale, ainsi que les rives en cisaillement) tout point à l'intérieur de  $C$  se trouve à l'intersection de deux polygonales et de deux seulement.

Par exemple la figure précédente répond à ces conditions: la rive libre et la rive complète s'arrêtant aux points à tangentes parallèles à  $u$  et  $v$ . Un point quelconque  $P$  se trouve bien sur deux polygonales et sur deux seulement.

Suivant la forme des polygonales on peut classer les surfaces.

Les polygonales supposées issues de la rive complète peuvent être classées en deux groupes:

1. Polygonales dont le premier élément est parallèle à l'axe  $u$ .
2. Polygonales dont le premier élément est parallèle à l'axe  $v$ .

Avec cette convention on obtient les principales formes suivantes:

A. Les polygonales des deux groupes se réduisent à un seul élément rectiligne.

On a une rive complète et une rive libre comme l'indique le schéma suivant que nous avons retransposé sur la surface réelle en indiquant les asymptotiques dans quelques cas particuliers.

B. Certaines polygonales d'un groupe ont un sommet, toutes les autres sont à un élément. Ces formes correspondent aux formes précédentes renforcées de rives de cisaillement ou de rives mixtes.

C. Dans les deux groupes certaines polygonales ont un sommet les autres étant à un élément.

D. Dans les deux groupes les polygonales ont un nombre quelconque de sommets, les rives complètes et les rives libres étant uniques.

Ces deux cas C et D correspondent à des porte à faux appuyés contre un mur.

## E. La rive libre se réduit à un point.

A condition d'admettre que  $\Phi$  est continu, ce qui seul a un sens physique, le problème mathématique a une seule solution qui est la solution physique unique.

F. En combinant les éléments précédents entre eux, on peut obtenir un grand nombre de solutions.

En particulier on peut réaliser des voûtes ayant des rives complètes sur les retombées et des rives latérales mixtes ou de cisaillement.

Pour que le problème soit isostatique il faut supprimer certaines liaisons avec les rives de cisaillement.

Dans ce cas particulier, on peut dire que, partant d'une retombée et arrivant à l'autre, chaque polygonale doit rencontrer une fois et une seule fois une rive libre.

Dans le cas où la surface a moins de liaison (une rive mixte au lieu d'une rive complète) l'équilibre est en général impossible. Si elle a plus de liaisons qu'il n'est strictement nécessaire, le problème devient hyperstatique (rive mixte au lieu d'une rive libre, par exemple).

## Troisième cas — Surfaces développables.

Nous indiquons ce cas sommairement, dans la théorie mathématique générale, encore qu'il ne rentre pas dans la définition d'une surface gauchée.

Mais l'intérêt mathématique en est évident et la façon dont nous le présentons montre bien que la théorie que nous proposons est absolument générale.

Dans le cas de surfaces développables les asymptotiques des deux familles sont confondues et sont nécessairement des droites.

Appelons

$$v = F(x, y)$$

le système de génératrices rectilignes.

$$v = G(x, y)$$

un système de trajectoires orthogonales.

On obtient à la place de l'équation (7) l'équation simplifiée

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = V \quad (19)$$

Pour que  $\Phi$  soit déterminé, il faut deux conditions sur chaque génératrice.

On en déduit donc immédiatement :

- Une rive qui est en même temps une génératrice doit être une rive complète.
- Toute génératrice doit rencontrer soit une rive complète et une rive libre, soit une combinaison de rives mixtes et de cisaillement.
- Dans le cas où une rive est tangente en un point à une génératrice, ce point se trouve soit sur une rive mixte ou de cisaillement, soit au contact d'une rive complète et d'une rive libre.

Nous n'examinerons pas les singularités introduites dans le cas où l'arête de rebroussement serait dans la partie utilisée de la développable.

La réalisation d'une telle arête (où le rayon de courbure est nul) est incompatible avec les hypothèses générales du calcul que nous avons spécifiées au début de cette étude théorique.

*Applications aux cylindres.*

Le cylindre étant défini par

$$z = f(x)$$

l'équation en  $\Phi$  est

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} z'' = V \quad (20)$$

Le cylindre est limité par deux génératrices  $x = C^t e$  et deux rives  $y = C^t e$ .

