Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 3 (1935)

Artikel: Die Berechnung äusserlich statisch unbestimmter prismatischer Scheibenwerke

Autor: Gruber, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4148

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DIE BERECHNUNG ÄUSSERLICH STATISCH UNBESTIMMTER PRISMATISCHER SCHEIBENWERKE

LE CALCUL DES CONSTRUCTIONS PRISMATIQUES À PAROIS MINCES, EXTÉRIEUREMENT HYPERSTATIQUES

DESIGN OF PRISM-SHAPED STRUCTURES WITH THIN PARTITIONS EXTERNALLY STATICALLY INDETERMINATE

Ing. Dr. techn. ERNST GRUBER, Hannover.

A. Einleitung.

Im Eisenbetonbau finden Schalenkonstruktionen in steigendem Maße Verwendung. Während nun die stetig gekrümmten Schalen in ihrer Theorie schon weitgehend erforscht sind, wurden über die sogenannten Scheibenwerke — das sind Schalen, welche aus ebenflächigen Teilen zusammengesetzt sind — bisher nur wenige Untersuchungen angestellt. Eine gründliche Kenntnis der Statik dieser neuartigen Gebilde ist jedoch sehr erwünscht, da diese Tragwerksformen bei der Lösung verschiedener Bauaufgaben mit Vorteil verwendet werden können. Fig. 1—3 zeigen hiefür einige einfache Beispiele. In solchen Tragwerken wirken die einzelnen Scheiben *a b c d* als Träger, die in den Querscheiben *A, B, C* usw. gestützt und längs der Kanten *n* miteinander unverschieblich verbunden sind. Wir nehmen zunächst an, daß die Verbindung längs der Kanten gelenkig sei, so daß von einer Scheibe zur anderen nur Schubkräfte T übertragen werden können (Fig. 1). Eine Überleitung von Biegemomenten X_n, deren Drehachsen in den jeweiligen Kanten liegen, und von Querkräften Q_z, deren Richtungen normal zu den jeweiligen Scheibenebenen stehen, wäre sonach unmöglich. Die Ausbildung der scharnierartigen Gelenke bereitet jedoch erhebliche konstruktive Schwierigkeiten. Man schließt daher, dem monolithischen Charakter der Eisenbetonbauweise entsprechend, die einzelnen Scheiben miteinander biegesteif zusammen und gelangt so zu den sogenannten steifknotigen Scheibenwerken. Die Spannungen, welche durch diese steifen Verbindungen in das Tragwerk kommen, sind in vielen Fällen von ausschlaggebender Bedeutung und dürfen nur unterdrückt werden, wenn sich die Querschnitte des Scheibenwerkes nicht zu stark verformen. In dieser Hinsicht ergibt die nähere Untersuchung folgendes:

1. Für offene Scheibenwerke werden die Verformungen umso kleiner, je größer die Neigungswinkel γ der aufeinanderfolgenden Einzelflächen sind (Fig. 1). Bei Winkel über 40^0 wird der Fehler infolge Vernachlässigung der Steifknotigkeit in der Regel unbedeutend.

2. In sich geschlossene Scheibenwerke (Fig. 3) sind in dieser Hinsicht günstiger als offene (Fig. 1).

3. Die Verformung der Querschnitte eines Scheibenwerkes wird ganz erheblich vermindert, wenn man in größeren Abständen, besonders in den

Querschnitten größter Formänderung, biegungsfeste Querrahmen oder Querschoten einbaut. Als Beispiel hiezu diene der in Fig. 3 dargestellte Kaminkühler mit oberem Versteifungsring, der durch den dort notwendigen Revisionssteg gebildet wird. Bei ausreichender Anordnung obiger Maßnahmen kann das steifknotige System ohne erheblichen Fehler durch ein Gelenkwerk ersetzt werden.

4. Die Zusatzspannungen infolge Steifknotigkeit sind bei pyramidenartigen Scheibenwerken geringer als bei prismatischen [1]).

Für die Berechnung des vielfach statisch unbestimmten steifknotigen Scheibenwerkes wählen wir zweckmäßig das längs der Kanten gelenkig verbundene Scheibenwerk — von nun an kurz „Gelenkwerk" genannt — als Grundsystem. Wir müssen uns daher zuerst mit letzterem beschäftigen.

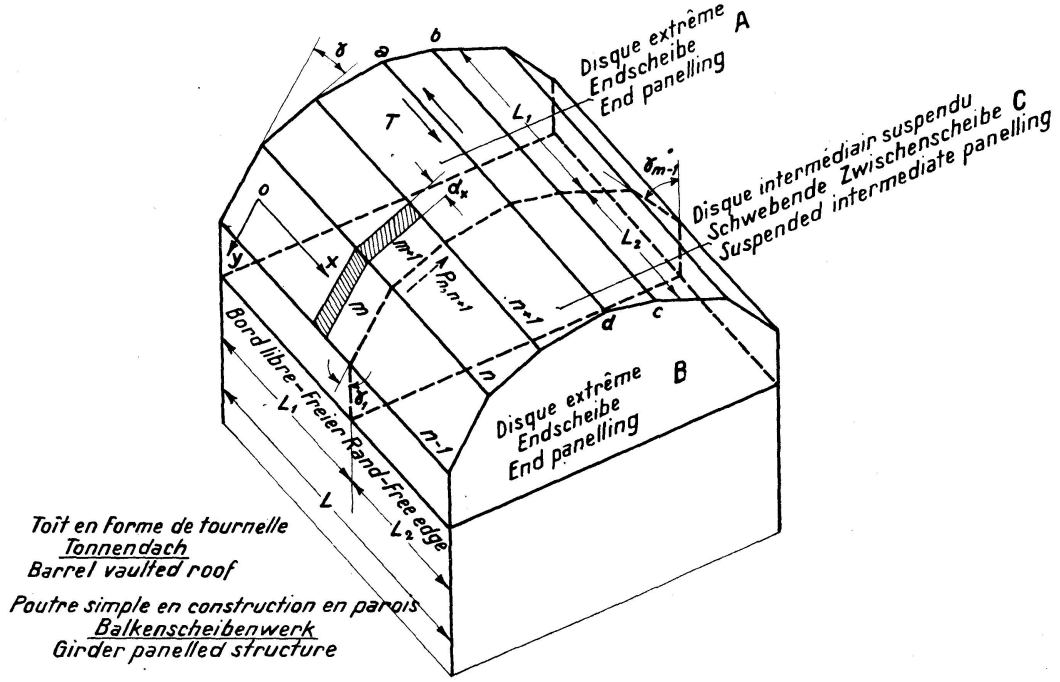


Fig. 1

B. Das gelenkige Scheibenwerk.

Im allgemeinen wird das Tragwerk von Lasten angegriffen werden, welche zwischen den Knotenpunkten n und $n+1$ liegen. Diese Lasten ersetzt man zuerst durch zwei gleichwertige, in den Ecken n und $n+1$ wirkenden Knotenlasten P_n und P_{n+1} (Fig. 4). Stoßen in einem Punkte n nur zwei Scheiben zusammen, so kann man P_n auf statisch bestimmtem Wege in die beiden Komponenten

$$S_{n,n+1} = P_n \cdot \frac{\cos \alpha_{n-1}}{\sin(\alpha_{n-1} - \alpha_n)} = P_n \cdot a_{n,n+1} \tag{a}$$

$$S_{n,n-1} = P_n \cdot \frac{\cos \alpha_n}{\sin(\alpha_{n-1} - \alpha_n)} = P_n \cdot a_{n,n-1} \tag{b}$$

zerlegen, von welchen die erste in der Scheibe $n, n+1$ und die zweite in der

[1]) Siehe die Abhandlung des Verfassers „Die Berechnung pyramidenartiger Scheibenwerke und ihre Anwendung auf Kaminkühler" in den „Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau", Band II, 1933/34.

Scheibe $n-1, n$ wirkt[2]). Führt man diese Zerlegung für jede Knotenlast P_n durch, so erhält man für jede Scheibe $n, n+1$ zwei Kräfte $S_{n,\,n+1}$ und $S_{n+1,\,n}$ welche sich zur Transversallast

$$p_{n,n+1} = S_{n+1,n} - S_{n,n+1} \tag{c}$$

zusammensetzen. Neben dieser wird im allgemeinen noch eine in der Ebene des Trägers $n, n+1$ wirkende verteilte Achsiallast $n_{n,\,n+1}$ und eine verteilte Momentenlast $m_{n\;\,n+1}$ vorhanden sein. Sowohl p als auch n und m sind über die Länge der Scheibenachsen stetig verteilt gedacht.

Schneiden wir aus zwei benachbarten Scheiben $n-1, n$ und $n, n+1$ zwei Elemente m und $m+1$ heraus und bringen an deren Schnittstellen die freiwerdenden Schnittkräfte Q, N und M neben $\tau_n \cdot dx$ an, so müssen diese mit den Belastungen, p, n und m ein ebenes Gleichgewichtssystem bilden. In Fig. 5 sind die beiden Elemente in eine Ebene geklappt zur Darstellung gebracht. Es folgen nun für das Element m die Gleichgewichtsbedingungen

$$Q'_{n-1,n} = -p_{n-1,n} \tag{1}$$

$$N'_{n-1,n} = \tau_{n-1} - \tau_n - n_{n-1,n} \tag{2}$$

$$M'_{n-1,n} = -\tau_n \cdot h_{m,n} - \tau_{n-1} \cdot h_{m,n-1} + Q_{n-1,n} - m_{n-1,n}. \tag{3}$$

Für das Element $m+1$ erhält man die analogen Gleichungen (1′), (2′) und (3′), indem man in Gl. (1), (2) und (3) den Zeiger n um eins vermehrt.

Außerdem müssen längs der Kanten n die bezogenen Dehnungen der anliegenden Ränder zweier benachbarter Scheiben in jedem Punkte übereinstimmen. Das heißt

$$\varepsilon_{m,n} = \varepsilon_{m+1,n} \tag{4}$$

oder

$$\frac{1}{E}\left[\frac{M_{n-1,n}}{J_{n-1,n}} \cdot h_{m,n} + \frac{N_{n-1,n}}{F_{n-1,n}}\right] = \frac{1}{E}\left[-\frac{M_{n,n+1}}{J_{n,n+1}} \cdot h_{m+1,n} + \frac{N_{n,n+1}}{F_{n,n+1}}\right]. \tag{5}$$

Unter der Annahme, daß bei jeder Scheibe für sich F und J konstant sind, ergibt die Differentiation der Gl. (5) nach x

$$M'_{n-1,n} \cdot \frac{h_{m,n}}{J_{n-1,n}} + M'_{n,n+1} \cdot \frac{h_{m+1,n}}{J_{n,n+1}} + \frac{N'_{n-1,n}}{F_{n-1,n}} - \frac{N'_{n,n+1}}{F_{n,n+1}} = 0. \tag{6}$$

Setzt man Gl. (2) und (3), Gl. (2′) und (3′) in Gl. (6) ein, ordnet um und differentiert nachher nochmals nach x, so ergibt sich unter Bedachtnahme auf Gl. (1) und (1′)

$$\begin{aligned}\tau'_{n-1}\left(\frac{h_{m,n} \cdot h_{m,n-1}}{J_{n-1,n}} - \frac{1}{F_{n-1,n}}\right) + \tau'_n\left(\frac{h^2_{m,n}}{J_{n-1,n}} + \frac{h^2_{m+1,n}}{J_{n,n+1}} + \frac{1}{F_{n-1,n}} + \frac{1}{F_{n,n+1}} + \right.\\ \left. + \tau'_{n+1}\left(\frac{h_{m+1,n} \cdot h_{m+1,n+1}}{J_{n,n+1}} - \frac{1}{F_{n,n+1}}\right) = + \frac{n'_{n,n+1}}{F_{n,n+1}} - \frac{n'_{n-1,n}}{F_{n-1,n}}\right.\\ - (p_{n-1,n} + m'_{n-1,n})\frac{h_{m,n}}{J_{n-1,n}} - (p_{n,n+1} + m'_{n,n+1})\frac{h_{m+1,n}}{J_{n,n+1}}\,^{3)}.\end{aligned} \tag{7}$$

Haben die einzelnen Scheiben rechteckigen Querschnitt und wechselt die Dicke $d_{n,\,n+1}$ derselben mit der Abszisse x (Fig. 1), so lautet Gl. (5)

$$\frac{F_{n,n+1}}{F_{n-1,n}} \cdot \left[\frac{6\,M_{n-1,n}}{h_{n-1,n}} + N_{n-1,n}\right] = \left[-\frac{6\,M_{n,n+1}}{h_{n,n+1}} + N_{n,n+1}\right] \tag{5a}$$

---

[2]) Die Reihenfolge der Indices gibt die positive Kraftwirkung an.

[3]) Auf die Torsionssteifigkeit der einzelnen Scheiben wurde keine Rücksicht genommen.

