

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 3 (1935)

Artikel: Über den Einfluss der Systemverformung beim Zweigelenkbogen mit Zugband und über neue theoretische Möglichkeiten und praktische Massnahmen zur Ausschaltung schädlicher Zwängungsspannungen in Bogenträgern und Gewölben

Autor: Fritz, Bernhard

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-4147>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ÜBER DEN EINFLUSS DER SYSTEMVERFORMUNG BEIM ZWEIGELENKBOGEN MIT ZUGBAND UND ÜBER NEUE THEORETISCHE MÖGLICHKEITEN UND PRAKTISCHE MASSNAHMEN ZUR AUSSCHALTUNG SCHÄDLICHER ZWÄNGUNGSSPANNUNGEN IN BOGENTRÄGERN UND GEWÖLBN

ETUDE SUR L'INFLUENCE DE LA DÉFORMATION DU SYSTÈME
DE L'ARC À DEUX ARTICULATIONS AVEC TIRANTS

ON THE INFLUENCE OF SYSTEM DEFLECTION OF TWO-HINGED
ARCHES WITH TIE

Dr.-Ing. BERNHARD FRITZ, Mannheim-Ludwigshafen.

A. Allgemeine Übersicht.

Bei der Berechnung und Konstruktion statisch unbestimmter Bogenbrücken und Gewölbe wendet man in neuester Zeit den Zwängungsspannungen und deren Ausschaltung erhöhtes Interesse zu. Solche zusätzliche Spannungen können entstehen infolge:

1. der Systemverformung durch Längskräfte und Biegungsmomente;
2. der Bogenverkürzung durch das Schwinden bei den Baustoffen Beton und Eisenbeton;
3. des Einflusses der Temperatur;
4. etwaiger Widerlagerbewegungen.

Bei kleineren Gewölben, welche stets eine verhältnismäßig große Steifigkeit besitzen, ist in der Regel der Anteil der Einflüsse 2. bis 4. an der Größtspannung bedeutender als der Beitrag des Einflusses 1.

Bei weitgespannten und flachen Bogenträgern dagegen, bei welchen man aus schönheitlichen Rücksichten vielfach mit geringen Trägerhöhen auszukommen sucht und infolgedessen auch eine kleinere Steifigkeit erhält, kann der Einfluß der Systemverformung durch Längskräfte und Biegungsmomente sehr bedeutend werden.

Nachstehend wird gezeigt, wie man durch eine geeignete Bogenmontage den Einfluß der Systemverformung durch Längskräfte, sowie die ungünstige Auswirkung der Einflüsse 2. und 4. auf die Größtspannungen praktisch ausschalten kann. Der schädliche Einfluß der durch Biegungsmomente verursachten Systemverformung, welcher bei den bisher angewandten Berechnungsmethoden noch nicht berücksichtigt wurde, sowie der Einfluß der Temperatur lassen sich dagegen nur vermindern, nie aber vollkommen ausschalten.

Bei der genaueren statischen Untersuchung der Bogenträger mit elastisch verformbarer Achse zeigen sich folgende Eigenarten, durch die sich die genauere Bogentheorie von den bisherigen Berechnungsmethoden unterscheidet:

- a) Belastung und Verformung oder Spannung sind nicht mehr proportional voneinander abhängig;
- b) das Superpositionsgebot ist nicht mehr anwendbar;
- c) die Einführung der Querschnittsgrößen wird auch zur Berechnung der Lagerkräfte statisch bestimmter Systeme erforderlich;
- d) der Einfluß der Temperatur kann infolge seiner formändernden Wirkung auch für statisch bestimmte Systeme von Bedeutung werden.

B. Theoretische Voraussetzungen und praktische Vorschläge für eine zweckmäßige Gewölbebauweise.

I. Einleitende Überlegungen.

Eine lotrechte Belastung verursacht bei Bogenträgern an der Stelle der größten Lastanhäufung eine Hebung e_1 der Stützlinie und eine Senkung e_2 der Systemlinie. Bogenachse und Stützlinie entfernen sich voneinander (Fig. 1).

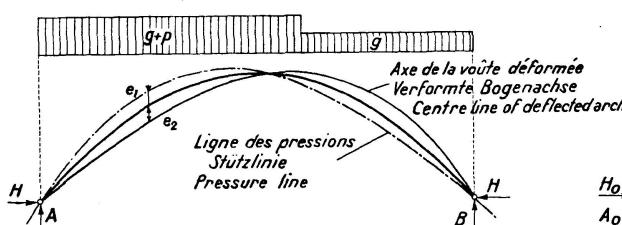


Fig. 1.

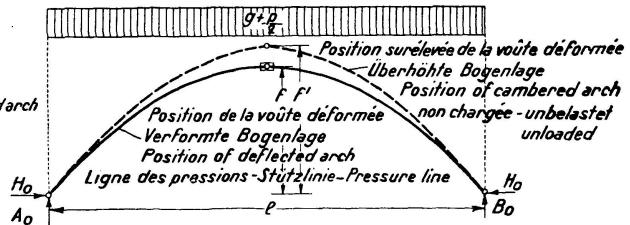


Fig. 2.

Das Biegunsmoment für irgendeinen Punkt der verformten Bogenachse berechnet sich dann aus:

$$M = H(e_1 + e_2) \quad (1)$$

worin sich der Einfluß der Systemverformung durch den Beitrag

$$M_2 = H \cdot e_2 \quad (2)$$

ausdrückt.

Außer der ruhenden und beweglichen Belastung bewirken auch Schwindenflüsse sowie etwaige Widerlagerbewegungen Senkungen e_2 der Bogenachse und dadurch eine Vergrößerung der Biegunsmomente und Größtspannungen.

Im folgenden wird als Abhilfe vorgeschlagen, dem zeitweilig als Dreigelenkbogen ausgebildeten Gewölbe oder Bogenträger bei der Bauausführung eine derart überhöhte Anfangslage zu erteilen, daß sich bei der Einwirkung der ruhenden Last und eines Teiles der Verkehrsbelastung sowie der Auswirkung des Schwindens die Bogenachse in günstigem Sinne verformt. Sie nähert sich dann der Stützlinie, bis sie später bei einer bestimmten Belastung, am zweckmäßigsten ruhende Last und halbe Verkehrslast mit ihr zusammenfällt, d. h. für jeden Punkt der verformten Bogenachse $M = 0$ wird (Fig. 2).

II. Die Gewölbebauweise (D. R. P.).

Der oben beschriebene Zustand (Fig. 2) kann erreicht werden, wenn man die Montage des Bogens unter Berücksichtigung folgender Maßnahmen durchführt.

Jedes Bogensystem wird anfangs als Dreigelenkbogen, der Zweigelenkbogen mit aufgehobenem Horizontalschub als Dreigelenkbogen mit Zugband ausgebildet (Fig. 3 und 4). Die beiden Dreigelenkbogenhälften erhalten Überhöhung, welche aus der „Formgebungsbelastung“:

$$q = g + \frac{p}{2} + \Delta p_s + \Delta p_w = g + \psi p \quad (3)$$

bestimmt werden.