Les deux génératrices sont nécessairement des rives complètes. Les rives  $y = C^t e$  peuvent être deux rives mixtes, ou une rive complète et une rive libre.

a) Rive complète et rive libre, sur la dernière ( $y = 0$ )

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = h(x)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = k(x)$$

$$\Phi = \int_0^y \int_0^y \frac{V}{z''} dy dy + \int_0^x \int_0^x h(x) dx dx + y \int_0^x k(x) dx. \quad (21)$$

b) Rives mixtes  $y = 0$  et  $y = L$ , sur les deux, on a respectivement

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = h_1(x)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = h_2(x)$$

$$\Phi = \int_0^y \int_0^y \frac{V}{z''} dy dy + \int_0^x \int_0^x h_1(x) dx dx \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \\ + \frac{y}{L} \left[ \int_0^x \int_0^x h_2(x) dx dx - \int_0^L \int_0^L \frac{V}{z''} dy dy \right] \quad (22)$$

Dans ce cas on peut éviter la fonction  $\Phi$  et écrire

$$\nu_1 = \frac{Z - pX - qY}{z''}$$

les équations (3) donnant directement  $\nu_2$  et  $\tau$  quand les conditions sur les rives sont celles indiquées.

Appliquons cette étude au cas des voûtes cylindriques accolées, séparées par des arcs.

Si les arcs supportent des efforts normaux (arcs caissons) le problème est hyperstatique sauf pour le cas d'un seul arc caisson entre deux voûtes dont les autres rives en arc sont libres. (Cas des formules (21).)

Dans le cas où il y a trois voûtes, le problème est isostatique uniquement quand les rives extrêmes sont libres et les rives intermédiaires sont mixtes. Les équations (21) définissent en effet les  $\nu_2$  des extrémités de la voûte centrale. L'analogie de cette étude avec le cas des poutres sur appuis est complète.

A une poutre sur deux appuis correspond une voûte dans le cas (b).

A une poutre encastrée à un bout, libre à l'autre correspond le cas (a).

A deux porte à faux en encastrement central correspondent deux voûtes accolées.

A une poutre cantilever à deux appuis correspondent deux voûtes accolées.

Tous les autres cas sont hyperstatiques.

Etude particulière des surfaces définies par leurs asymptotiques, formant un système de coordonnées curvilignes.

Application aux surfaces simplement et doublement réglées.

La surface est définie par les relations

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned}$$

Les lignes  $u = C^{\text{te}}$  et  $v = C^{\text{te}}$  étant les asymptotiques.

Nous posons:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{D(y, z)}{D(u, v)} & E &= \sum_{x, y, z} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \\ L_2 &= \frac{D(z, x)}{D(u, v)} & F &= \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \\ L_3 &= \frac{D(x, y)}{D(u, v)} & G &= \sum \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \\ H &= \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2} & & = \sqrt{EG - F^2} \end{aligned}$$

Les directions asymptotiques étant définies par

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 = 0$$

avec

$$\begin{aligned} D &= \left| \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right| (x, y, z) \\ D' &= \left| \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \right| (x, y, z) \\ D'' &= \left| \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right| (x, y, z) \end{aligned}$$

On déduit immédiatement

$$D = 0 \quad D'' = 0$$

(de par le choix des coordonnées asymptotiques). Nous appelons  $R_2$  et  $R_1$  les rayons de courbure des asymptotiques  $u$  et  $v$ .

Soit  $F_n$  la projection de la résultante des forces extérieures sur la normale; ces forces sont de plus décomposées en<sup>3)</sup>:

$F_w$  parallèle à l'intersection des plans asymptotiques aux lignes de courbure au point considéré.

$F_u$  parallèle à la direction  $v = C^{\text{te}}$

$F_v$  parallèle à la direction  $u = C^{\text{te}}$

<sup>3)</sup> Dans le cas d'une surface de révolution (hyperboloïde considéré plus loin) cette direction est celle de la normale abaissée du point sur l'axe de révolution de la surface, sa détermination est aisée dans ce cas.

$e$  étant l'épaisseur du voile, d'une manière analogue à celle des équations (2) nous introduisons les contraintes

$$\begin{aligned}\mu_1 &= n_1 \sqrt{G} e \\ \mu_2 &= n_2 \sqrt{E} e \\ \vartheta_2 &= t \sqrt{G} e \\ \vartheta_1 &= t \sqrt{E} e\end{aligned}\tag{23}$$

$n_1$ ,  $n_2$  et  $t$  étant les contraintes unitaires définies précédemment et appliquées ici au parallélogramme de direction  $du$  et  $dv$ .