Nehmen wir an, daß

$$d_{n,n+1} = \varkappa_{n,n+1} \cdot f(x),$$

wobei die Funktion f für jede Scheibe dieselbe Gestalt haben soll, so ergibt sich

$$\frac{1}{k_n(x)} = \frac{F_{n,n+1}}{F_{n-1,n}} = \frac{b_{n,n+1}}{b_{n-1,n}} \cdot \frac{h_{n,n+1}}{h_{n-1,n}} = \frac{\varkappa_{n,n+1}}{\varkappa_{n-1,n}} \cdot \frac{h_{n,n+1}}{h_{n-1,n}} = \text{konstant.}$$

Differentieren wir Gl. (5a) einmal nach x, setzen in die so erhaltene Gleichung Gl. (2), (3), (2′) und (3′) ein, ordnen um und differentieren nachher nochmals nach x, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Gl. (1) und (1′)

$$\tau'_{n-1} + 2(1+k_n)\,\tau'_n + k_n\,\tau'_{n+1} = -\frac{3}{h_{n-1,n}}(p_{n-1,n} + m'_{n-1,n}) - \frac{3\,k_n}{h_{n,n+1}} \cdot (p_{n,n+1} + m'_{n,n+1})$$
$$- \tfrac{1}{2}\,n'_{n-1,n} + \tfrac{1}{2}\,n'_{n,n+1} \tag{7a}$$

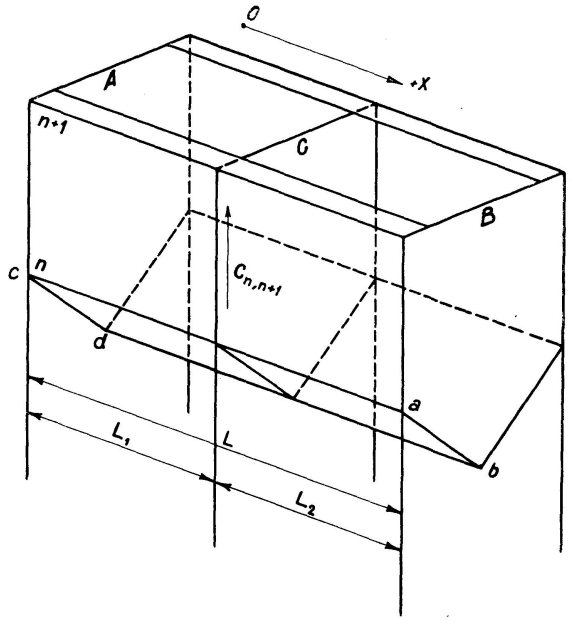


Fig. 2

Wir sind nun in der Lage, auch Scheibenwerke zu berechnen, bei welchen die Scheibendicken mit der Abszisse x wechseln. Die einzige Voraussetzung dabei ist, daß sich bei allen Scheiben die Dicke gleichartig ändert, was man bei der konstruktiven Durchbildung leicht einhalten kann.

Da für jede Kante n eine solche Beziehung (7) oder (7a) aufgestellt werden kann, gewinnt man ebensoviele Gleichungen als Kanten, somit als unbekannte Funktionen $\tau_n(x)$ vorhanden sind. Die Gl. (7) sind somit die Bestimmungsgleichungen des Problems. Da wir bei der Herleitung dieser Gleichungen über die Art der Belastung und des Tragwerkes keinerlei besondere Voraussetzungen treffen mußten, gilt das System (7) auch ganz allgemein für jedes prismatische gelenkige Scheibenwerk. Bei der Bildung der ersten und letzten Gleichung von (7) sind die jeweiligen Randbedingungen zu berücksichtigen. So ist z. B. für einen freien Rand $\tau_0 \equiv 0$ (Fig. 1) und für symmetrische Tragwerke unter symmetrischer Belastung das in der Symmetrieebene liegende $\tau \equiv 0$. Ferner sind bei antisymmetrischer Belastung die zur Symmetrieebene symmetrisch liegenden τ einander gleich usw. Löst man das

mit Hilfe dieser sogenannten Randbedingungen „erster Art" gebildete System (7) auf, so erhält man $\tau'_n(x)$ als Funktion von x, woraus sich

$$\tau_n = \int \tau_n \cdot dx + C_n = \tau_n + C_n \tag{8}$$

ergibt.

Die in Gl. (8) enthaltenen Integrationskonstanten C_n ergeben sich aus der Belastungsart des Scheibenwerkes. Wir wollen diese C_n allgemein für ein Scheibenwerk, bei welchem die einzelnen Träger $a\,b\,c\,d$ in den Endscheiben A und C balkenartig gelagert sind, ermitteln. Solche Tragwerke nennt man gelenkige „Balkenscheibenwerke". Im allgemeinen werden die Lasten nur abteilungsweise stetig sein, wie es in Fig. 6, in der das Scheibenwerk in eine Ebene geklappt zur Darstellung gebracht wurde, ersichtlich ist. Legt man durch jede Unstetigkeitsstelle der Belastung eine zu den Endscheiben parallele Ebene, so wird das Scheibenwerk in μ Sektionen zerlegt. Schreibt man für eine jede von diesen ein Bestimmungssystem (7) an und löst es auf, so ergibt sich für jede Sektion je eine Gleichung

$$\tau_{n,\nu} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m} a_{n\varrho} \int (p_{\varrho,\varrho+1;\nu} + m'_{\varrho,\varrho+1;\nu})\, dx + \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m} b_{n\varrho} \cdot n_{\varrho,\varrho+1;\nu} + C_{n,\nu} = \bar{\tau}_{n\nu} + C_{n,\nu}. \tag{8a}$$

Da links und rechts einer Belastungsunstetigkeitsstelle die Schubspannungen einander gleich sein müssen, bestehen die Beziehungen

$$\tau_{n\nu}(x_{\nu+1}) = \tau_{n,\nu+1}(x_{\nu+1}), \tag{9}$$

welche unter Bedachtnahme auf Gl. (8 a) in

$$C_{n\,\nu} - C_{n,\nu+1} = \Delta_{n,\nu+1} \tag{10}$$

übergehen. In diesen Gleichungen stellt $\Delta_{n,\nu+1}$ den Sprung dar, den die Funktion $\bar{\tau}_{n,\nu}$ beim Übergang von der νten in die $\nu+1$te Sektion macht. Solche Beziehungen (10) gibt es $\mu - 1$ je Kante. Addiert man die ersten ν der Gleichungen (10), so erhält man

$$C_{n,\nu} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu} \Delta_{n,\nu+1} + C_{n,0}, \tag{11}$$

woraus mit Gl. (8 a)

$$\tau_{n,\nu} = \bar{\tau}_{n,\nu} - \sum_{0}^{\nu} \Delta_{n,\nu+1} + C_{n,0} \tag{12}$$

folgt. Wir haben nun in der Kante n alle $C_{n,\nu}$ durch $C_{n,o}$ ausgedrückt und dadurch die Anzahl der noch zu bestimmenden Konstanten $C_{n,o}$ auf die Kantenzahl $m+1$ vermindert. Da die einzelnen Scheiben in den Endscheiben balkenartig gelagert sind, muß jede Scheibe gegen achsparallele Verschiebung im Gleichgewicht stehen. Es folgt daher die Relation

$$\sum_{0}^{\mu-1} \int_{\nu}^{\nu+1} (-\tau_{n,\nu} + \tau_{n+1,\nu} + n_{n,n+1})\, dx = 0, \tag{13}$$

welche durch Einsetzen der Gl. (12) in

$$L \cdot [C_{n+1,0} - C_{n,0}] = \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} L \left[\bar{\Delta}_{\nu,n} \sum_{0}^{\nu} (\Delta_{n+1,\nu+1} - \Delta_{n,\nu+1}) + \int_{\nu}^{\nu+1} (\bar{\tau}_{n,\nu} - \bar{\tau}_{n+1,\nu} - n_{n,n+1})\, dx \right] \tag{14}$$

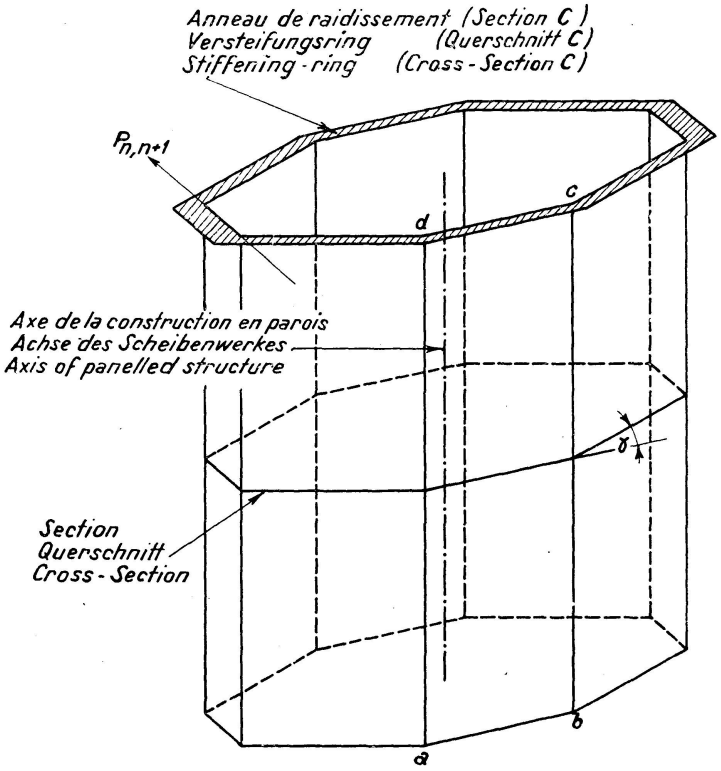
$$\bar{\Delta}_{\nu n} = x_{\nu+1} - x_{\nu}$$

übergeht. Aus diesen zweigliederigen Gleichungen können unter Hinzuziehung der Randbedingungen „erster Art" die Integrationskonstanten $C_{n,o}$ bestimmt werden.

Wie rasch dieses Verfahren zum Ziele führt, soll an dem Belastungsfall der Fig. 7 gezeigt werden. Man teilt das Tragwerk in drei Sektionen. Nachdem in der ersten und dritten Sektion $p \equiv 0$, so folgt

$$\tau'_{n,1} = 0; \qquad \tau'_{n,2} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m} a_{n\varrho} \cdot p_{\varrho,\varrho+1}; \qquad \tau'_{n,3} = 0 \tag{15}$$

$$\tau_{n,1} = C_{n,0}; \qquad \tau_{n,2} = x \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m} a_{n\varrho} \cdot p_{\varrho,\varrho+1} + C_{n,2}; \qquad \tau_{n,3} = C_{n,3}. \tag{15a}$$



Tour refrigérante – Kühlturm – Cooling tower
Construction en parois en porte-à-faux.
Kragscheibenwerk – Candilever panelled structure.

Fig. 3

Mit Hilfe der Gl. (10) und (11) erhalten wir die Gl. (12) in der Form

$$\begin{aligned} \tau_{n,1} &= C_{n,0} \\ \tau_{n,2} &= \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m} a_{n\varrho} \cdot p_{\varrho,\varrho+1} \cdot (x - l_1) + C_{n,0} \\ \tau_{n,3} &= l_2 \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m} a_{n\varrho} \cdot p_{\varrho,\varrho+1} + C_{n,0}. \end{aligned} \tag{16}$$

Setzt man Gl. (16) in Gl. (13) ein, so ergibt sich die Differenzengleichung erster Ordnung

$$C_{n,0} - C_{n+1,0} = -\frac{1}{L}\left(\frac{l_2}{2} + l_3\right) \cdot \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m} (a_{n,\varrho} - a_{n+1,\varrho}) \cdot \overbrace{l_2 \cdot p_{\varrho,\varrho+1}}^{P_{\varrho,\varrho+1}}. \tag{17}$$

Sind die Kanten 0 und m freie Ränder, so muß $\tau_o \equiv \tau_m \equiv 0$ oder nach Gl. (16) $C_{o,o} = C_{m,o} = 0$ sein. Da für $n = o$ und $n = m$ die $a_{\varrho,n}$ nicht bestehen,

lautet die den Randbedingungen angepaßte Lösung von Gl. (17)

$$C_{n,0} = +\frac{1}{L}\left(\frac{l_2}{2} + l_3\right) \cdot \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m-1} - a_{\varrho,n} \cdot P_{\varrho,\varrho+1} \,. \qquad (18)$$

$$n = 1, 2 \ldots . m-1$$

Schrumpft l_2 auf Null zusammen, so gelangen wir zu Einzellasten $P_{n,\,n+1}$, welche in $\frac{l_2}{2}$ angreifen. Gl. (18) geht also über in

$$C_{n,0} = \frac{l_3}{L} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m-1} - a_{n,\varrho} \cdot P_{\varrho,\varrho+1} \,. \qquad (19)$$

Aus Gl. (18) ergeben sich unter Zuhilfenahme der Gl. (16) die Schubspannungen τ.

Dieses Verfahren ist exakt und dann leicht anwendbar, wenn die Auflösung der zu einer Sektion gehörigen Elastizitätsgleichungen einfach von

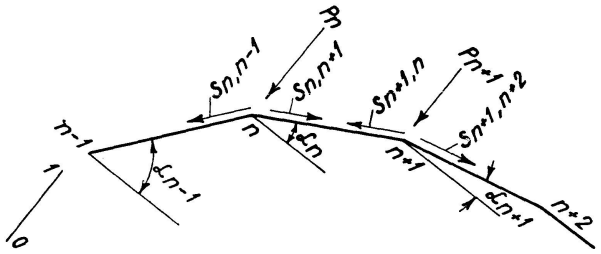


Fig. 4

statten geht. Ist dies nicht der Fall, so ist es zweckmäßiger, die unstetigen Belastungen in eine Fourier'sche Reihe zu entwickeln. Jedes Glied dieser Reihe stellt eine Partialbelastung des Tragwerkes dar, welche von Endscheibe zu Endscheibe stetig ist. Eine Zerlegung des Tragwerkes in Sektionen ist daher nicht mehr nötig. Nach dem Superpositionsgesetz ergibt sich das Gesamtresultat als Summe der zu jeder Teilbelastung gehörigen Teilresultate. Für die Scheibe $n, n+1$ lauten allgemein die Reihenentwicklungen

$$p_{n,n+1} = \frac{2}{L}\sum_1^\infty \sin\frac{k\pi x}{L} \cdot \int_0^L p_{n,n+1}(\xi) \cdot \sin\frac{k\pi\xi}{L}\, d\xi = \frac{2}{L}\sum_1^\infty A_{k;n,n+1} \cdot \sin\frac{k\pi x}{L} \qquad (20)$$

$$n_{n,n+1} = B_0 + \frac{2}{L}\sum_1^\infty \cos\frac{k\pi x}{L} \cdot \int_0^L n_{n,n+1}(\xi) \cdot \cos\frac{k\pi\xi}{L} = \frac{2}{L}\sum_1^\infty B_{k;n,n+1} \cdot \cos\frac{k\pi x}{L} \qquad (21)$$

$$B_0 = \frac{1}{L}\int_0^L n_{n,n+1}(\xi) \cdot d\xi \qquad (22)$$

und

$$n'_{n,n+1} = -\frac{2}{L}\sum_1^\infty \frac{L}{k\pi} \cdot \sin\frac{k\pi x}{L} \cdot \int_0^L n_{n,n+1}(\xi) \cdot \cos\frac{k\pi\xi}{L}\, d\xi =$$

$$-\frac{2}{L}\sum_1^\infty B_{k;n,n+1}\frac{L}{k\pi} \cdot \sin\frac{k\pi x}{L} \,. \qquad (23)$$