Durch die virtuelle Belastung

$$\Delta p_s = \frac{8 f E F_m \cos \varphi_v}{l^2} \omega t_s^0 \quad (4)$$

wird das „nachträgliche Schwinden“ berücksichtigt, welches sich nach dem Ausrüsten noch zeigt.

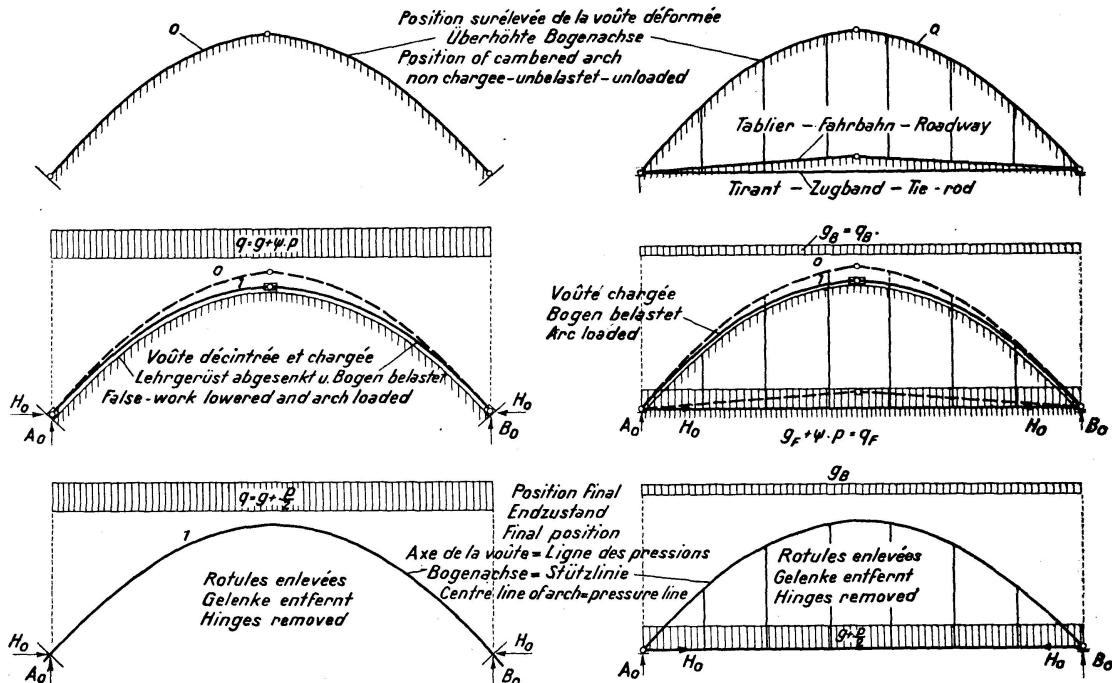


Fig. 3.

Fig. 4.

Durch die virtuelle Belastung

$$\Delta p_w = \frac{8 f E F_m \cos \varphi_v}{l^3} \Delta l \quad (5)$$

werden etwaige beim Ausrüsten oder bei der Probobelastung auftretende Widerlagerbewegungen vorbeugend berücksichtigt und in ihrer Auswirkung unschädlich gemacht. In den Gleichungen (4) und (5) bedeuten:

F_m, E Mittelwerte für Bogenquerschnitt und Elastizitätsmodul,

l, f Stützweite und Pfeil des Bogens,

$\cos \varphi_v$ Neigungskosinus der Bogenachse in $\frac{l}{4}$,

ω die Wärmedehnungszahl des Baustoffes,

t_s^0 der zur Berechnung des Einflusses des „nachträglichen Schwindens“ angenommene Temperaturabfall,

Δl die durch das Ausweichen der Widerlager eingetretene Stützweitenvergrößerung.

Das Neuartige der Bauweise besteht darin, daß man durch das zeitweilige Einschalten des statisch bestimmten und mit einer zweckdienlichen Überhöhung versehenen Dreigelenksystems auch die Schwindspannungen des im Endzustand gelenklosen Bogens ausschalten kann und daß Gelenklager verwendet werden, welche derart ausgebildet sind, daß sie sich später, wenn die Gelenkstellen versteift sind, aus dem unter Belastung stehenden Gewölbe durch Entspannen leicht entfernen lassen, um dann wieder erneut Verwendung zu finden.

Nach Bestimmung der „Formgebungslast“ q berechnen sich die Überhöhungen $\eta_{ü}$ für eine Dreigelenkbogenhälfte aus¹⁾:

$$\eta_{ü} = \frac{q l^2}{2 E F_m \cos \varphi_v} \left[\frac{l^2}{8 f^2 \cos^2 \varphi_v} + 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{l} \right) \right] \frac{x}{l} \quad (6)$$

Für den Dreigelenkbogen mit Zugband wird entsprechend:

$$\eta_{ü} = \frac{q l^2}{2} \left(\frac{1}{E F_m \cos \varphi_v} - \frac{1}{E_z F_z} \right) \left[\frac{l^2}{8 f^2 \cos^2 \varphi_v} + 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{l} \right) \right] \frac{x}{l} \quad (7)$$

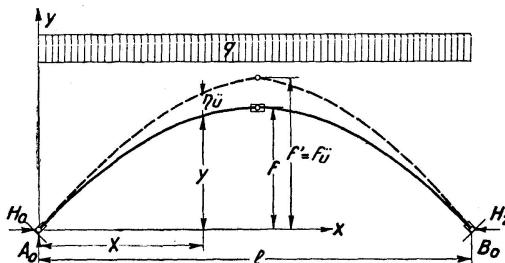


Fig. 5.

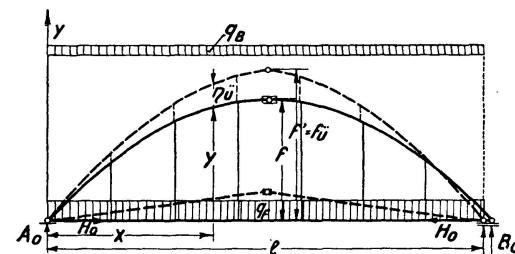


Fig. 6.

Darin bedeuten:

E_z, F_z Querschnitt und Elastizitätsmodul des Zugbandes.

Beide Gleichungen gelten von $x = 0$ bis $x = \frac{l}{2}$ und für eine gleichmäßig verteilt angenommene ruhende Last q (Fig. 5 und 6).

Die Senkungen der Bogenachse, welche sich, durch die Nachgiebigkeit des Lehrgerüstes verursacht, schon vor dem Absenken bemerkbar machen, sind für sich getrennt abzuschätzen und durch Überhöhung zu berücksichtigen. Es ist zweckmäßig, das Lehrgerüst nur zum Tragen des Gewölbes oder der Hauptträger heranzuziehen.

Um die Gelenkstellen des Dreigelenkbogens versteifen zu können, müssen sich die überhöhten Bogenhälften um das Maß der aufgebrachten Überhöhungen gesenkt haben, teilweise aber durch künstliche Vorbelastung dazu gezwungen werden.

Bei kleineren Stützweiten und geringen Bogenquerschnitten kann man

$$q' = \frac{p}{2} + \Delta p_s + (\Delta p_w) \quad (8)$$

als künstliche Vorbelastung aufbringen.