Les  $\mu$  et  $\vartheta$  sont donc les efforts totaux par unité de paramètre  $u$  ou  $v$ . Les deux équations d'équilibre dans le plan tangent sont ( $\alpha$  étant l'angle de  $u$  et  $v$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial v} + \frac{\partial \mu_1}{\partial u} - \frac{\mu_1}{\operatorname{tg} \alpha R_1} + \frac{\mu_2}{\sin \alpha R_2} &= F_u \frac{ds}{du dv} = F_u H \\ \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} + \frac{\partial \mu_2}{\partial v} - \frac{\mu_2}{\operatorname{tg} \alpha R_2} + \frac{\mu_1}{\sin \alpha R_1} &= F_v H\end{aligned}$$

(24)

En projetant sur la normale au milieu de l'élément  $du$ ,  $dv$ , seules les forces de cisaillement  $t$  donnent une composante du 2<sup>e</sup> ordre et il vient:

$$te = Fn \frac{H du dv}{2 \delta}$$

$\delta$  étant la distance d'un point  $(u + du, v + dv)$  au plan tangent en  $(u, v)$

$$\delta = \left| \delta, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right| (x, y, z) \frac{1}{H} = du \cdot dn D' \frac{1}{H}$$

On a donc:

$$te = Fn \frac{H^2}{2 D'} = r \tag{25}$$

$$\vartheta_1 = Fn \frac{H^2 \sqrt{E}}{2 D'} \tag{26}$$

$$\vartheta_2 = Fn \frac{H^2 \sqrt{G}}{2 D'}$$

Les équations (23), (24), (25) et (26) résolvent le problème.

Dans le cas général des surfaces à courbures inverses ces équations présentent peu de simplifications par rapport aux équations écrites précédemment. Dans le cas particulier de surfaces simplement et doublement réglées, le calcul est notablement simplifié.

a) Surfaces simplement réglées.

Soit  $u = C^{\text{te}}$  le système de génératrices rectilignes

$$\frac{1}{R_2} = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}-\frac{\mu_1}{R_1 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\partial \mu_1}{\partial u} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial v} &= F_u H \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial v} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} + \frac{\mu_1}{R_1 \sin \alpha} &= F_v H\end{aligned}$$

(27)

$\Theta_1$  et  $\Theta_2$  étant calculés par (26) il vient:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \lambda \left( F_u H - \frac{\partial \vartheta_1}{\partial v} \right) + \lambda' \\ \mu_2 &= \int_b^v \left( F_v H - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} - \frac{\lambda}{\sin \alpha R_1} \right) dv - \int_b^v \lambda' dv + \lambda''(u)\end{aligned}\quad (28)$$

$\lambda \left( F_u H - \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} \right)$  est une solution particulière de l'équation en  $\mu$ , avec second membre,  $\lambda'$  est la solution générale de l'équation sans second membre.  $\lambda''$  est une fonction arbitraire de  $u$ . Les deux fonctions  $\lambda'$  et  $\lambda''$  sont définies par les conditions aux limites dans le cas d'un voile isostatique, ou par le théorème de Castiglano dans le cas d'un voile hyperstatique.

b) Surfaces doublement réglées (paraboloïdes et hyperboloïdes).

Dans ce cas

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \int_a^u \left( F_u H - \frac{\partial \vartheta_1}{\partial v} \right) du + \lambda'(v) \\ \mu_2 &= \int_b^v \left( F_v H - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} \right) dv + \lambda''(u)\end{aligned}\quad (29)$$

### Etude des paraboloïdes hyperboliques.

Prenons pour plans directeurs du paraboloïde les plans  $XOZ$  et  $YOZ$  — ces plans ne sont pas nécessairement rectangulaires. —

$x$  et  $y$  deviennent les coordonnées curvilignes précédemment considérées ( $u$  et  $v$ ).

En reprenant les notations définies précédemment le paraboloïde étant représenté par l'équation

$$z = axy$$

il vient:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{Z - ayX - axY}{2a} = U \\ \gamma_1 &= \int X dx - \int \frac{\partial U}{\partial y} dx + \lambda'(y) = F(x, y) + \lambda'(y) \\ \gamma_2 &= \int Y dy - \int \frac{\partial U}{\partial x} dy + \lambda''(x) = G(x, y) + \lambda''(x)\end{aligned}\quad (30)$$

### Paraboloïdes limité par quatre génératrices.

Deux génératrices au moins doivent supporter  $v_1$  et  $v_2$  les deux autres peuvent être des rives de cisaillement.