Analog ergibt sich für

$$m'_{n,n+1} = -\frac{2}{L}\sum_1^\infty \frac{L}{k\pi} \cdot \sin\frac{k\pi x}{L} \cdot \int_0^L m_{n,n+1}(\xi) \cdot \cos\frac{k\pi\xi}{L}\, d\xi =$$

$$-\frac{2}{L}\sum_1^\infty C_{k;n,n+1} \cdot \frac{L}{k\pi} \cdot \sin\frac{k\pi x}{L} \qquad (24)$$

Setzt man Gl. (20), (23) und (24) in die rechte Seite der Gl. (7) ein, so erhält man die Störungsfunktion in der Form

$$\frac{2}{L}\sum_{1}^{\infty} D_{k;\,n}\cdot\sin\frac{k\pi a}{L}, \tag{25}$$

wobei

$$\begin{aligned} D_{k;\,n} = &-\left(A_{k;\,n-1,n} - C_{k;\,n-1,n}\cdot\frac{L}{k\pi}\right)\cdot\frac{h_{m,n}}{J_{n-1,n}} \\ &-\left(A_{k;\,n,n+1} - C_{k;\,n,n+1}\cdot\frac{L}{k\pi}\right)\cdot\frac{h_{m+1,n}}{J_{n,n+1}} \\ &- B_{k;\,n,n+1}\cdot\frac{L}{k\pi\cdot F_{n,n+1}} + B_{k;\,n-1,n}\cdot\frac{L}{k\pi\cdot F_{n-1,n}} \end{aligned} \tag{26}$$

bedeutet. Die allgemeine Lösung des Systems (7) lautet somit

$$\tau_n' = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m} a_{n\varrho}\cdot\sum_{k=1}^{k=\infty} D_{k;\,n}\cdot\sin\frac{\pi k\cdot x}{L}\cdot(n = 0, 1, 2 \ldots . m). \tag{27}$$

Diese allgemeine Lösung ist sodann mit Hilfe der Randbedingungen „erster Art“ an das jeweilige Tragwerk anzupassen.

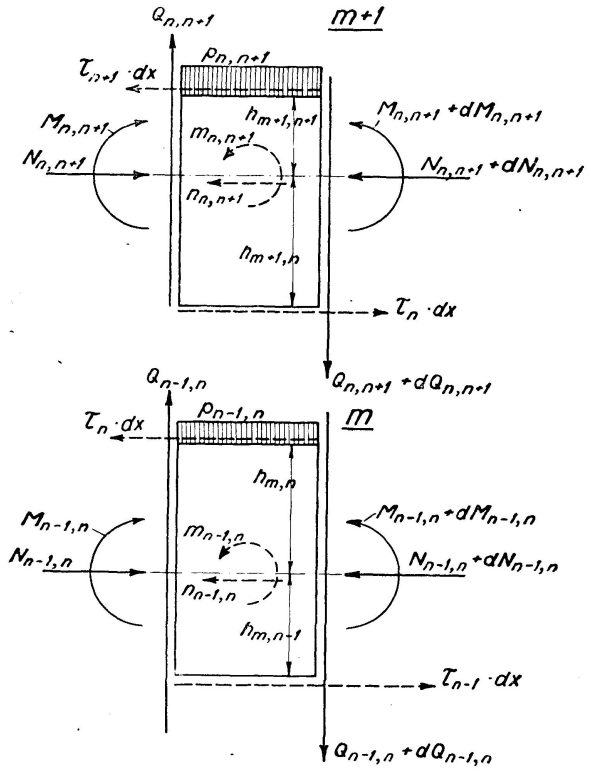


Fig. 5

Somit wäre die Balkentonne vollständig erledigt. Bei größeren Werten der Freilage L muß man aus konstruktiven Gründen vom einfachen Balkenscheibenwerk abgehen und zu äußerlich statisch unbestimmten Scheibenwerken übergehen, bei welchen die einzelnen Träger $n, n+1$ entweder alle oder nur einzelne statisch unbestimmt gelagert sind. So sind z. B. in Fig. 2

alle Einzelträger Durchlaufträger, in Fig. 13 ist jeder der beiden Randträger als Zweigelenkrahmen ausgebildet und endlich in Fig. 3 sind sämtliche Scheiben im oberen Versteifungsring elastisch abgestützt.

Um diese Tragwerke berechnen zu können, müssen wir uns vorerst mit den Formänderungen der gelenkigen Scheibenwerke im allgemeinen befassen. Denkt man sich das Gelenkwerk längs der Kante n aufgeschnitten, so könnte sich jede Scheibe $n-1, n$ in ihrer Ebene um $y_{n-1,n}$ durchbiegen. Es könnte sich also der Punkt n als Punkt der Scheibe $n-1, n$ nach n' und als Punkt der Scheibe $n, n+1$ nach n'' bewegen. Der Zusammenhang der Scheiben bei n kann nur wieder so hergestellt werden, indem sich n'' normal auf $n, n+1$ und n' normal auf $n-1, n$ bewegt. Wir erhalten im Schnitt dieser beiden normalen Bewegungsrichtungen den Punkt $\bar{n}$, in welchem sich n nach der Deformation befinden wird. Eine Auflösung des Viereckes $n\,n'\,\bar{n}\,n''$ ergibt (siehe Fig. 8)

$$\eta_{n,n+1} = \left(\frac{y_{n-1,n}}{\cos(\alpha_{n-1}-\alpha_n)} - y_{n,n+1}\right) \cdot \operatorname{cotg}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)$$

$$\eta_{n,n-1} = \left(y_{n-1,n} - \frac{y_{n,n+1}}{\cos(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}\right) \cdot \operatorname{cotg}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)\,. \tag{28}$$

Vermehrt man in diesen Gleichungen den Zeiger n um 1, so ergeben sich die für die weitere Rechnung nötigen Werte $\eta_{n+1,\,n+2}$ und $\eta_{n+1,n}$. Aus Fig. 8 folgt weiters der zur Scheibe $n, n+1$ gehörige Sehnendrehwinkel zu

$$\vartheta_{n,n+1} = \frac{\eta_{n+1,n} - \eta_{n,n+1}}{s_{n,n+1}} = \sum_{\nu=1}^{\nu=+1} e_\nu\, y_{n+\nu,\,n+\nu+1}\,. \tag{29}$$

Ferner besteht zwischen Durchbiegung und Biegemoment die bekannte Beziehung

$$E \cdot J_{n,n+1} \cdot y^{II}_{n,n+1} = -M_{n,n+1}\,. \tag{30}$$

Differentieren wir diese Gleichung zweimal nach x, so erhalten wir unter Bedachtnahme auf Gl. (1) und (3) die zur Bestimmung der Durchbiegung maßgebende Differentialgleichung

$$E \cdot J_{n,n+1} \cdot y^{IV}_{n,n+1} = \tau'_n \cdot h_{m+1,n} + \tau'_{n-1} \cdot h_{m+1,n+1} + m^{I}_{n,n+1} + p_{n,n+1}\,. \tag{31}$$

Bezeichnet man bei Festhaltung des Koordinatenanfangspunktes eine Achsverkürzung als positiv, so folgen letztere aus

$$E \cdot F_{n,n+1} \cdot \Delta^{II}_{n,n+1} = \tau_n - \tau_{n+1} - n_{n,n+1}\,. \tag{32}$$

Die zu Gl. (31) gehörigen vier Randbedingungen ergeben sich aus den Lagerungsbedingungen der einzelnen Träger $a\,b\,c\,d$ in den Endscheiben A und B. Und zwar ist in A und B, also für $x = 0$; $x = L$ die Durchbiegung $y_{n,n+1} = 0$. Die zwei fehlenden Randbedingungen ergeben sich aus Gl. (30). So ist z. B. für das Balkenscheibenwerk (Fig. 1) für $x = 0$; $x = L$ das Biegemoment $M_{n,n+1} = 0$. Für das Tragwerk der Fig. 13 ist bei den zwei Randträgern für $x = 0$; $x = L$ $M_{01} = M_{m-1,m} = -H \cdot h$ und bei allen übrigen Scheiben $M_{n,n+1} = 0$. Die beiden zur Gl. (32) gehörigen Integrationskonstanten folgen aus der Größe der Normalkraft $N_{n,n+1}$ in den beiden Endscheiben A und B.

Nach diesen Vorbereitungen kann man nun zur Lösung der äußerlich statisch unbestimmten Scheibenwerke übergehen. Man wählt hiezu das ge-

wöhnliche Balkenscheibenwerk als innerlich statisch unbestimmtes Grundsystem, das heißt man belastet dieses mit den gegebenen äußeren Lasten und den überzähligen Auflagerreaktionen der einzelnen Träger. Die Auflösung des so belasteten Balkenscheibenwerkes wird die oben erwähnten überzähligen Auflagerkräfte als Unbekannte enthalten. Die Bestimmungsgleichungen für diese ergeben sich aus den Auflagerbedingungen der statisch unbestimmt gelagerten Einzelscheiben. So ist z. B. in Fig. 2 für jede Scheibe in der Mittelscheibe C die Durchbiegung gleich Null. Das ergibt ebensoviele Bedingungen als Träger, somit als unbekannte Reaktionen $C_{n,\,n+1}$ vorhanden sind. Für Fig. 13 muß für die Randträger die Entfernung der Rahmenfußpunkte 1—2 erhalten bleiben. Es stehen also den beiden unbekannten Horizontalschüben H_1 und H_2 zwei Bedingungsgleichungen gegenüber.

Ist der Mittelquerschnitt durch eine starre Scheibe versteift, so müssen im Querschnitt C die Neigungswinkel γ_n zweier benachbarter Scheiben er-

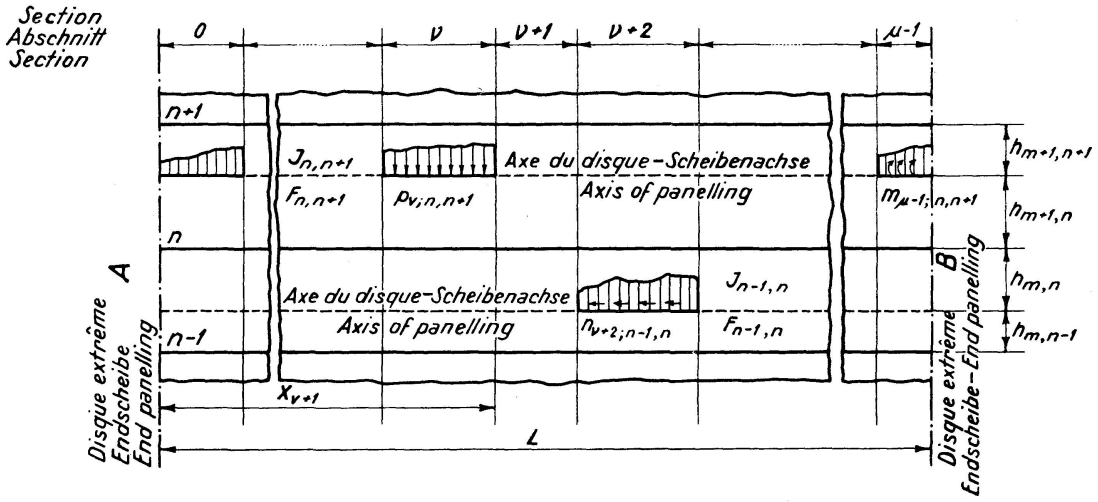


Fig. 6

halten bleiben. Also muß bei der mit den äußeren Lasten und den Verbindungskräften $P_{n,\,n+1}$ (Fig. 1) belasteten Balkentonne für $x = L_1$; $\vartheta_{n,\,n+1} - \vartheta_{n+1,\,n+2} = 0$ gelten. Die Unveränderlichkeit der beiden, den Randträgern anliegenden Winkeln γ_1 und γ_{m-1}, darf nicht als Bestimmungsbedingung gezählt werden, da die Änderung dieser Winkel infolge der nicht vorhandenen Torsionsfähigkeit der Randträger [3]) beliebig sein kann und durch die oben erwähnten Belastungen überhaupt nicht ausdrückbar ist. Bei m vorhandenen Scheiben gibt es also $m - 3$ Winkelbedingungen. Da die von den Berührungskräften $P_{n,\,n+1}$ ergriffene Mittelscheibe C im Gleichgewicht stehen muß, kommen zu den obigen $m - 3$ Bedingungen noch die drei Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma M = \Sigma H = \Sigma V = 0$ hinzu und wir erhalten im Gesamten m Gleichungen zur Bestimmung der m unbekannten $P_{n,\,n+1}$.

Ist ein Querschnitt des Tragwerkes nicht durch eine starre Scheibe, sondern nur durch einen biegungssteifen Rahmen ausgesteift, so wählt man zweckmäßig die Eckmomente des Rahmens als Überzählige. Diese Momente M_n erzeugen in den Scheiben normal zu deren Achsen wirkende Berührungskräfte $P_{n,\,n+1}$ von der Größe

[3]) Auf die Torsionssteifigkeit der einzelnen Scheiben wurde keine Rücksicht genommen.

$$P_{n,n+1} = (M_n - M_{n+1}) \frac{\sin(\gamma_n + \gamma_{n+1})}{s_{n,n+1} \cdot \sin\gamma_n \cdot \sin\gamma_{n+1}}$$
$$- (M_{n+1} - M_{n+2}) \frac{1}{s_{n+1,n+2} \cdot \sin\alpha_{n+2}} +$$
$$+ (M_n - M_{n-1}) \frac{1}{s_{n-1,n} \cdot \sin\alpha_{n-1}} \tag{33}$$

Bedeuten $\mathring{\vartheta}_{n,n+1}$ die Sehnendrehwinkel in Querschnitt C des mit $P_{n,n+1}$ und den äußeren Lasten belasteten und vom Versteifungsrahmen losgelösten Gelenkwerkes, so kann für jede Ecke eine Dreimomentengleichung

$$s'_{n-1,n} \cdot M_{n-1} + 2(s'_{n-1,n} + s'_{n,n+1}) \cdot M_n + s'_{n,n+1} \cdot M_{n+1} - 6EJ \cdot (\vartheta_{n-1,n} - \vartheta_{n,n+1}) = 0 \tag{34}$$

aufgestellt werden, womit wir die Gleichungen für die Ermittlung der M_n gefunden haben.