Bei weitgespannten Gewölben mit großen Bogenquerschnitten ist es wirtschaftlicher, mit dem Schließen der Gelenkstellen zu warten, bis das

¹⁾ FRITZ, Dr.-Ing. B.: „Theorie und Berechnung vollwandiger Bogenträger bei Berücksichtigung des Einflusses der Systemverformung.“ Berlin. Julius Springer 1934.

Schwinden praktisch zur Ruhe gekommen ist. Man hat dann nur noch

$$q' = \frac{p}{2} \quad (9)$$

als Vorbelastung aufzubringen.

Dem Versteifen der Gelenkstellen des Bogens folgt das Entspannen und Entfernen der Gelenklager (Fig. 3 und 4). Das Gewölbe ist jetzt wieder statisch unbestimmt, wird aber bei einer Belastung durch $g + \frac{p}{2}$ nur durch Normalkräfte beansprucht.

Häufig kann man durch ein exzentrisches Anordnen des Scheitelgelenkes künstliche Vorbelastungen ganz umgehen.

III. Die Ausbildung der auswechselbaren Gelenklager.

Um bei der Einführung des Dreigelenkbogens als „Montagesystem“ verlorene Gelenke zu vermeiden, werden diese herausnehmbar ausgebildet. Sie können dann mehrmals zu ähnlichen Zwecken verwendet werden. Nach-

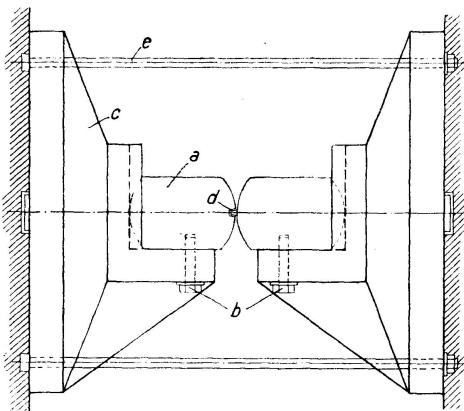


Fig. 7.

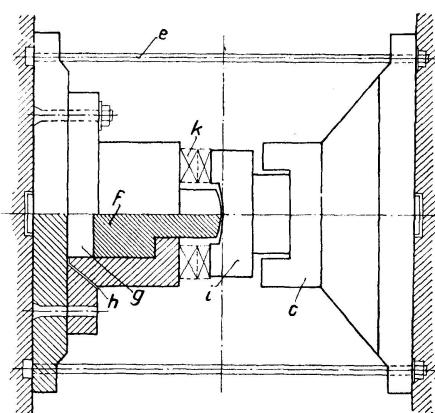


Fig. 8.

stehend sind einige Möglichkeiten der Gelenkausbildung schematisch dargestellt.

1. Das Kniehebelgelenk²⁾ (Fig. 7).

Das Gelenk wird durch zwei in der Verlängerung der Bogenachse liegende Stelzen *a* gebildet. Die Längsachsen dieser Stelzen sind entsprechend dem gekrümmten Verlauf der Gewölbestützlinie schwach gegeneinander geneigt und haben das Bestreben, nach oben durchzuschlagen. Hieran werden sie durch Schrauben *b*, welche sie mit dem Lagerkörper *c* verbinden, gehindert. Zwei kräftige Dollen *d* verhindern ein seitliches Abrutschen. Ist der Bogen abgesenkt, und an den Gelenkstellen versteift, so werden die Schrauben *b* gelöst, die Stelzen *a* weichen seitlich aus, werden druckfrei und können entfernt werden; ebenso nach ihnen die Lagerkörper. Die bei allen Ausführungsmöglichkeiten angedeuteten Schraubenstangen *e* haben den Zweck, die drehbaren Lagerteile gegeneinander abzustützen und in der erforderlichen Lage zusammenzuhalten. Dadurch wird der Einbau der Gelenklager erleichtert. Vor dem Absenken des Bogens werden diese Schraubenstangen entfernt, um das Spielen der Gelenke nicht zu verhindern.

²⁾ Nach einem Vorschlag von Prof. Dr.-Ing. KAMMÜLLER.

2. Das Gelenklager mit hydraulischer Entspannung (Fig. 8).

Der Kugelzapfen f des einen Lagerkörpers ist an seinem unteren Ende kolbenartig ausgebildet und ruht auf einem Wasser- oder Glyzerinpolster g , das vor dem Einbau und der Belastung des Lagers durch die Öffnung h aufgefüllt wird. Die schalenartig ausgebildete Lagerpfanne i des gegenüberliegenden Lagerkörpers ist nach der Entspannung, die durch Ablassen der Flüssigkeit des Kolbenpolsters herbeigeführt wird, seitlich herausnehmbar. Um zu verhindern, daß das Gewölbe infolge einer Undichtigkeit der Flüssigkeitskammer oder einer sonstigen Ursache einsinkt, werden zwischen dem Kolbengehäuse und der Lagerpfanne i Keile k eingeschoben.

C. Berechnungstheorie des Zweigelenkbogens mit Zugband bei Berücksichtigung des Einflusses der Systemverformung.

I. Allgemeines.

Beim Zweigelenkbogen mit Zugband ist der Einfluß der Systemverformung durch Längskräfte besonders groß und schon bei mittleren Spannweiten von Bedeutung. Zur Bogenverkürzung durch die Normalkräfte kommt die Verlängerung des Zugbandes. Sie ist in den meisten Fällen noch größer als die Bogenverkürzung. Die durch diese Systemverformungen hervorgerufenen zusätzlichen Biegungsmomente sind ein Hauptgrund dafür, daß viele der bisher in Eisenbeton ausgeführten Brücken dieses Systems infolge der hohen Bogenquerschnitte architektonisch nicht befriedigen und auch stählernen Brücken gegenüber unwirtschaftlich waren.

Die nachstehend entwickelte Theorie baut auf dem eingangs begründeten und beschriebenen Montageverfahren auf, bei welchem es gelingt, die durch die Längskräfte im Bogen und Zugband hervorgerufenen schädlichen Systemverformungen praktisch vollkommen auszuschalten.

Es werden Gleichungen abgeleitet, mit welchen sich auch der noch verbleibende Einfluß der durch Biegungsmomente verursachten Systemverformung bestimmen läßt.

II. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen.

In den nachstehenden Untersuchungen ist die Gewölbeachse als Parabel angenommen.