Dans le cas où les quatre génératrices supportent des cisaillements, les conditions de symétrie peuvent en général définir  $v_1$  et  $v_2$  sans introduire le potentiel.

## Paraboloïde placé en „selle de cheval“.

Les directeurs des rives sont bissectrices des génératrices. Le rectangle des rives est placé au sommet du paraboloïde.

$2\alpha$  est l'angle des génératrices.

Les contraintes dirigées suivant les bissectrices sont

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\tau}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} \\ N_2 &= \frac{-\tau}{\operatorname{cotg} \alpha} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2 \operatorname{cotg} \alpha} \\ T &= \frac{\nu_2 - \nu_4}{2} \end{aligned} \quad (31)$$

$N_1$ ,  $N_2$  et  $T$  sont rapportés aux axes  $XOY$ .

D'après les considérations générales précédentes le paraboloïde est isostatique, par exemple, quand  $AA'$  est une rive libre,  $AB$  et  $A'B'$  sont des rives de cisaillement,  $BB'$  une rive complète. — C'est le cas d'un porte à faux.

Il est encore isostatique quand  $AA'$  et  $BB'$  étant des rives complètes,  $AB$  et  $A'B'$  sont des rives de cisaillement, à l'exception des éléments  $CC$  et  $C'C'$  qui forment rives libres.

Dans ce cas, sur  $AB$  et  $A'B'$  on a :

$$N_2 = 0$$

ou

$$\nu_1 + \nu_2 = 2\tau$$

soit

$$\lambda'(y) + \lambda''(x) = 2U - F - G \quad (32)$$

Donc, si  $\lambda''$  est défini en un point,  $\lambda'$  s'en déduit spécialement sur  $CC$  et  $C'C'$  on a de plus

$$\nu_1 = \nu_2$$

soit

$$\lambda' - \lambda'' = G - F. \quad (33)$$

Donc

$$\lambda'' = U - G$$

$$\lambda' = U - F$$

(34)

Partant de  $a$ , par exemple, on obtient  $\lambda'$  sur  $ab'$ , d'où  $\lambda''$  sur  $b'd'$  et de même  $\lambda''$  sur  $ab$  donne  $\lambda'$  sur  $bd$ . Le calcul effectif dans ce cas est donc fort simple. Dans le cas où les rives  $CC$  et  $C'C'$  ne sont pas libres, on peut appliquer le théorème de Castigliano en pratiquant une coupure suivant  $LL$ .

Chaque demi surface est isostatique et se calcule aisément, en introduisant des liaisons surabondantes constantes sur des éléments finis de  $LL$ , on écrit que le potentiel est minimum, exactement comme pour un système réticulaire.

Nous n'insisterons pas sur le détail de ces calculs qui sont très simples mais cependant assez fastidieux.

## Etude des hyperboloïdes de révolution.

Partons de l'hyperboloïde défini par l'équation :

$$\frac{z^2}{b^2} = \frac{r^2}{a^2} - 1$$

ou encore :

$$\frac{z^2}{b^2} = \frac{x^2 + y^2}{a^2} - 1.$$

Par un point  $A (x, y, z)$  passent deux génératrices que l'on peut définir par les points où elles coupent le cercle de gorge.

Tout point  $P$  du cercle de gorge peut être défini par l'angle que fait  $OP$  avec  $OX$ . On définira chaque génératrice par un tel angle en appelant  $\varphi$  l'angle définissant une génératrice d'un système,  $\psi$  l'angle définissant une génératrice de l'autre système.