Sämtliche in diesen Rechnungen vorkommenden Auflagerbedingungen und Verformungen ergeben sich selbstverständlich aus den durch Gl. (31) und (32) errechneten Biegelinien der einzelnen Scheiben $n, n+1$.

Wie schon anfangs dieses Abschnittes erwähnt wurde, ist die Zerlegung der Knotenlasten P_n in die Komponenten $S_{n,n+1}$ nur dann auf statisch bestimmtem Wege möglich, wenn in einer Kante nur zwei Scheiben zusammenstoßen. Treffen in einer Kante n μ Scheibenzüge zusammen (Fig. 9), so ergibt sich zunächst durch eine ähnliche Betrachtung wie für zwei Scheiben die Gleichungsgruppe

$$\tau'_{\nu-1}\left(\frac{h_{m,n} \cdot h_{m,\nu-1}}{J_{n,\nu-1}} - \frac{1}{F_{n,\nu-1}}\right) + \tau'_{n,\nu-1}\left(\frac{h^2_{m,n}}{J_{n,\nu-1}} + \frac{1}{F_{n,\nu-1}}\right) +$$
$$+ \tau'_{n,\nu}\left(\frac{h^2_{m+1,\nu}}{J_{n\nu}} + \frac{1}{F_{n,\nu}}\right) + \tau'_{\nu}\left(\frac{h_{m-1,n} \cdot h_{m+1,\nu}}{J_{n,\nu}} - \frac{1}{F_{n,\nu}}\right) =$$
$$= -(p_{n,\nu-1} + m'_{n,\nu-1}) \cdot \frac{h_{m,n}}{J_{n,\nu-1}} - (p_{n,\nu} + m'_{n,\nu}) \cdot \frac{h_{m+1,\nu}}{J_{n,\nu}} + \frac{n'_{n,\nu}}{F_{n,\nu}} - \frac{n'_{n,\nu-1}}{F_{n,\nu-1}}, \tag{35}$$

wobei die Schubspannungen $\tau_{n;\nu-1}$ und $\tau_{n;\nu}$ in den Schnitten $\nu - 1$ und ν wirken. So wie für die beiden Scheibenzüge $\nu - 1$ und ν läßt sich für je zwei weitere Scheibenzüge ν und $\nu + 1$ eine solche Gleichung aufstellen. Das gibt $\mu - 1$ Gleichungen. Trennt man längs der Schnitte $\nu - 1$, ν, $\nu + 1$ usw. die Träger $n, \nu - 1$; n, ν; $n, \nu + 1$ usw. ab, so bleibt ein Fragment n übrig, auf welchem die Schubkräfte $\tau_{n,\nu-1}$; $\tau_{n,\nu}$; $\tau_{n,\nu+1}$ usw. wirken. Da n im Gleichgewicht stehen muß, folgt die μte Bedingung für die $\tau_{n,\nu}$

$$\sum_1^{\mu} \tau_{n,\nu} = 0. \tag{36}$$

In den Gleichungen (35) sind die Komponenten $S_{n,\nu}$ der Knotenlast P_n in den $p_{n,\nu}$ noch latent enthalten. Für deren Bestimmung gelten zunächst die beiden Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} S_{n,\nu} \cdot \sin\alpha_{n,\nu} &= P_n \cdot \sin\alpha_n \\ \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} S_{n,\nu} \cdot \cos\alpha_{n,\nu} &= P_n \cdot \cos\alpha_n . \end{aligned} \tag{37}$$

Die längs der Ränder n losgelösten Scheiben n, ν würden sich um den Betrag

$y_{n,\nu}$ in ihrer Ebene durchbiegen. Da jedoch alle μ Scheiben bei n tatsächlich zusammenhängen, müssen die Ränder n, der im obigen Sinne freigemachten Scheiben, alle dieselbe Verschiebungskomponente ξ_n und η_n haben. Fällt man also in den Endpunkten der Durchbiegungsvektoren $y_{n,n+1}$ auf die dazugehörigen Scheibenebenen die Normalen, so müssen sich letztere alle im Punkte $\bar{n}$ schneiden. Es besteht also für jede Scheibe die Beziehung

$$y_{n,\nu} = \eta_n \cdot \sin \alpha_{n,\nu} + \xi_n \cdot \cos \alpha_{n,\nu}. \tag{38}$$

Setzt man die aus Gl. (35) errechneten $\tau'_{n,\nu}$ in die Gl. (31) ein und integriert diese mit Hilfe der schon besprochenen Randbedingungen, so ergeben sich μ Gleichungen, in welchen ξ_n, η_n und $S_{n,\nu}$ noch als Unbekannte vorkommen. Nimmt man zu diesen μ Beziehungen noch die beiden Gl. (37) hinzu, so ist man im Besitze von $\mu + 2$ Beziehungen, aus welchen sich die $\mu + 2$ Unbekannten ξ_n, η_n und $S_{n,\nu}$ $(\nu = 1, 3 \ldots \mu)$ berechnen lassen.

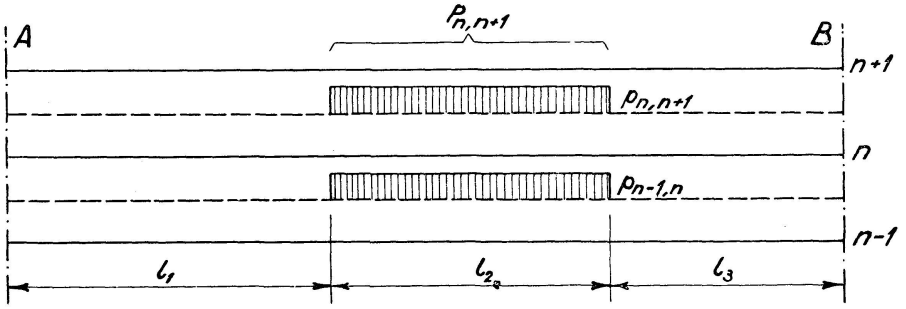


Fig. 7

Hat man nun die Schubspannungen τ und auch die etwaigen äußerlich unbestimmten Auflagerkräfte bestimmt, so ergeben sich die Normalkräfte zu

$$N_{n,n+1} = \int_0^x (\tau_n - \tau_{n+1})\, dx + \mathfrak{N}_{n,\ +1} \tag{39}$$

und die Momente zu

$$M_{n,n+1} = -\int_0^x (\tau_n \cdot h_{m+1,n} + \tau_{n+1} \cdot h_{m+1,n+1})\, dx + \mathfrak{M}_{n,n+1}) \tag{40}$$

worin $\mathfrak{N}_{n,\,n+1}$ bezw. $\mathfrak{M}_{n,\,n+1}$ die Normalkraft bezw. das Moment ist, welches von der äußeren Belastung und den eventuell vorhandenen unbestimmten Auflagerkräften herrührt. Hernach ergeben sich aus

$$\sigma_{\substack{n+1\\n}} = \frac{N_{n,n+1}}{F_{n,n+1}} \pm \frac{M_{n,n+1}}{J_{n,n+1}} \cdot h_{m+1,\substack{n+1\\n}} \tag{41}$$

die Randspannungen der Scheibe $n, n+1$. Ermitteln wir die Spannung in der Kante n das eine Mal als Randspannung der Scheibe $n, n+1$ und das zweite Mal als Randspannung der Scheibe $n-1, n$, so müssen dieselben Werte herauskommen. Dieser Umstand kann für die Gelenkwerke als durchgreifende Rechenkontrolle benützt werden.

Nach diesen Betrachtungen über die Gelenkwerke gehen wir nun zu den steifknotigen Scheibenwerken über.

C. Das steifknotige Scheibenwerk.

Wie aus der Einleitung hervorgeht, werden bei den steifknotigen Scheibenwerken die Biegemomente X_n und die Querkräfte Q_z von Scheibe zu Scheibe übertragen. Schneidet man aber aus einer Scheibe ein Element von

der Länge dx heraus, so müssen an diesem wegen der allseitigen Plattenwirkung außer den bereits erwähnten Wirkungen M, N, Q, X, Q_z und τ noch die neu hinzukommenden Wirkungsgrößen M_y und Q_y als Schnittkräfte angebracht werden[3]) (Fig. 10). Wir können aber aus folgenden Gründen M_y und Q_y praktisch genügend genau gleich Null setzen.

a) Die Dicke der Scheibe ist wohl in Bezug auf deren Länge L immer sehr klein.

b) Jede Scheibe $n-1, n$ ist eine Platte, welche in den Querscheiben A, B, C usw. fest und in den Kanten $n-1$ und n nachgiebig gelagert ist. Da nun jede Scheibe ein Rechteck ist, dessen Länge L gegenüber seiner Höhe $s_{n-1,n}$ groß ist, kann man die Biegewirkung über die große Spannweite L gegenüber der Biegewirkung über die kleine Spannweite $s_{n-1,n}$ vernachlässigen. Selbstverständlich werden aber in der Nähe der Querscheiben A, B, C usw. die M_y doch größere Werte M'_y annehmen. Dieses Nichtzutreffen der obigen Näherung bleibt jedoch örtlich begrenzt, da die Rückwirkung der M'_y auf das Gesamttragwerk fast Null ist. Man bedenke, daß Wirkungsgrößen, die nur an den Auflagern eines Trägers angreifen, auf seine Mitte nahezu keinen Einfluß haben.

Die Querdehnungszahl m setzen wir, wie es bei Betontragwerken üblich ist, gleich ∞. In Wirklichkeit ist $m = 10$. Der in der Plattentheorie auftretende, die Querdehnungen berücksichtigende Faktor $\frac{m^2}{m^2-1}$ ergibt sich dann zu $\frac{100}{99} \triangleq 1$. Diese Näherung ist daher sehr gut erfüllt.

Wir können uns nach diesen Erläuterungen die Wirkungsweise des Tragwerkes so vorstellen, daß wir uns jede Scheibe in unendlich viele Elemente von der Breite dx zerlegt denken. Diese Elemente müssen aber längs der Schnitte so verbunden werden, daß zwar die Größen M, N, Q, X, τ und Q_z, nicht aber M_y und Q_y von einem Element zum anderen übertragen werden können. Man denke sich also zwischen zwei Scheibenelementen nach Fig. 11 ein unendlich schmales Fachwerk eingebaut. Längs der Kante n sind jedoch die Elemente zweier benachbarter Scheiben miteinander steif verbunden. Nach diesen Erläuterungen kommen also beim steifknotigen Scheibenwerk zu den bereits bekannten Wirkungsgrößen M, N, Q, und τ der Gelenkwerke nur noch die Eckmomente $X_n(x)$ und Q_z neu hinzu.

In allen Fällen wählen wir das gelenkige Balkenscheibenwerk als innerlich statisch unbestimmtes Grundsystem. Wir belasten also letzteres mit den gegebenen Lasten P_n und den Eckmomenten X_n. Handelt es sich um äußerlich statisch unbestimmte steifknotige Scheibenwerke, so müssen, so wie beim Gelenkwerk, zu den obigen Wirkungen noch die überzähligen Auflagerreaktionen der einzelnen Scheiben am Grundwerk als äußere Belastung angebracht werden. Die X_n wandelt man am besten in mit P_n gleichgerichteten Knotenlasten π_n um. Hält man den in Fig. 12 angebrachten Drehsinn fest, so ergeben sich letztere zu

$$\pi_n = \frac{X_{n-1}}{l_{n,n-1}} - X_n \frac{l_{n,n+1} + l_{n,n-1}}{l_{n,n+1} \cdot l_{n-1,n}} + \frac{X_{n+1}}{l_{n,n+1}} \tag{42}$$

Es wirkt nun in jedem Knoten die Gesamtlast

$$\overline{P}_n = \pi_n + P_n. \tag{43}$$

Diese verwandelt man nach Gl. (a), (b) und (c) in Transversallasten $p_{n,n+1}$,

[3]) Auf die Torsionssteifigkeit der einzelnen Scheiben wurde keine Rücksicht genommen.

welche in den einzelnen Scheibenebenen normal zu deren Achsen wirken. Sind außerdem noch äußerlich statisch unbestimmte Auflagerreaktionen der einzelnen Träger vorhanden, so werden diese nach Gl. (20) in Fourier'sche Reihen entwickelt. Man erhält daher durch Addition aller dieser Wirkungen schließlich die Gesamtbelastung des Grundsystems zu

$$\bar{p}_{n,n+1} = p_{n,n+1} + \sum_{\nu=n-2}^{\nu=n+1} a_\nu X_\nu + \frac{2}{L}\sum_{1}^{\infty} A_{k;\,n,n+1} \cdot \sin\frac{k\pi x}{L} \tag{44}$$

$$\bar{n}'_{n,n+1} = n'_{n,n+1} - \frac{2}{L}\sum_{1}^{\infty} B_{k;\,n,n+1} \cdot \frac{L}{\pi k} \cdot \sin\frac{\pi k x}{L}$$

$$\bar{m}'_{n,n+1} = m'_{n,n+1} + \frac{2}{L}\sum_{1}^{\infty} C_{k;\,n,n+1} \cdot \frac{L}{k\pi} \cdot \sin\frac{\pi k x}{L}.$$