Aus dem virtuellen Belastungszustand (o), bei welchem im Bogen unter der „Formgebungsbelastung“

$$q = g + \varphi p$$

keine Momente auftreten, d. h.

$$M_0 = M'_0 - H_0 y = 0 \quad (10)$$

werden soll, lassen sich durch zusätzliche positiv oder negativ wirkende Lasten ψp oder φp die Regelbelastungen durch ruhende Last und streckenweise wirksame Verkehrslast wiederherstellen. Der allgemeine Belastungsfall (w_1) (Fig. 9) ergibt sich, wenn man zum Belastungszustand (o) den Lastfall (1) hinzufügt. Dabei ist entsprechend der Bedingung $\psi + \varphi = 1$ der Wert $\varphi = 1 - \psi$ einzuführen. In ähnlicher Weise erhält man den allgemeinen Belastungsfall (w_2) (Fig. 10) aus:

$$(w_2) = (o) + (2).$$

Für den Belastungsfall (w_1) berechnet sich beispielsweise das Biegemoment M_x aus:

$$M_x = M'_0 + M'_1 - (H'_0 + H'_1)(y - \eta) \quad (11)$$

Setzt man:

$$M_0 = M_0' - H_0 y = 0$$

so wird:

$$M_x = M_1' - H_1 y + (H_0 + H_1) \eta = M_1' - H_1 y + H \eta \quad (12)$$

Darin bedeuten M'_0 und M'_1 die dem Belastungsfall (o) bzw. (1) entnommenen Biegunsmomente eines freiaufliegenden Trägers von der Stützweite l , H_0 und H_1 die dazugehörigen, am Dreigelenkbogen wirksamen Zugbandkräfte, H die beim Belastungszustand (w_1) am Zweigelenkbogen mit Zugband auftretende Zugbandkraft.

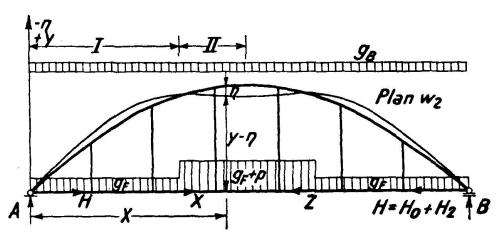
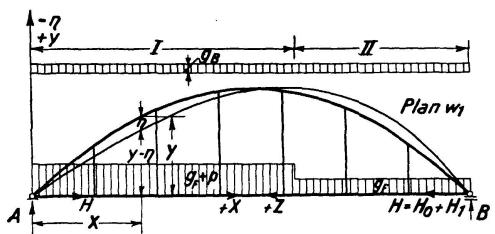
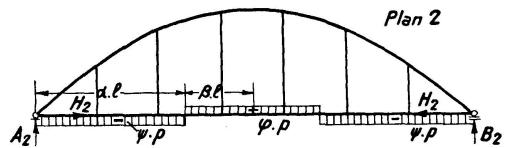
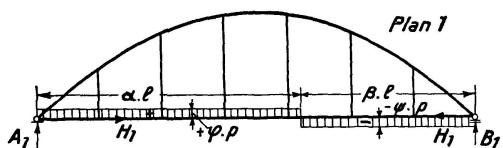
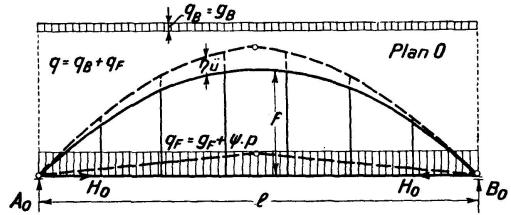
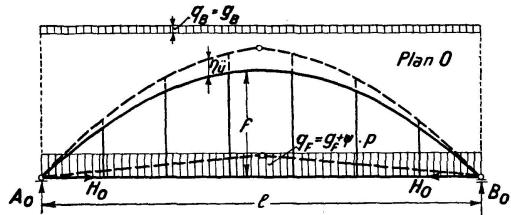


Fig. 9.

Fig. 10.

Aus der genaueren Differentialgleichung der elastischen, lotrechten Senkungen η in der Form³⁾:

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = - \frac{M_x}{E J_m \cos \varphi_y} - \frac{2 H_1}{E F_m r \cdot \cos \varphi_y} - \frac{2 H_1}{E_z F_z r} \quad (13)$$

in welcher durch die beiden letzten Glieder der nunmehr nur noch geringe Einfluß der Längskräfte und durch $r = \frac{l^2}{8f}$ die Krümmung des Bogens berücksichtigt wird, ergibt sich bei Einführung der vereinfachenden Bezeichnungen:

$$\frac{H_0 + H_1}{EJ_m \cos \varphi_v} = c^2 \quad (14)$$

$$\text{und } \frac{M_1'}{H_0 + H_1} - \frac{H_1}{H_0 + H_1} \left(y - \frac{2J_m}{rF_m} - \frac{2EJ_m \cos \varphi_v}{E_z F_z r} \right) = F(x) \quad (15)$$

die allgemeine Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} + c^2 \eta + c^2 F(x) = 0 \quad (16)$$

³⁾ FRITZ, Dr.-Ing. B.: „Theorie und Berechnung ... usw.“, S. 7.

und das allgemeine Integral:

$$\eta = A \sin cx + B \cos cx - F(x) + \frac{1}{c^2} F''(x) \quad (17)$$

Für den Belastungsfall (w_1) wird in den einzelnen Stetigkeitsbereichen:

$$\begin{aligned} \eta_I &= A_I \sin cx + B_I \cos cx - \frac{1}{H} \left\{ [\alpha(2-\alpha) - \psi] \frac{pl}{2} x - \frac{\varphi p}{2} x^2 \right. \\ &\quad \left. - H_1 \left(\frac{4f}{l} x - \frac{4f}{l^2} x^2 - \frac{2J_m}{rF_m} - \frac{2EJ_m \cos \varphi_v}{E_z F_z r} \right) \right\} - \frac{\varphi p - \frac{H_1}{r}}{c^2 H} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \eta_{II} &= A_{II} \sin cz + B_{II} \cos cz - \frac{1}{H} \left\{ (\alpha^2 - \psi) \frac{pl}{2} z + \frac{\psi p}{2} z^2 \right. \\ &\quad \left. - H_1 \left(\frac{4f}{l} z - \frac{4f}{l^2} z^2 - \frac{2J_m}{rF_m} - \frac{2EJ_m \cos \varphi_v}{E_z F_z r} \right) \right\} + \frac{\psi p + \frac{H_1}{r}}{c^2 H} \end{aligned} \quad (19)$$

Aus den Randbedingungen, welche durch die Systemart und die Belastung gegeben sind, bestimmen sich die Konstanten:

$$B_I = \frac{1}{H} \left\{ H_1 \left(\frac{2J_m}{rF_m} + \frac{2EJ_m \cos \varphi_v}{E_z F_z r} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\varphi p - \frac{H_1}{r} \right) \right\} \quad (20)$$

$$B_{II} = \frac{1}{H} \left\{ H_1 \left(\frac{2J_m}{rF_m} + \frac{2EJ_m \cos \varphi_v}{E_z F_z r} \right) - \frac{1}{c^2} \left(\psi p + \frac{H_1}{r} \right) \right\} \quad (21)$$

$$A_I = \frac{1}{\sin cl} [(B_I - B_{II}) \cos \beta cl + B_{II} - B_I \cos cl] \quad (22)$$

$$A_{II} = \frac{1}{\sin cl} [(B_{II} - B_I) \cos \alpha cl + B_I - B_{II} \cos cl] \quad (23)$$