On obtient ainsi:

$$\gamma = \frac{a}{\cos \frac{\psi - \varphi}{2}}$$

$$x = a \frac{\cos \frac{\psi - \varphi}{2}}{\cos \frac{\psi - \varphi}{2}}$$

$$y = a \frac{\sin \frac{\psi - \varphi}{2}}{\cos \frac{\psi - \varphi}{2}}$$

$$z = b \frac{\sin \frac{\psi - \varphi}{2}}{\cos \frac{\psi - \varphi}{2}}$$

$$E = G = \frac{a^2}{4 \cos^4 \frac{\psi - \varphi}{2}} \left[ 1 + \frac{b^2}{a^2} \right]$$

$$F = \frac{a^2}{4 \cos^2 \frac{\psi - \varphi}{2}} \left[ \cos(\psi - \varphi) - \frac{b^2}{a^2} \right]$$

$$H = \frac{a^2}{2 \cos^3 \frac{\psi - \varphi}{2}} \sqrt{\sin^2 \frac{\psi - \varphi}{2} + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\frac{H^2}{2D'} = \frac{a^2}{2b} \left[ \frac{1 + \frac{b^2}{a^2}}{\cos^2 \frac{\psi - \varphi}{2}} - 1 \right]$$

ou encore:

$$\frac{H^2}{2D'} = \frac{r^2}{2b} \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) - \frac{a^2}{2b}$$

L'équation (25) donne

$$\tau = F_n \frac{H^2}{2D'}.$$

Les autres contraintes s'en déduisent.

On voit par comparaison avec les paraboloïdes hyperboliques que les équations (29) et (30) appliquées au cas de l'hyperboloïde sont absolument semblables, au terme  $H$  variable près.

De plus dans le cas du paraboloïde

$$H = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

ou encore

$$H = \sqrt{1 + a^2(x^2 + y^2)}$$

les forces extérieures étant définies par unité de surface projetée, si l'on définissait ces forces par unité de surface vraie

$$H = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

figurerait explicitement dans les équations (30).

Les calculs numériques sont donc très sensiblement les mêmes dans les deux cas et les considérations exposées précédemment sont valables dans le cas actuel.

Les considérations théoriques et mathématiques que nous venons de développer sur les surfaces à courbures devront être complétées par une étude systématique des conditions de flambage de ces surfaces.

Nous croyons en effet — et les expériences nombreuses sur des bâtiments de grandes dimensions déjà construits depuis plusieurs années sur nos projets nous confirment dans cette idée — nous croyons que de telles surfaces à courbures inverses offrent au flambage des résistances particulièrement intéressantes.

Nous avons déjà commencé l'étude de cas concrets et pensons cette année pouvoir poursuivre au laboratoire des recherches qui seront également fort intéressantes.

Depuis plusieurs mois nous avons étudié la possibilité d'étendre aux constructions en tôle les principes généraux d'équilibre basés sur l'utilisation des courbures.

Ce domaine nouveau de la construction peut comprendre non seulement les constructions de bâtiment en aciers semi-inoxydables mais encore les voiles porteurs, comme les ailes d'avions qui, avec une augmentation considérable de la sécurité, gagneraient très sensiblement en allégement.

### Résumé.

L'auteur présente une théorie générale des surfaces gauches minces et établit les équations générales de base et les conditions de bordure de différents cas. Il part à cet effet de cette notion que dans chaque cas, la couverture la plus économique est celle dont la surface médiane coïncide avec la surface des pressions pour les charges fixes. Dans ces ouvrages, la question du flambage est au premier plan.

Dans un paragraphe d'introduction, l'auteur étudie quelques cas pratiques liés à la construction des surfaces gauches minces en béton armé et qui montrent dans quelles proportions étroites sont liées la théorie pure et les méthodes d'exécution pratique.

### Zusammenfassung.

Der Verfasser stellt eine allgemeine Theorie der Regelschalen auf und leitet sowohl die allgemeinen Grundgleichungen als auch die Randbedingungen für verschiedene Fälle ab. Er geht dabei von der Erkenntnis aus, daß

jene Dachkonstruktion die wirtschaftlichste ist, deren Mittelfläche mit der Stützfläche für die ständigen Lasten übereinstimmt. Bei diesen Konstruktionen tritt die Frage des Knickens in den Vordergrund.

In einem einleitenden Abschnitt werden einige Baustellen besprochen, die sich auf die Ausführung von Regelschalen in Eisenbeton beziehen und die zeigen, in welch inniger Weise die reine Theorie und die Methoden der Bauausführung miteinander verknüpft sind.

### **Summary.**

The author sets forth a general theory of thin skewshells and deducts the general basic equations as well as the marginal conditions for the different cases. He starts from the knowledge that the most economical construction of roof is that in which the mean areas correspond with the area of support for the permanent loads. With such designs the principal question deals with buckling.

In an introductory part he reports on some examples of building referring to the execution of thin skewshells in reinforced concrete and showing how intimately the pure theory and the methods of building are connected to each other.