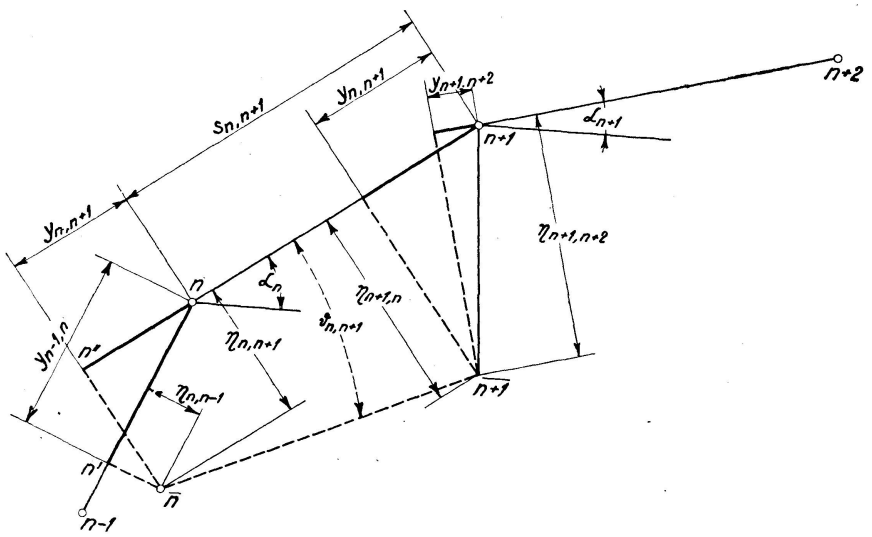


Fig. 8

Löst man nun das in obigem Sinne belastete gelenkige Grundwerk mit Hilfe des Systems (7) auf, so erhält man unter Benutzung der Gl. (26) und (27)

$$\tau'_n = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} [b_\nu (p_{\nu,\nu+1} + m'_{\nu,\nu+1}) + c_\nu \cdot n'_{\nu,\nu+1}] + \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m} a_{n\varrho} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} D_{k,\varrho} \cdot \sin\frac{k\pi x}{L} + \sum_{\nu=0}^{\nu=m} d_\nu \cdot X_\nu. \tag{45}$$

In dieser Gleichung stammt der erste Ausdruck von der gegebenen Belastung des Tragwerkes, der zweite von den überzähligen Auflagerkräften der einzelnen Scheiben und endlich der dritte von den Eckmomenten X_n. Nach viermaliger Differentiation und entsprechender Subtraktion folgt aus Gl. (29)

$$\vartheta^{IV}_{n-1,n} - \vartheta^{IV}_{n,n+1} = \sum_{\nu=-2}^{\nu=+1} f_\nu \cdot y^{IV}_{n+\nu.\,n+\nu+1}. \tag{46}$$

Setzen wir in Gl. (31) für die τ', p und m' die $\bar{\tau}'$, $\bar{p}$ und $\bar{m}'$ der Gl. (44) und (45) ein, so erhalten wir mit Hilfe der Gl. (46)

$$\vartheta^{IV}_{n-1,n} - \vartheta^{IV}_{n,n+1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} [g_\nu (p_{\nu,\nu+1} + m'_{\nu,\nu+1}) + h_\nu \cdot n'_{\nu,\nu+1}] + \sum_{k=1}^{k=\infty} E_{k,n} \cdot \sin\frac{k\pi x}{L} + \sum_{\nu=0}^{\nu=m} j_\nu \cdot X_n. \tag{47}$$

Diese Gleichung stellt die Änderung des Neigungswinkels, der der Kante n benachbarten Scheiben $n, n+1$ und $n-1, n$, dar. Wenden wir daher für jede Ecke, in welcher ein Moment X_n auftritt, den „Dreimomentensatz" an, so erhalten wir mit Gl. (47)

$$s'_{-1,} \cdot X_{-1} + 2(s'_{n-1,n} + s'_{n,n+1}) \cdot X_n + s'_{n,n+1} \cdot X_{n+1} - 6EJ(\vartheta_{n-1,n} - \vartheta_{n,n+1}) = \Omega_{n,n-1} + \Omega_{n,n+1}. \tag{48}$$

In dieser Gleichung stellen die s' die reduzierten Längen der Polygonseiten $n, n+1$ und J das Vergleichträgheitsmoment von 1 m Scheibenlänge dar. Die Belastungsglieder Ω rühren von dem Umstande her, daß die Lasten zwischen den Knoten n angreifen. Differentieren wir Gl. (48) viermal nach x, so ergibt sich mit Hilfe von Gl. (47)

$$s'_{n-1,n} \cdot X^{IV}_{n-1} + 2(s'_{n-1,n} + s'_{n,n+1}) \cdot X^{IV}_n + s'_{n,n+1} \cdot X^{IV}_{n+1} - 6EJ \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=m} j_\nu \cdot X_\nu = 6EJ \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} [g_\nu (p_{\nu,\nu+1} + m'_{\nu,\nu+1}) + h_\nu \cdot n'_{\nu,\nu+1}] + 6EJ \sum_{k=1}^{k=\infty} E_{k,n} \cdot \sin \frac{k\pi x}{L} + \Omega_{n,n-1} + \Omega_{n,n+1} = S_n, \tag{49}$$

worin wir die Elastizitätsgleichungen des Problems gefunden haben. Sie sind simultane Differentialgleichungen vierter Ordnung, genau so wie beim elastisch gebetteten Träger, da es sich ja auch bei dieser Aufgabe um Träger handelt, die sich gegenseitig elastisch stützen. Die normale Integration dieses Gleichungssystems ist numerisch nahezu unmöglich. Wir beschreiten daher einen Näherungsweg, in dem wir die gesamten Störungsfunktionen S_n in Fourier'sche Reihen entwickeln. Es ergibt sich also

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=\infty} F_{n,k} \cdot \sin \frac{k\pi x}{L}. \tag{50}$$

Besteht die Störungsfunktion nur aus einem Sinusglied $F_{n,k} \cdot \sin \frac{k\pi x}{L} (n = 0, 1, 2, \ldots m)$, so lautet die Lösung von Gl. (49)

$$\eta_{n,k} = \varphi_{nk} \cdot \sin \frac{k\pi x}{L} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots . m), \tag{51}$$

wobei φ_{nk} noch zu bestimmende konstante Beiwerte bedeuten. Setzt man Gl. (51) in Gl. (49) ein, so erkennt man, daß Gl. (49) nur dann von Gl. (51) befriedigt wird, wenn

$$s'_{n-1,n} \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 \cdot \varphi_{n-1,k} + 2(s'_{n-1,n} + s'_{n,n+1}) \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 \cdot \varphi_{nk} + s'_{n,n+1} \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 \cdot \varphi_{n+1,k} - 6EJ \sum_{\nu=0}^{\nu=m} j_\nu \cdot \varphi_{\nu,k} = 6EJ \cdot F_{n,k} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots . m) \tag{52}$$

erfüllt ist. Gl. (52) sind lineare Gleichungen, welche zur Bestimmung der unbekannten Beiwerte $\varphi_{n,k}$ hinreichen. Nach einem bekannten Satze über nicht homogene, lineare Differentialgleichungen ergibt sich das den Randbedingungen angepaßte Integral zu

$$X_n = \sum_{k=1}^{k=\infty} \varphi_{n,k} \cdot \sin \frac{k\pi}{L} x \qquad n = 0, 1, 2 \ldots . m. \tag{53}$$

Für jedes Glied der Sinusreihe muß ein lineares Gleichungssystem (52) aufgelöst werden.

Der genaue Nachweis, daß die Lösung (53) tatsächlich auch allen Randbedingungen genügt, wurde vom Verfasser in seiner Abhandlung „Berechnung prismatischer Scheibenwerke“ erbracht[4]). Wir wollen daher diesen Beweis hier nicht wiederholen.

Handelt es sich um die Berechnung einer Balkentonne, so ist in Gl. (45) der zweite Summenausdruck gleich Null. Liegt jedoch ein äußerlich statisch unbestimmtes steifknotiges Scheibenwerk vor, so enthält das zweite Glied von Gl. (45) die überzähligen Auflagerreaktionen der einzelnen Träger *a b c d*. Die Bestimmungsgleichungen für diese findet man genau so wie beim Gelenkwerk aus den Auflagerbedingungen der einzelnen Scheiben. Es gilt also hiefür das in Abschnitt B Besprochene.

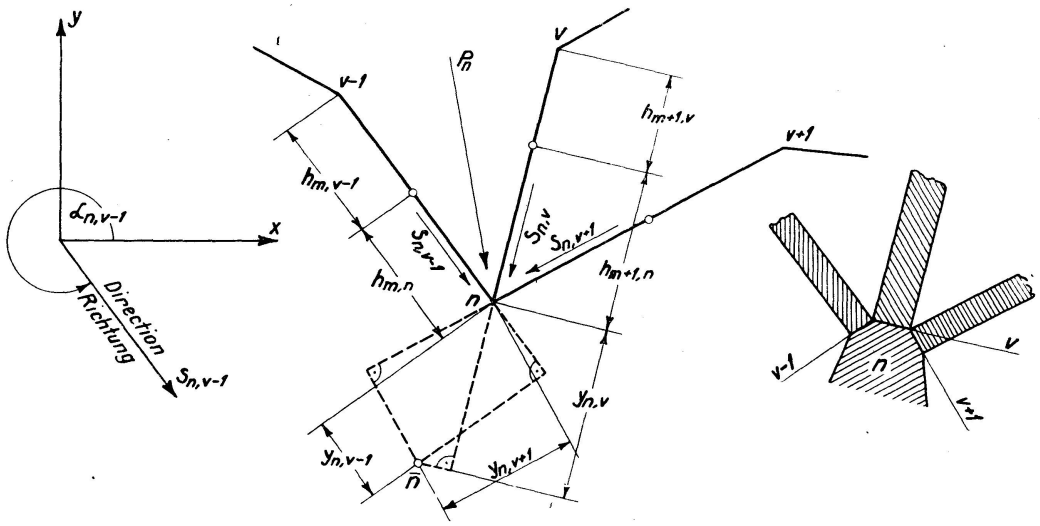


Fig. 9

D. Praktische Anwendung.

Wir führen in diesem Abschnitt die Berechnung eines steifknotigen Scheibenwerkes für das Eigengewicht durch, bei welchem die Randträger 01 und 0'1' infolge der großen Spannweite von 25 m als Zweigelenkrahmen ausgebildet sind. Aus Fig. 13 sind die Abmessungen des Tragwerkes ersichtlich.

Zuerst ermitteln wir die Knotenlasten P_n für das Eigengewicht:

Betonplatte 7 cm stark . .	0,168 t/m²
Pappe	0,022 „
	0,190 t/m²

Dachrinne . . 0,022 t/m².

Daraus folgt $P_2 = P_3 = P_4 = 2{,}30 \cdot 1{,}90 = 0{,}437$ t/m

und $P_1 = 1{,}15 \cdot 0{,}190 + 1{,}00 \cdot 0{,}15 \cdot 2{,}4 + 0{,}022 = 0{,}600$ t/m.

Nach Gl. (a) und (b) folgen die für die Zerlegung der P_n in $S_{n,n+1}$ und $S_{n+1,n}$ nötigen Beiwerte $a_{n,n+1}$ zu

$a_{21} = 4{,}828$; $a_{23} = 4{,}446$; $a_{32} = 5{,}034$; $a_{34} = 4{,}828$; $a_{43} = 5{,}0335$.

Mit Hilfe dieser Werte ergeben sich für das Eigengewicht die Transversal-

[4]) Siehe die Abhandlung des Verfassers „Die Berechnung der prismatischen Scheibenwerke“ in den „Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau“, Band I, 1932.

belastungen zu

$$p_{01} = 0{,}600 \text{ t/m}; \quad p_{12} = 2{,}110 \text{ t/m}; \quad p_{23} = 0{,}257 \text{ t/m}; \quad p_{34} = 0{,}0896 \text{ t/m}. \tag{54}$$

Als überzählige Größen wählen wir die Eckmomente X_n und den Horizontalschub H. Nachdem das Tragwerk sieben Kanten besitzt, ergeben sich zunächst sieben unbekannte Momente X_n. Infolge der Symmetrie um die Achse $I - I$, sinkt die Zahl der Unbekannten X_n zunächst auf 4. Da weiters der untere Rand der Rahmenscheibe frei ist und letztere keine Torsionsfähigkeit besitzt, ist auch $X_1 = 0$ [3]). Es sind somit nur mehr 3 Unbekannte X_2, X_3 und X_4 zu bestimmen. Ferner werden durch den am Fuß der Stütze angreifenden Horizontalschub H in den Riegel 01 des Rahmens R die bei $x = o$ und $x = L$ angreifenden Wirkungen $N = H$ und $M = -h \cdot H = -5 \cdot H$ übertragen. Diese unstetigen Lasten entwickeln wir nach Gl. (20) in die folgenden Fourier'schen Reihen

$$n_{01} = -\frac{4\,\mathrm{H}}{L}\left(\cos\frac{\pi x}{L} + \cos\frac{3\pi x}{L} + \cos\frac{5\pi x}{L} + \cdots\cdots\right) \tag{55}$$

$$m_{01} = +\frac{20\,\mathrm{H}}{L}\left(\quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad + \cdots\cdots\right) \tag{56}$$

$$n'_{01} = \frac{4\pi h}{L^2}\left(\sin\frac{\pi x}{L} + \sin\frac{3\pi x}{L} + \sin\frac{5\pi x}{L} + \cdots\cdots\right) \tag{57}$$

$$m'_{01} = -\frac{20\pi h}{L^2}\left(\quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad + \cdots\cdots\right) \tag{58}$$

Verwandelt man die X_n in Knotenlasten π_n, und diese nachher wieder in Transversalbelastungen und addiert letztere zu Gl. (54) hinzu, so erhalten wir

$$\begin{aligned} p_{01} &= 0{,}600 + 0{,}4948\,X_2; \quad p_{12} = 2{,}110 - 4{,}952\,X_2 + 2{,}199\,X_3; \\ p_{23} &= 0{,}257 + 6{,}513\,X_2 - 6{,}513\,X_3 + 2{,}199\,X_4; \\ p_{34} &= 0{,}0896 - 2{,}199\,X_2 + 8{,}7045\,X_3 - 6{,}5076\,X_4. \end{aligned} \tag{59}$$