Damit ergeben sich für die Berechnung der Biegunsmomente M_I und M_{II} die Gleichungen:

$$M_I = H [A_I \sin cx + B_I (\cos cx - 1)] \quad (24)$$

$$M_{II} = H [A_{II} \sin cz + B_{II} (\cos cz - 1)] \quad (25)$$

Nach Gleichung (12) und Fig. 9 setzt sich der Horizontalschub H zusammen aus:

$$H = H_0 + H_1 = \frac{ql^2}{8f} + H_1 \quad (26)$$

Der Beitrag H_1 kann nicht von H_0 losgelöst aus dem Belastungsplan (1) ermittelt werden, da das Superpositionsgegesetz nicht mehr anwendbar ist. Man bestimmt deshalb durch Gleichsetzen virtueller Arbeiten aus den Belastungsplänen (o) und (w_1) den Wert $H = H_0 + H_1$. Es ergibt sich:

$$q \left[\int_0^{\alpha l} \eta_I dx + \int_0^{\beta l} \eta_{II} dz \right] = \int_0^l \frac{q l^2}{8f \cos \varphi_v} \cdot \frac{H_1 dx}{E F_m \cos^2 \varphi_v} + \frac{ql^2}{8f} \cdot \frac{H_1 l}{E_z F_z} \quad (27)$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichungen (18) und (19):

$$\begin{aligned} \frac{A_I}{c} (1 - \cos \alpha cl) + \frac{B_I}{c} (\sin \alpha cl - \alpha cl) - \frac{\alpha^2 pl^3}{2H} \left\{ \frac{1}{2} [\alpha(2-\alpha) - \psi] - \frac{\alpha \varphi}{3} \right\} \\ + \frac{H_1 \alpha^2 fl}{3H} (6 - 4\alpha) + \frac{A_{II}}{c} (1 - \cos \beta cl) + \frac{B_{II}}{c} (\sin \beta cl - \beta cl) \\ - \frac{\beta^2 pl^3}{2H} \left\{ \frac{1}{2} (\alpha^2 - \psi) + \frac{\beta \psi}{3} \right\} + \frac{H_1 \beta^2 fl}{3H} (6 - 4\beta) = \frac{H_1 l^3}{8f} \left[\frac{1}{E F_m \cos^3 \varphi_v} + \frac{1}{E_z F_z} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Aus dieser Gleichung kann bei gegebenen Systemabmessungen, Querschnittsgrößen und Belastungen H_1 bzw. $H = H_0 + H_1$ durch probeweises Einsetzen ermittelt werden.

Für den allgemeinen Belastungsfall (w_2) (Fig. 10) erhält man in entsprechender Weise die Gleichungen:

$$\eta_I = A_I \sin cx + B_I \cos cx - \frac{1}{H} \left[\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha \right) p l x + \frac{\varphi p}{2} x^2 - H_2 \left(\frac{4 f}{l} x - \frac{4 f}{l^2} x^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2 J_m}{r F_m} - \frac{2 E J \cos \varphi}{E_z F_z r} \right) \right] + \frac{\varphi p + \frac{H_2}{r}}{c^2 H} \quad (29)$$

$$\eta_{II} = A_{II} \sin cx + B_{II} \cos cx - \frac{1}{H} \left[\frac{\varphi}{2} p l x - \frac{\varphi}{2} p x^2 - \frac{\alpha^2}{2} p l^2 \right. \\ \left. - H_2 \cdot \left(\frac{4 f}{l} x - \frac{4 f}{l^2} x^2 - \frac{2 J_m}{r F_m} - \frac{2 E J_m \cos \varphi_v}{E_z F_z r} \right) \right] - \frac{\varphi p - \frac{H_2}{r}}{c^2 H} \quad (30)$$

$$B_I = \frac{1}{H} \left[\left(\frac{2 J_m}{r F_m} + \frac{2 E J_m \cos \varphi_v}{E_z F_z r} \right) H_2 - \frac{1}{c^2} \left(\varphi p + \frac{H_2}{r} \right) \right] \quad (31)$$

$$B_{II} = B_I + \frac{p}{c^2 H} \cos \alpha cl \quad (32)$$

$$A_{II} = B_{II} \operatorname{tg} \frac{cl}{2} \quad (33)$$

$$A_I = A_{II} - \frac{p}{c^2 H} \sin \alpha cl \quad (34)$$

$$C_{II} = \frac{1}{H} \left[\left(\frac{2 J_m}{r F_m} + \frac{2 E J_m \cos \varphi_v}{E_z F_z r} \right) H_2 + \frac{1}{c^2} \left(\varphi p - \frac{H_2}{r} \right) \right] \quad (35)$$

$$M_I = H [A_I \sin cx + B_I (\cos cx - 1)] \quad (36)$$

$$M_{II} = H [A_{II} \sin cx + B_{II} \cos cx - C_{II}] \quad (37)$$

Durch Gleichsetzen virtueller Arbeiten erhält man:

$$\frac{A_I}{c} (1 - \cos \alpha cl) + \frac{B_I}{c} (\sin \alpha cl - \alpha cl) - \frac{p \alpha^2 l^3}{2H} \left[\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha \right) + \frac{\alpha \varphi}{3} \right] + \\ + \frac{H_2 \alpha^2 f l}{3H} (6 - 4 \alpha) + \frac{A_{II}}{c} \left(1 - \cos \frac{cl}{2} \right) + \frac{B_{II}}{c} \sin \frac{cl}{2} - C_{II} \frac{l}{2} - \\ - \frac{p l^3}{16H} \left[\frac{2}{3} \varphi - 4 \alpha^2 \right] + \frac{H_2 f l}{3H} - \frac{A_{II}}{c} (1 - \cos cl) - \frac{B_{II}}{c} \sin \alpha cl + \\ + C_{II} \alpha l + \frac{p \alpha^2 l^3}{2H} \left[\frac{\varphi}{2} - \alpha \left(\frac{\varphi}{3} + 1 \right) \right] - \frac{H_2 \alpha^2 f l}{3H} (6 - 4 \alpha) = \\ = \frac{H_2 l^2}{16 f} \left[\frac{1}{E F_m \cos^3 \varphi_v} + \frac{1}{E_z F_z} \right] \quad (38)$$

III. Vereinfachungen.

Bei halbseitiger Verkehrsbelastung (Fig. 11) wird $H_1 = 0$ und damit:

$$H = H_0 = \frac{\left(g + \frac{p}{2}\right)l^2}{8f} \quad (39)$$

$$c^2 = \frac{H_0}{EJ_m \cos \varphi_v} \quad (40)$$

$$B_I = \frac{p}{2H_0 c^2} \quad (41)$$

$$B_{II} = -B_I \quad (42)$$

$$A_I = B_I \operatorname{tg} \frac{cl}{4} \quad (43)$$

$$A_{II} = -A_I \quad (44)$$

$$M_{I_v} = + H_0 B_I \left[\frac{1}{\cos \frac{cl}{4}} - 1 \right] \quad (45)$$

$$M_{II_v} = - H_0 B_I \left[\frac{1}{\cos \frac{cl}{4}} - 1 \right] \quad (46)$$

$$M_s = 0 \quad (47)$$

Ohne Berücksichtigung der Systemverformung ergeben sich bei halbseitiger Verkehrsbelastung die Biegunsmomente:

$$M'_{I_v} = + \frac{pl^2}{64} \quad (48)$$

$$M'_{II_v} = - \frac{pl^2}{64} \quad (49)$$

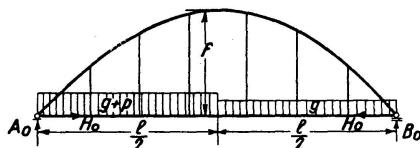


Fig. 11.

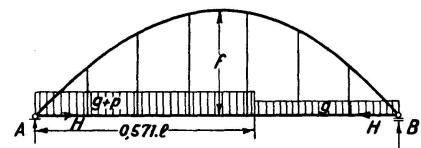


Fig. 12.

Bei Einführung der ungünstigsten Belastungslänge (Fig. 12) mit $\alpha l = 0,571 l$ erhält man die Größtmomente:

$$\max M'_{I_v} = + \frac{74}{4500} pl^2 \quad (50)$$

$$\min M'_{I_v} = - \frac{74}{4500} pl^2 \quad (51)$$

sowie:

$$H' = \frac{(g + 0,61 p) l^2}{8f} \quad (52)$$

Es ist nun:

$$\max M'_{I_v} = 1,052 M'_{I_v} \quad (53)$$

$$\min M'_{I_v} = 1,052 M'_{II_v} \quad (54)$$

Unter Benützung der Gleichungen (45) und (46) kann man mit genügender Genauigkeit setzen:

$$\max M_{I_v} = + 1,052 H B \left[\frac{1}{\cos \frac{cl}{4}} - 1 \right] \quad (55)$$

$$\min M_{II_v} = - 1,052 H B \left[\frac{1}{\cos \frac{cl}{4}} - 1 \right] \quad (56)$$

Darin ist dann:

$$H = \frac{(g + 0,61 p) l^2}{8 f} \quad (57)$$

$$c^2 = \frac{H}{E J \cdot \cos \varphi_v} \quad (58)$$

$$B = \frac{p}{2 H c^2} \quad (59)$$

einzu führen.

Mit Hilfe der Gleichungen (55) bis (59) lassen sich die Größtmomente in den Bogenviertelpunkten ohne mühsame Probierrechnung rasch bestimmen.

IV. Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Querschnittsgrößen.

Die Veränderlichkeit der Bogenquerschnitte F wird durch Bestimmung einer mittleren Querschnittsfläche F_m genügend genau berücksichtigt.

Anstatt mit wechselnden Trägheitsmomenten J zu rechnen, führt man zweckmäßig ein gleichbleibendes, durch einen Beiwert μ abgemindertes Trägheitsmoment $J_m = \mu \cdot J_{max}$ ein. Dieser Beiwert ist für jeden Bogenquerschnitt besonders zu ermitteln.

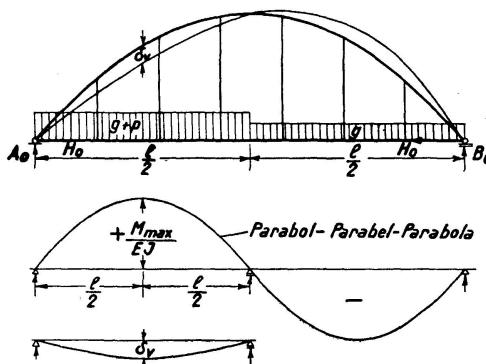


Fig. 13.

Für den Bogenviertelpunkt berechnet er sich beispielsweise aus folgender Überlegung:

Vom Belastungsfall mit halbseitiger Verkehrslast (Fig. 11 und 13) ausgehend, bestimmt man zunächst unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes die Einsenkung δ_v in der Mitte einer freiaufliegend gedachten Bogenhälfte. Dabei wird angenommen, daß die Momentenlinie symmetrisch verläuft und nach dem Scheitel und Kämpfer hin parabolisch abnimmt.

Anschließend berechnet man die Einsenkung δ_v^0 an derselben Stelle bei Einführung eines gleichbleibenden Trägheitsmomentes $J_m = \mu_v J_{max}$ aus:

$$\delta_v^0 = \frac{5 M_{max} l^2}{192 E \mu_v J_{max}} \quad (60)$$

Der Abminderungsbeiwert μ_v ergibt sich dann aus:

$$\mu_v = \frac{5 M_{max} l^2}{192 E J_{max} \delta_v} \quad (61)$$

V. Zahlenbeispiel.

Um nachzuweisen, daß sich bei geeigneter Montage ein Zweigelenkbogen mit Zugband bezüglich der Größtmomente vom starr gestützten Zweigelenk-

bogen praktisch kaum unterscheidet, sind die Bogenabmessungen und Belastungen so gewählt, daß ein Vergleich mit meinen schon früher durchgeführten Untersuchungen an elastischen Bogensystemen⁴⁾ möglich wird.

Im allgemeinen wird man für den Zweigelenkbogen mit Zugband ein größeres und wirtschaftlich günstigeres Pfeilverhältnis wählen.

1. System- und Querschnittsgrößen.

Spannweite: $l = 212,00 \text{ m}$

Pfeil: $f = 21,25 \text{ m}$

$$\cos \varphi_v = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{f}{l}\right)^2}} = 0,9805$$

Bogenquerschnitt: $F_m = 0,340 \text{ m}^2$; Zugbandquerschnitt $F_z = 0,059 \text{ m}^2$; Trägheitsmoment: $J_m = 0,493 \text{ m}^4$; Widerstandsmoment: $W_m = 0,395 \text{ m}^3$; Baustoff für den Bogen: St 52 mit $\sigma_{zul} = 2100 \text{ kg/cm}^2$;

für das Zugband: Kabelstahl mit $\sigma_{zul} = 6000 \text{ kg/cm}^2$;

Elastizitätsmodul: $E = E_z = 2100000 \text{ kg/cm}^2$.

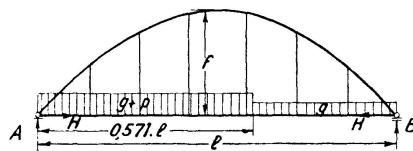


Fig. 14.

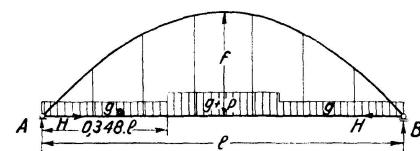


Fig. 15.

2. Belastungen.

Ruhende Last: $g_m = 8,80 \text{ t/m}$;

Verkehrslast: $p = 4,20 \text{ t/m}$.