Wir bringen nun am Balkengelenkwerk — das wir ja als Grundsystem wählen — die Wirkungen n_{01}, m_{01}, $\bar{p}_{01}$, $\bar{p}_{12}$, $\bar{p}_{23}$ und $\bar{p}_{34}$ als äußere Lasten an und lösen es auf. Zu diesem Behufe stellen wir unter Bedachtnahme der Randbedingungen „erster Art" $\tau_0 \equiv \tau_4 \equiv 0$ das Gleichungssystem (7) auf und erhalten

$$\begin{aligned} 4{,}146\,\bar{\tau}'_1 + \bar{\tau}'_2 \qquad &= -3{,}22\,\bar{p}_{01} - 1{,}30\,\bar{p}_{12} \\ &\quad\; - 3{,}22\,m'_{01} - 0{,}5367\,n'_{01} \\ \bar{\tau}'_1 + 4\bar{\tau}'_2 + \bar{\tau}'_3 &= -1{,}30\,\bar{p}_{12} - 1{,}30\,\bar{p}_{23} \\ \bar{\tau}'_2 + 4\bar{\tau}'_3 &= -1{,}30\,\bar{p}_{23} - 1{,}30\,\bar{p}_{34}. \end{aligned} \tag{60}$$

Setzen wir in Gl. (60) die Werte von Gl. (57), (58) und (59) ein und lösen hernach die Gl. (60) auf, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{\tau}'_1 &= -1{,}0026 + 1{,}2077\,X_2 - 1{,}1747\,X_3 + 0{,}2936\,X_4 - 0{,}8300\,m'_{01} - 0{,}1383\,n'_{01} \\ \bar{\tau}'_2 &= -0{,}5245 - 0{,}6146\,X_2 + 2{,}0035\,X_3 - 1{,}2175\,X_4 + 0{,}2212\,m'_{01} + 0{,}0367\,n'_{01} \\ \bar{\tau}'_3 &= +0{,}0185 - 1{,}2513\,X_2 - 1{,}2174\,X_3 + 1{,}7095\,X_4 - 0{,}0553\,m'_{01} - 0{,}0092\,n'_{01}. \end{aligned} \tag{61}$$

Wir können nun zur Aufstellung der Elastizitätsgleichungen übergehen. Zu diesem Zwecke drücken wir zuerst nach Gl. (29) die Sehnendrehwinkel $\vartheta_{n,n+1}$ durch die Durchbiegungen $y_{n,n+1}$ aus und erhalten

$$\begin{aligned} 2{,}30\,\vartheta_{12} &= -1{,}1379\,y_{01} + 5{,}5025\,y_{12} - 5{,}0582\,y_{23} \\ 2{,}30\,\vartheta_{23} &\qquad\qquad - 5{,}0582\,y_{12} + 9{,}9190\,y_{23} - 5{,}0582\,y_{34} \\ 2{,}30\,\vartheta_{34} &\qquad\qquad\qquad\qquad - 5{,}0582\,y_{23} + 14{,}9772\,y_{34}. \end{aligned} \tag{62}$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung (31) ergeben sich mit $J_{01} = 0.0125$ m⁴ und $J_{12} = 0.07097$ m⁴ unter Benützung der Gl. (61) die vierten Ableitungen der $y_{n,n+1}$ zu

$$EJ_{12}y_{01}^{IV} = +0{,}5604 + 6{,}2367\,X_2 - 3{,}3352\,X_3 + 0{,}8335\,X_4 + 3{,}3216\,m'_{01} - 0{,}3926\,n'_{01}$$
$$EJ_{12}y_{12}^{IV} = +0{,}3538 - 3{,}9099\,X_2 + 3{,}1528\,X_3 - 1{,}0625\,X_4 - 0{,}7001\,m'_{01} - 0{,}1168\,n'_{01}$$
$$EJ_{12}y_{23}^{IV} = -0{,}3249 + 4{,}3671\,X_2 - 5{,}6082\,X_3 + 2{,}7650\,X_4 + 0{,}1908\,m'_{01} + 0{,}0316\,n'_{01}$$
$$EJ_{12}y_{34}^{IV} = +0{,}1109 - 3{,}6359\,X_2 + 7{,}3045\,X_3 - 4{,}5417\,X_4 - 0{,}0636\,m'_{01} - 0{,}0106\,n'_{01}. \quad (63)$$

Differentiert man Gl. (62) viermal nach x und setzt hernach Gl. (63) ein, so erhalten wir nach Substraktion immer zweier aufeinanderfolgenden Gleichungen

$$EJ_{12}\cdot 2{,}30\cdot(\vartheta_{12}^{IV} - \vartheta_{23}^{IV}) = 8{,}5258 - 132{,}15\,X_2 + 159{,}03\,X_3 - 76{,}50\,X_4 - 14{,}3532\,m'_{01} - 1{,}3135\,n'_{01}$$
$$EJ_{12}\cdot 2{,}30\cdot(\vartheta_{23}^{IV} - \vartheta_{34}^{IV}) = -8{,}8792 + 158{,}03\,X_2 - 247{,}28\,X_3 + 137{,}73\,X_4 + 7{,}6730\,m'_{01} + 1{,}2764\,n'_{01}$$
$$EJ_{12}\cdot 2{,}30\cdot\ \vartheta_{34}^{IV} = +3{,}3059 - 76{,}545\,X_2 + 137{,}77\,X_3 - 82{,}01\,X_4 - 1{,}9176\,m'_{01} - 0{,}3186\,n'_{01}. \quad (64)$$

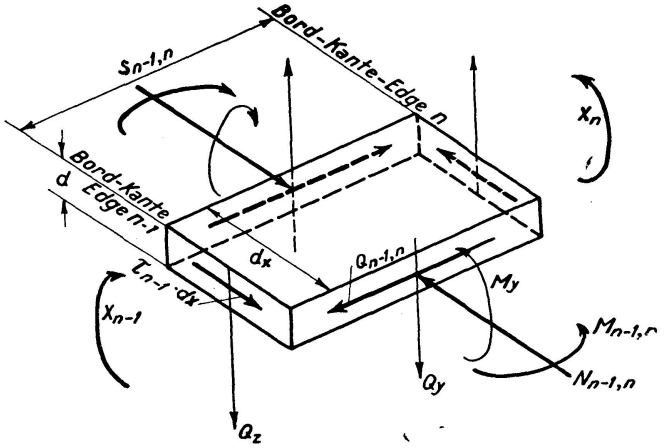


Fig. 10

Berücksichtigen wir, daß $X_1 = o$ und $X_4 = X'_4$ ist, so ergeben sich endlich nach Gl. (49) die mit dem Faktor $\frac{2{,}30\,J_{12}}{6J} = 951{,}89$ vervielfachten Elastizitätsgleichungen in der Form

$$8757{,}436\,X_2^{IV} + 2189{,}359\,X_3^{IV} + 132{,}151\,X_2 - 159{,}026\,X_3 + 76{,}503\,X_4 = 8{,}5258 - 14{,}3532\,m'_{01} - 1{,}3135\,n'_{01} + (\Omega_{12}^{IV} + \Omega_{23}^{IV})\cdot 951{,}89$$
$$2189{,}359\,X_2^{IV} + 8757{,}436\,X_3^{IV} + 2189{,}359\,X_4^{IV} - 158{,}031\,X_2 + 247{,}283\,X_3 - 137{,}730\,X_4 = -8{,}8792 + 7{,}6730\,m'_{01} + 1{,}2764\,n'_{01} + (\Omega_{23}^{IV} + \Omega_{34}^{IV})\cdot 951{,}89$$
$$2189{,}359\,X_3^{IV} + 4378{,}718\,X_4^{IV} + 76{,}545\,X_2 - 137{,}768\,X_3 + 82{,}008\,X_4 = 3{,}3059 - 1{,}9176\,m'_{01} - 0{,}3186\,n'_{01} + \Omega_{34}\cdot 951{,}89. \quad (65)$$

Unsere nächste Aufgabe besteht nun in der Auflösung des Systems (65). Zu diesem Zwecke müssen wir die rechten Seiten derselben in Fourier'sche Reihen entwickeln. Das von der Knotenzwischenbelastung herrührende Belastungsglied $\Omega_{n-1,n}$ lautet allgemein

$$\Omega_{n-1,n} = 0{,}190\,\frac{s^3}{4}\cdot\cos\alpha_{n-1}. \quad (66)$$

Daraus folgen die zu jeder Gleichung gehörigen Werte

$$\Omega_{12}+\Omega_{23}=-0{,}347\cdot\frac{s^3}{4};\quad \Omega_{23}+\Omega_{34}=-0{,}359\,\frac{s^3}{4};\quad \Omega_{34}=-0{,}179\,\frac{s^3}{4}, \tag{67}$$

deren Entwicklungen

$$\begin{aligned}
\Omega_{12}^{IV}+\Omega_{23}^{IV}&=-0{,}347\cdot\frac{s^3}{\pi}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\left[\sin\frac{\pi}{L}x+3^3\cdot\sin\frac{3\pi x}{L}+5^3\cdot\sin\frac{5\pi x}{L}+\cdots\right]\\
\Omega_{23}^{IV}+\Omega_{34}^{IV}&=-0{,}359\quad\text{"}\quad\left[\quad\text{"}\qquad\text{"}\qquad\text{"}\quad\right]\\
\Omega_{34}^{IV}\quad&=-0{,}179\quad\text{"}\quad\left[\quad\text{"}\qquad\text{"}\qquad\text{"}\quad\right]
\end{aligned} \tag{68}$$

lauten. Stellt man auch die Konstanten der rechten Seiten in einer Reihe

$$R=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{L}+\cdots\right) \tag{69}$$

dar, so ergeben sich unter Zuhilfenahme der Entwicklungen (57) und (58) die Fourier'schen Reihen der Störungsfunktionen S_n von Gl. (65) zu

$$\begin{aligned}
S_1 &= (10{,}5364+1{,}4168\,H)\cdot\sin\frac{\pi}{L}x+(-4{,}9945+4{,}3504\,H)\cdot\sin\frac{3\pi x}{L}+\\
&\qquad+(-37{,}7039+6{,}7605\,H)\cdot\sin\frac{5\pi x}{L}+\\
S_2 &= (-11{,}6279-0{,}7457\,H)\cdot\sin\frac{\pi}{L}x+(-12{,}4760-2{,}2371\,H)\cdot\sin\frac{3\pi x}{L}+\\
&\qquad+(42{,}5736-3{,}7285\,H)\cdot\sin\frac{5\pi x}{L}+\\
S_3 &= (+4{,}0371+0{,}1863\,H)\cdot\sin\frac{\pi}{L}x+(-3{,}0436+0{,}5589\,H)\cdot\sin\frac{3\pi x}{L}+\\
&\qquad+(-19{,}7347+0{,}9315\,H)\cdot\sin\frac{5\pi x}{L}.
\end{aligned} \tag{70}$$

Zu jedem Gliede dieser Störungsfunktionen gehört eine Partiallösung, zu deren Bestimmung wir drei Gleichungssysteme (52) brauchen. Dieses lautet für das erste Glied $\sin\frac{\pi x}{L}$

$$\begin{aligned}
134{,}3350\,\varphi_{12}-158{,}4795\,\varphi_{13}+76{,}5027\,\varphi_{14}&=a_1\\
-157{,}4850\,\varphi_{12}+249{,}4669\,\varphi_{13}-137{,}1838\,\varphi_{14}&=b_1\\
76{,}5453\,\varphi_{12}-137{,}2224\,\varphi_{13}+83{,}0997\,\varphi_{14}&=c_1
\end{aligned} \tag{71}$$

für das zweite Glied $\sin\frac{3\pi x}{L}$

$$\begin{aligned}
209{,}0422\,\varphi_{22}-114{,}8027\,\varphi_{23}+76{,}5027\,\varphi_{24}&=a_2\\
-113{,}8082\,\varphi_{22}+424{,}1741\,\varphi_{23}-93{,}5070\,\varphi_{24}&=b_2\\
76{,}5453\,\varphi_{22}-93{,}5456\,\varphi_{23}+258{,}8988\,\varphi_{24}&=c_2
\end{aligned} \tag{72}$$

und endlich für das dritte Glied $\sin\frac{5\pi x}{L}$

$$\begin{aligned}
1497{,}0512\,\varphi_{32}+182{,}200\,\varphi_{33}+76{,}5027\,\varphi_{34}&=a_3\\
182{,}2000\,\varphi_{32}+1612{,}183\,\varphi_{33}+203{,}496\,\varphi_{34}&=b_3\\
76{,}5453\,\varphi_{32}+203{,}496\,\varphi_{33}+1446{,}908\,\varphi_{34}&=c_3.
\end{aligned} \tag{73}$$

Nimmt man die Ausdrücke (70) für die Gl. (71), (72) und (73) als rechte Seiten, so lauten die Auflösungen obiger Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_{12} &= -0{,}00707; & \varphi_{22} &= -0{,}04263; & \varphi_{32} &= -0{,}02201; \\ \varphi_{13} &= -0{,}22556; & \varphi_{23} &= -0{,}04418; & \varphi_{33} &= -0{,}02270; \\ \varphi_{14} &= -0{,}31723; & \varphi_{24} &= -0{,}01510; & \varphi_{34} &= -0{,}00927; \end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{12} &= +0{,}0312; & \varphi_{22} &= +0{,}02171; & \varphi_{32} &= +0{,}00504; \\ \varphi_{13} &= +0{,}02309; & \varphi_{23} &= -0{,}00042; & \varphi_{33} &= -0{,}00307; \\ \varphi_{14} &= +0{,}01169; & \varphi_{24} &= -0{,}00441; & \varphi_{34} &= +0{,}00080. \end{aligned} \tag{75}$$

Mit diesen Ergebnissen ergibt sich die Zwischenlösung

$$\begin{aligned} X_2 &= (-0{,}00707 + 0{,}03120\,H)\cdot\sin\frac{\pi x}{25} + (-0{,}04263 + 0{,}02171\,H)\cdot\sin\frac{3\pi x}{25} \\ &\quad + (-0{,}02200 + 0{,}00504\,H)\cdot\sin\frac{5\pi x}{25} \\ X_3 &= (-0{,}22556 + 0{,}02309\,H)\cdot\sin\frac{\pi x}{25} + (-0{,}04418 - 0{,}00042\,H)\cdot\sin\frac{3\pi x}{25} \\ &\quad + (-0{,}02270 - 0{,}00307\,H)\cdot\sin\frac{5\pi x}{25} \\ X_4 &= (-0{,}31723 + 0{,}01169\,H)\cdot\sin\frac{\pi x}{25} + (-0{,}01510 - 0{,}00441\,H)\cdot\sin\frac{3\pi x}{25} \\ &\quad + (-0{,}00927 + 0{,}00080\,H)\cdot\sin\frac{5\pi x}{25}. \end{aligned} \tag{76}$$

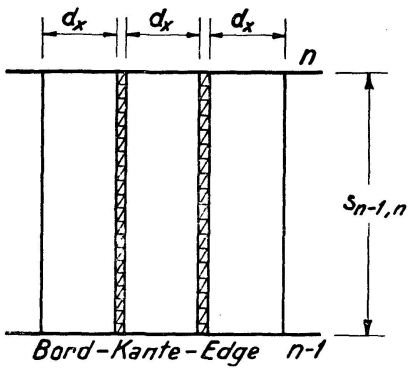


Fig. 11

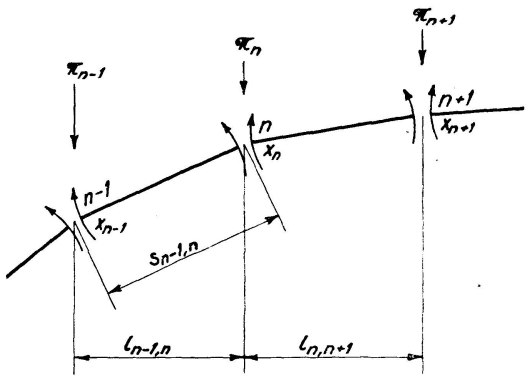


Fig. 12

In diesen Gleichungen kommt der noch unbekannte Horizontalschub H vor. Dieser ergibt sich aus der Bedingung, daß bei den mit H, $\bar{p}_{01}$, n_{01}, m_{01} und $\bar{\tau}_1$ belasteten Rahmen die Entfernung 1 — 2 erhalten bleiben muß. Für den so belasteten Rahmenriegel 01 ergibt sich der Endverdrehungswinkel φ_{01}^0 aus der Differentialgleichung (31), welche in unserem besonderen Falle

$$\begin{aligned} EJ_{01}\cdot y_{01}^{IV} &= +0{,}0987 + (0{,}07818 - 0{,}03776\,H)\sin\frac{\pi x}{25} + \\ &\quad + (-0{,}02330 - 0{,}15714\,H)\sin\frac{3\pi x}{25} + (-0{,}01221 - 0{,}29377\,H)\sin\frac{5x\pi}{25} \end{aligned} \tag{77}$$

lautet. Integrieren wir Gl. (77) dreimal, so erhalten wir mit den Randbedingungen

$$x = \frac{L}{2}; \quad y_{01}^{III} = 0; \quad x = 0, \; y_{01}^{II} = 0; \quad x = \frac{L}{2}, \; y_{01}^{I} = 0$$

den Endverdrehungswinkel an der Stelle $x = 0$ zu

$$E \cdot J_{01} \cdot \underset{x=0}{y'_{01}} = + 103{,}181 - 23{,}130\, H. \tag{78}$$

Ebenso ergibt sich aus der folgenden, nach Gl. (32) aufgestellten Differentialgleichung,

$$\begin{aligned} E \cdot F_{01} \cdot \Delta^{III} &= + 1{,}0026 + (-0{,}16335 - 0{,}11476\, H) \sin \frac{\pi x}{25} \\ &+ (+0{,}00402 - 0{,}32773\, H) \sin \frac{3\pi x}{25} + (0{,}00263 - 0{,}51330\, H) \sin \frac{5\pi x}{25} \end{aligned} \tag{79}$$

unter Benutzung der Randbedingungen

$$x = \frac{L}{2}, \; \Delta_{01}^{II} = 0; \quad \Delta_{01}^{I}\Big|_{x=0} = \Delta_{01}^{I}\Big|_{x=L}; \quad x = 0, \; \Delta_{01} = 0$$

die Achsverkürzung des Rahmenriegels in halbe Spannweite zu

$$E \cdot F_{01} \cdot \Delta_{01}\Big|_{x=\frac{L}{2}} = - 567{,}59 + 65{,}794. \tag{80}$$

Beträgt die Nachgiebigkeit des Stieles $\Delta_s = 550{,}0\; H/E$, so lautet nun die Bedingung, daß die Entfernung 1—2 unverändert bleibt.

$$5 \cdot y'_{01}\Big|_{x=0} - \Delta_{01}\Big|_{x=\frac{L}{2}} - \Delta_s = 0. \tag{81}$$

Wertet man Gl. (81) mit Hilfe der Gl. (78) und (80) ziffernmäßig aus, so erhalten wir

$$H = + 4{,}40 \text{ ton}. \tag{82}$$

Mit diesen Ergebnissen folgen aus Gl. (77) die Eckmomente X_n endgültig zu

$$\begin{aligned} X_2 &= + 0{,}13021 \sin \frac{\pi x}{25} + 0{,}05289 \sin \frac{3\pi x}{25} + 0{,}00018 \sin \frac{5\pi x}{25} \\ X_3 &= - 0{,}12396 \quad „ \quad - 0{,}04603 \quad „ \quad - 0{,}03621 \quad „ \\ X_4 &= - 0{,}26579 \quad „ \quad - 0{,}03450 \quad „ \quad - 0{,}00575 \quad „ \end{aligned} \tag{83}$$

Führt man diese Werte in die Gl. (59) und (61) ein, so folgt

$$\begin{aligned} \bar{p}_{01} &= + 0{,}600 + 0{,}06442 \sin \frac{\pi x}{25} + 0{,}02617 \sin \frac{3\pi x}{25} + 0{,}00009 \sin \frac{5\pi x}{25} \\ \bar{p}_{12} &= + 2{,}110 - 0{,}87056 \quad „ \quad - 0{,}34409 \quad „ \quad - 0{,}08046 \quad „ \\ \bar{p}_{23} &= + 0{,}257 + 1{,}07086 \quad „ \quad + 0{,}56830 \quad „ \quad + 0{,}22433 \quad „ \\ \bar{p}_{34} &= + 0{,}0896 + 0{,}36447 \quad „ \quad - 0{,}29232 \quad „ \quad - 0{,}27836 \quad „ \end{aligned} \tag{84}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{\tau}'_1 &= - 1{,}0026 + 0{,}57981 \sin \frac{\pi x}{25} + 1{,}17258 \sin \frac{3\pi x}{25} + 1{,}81347 \sin \frac{5\pi x}{25} \\ \bar{\tau}'_2 &= - 0{,}5245 - 0{,}09888 \quad „ \quad - 0{,}36503 \quad „ \quad - 0{,}53617 \quad „ \\ \bar{\tau}'_3 &= + 0{,}0185 - 0{,}44285 \quad „ \quad + 0{,}00214 \quad „ \quad + 0{,}15226 \quad „ \end{aligned} \tag{85}$$

Unsere nächste Aufgabe ist nun die Berechnung der Spannungen und Formänderungen. Zu diesem Zwecke stellen wir zunächst für jede Scheibe die Differentialgleichungen (31) auf. Diese lauten

$$
\begin{aligned}
EJ_{12}\, y_{01}^{IV} &= +0{,}5604 - 0{,}50009 \sin\frac{\pi x}{25} - 4{,}13319 \sin\frac{3\pi x}{25} - 7{,}40366 \sin\frac{5\pi x}{25} \\
EJ_{12}\, y_{12}^{IV} &= +0{,}3538 - 0{,}31792 \quad „ \quad +0{,}58279 \quad „ \quad +1{,}38947 \quad „ \qquad (86) \\
EJ_{12}\, y_{23}^{IV} &= -0{,}3249 + 0{,}44688 \quad „ \quad +0{,}14892 \quad „ \quad -0{,}22004 \quad „ \\
EJ_{12}\, y_{34}^{IV} &= +0{,}1109 - 0{,}14481 \quad „ \quad -0{,}29029 \quad „ \quad -0{,}10309 \quad „ \quad .
\end{aligned}
$$

Ferner folgen aus Gl. (2) durch einmalige Differentiation die Bestimmungsgleichungen für die Normalkräfte $N_{n,n+1}$ der einzelnen Scheiben. Unter Be-

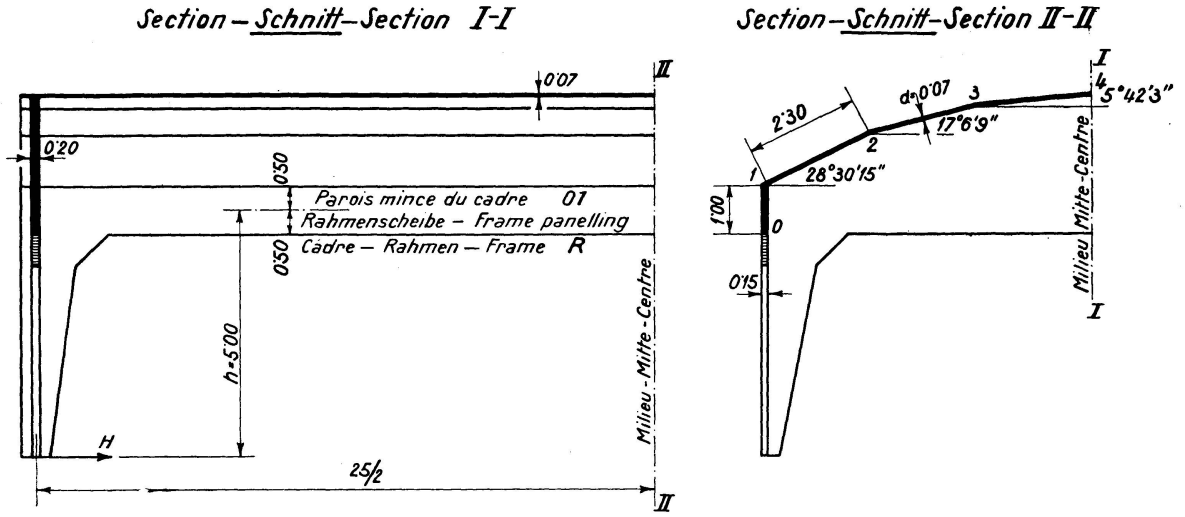


Fig. 13

nutzung von Gl. (85) und (57) erhalten wir für unseren besonderen Fall

$$
\begin{aligned}
N_{01}^{II} &= +1{,}0026 - 0{,}66828 \sin\frac{\pi x}{25} - 1{,}43799 \sin\frac{3\pi x}{25} - 2{,}25582 \sin\frac{5\pi x}{25} \\
N_{12}^{II} &= -0{,}4781 + 0{,}67869 \quad „ \quad +1{,}53761 \quad „ \quad +2{,}34496 \quad „ \qquad (87) \\
N_{23}^{II} &= -0{,}5430 + 0{,}34397 \quad „ \quad -0{,}36717 \quad „ \quad -0{,}62843 \quad „ \\
N_{34}^{II} &= +0{,}0185 - 0{,}44285 \quad „ \quad +0{,}00214 \quad „ \quad +0{,}15226 \quad „ \quad .
\end{aligned}
$$

Integriert man Gl. (86) zweimal nach x, so erhalten wir unter Zuhilfenahme der Randbedingungen

$$x = \frac{L}{2}, \quad y^{III} = 0; \quad M\Big|_{x=0} = M\Big|_{x=L}$$

die Momente der einzelnen Scheiben zu

$$
\begin{aligned}
M_{01} &= -0{,}5604\left(\frac{x^2}{2} - x\frac{L}{2}\right) - 0{,}50009\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{25} - 4{,}13319\left(\frac{L}{3\pi}\right)^2 \sin\frac{3x}{25} - 7{,}40366\left(\frac{L}{5\pi}\right)^2 \sin\frac{5x}{25} \\
M_{12} &= -0{,}3538 \quad „ \quad -0{,}31792 \quad „ \quad +0{,}58279 \quad „ \quad +1{,}38947 \quad „ \qquad (88) \\
M_{23} &= +0{,}3249 \quad „ \quad +0{,}44688 \quad „ \quad +0{,}14892 \quad „ \quad -0{,}22004 \quad „ \\
M_{34} &= -0{,}1109 \quad „ \quad -0{,}14481 \quad „ \quad -0{,}29029 \quad „ \quad -0{,}10309 \quad „ \quad .
\end{aligned}
$$

Ebenso ergeben sich aus Gl. (87) die Normalkräfte $N_{n,n+1}$. Bei der hiezu nötigen zweimaligen Integration sind die Randbedingungen

$$N\Big|_{x=0} = N\Big|_{x=L}; \quad N'\Big|_{x=\frac{L}{2}} = 0$$

zu berücksichtigen. Man erhält

$$N_{01} = +1{,}0026\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}L\right) + 0{,}66828\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{25} + 1{,}43799\left(\frac{L}{3\pi}\right)^2 \sin\frac{3\pi x}{25} + 2{,}25582\left(\frac{L}{5\pi}\right)^2 \sin\frac{5\pi x}{25}$$

$$\begin{aligned} N_{12} &= -0{,}4781 \;„\; -0{,}67869 \;„\; -1{,}53761 \;„\; -2{,}34496 \;„ \\ N_{23} &= -0{,}5430 \;„\; -0{,}34397 \;„\; +0{,}36717 \;„\; +0{,}62843 \;„ \\ N_{34} &= +0{,}0185 \;„\; +0{,}44285 \;„\; -0{,}00214 \;„\; -0{,}15226 \;„ \end{aligned} \tag{89}$$

Daraus ergeben sich für $x = L/_2$ die Momente und Normalkräfte zu

$$\begin{aligned} M_{01} &= +3{,}955 \;\text{t}\;; & N_{01} &= -40{,}413 \;\text{t} \\ M_{12} &= +6{,}726 \;„\;; & N_{12} &= -\;\;0{,}747 \;„ \\ M_{23} &= +1{,}315 \;„\;; & N_{23} &= +19{,}801 \;„ \\ M_{34} &= +1{,}275 \;„\;; & N_{34} &= +26{,}229 \;„\;. \end{aligned} \tag{90}$$

Mit Hilfe der Gl. (41) erhält man nun endlich die Randspannungen der einzelnen Scheiben zu

$$\begin{aligned} &\sigma_{01}^{O} = 11{,}12\;\text{kg/cm}^2;\; \sigma_{12}^{O} = -10{,}485\;\text{kg/cm}^2;\; \sigma_{23}^{O} = -14{,}42\;\text{kg/cm}^2;\; \sigma_{34}^{O} = 18{,}27\;\text{kg/cm}^2 \\ &\sigma_{01}^{U} = 42{,}76 \;„\;;\; \sigma_{12}^{U} = 11{,}415 \;„\;;\; \sigma_{23}^{U} = -10{,}18 \;„\;;\; \sigma_{34}^{U} = 14{,}13 \;„\;. \end{aligned} \tag{91}$$

Unseren Ausführungen entsprechend wurden diese zweimal berechnet. Als endgültige Resultate nehmen wir die Mittel zweier doppelt gerechneter Werte.