3. Berechnung der Überhöhungen des Montagesystems.

Nach den Gleichungen (3) und (7) ergibt sich:

$$q = g + \frac{p}{2} = 8,80 + 2,10 = 10,90 \text{ t/m}$$

und als Überhöhung im Scheitel:

$$\begin{aligned} \eta_{\ddot{u},s} &= \frac{ql^2}{EF_m \cos \varphi_v} \left[\frac{l^2}{32f^2 \cos^2 \varphi_v} - \frac{1}{12} \right] + \frac{ql^2}{EF_z} \left[\frac{l^2}{32f^2} - \frac{1}{12} \right] = \\ &= 0,220 + 1,197 = 1,417 \text{ m} \end{aligned}$$

im Bogenviertel:

$$\begin{aligned} \eta_{\ddot{u},v} &= \frac{ql^2}{EF_m \cos \varphi_v} \left[\frac{l^2}{64f^2 \cos^2 \varphi_v} + \frac{1}{48} \right] + \frac{ql^2}{EF_z} \left[\frac{l^2}{64f^2} + \frac{1}{48} \right] = \\ &= 0,114 + 0,623 = 0,737 \text{ m} \end{aligned}$$

4. Bestimmung der größten Randspannung im Bogenviertel.

Setzt man im allgemeinen Belastungsfall (w_1) die Werte $\alpha l = 0,571 l$ und $\beta l = 0,429 l$ ein, so erhält man die für die Bogenviertelpunkte ungünstigste Belastung (Fig. 14).

⁴⁾ Vgl. Fußnote 1.

Der Horizontalschub $H = H_0 + H_1$ ergibt sich aus Gleichung (27) mit:

$$H = H_0 + H_1 = \frac{\left(g + \frac{p}{2}\right) l^2}{8f} + H_1 = 2881,70 + 125,37 = 3007,07 \text{ t} (3003,85 \text{ t})$$

Damit wird:

$$c^2 = 0,000296233$$

$$A_I = + 2,60015$$

$$B_I = + 1,82814$$

$$A_{II} = - 3,33001$$

$$B_{II} = - 2,88675$$

Das Größtmoment berechnet sich dann aus:

$$M_{v_{II}} = H \left[A_{II} \sin \frac{cl}{4} + B_{II} \left(\cos \frac{cl}{4} - 1 \right) \right] = - 4551,74 \text{ tm} (- 4725,38 \text{ tm})$$

Setzt man:

$$N_v = - \frac{H}{\cos \varphi_v} = - \frac{3007,07}{0,9805} = - 3066,8 \text{ t} (- 3063,6 \text{ t})$$

so ergibt sich als größte Randspannung:

$$\sigma_{v_{II}} = + \frac{M_{v_{II}}}{W_m} + \frac{N_v}{F_m} = - \frac{4551,74}{0,395} - \frac{3066,8}{0,340} = - 11523 - 9020 \\ = 20543 \text{ t/m}^2 (+ 20980 \text{ t/m}^2)$$

Die eingeklammerten Werte ergeben sich aus den vereinfachten Gleichungen (55) bis (59). Vernachlässigt man bei der Berechnung den Einfluß der Systemverformung durch die Biegemomente, so erhält man aus den bekannten Gleichungen (51) und (52):

$$H' = \frac{(g + 0,61p) l^2}{8f} = 3003,85 \text{ t}; \quad M'_v = \frac{74}{4500} p l^2 = - 3104,13 \text{ tm}$$

$$N'_v = - \frac{H'}{\cos \varphi_v} = - 3063,6 \text{ t}$$

und damit die Randspannung:

$$\sigma'_v = \frac{M'_v}{W_m} + \frac{N'_v}{F_m} = - \frac{3104,13}{0,395} - \frac{3063,6}{0,340} = - 7860 - 9010 = - 16870 \text{ t/m}^2$$

Im Bogenviertel ergibt sich somit nach der genaueren Berechnungstheorie eine Spannungserhöhung um $\Delta \sigma_v = 367 \text{ kg/cm}^2$ oder 21,8 %.

Durch diese Gegenüberstellung soll nur gezeigt werden, wie bedeutend die Abweichungen der genaueren Untersuchungsmethode von der gebräuchlichen Berechnungsart werden können.

Das Ergebnis wird noch ungünstiger, wenn man, wie es die Aufstellung einer vollständigen Bogenuntersuchung erfordert, die Bemessung der Querschnitte mit Rücksicht auf die erforderliche Sicherheit γ durchführt. Da Belastung und Größtspannung nicht mehr proportional voneinander abhängig sind, ist dann nachzuweisen, daß für eine γ -fache Belastung die Größtspannungen σ'_{min} der einzelnen Querschnitte die Spannung σ_s an der Quetschgrenze nicht überschreiten.

Beim Baustoff Beton wird die Druckfestigkeit σ_d maßgebend. Bei γ -facher Belastung muß $\sigma'_{min} \leq \sigma_d$ sein.

Setzt man im allgemeinen Belastungsfall (w_2) die Werte $\alpha l = 0,348 l$ und $\beta l = 0,152 l$ ein, so erhält man die für den Bogenscheitel ungünstigste Belastung (Fig. 15).

Der Horizontalschub $H = H_0 + H_2$ ergibt sich aus Gleichung (38) mit:

$$H = H_0 + H_2 = 2881,70 - 44,42 = 2837,28 \text{ t.}$$

Es wird:

$$\begin{array}{lll} c^2 = 0,000279507 & A_I = -1,64824 & A_{II} = +3,35034 \\ C_{II} = +2,85877 & B_I = -2,5231 & B_{II} = -0,68387 \end{array}$$

und $M_s = H \left[A_{II} \sin \frac{cl}{2} + B_{II} \cos \frac{cl}{2} - C_{II} \right] = +1590,72 \text{ tm}$

Vernachlässigt man den Einfluß der Systemverformung durch Biegmomente, so erhält man:

$$H' = \frac{(g + 0,415 p) l^2}{8 f} = 2787,32 \text{ t}; \quad M'_s = + \frac{pl^2}{138} = +1367,8 \text{ tm}$$

Der Einfluß der Systemverformung durch Biegmomente wirkt sich im Bogenscheitel erwartungsgemäß nicht so stark aus, wie in den Bogenviertelpunkten.

Zusammenfassung.

Bei statisch unbestimmten Bogenbrücken entstehen als Folge der Bogenverkürzungen, welche durch die ruhende Last, einen Teil der Verkehrslast, das Schwinden und eine Temperaturabnahme verursacht werden, sowie infolge einer etwaigen, sich in gleicher Weise auswirkenden Widerlagerverschiebung oder Zugbandverlängerung, Zusatzspannungen. Schon bei kleinen Eisenbetongewölben werden diese für die Bemessung der Zugbewehrung oft mitbestimmend. Bei weitgespannten Bogenbrücken und insbesondere beim Zweigelenkbogen mit Zugband kann durch die oben aufgezählten Bogenverkürzungen und Zugbandverlängerungen das System so stark verformt werden, daß die bisher übliche Berechnungsweise versagt und an deren Stelle eine genauere, diese Verformungen berücksichtigende Untersuchungsmethode gesetzt werden muß. Dabei zeigt sich, daß der Einfluß der Systemverformung durch Längskräfte und Biegemomente stets Spannungserhöhungen verursacht. Es werden auch besondere Untersuchungen über die Sicherheit des Bogens erforderlich, da bei einer Steigerung der Belastung die Größtspannungen rascher anwachsen als beim Normalfall einer linearen Beziehung zwischen Belastung und Spannung.