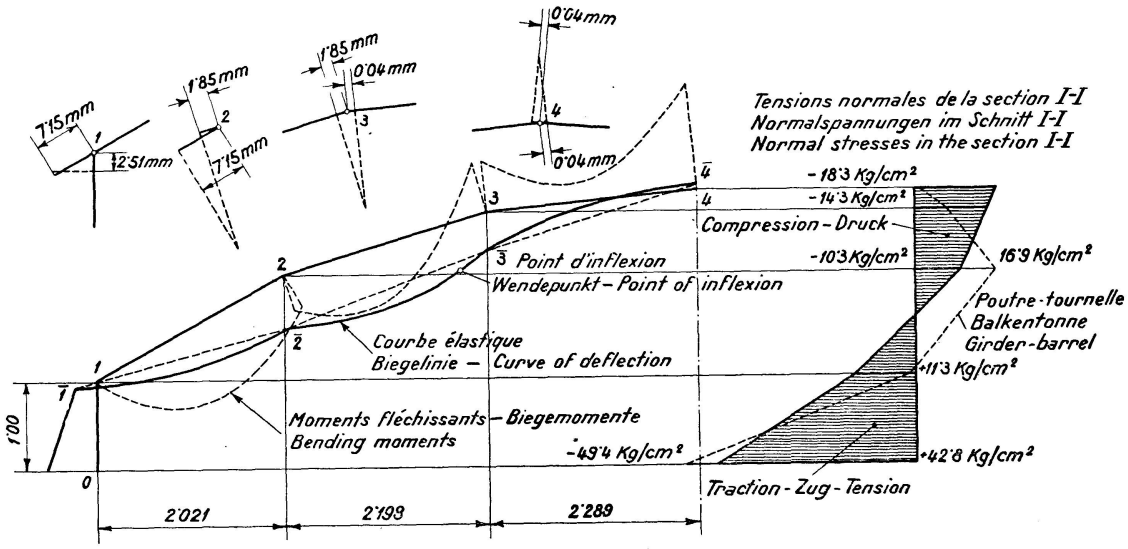


Fig. 14

Von großem Interesse sind noch die Verformungen des Tragwerkes. Diese ergeben sich aus den $y_{n,\,n+1}$, welche durch zweimalige Integration der Gl. (88) gefunden werden. Dabei sind die Randbedingungen $x = \frac{L}{2}$, $y' = 0$; $x = 0$, $y = 0$ zu berücksichtigen. Man erhält

$$EJ_{12}\cdot y_{01} = +0{,}5604\left(\frac{x^4}{24} - \frac{L}{12}x^3 - \frac{L^3}{24}\right) - 0{,}50009\left(\frac{L}{\pi}\right)^4 \cdot \sin\frac{\pi x}{L} - 4{,}13319\left(\frac{L}{3\pi}\right)^4 \cdot \sin\frac{3\pi x}{L} - 7{,}40366\left(\frac{L}{5\pi}\right)^4 \cdot \sin\frac{5\pi x}{L}$$

$$\begin{aligned} EJ_{12}\cdot y_{12} &= +0{,}3538 \;„\; -0{,}31792 \;„\; +0{,}58279 \;„\; +1{,}38947 \;„ \\ EJ_{12}\cdot y_{23} &= -0{,}3249 \;„\; +0{,}44688 \;„\; +0{,}14892 \;„\; -0{,}22004 \;„ \\ EJ_{12}\cdot y_{34} &= +0{,}1109 \;„\; -0{,}14481 \;„\; -0{,}29029 \;„\; -0{,}10309 \;„ \end{aligned} \tag{92}$$

Für $x = \frac{L}{2}$ ergibt sich daraus mit $E = 1{,}000\,000$ t/m²

$$\begin{aligned} EJ_{12}\,y_{01} &= +1001{,}89 \text{ tm}^3 & y_{01} &= 0{,}00251 \text{ m} \\ EJ_{12}\,y_{12} &= +\ 504{,}71 \ \text{„} & y_{12} &= 0{,}00715 \ \text{„} \\ EJ_{12}\,y_{23} &= +\ 130{,}93 \ \text{„} & y_{23} &= 0{,}00185 \ \text{„} \\ EJ_{12}\,y_{34} &= -\ \ 2{,}88 \ \text{„} & y_{34} &= -0{,}0000405 \text{ m}. \end{aligned} \tag{93}$$

In Fig. 13 sind Verformung und Spannungen für den Mittelquerschnitt ($x = L/2$) dargestellt.

Vergleicht man die Spannungen des in diesem Aufsatze berechneten Rahmentragwerkes von 25 m Spannweite mit den Spannungen des in der Abhandlung „Berechnung prismatischer Scheibenwerke" berechneten Balkentragwerkes von 18 m Spannweite [4]), so sieht man, daß die maßgebende Zugspannung des gefährdeten Riegels 01 in beiden Fällen fast gleich ist. Die Erhöhung der Druckspannungen spielt praktisch keine Rolle. Man kann also ohne die Abmessungen des Querschnittes zu verstärken die freie Spannweite von 18 auf 25 m vergrößern. Man erkennt daran die kräftig wirkende Entlastung der steif angeschlossenen Stützen. Hingegen sind die Verformungen der Querschnitte und die Biegemomente X für das Tragwerk mit 25 m Spannweite schon erheblich größer als für das Tragwerk mit nur 18 m Spannweite, so daß man bei noch größeren Spannweiten die Mittelquerschnitte schon durch steife Querscheiben oder biegesteife Rahmen verstärken müßte. Wie sich der Verfasser überzeugt hat, können bei entsprechender Erhöhung der Randträger und bei entsprechender Verstärkung der Plattenstärke d Spannweiten von 40 bis 45 m erreicht werden. Selbstverständlich sind in solchen Fällen die Querschnitte alle 15 bis 20 m durch steife Querrahmen gut auszusteifen. Zum Schlusse erwähnen wir noch, daß der Horizontalschub H auch auf die Biegemomente X einen günstigen Einfluß ausübt, indem der absolute Wert derselben verkleinert wird.

Zusammenfassung.

Der Verfasser hat im 1. Band, Jahrgang 1932 dieser Abhandlungen die Theorie der gelenkigen und steifknotigen prismatischen Scheiben- oder Flächenwerke im Prinzip festgelegt. Dabei wurde aber nur der einfachste Fall, nämlich das „Balkenscheibenwerk" mit von x unabhängigen Wanddicken (Fig. 1), ausführlich behandelt. Geht man auf größere Abmessungen über, so müssen zur Vermeidung gefährlicher Formänderungen Vorkehrungen getroffen werden und zwar unter anderen:

1. Der Einbau von freischwebenden steifen Scheiben oder biegungsfesten Ringen,
2. die Ausbildung der Randträger a) als Durchlaufträger oder b) als Rahmen.
3. Werden sämtliche Scheiben an denselben Stellen mehrfach unterstützt, so entstehen die „durchlaufenden Scheibenwerke".

Man kommt so auf die in diesem Aufsatz behandelten äußerlich statisch unbestimmten Faltwerke.

Um an bleibender Last zu sparen, paßt man die Wanddicken den mit x wechselnden Kraftwirkungen an. Es entstehen so die Scheibenwerke mit veränderlicher Dicke, für welche an dieser Stelle die erweiternden Elastizitätsgleichungen aufgestellt wurden.

---

[4]) Siehe „Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau", Bd. I, 1932.

Kuppelt man mehrere zueinander parallel liegende Scheibenwerke zusammen, so werden an den Berührungskanten im allgemeinen mehr als zwei Flächen zusammenstoßen. In solchen Punkten ist die Aufteilung der Knotenlast auf die einzelnen Scheiben statisch unbestimmt. Auch diese Aufgabe wird für den Fall, daß n Flächen in einer Kante zusammenstoßen, allgemein gelöst.

Als Grundsystem wählen wir am besten wieder das gelenkige „Balkenscheibenwerk". Für dieses werden die Elastizitätsgleichungen ermittelt. Diese ergeben sich als simultane Differentialgleichungen erster Ordnung, welche sich leicht integrieren lassen. Für die Bestimmung der dazugehörigen Integrationskonstanten werden zwei Verfahren mit daranschließender Anwendung wiedergegeben. Mit Hilfe dieser beiden Methoden und eingehender Verformungsbetrachtungen werden die oben erwähnten äußerlichen Unbestimmtheiten behandelt. Der Fall 2b wird vollständig ziffernmäßig durchgeführt. Dabei wird derselbe Tonnenquerschnitt genommen wie in der ersten Abhandlung des Verfassers von 1932.

Durch die nun größere Steifheit der Randträger werden die Formänderungen des Tonnenquerschnittes geringer, wodurch sich die Spannungsverteilung in der Mitte der Stützweite mehr der Ebene nähert.

Résumé.

Dans les présents Mémoires, l'auteur a publié, dès l'année 1932, le principe de la théorie des parois minces prismatiques articulées et rigides. Il n'a toutefois traité dans le détail, à cette époque, que le cas le plus simple, celui de la paroi mince constituant une poutre et dans laquelle l'épaisseur de la paroi elle-même est indépendante de x, (figure 1). Lorsque les dimensions des ouvrages deviennent plus importantes, il devient nécessaire, pour éviter des déformations dangereuses, de prendre des dispositions particulières, parmi lesquelles:

1. l'incorporation de tympans rigides à mouvements libres ou de ceintures rigides;
2. la constitution des poutres de retombée a) sous forme de poutres continues, b) sous forme de cadres;
3. la disposition comportant un appui multiple de tous les éléments de parois aux mêmes endroits, ce qui conduit à la „paroi mince continue".

On en arrive ainsi aux systèmes constitués par un ensemble de parois portantes, statiquement indéterminés extérieurement et qui font l'objet de la présente étude.

Pour réaliser une économie sur la charge permanente, on fait varier les épaisseurs des parois suivant les effets produits par les charges qui varient elles-mêmes avec x. On obtient ainsi des systèmes de parois minces avec épaisseurs de parois variables, auxquelles l'auteur a étendu dans ce rapport les équations de l'élasticité.

Si l'on groupe ensemble plusieurs parois orientées parallèlement les unes aux autres, les arêtes de contact constituent en général des assemblages de plus de deux surfaces. En ces endroits, la répartition de la charge du noeud d'assemblage entre les différentes parties qui le constituent est statiquement indéterminée. L'auteur résout le problème pour le cas général correspondant à l'assemblage de n surfaces sur une arête.

Il choisit à nouveau comme système de base la poutre à parois minces articulée. Il détermine dans ce cas les équations de l'élasticité, qui se pré-

sentent sous la forme d'équations différentielles simultanées du premier ordre, que l'on peut intégrer facilement. Pour la détermination des constantes d'intégration correspondantes, deux procédés sont indiqués, ainsi que leur utilisation pratique. Ces deux méthodes, ainsi que la considération approfondie des déformations, permettent de résoudre les indéterminations extérieures indiquées plus haut. Le cas 2 b est entièrement traité par le calcul. La section de voûte adoptée est la même que dans le premier mémoire de l'auteur de 1932.

Par suite de la plus grande rigidité actuelle des poutres de retombée, les déformations de la section de la voûte mince sont maintenant plus faibles et la répartition des contraintes au milieu de la portée se rapproche ainsi davantage du plan.

Summary.

In the 1932 volume of these Publications, the author determined in principle the theory of hinged and rigidly-jointed prismatic flat-shell or panelled structures. Then, however, only the simplest case was considered thoroughly, namely the „girder panelled structure" with the thicknesses of the panelling independent of x (fig. 1). If one proceeds to greater dimensions, certain precautions must be taken to prevent dangerous changes of shape; amongst these are the following:

1. Insertion of suspended stiff panelling or rigid rings.
2. Designing the edge girders a) as continuous girders, or b) as frames.
3. When all panellings have several supports at the same positions we get the „continuous panelled structure".

In this way we come to the outwardly statically indeterminate flat structures dealt with in this article.

In order to save in dead load, the panelling thicknesses are suited to the actions of the forces varying with x. In this way we get the panelled structures with varying thickness, for which the extended equations of elasticity have been determined here.

If several panelled structures lying parallel to each other are coupled together, more than two surfaces will in general meet at the contact edges. At such points the distribution of the load at the joint on the separate panellings is statically indeterminate. Also this problem is solved in general for the case where n surfaces meet together at one edge.

As basic system we do best to select again the hinged „girder panelled structure". For this, the equations of elasticity are determined. They are simultaneous differential equations of the first order, which can easily be integrated. For determining their constants of integration, two methods, followed by applications of them, are given. With the help of these two methods and close consideration of changes of shape, the above-mentioned outwardly indeterminate conditions are dealt with. Case 2 b is treated entirely numerically. In doing so, the same cross-section of the barrel vaulting is taken as in the author's first article in 1932.

Through the now greater stiffness of the edge beams, the changes of shape of the cross-section of the barrel vaulting will be slighter, and the distribution of stress in the middle of the span will approximate more to the plane.