Um derartige Untersuchungen zu erleichtern, hat es der Verfasser unternommen, eine allgemeine Verformungstheorie aufzustellen und für die praktische Anwendung vereinfachte Formeln zu entwickeln. Die Veränderlichkeit der Querschnittsgrößen wird berücksichtigt. Die Berechnungstheorie hat eine Gewölbebauweise zur Voraussetzung, durch welche bei allen Bogen-systemen eine größtmögliche Verminderung sämtlicher Zusatzspannungen erreicht wird. Es wird zu diesem Zweck empfohlen, den überhöhten Dreigelenkbogen als „Montagegrundsystem“ für alle Bogenarten einzuführen. Zur genaueren Berechnung der jeweils erforderlichen Überhöhungsgrößen wird eine Gleichung gegeben. Bei Bogenträgern mit Zugband wird der Dreigelenkbogen mit Zugband als „Montagesystem“ eingeführt. Aus Gründen der Wirtschaftlichkeit sind die nur im Anfang zur Festlegung der Stützlinie erforderlichen Gelenke des „Montagesystems“ auswechselbar konstruiert und werden später zwecks Wiederverwendung entfernt.

Die Vorteile der in der vorliegenden Abhandlung beschriebenen theoretischen und praktischen Maßnahmen sind demnach:

1. Eine weitgehende Ausschaltung der Zusatzspannungen bei statisch unbestimmten Bogenträgern, sowie eine Verminderung des spannungsverhörenden Einflusses der Systemverformung und als Folge davon:
2. Wirtschaftliche und ästhetische Vorteile, da kleinere Bogenquerschnitte ausreichen.
3. Eine Vergrößerung der Möglichkeit einer Belastungssteigerung und somit eine Erhöhung des Sicherheitsgrades der Bogenträger.
4. Eine Gewichtsverminderung durch die nunmehr möglich gewordene Verwendung hochwertiger Baustoffe, z. B. Kabelstahl für das Zugband.
5. Die Möglichkeit, den Zweigelenkbogen mit Zugband auch bei weitgespannten Bogenbrücken und bei Eisenbahnbrücken zu verwenden.

Résumé.

Dans les ponts en arc statiquement indéterminés, des contraintes additionnelles prennent naissance à la suite des raccourcissements d'arc qui sont provoqués par l'action de la charge permanente, d'une fraction de la charge roulante, du retrait et des baisses de la température, de même qu'à la suite des déplacements éventuels des massifs d'appui ou de l'allongement des tirants, phénomènes qui ont des conséquences analogues. On a déjà souvent tenu compte de ces influences pour la détermination des dimensions des armatures de traction, dans la construction des petits ponts en arc en béton armé. Lorsqu'il s'agit de grandes portées et en particulier dans le cas des arcs à deux articulations avec tirant, les phénomènes de raccourcissement d'arc et d'allongement de tirants ci-dessus énumérés peuvent conduire pour le système tout entier à des déformations telles que la méthode ordinaire de calcul ne puisse plus être appliquée et qu'il devienne nécessaire de recourir à une méthode plus précise et tenant compte de ces déformations. On constate ainsi que l'influence de la déformation du système se traduit toujours, par l'intermédiaire d'efforts longitudinaux et de moments fléchissants, par une augmentation des contraintes. Il est ainsi nécessaire d'étudier d'une manière particulière la sécurité qu'offre l'arc, car pour une augmentation de la charge, les tensions maxima augmentent plus rapidement que dans le cas normal correspondant à une relation linéaire entre la charge et la contrainte.

Pour faciliter ces recherches, l'auteur a étudié une théorie générale de déformation et mis au point des formules simplifiées en vue de l'application pratique. Il tient compte des possibilités de variation de l'importance des sections. Le calcul théorique est basé sur l'hypothèse initiale d'un mode de construction de l'arc permettant de réaliser une réduction aussi poussée que possible des contraintes additionnelles dans tous les systèmes d'arcs. Il est recommandé à cet effet d'adopter pour tous les types d'arcs, la disposition surélevée à trois articulations comme „disposition de base du montage“. Une relation est indiquée spécialement, pour le calcul précis des surélévations nécessaires dans chaque cas. Dans les poutres en arc avec tirant, on introduit l'arc avec trois articulations comme „disposition de montage“. Pour des raisons d'économie, les articulations „de montage“ qui sont nécessaires uniquement au début de la construction pour la détermination pratique de la courbe des pressions sont construites de manière à pouvoir être enlevées et utilisées ultérieurement.

Les avantages des dispositions théoriques et pratiques décrites dans le mémoire ci-dessus sont les suivants:

1. Elimination très large des contraintes additionnelles dans les poutres en arc statiquement indéterminées, de même que réduction de l'influence qu'exerce la déformation du système dans le sens d'une augmentation des contraintes.
2. Avantages d'ordres économique et esthétique, car des sections d'arc plus faibles sont suffisantes.
3. Augmentation des possibilités d'élévation de la charge et par suite amélioration du coefficient de sécurité de la poutre en arc.
4. Réduction de poids par suite de la possibilité ainsi acquise d'employer des matériaux à caractéristiques plus élevées, par exemple acier spécial pour câbles, pour la constitution des tirants.
5. Possibilité d'employer également les arcs à deux articulations avec tirant pour la construction des ponts en arc de grande portée et pour les ponts-rail.

Summary.

With statically indeterminate arched bridges additional stresses arise due to the shortenings of the arch on account of the dead load, part of the superimposed load, shrinkage and a drop in temperature, as well as on account of an eventual dislocation of abutments or an elongation of the tension chord acting in a like manner. Even with small vaults of reinforced concrete these additional stresses often become important for the design of the tensile reinforcement. In the case of arched bridges of wide spans and especially in the case of two-hinged arches with tie-rods the structure may become deformed — by reason of the arch-shortenings and tension-chord elongations enumerated above — that the method of design employed up to now fails and must be replaced by a more accurate method of investigation encompassing said deformations. It thus becomes evident that the influence of deformation due to longitudinal forces and bending moments is always causing stress-increases. Special investigations on the safety of the arch also become necessary, since the maximum stresses with an increase of load grow more rapidly than in the normal case of a lineal relation between load and stress.

In order to facilitate such investigations the author has put up a general theory of deformation and has developed simplified formulae for its practical application. He has taken in consideration the changeability of the cross-sectional values. The analysis set forth presumes a way of building the arch whereby the greatest possible decrease in all additional stresses — with all systems of arches — is attained. He recommends in this connection to introduce for all arch-systems the superheightened three-hinged arch as "base system of erection". He is giving an equation for the more accurate computation of the superheightening values required. The three-hinged arch with tie-rod is introduced as "system of erection" for arches with tension chords. Out of economical reasons the joints of the "system of erection", which are but initially required for fixing the line of support, are designed as exchangeable and are removed later on in order to be used again.

The advantages of the theoretical and practical measures set forth thus are:

1. A far-reaching elimination of the additional stresses in statically indeterminate arches, as well as a resulting cut of the stress-increasing influence of the deformation of the system.
2. Economical and esthetic advantages, since smaller cross-sections of the arch will do.
3. An increase in the possibility of a load-rise and thus an increase in the degree of safety of arched structures.
4. A decrease in weight by reason of the use — now made possible — of high-grade building materials, e. g. steel cables for tie-rods.
5. The possibility of introducing the two-hinged arch with tie-rod also for arched bridges of long span and for railway bridges.