

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 3 (1935)

**Artikel:** Théorie des lignes d'influence des poutres droites en treillis à croix de Saint-André  
**Autor:** Foulon, Emile  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4145>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **THEORIE DES LIGNES D'INFLUENCE DES POUTRES DROITES EN TREILLIS A CROIX DE SAINT-ANDRE**

**THEORIE DER EINFLUSSLINIEN VON PARALLEL-FACHWERK-  
TRÄGERN MIT GEKREUZTEN DIAGONALEN**

**THEORY OF THE INFLUENCE LINES OF RECTANGULAR LATTICE  
WORK BEAMS WITH DIAGONAL STRUTS**

EMILE FOULON, Ingénieur A. I. Lg., Assistant à l'Université de Liège.

## **Introduction.**

Nous nous proposons ci-après de faire l'exposé de principe de la théorie exacte des lignes d'influence des efforts principaux dans les barres des poutres droites isostatiques extérieurement, à treillis à croix de Saint-André. L'étude détaillée fait l'objet d'un mémoire qui paraîtra ultérieurement.

Le calcul exact de ces poutres présente sans aucun doute un réel intérêt. D'ailleurs, on en construit encore à l'heure actuelle, toutefois sur une moindre échelle qu'il y a une quarantaine d'années. On les rencontre sous forme de contreventement, ainsi qu'en général partout où il peut y avoir changement de sens des efforts extérieurs. Il en est ainsi tout particulièrement dans les piles et pylônes, dans les panneaux centraux des longerons de faible portée par suite de l'influence prépondérante des charges mobiles et du changement de sens de l'effort tranchant, enfin, dans les longerons des ponts Scherzer en raison de la variation de sens des efforts pendant la manœuvre (voir par exemple le pont de Selzaete). On les utilise aussi dans la construction des vannes métalliques des barrages et des portes d'écluses.

En outre, une des raisons de leur moindre emploi est que ces poutres constituent un système hautement hyperstatique. En effet, du point de vue extérieur, ces poutres sont isostatiques, mais leur degré d'hyperstaticité interne est égal au nombre de panneaux. Il en résulte que leur calcul est ardu.

La conception classique de la résolution hyperstatique du système est la suivante: si nous coupons une diagonale de chaque panneau (fig. 1) et si nous appliquons aux couples de lèvres des coupures les efforts internes respectifs développés dans ces barres par la force extérieure unitaire, nous ramènerons le système à une poutre isostatique. Cette méthode conduit à écrire autant d'équations numériques qu'il y a de panneaux; il reste alors à les résoudre.

Notons que Mr. Bertrand de Fontvielant a, dans le second volume de son traité de „Résistance des matériaux, analytique et graphique“, donné une forme particulièrement remarquable à cette méthode, ses équations dites „des trois efforts“ se présentant sous une forme analogue à celle des équations bien connues des trois moments, ce qui facilite leur résolution.

En outre, Jean Résal consacre, dans son „Cours de Ponts Métalliques“, tout un chapitre au calcul des poutres à croix de Saint-André. Il se borne

seulement à la méthode approchée basée sur la considération de la poutre comme système multiple, mais nulle part, il n'indique quel est l'ordre de grandeur de l'approximation de cette méthode. Le degré d'exactitude n'est donc pas défini, contrairement à ce que l'on fait d'habitude dans la plupart des problèmes d'hyperstaticité.

Au contraire, la méthode qui partirait d'une étude exacte et qui en déduirait un mode approché de calcul serait beaucoup plus sûre. C'est pourquoi, nous nous sommes attachés à la recherche d'une méthode rigoureuse, en même temps que rapide, de résolution des lignes d'influence des efforts principaux dans les barres des poutres à croix de Saint-André. La méthode par récurrence se présente, sans aucun doute, comme étant la meilleure voie à suivre. D'autre part, le principe de réciprocité de Maxwell présente la propriété de réduire le degré d'hyperstaticité successivement d'un degré et pourrait peut-être être utilisé à cette fin. Toutefois, il n'est pas évident à priori qu'une méthode par récurrence soit possible. Elle ne le serait pas en effet si l'on choisissait une diagonale dans chaque panneau comme barres surabondantes.

Mais nous avons pu établir des équations de récurrence grâce à un choix judicieux de ces barres, en l'occurrence les montants. Nous verrons dans la suite quelles sont les propriétés particulières de ceux-ci, qui nous ont déterminés à faire ce choix.

### Preliminaires.

Nous nous bornerons pour l'instant à supposer déterminées les lignes d'influence de ces montants surabondants, qui sont, comme nous avons vu, en nombre égal au nombre de panneaux, c'est à dire qu'ils comprennent tous les montants sauf un, que nous supposerons dans la suite être celui de gauche. Une fois calculées les lignes d'influence de ces montants surabondants, nous serons ramenés à l'étude d'un système isostatique à losanges (fig. 2,  $\gamma$ ).

C'est ce que montrent les figures 2,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ . En effet, la ligne d'influence d'une barre quelconque  $d$ , diagonale ou de membrure, de la poutre ( $\alpha$ ) est égale à la ligne d'influence de la même barre  $d$  dans la poutre ( $\beta$ ) ou à la somme des lignes d'influence de  $d$  dans les poutres ( $\gamma$ ) et ( $\delta$ ). Or, les systèmes ( $\gamma$ ) et ( $\delta$ ) sont isostatiques et indéformables. Leur nombre de barres est en effet de  $(2n - 3)$ , où  $n$  est leur nombre de noeuds.

### Poutres isostatiques à losanges.

Il est donc nécessaire de déterminer au préalable les lignes d'influence des poutres isostatiques à losanges. Celles-ci s'obtiennent par application du principe des travaux virtuels, de la manière suivante: on coupe la barre  $d$  étudiée, on produit un rapprochement  $\Delta$  des noeuds d'extrémité de cette barre (fig. 2,  $\gamma$ ) et l'on en déduit les déplacements résultants des noeuds d'application éventuelle des charges extérieures  $P = 1$ , compatibles avec les liaisons du système déformable obtenu par la coupure. Si l'on mesure, à l'échelle  $\Delta$  essentiellement positive du rapprochement des noeuds 1 et 2, les projections des déplacements des noeuds sur la direction des forces  $P = 1$  et si on les prend positifs dans le sens  $P$ , on aura la ligne d'influence de l'effort normal dans la barre  $d$  avec son signe, un effort normal positif représentant une compression. La déformée s'obtient à l'aide d'un tracé de Williot. En ce qui concerne les systèmes isostatiques, la construction de celui-ci est très simple; en effet, le système étant rendu déformable par

coupe de la barre étudiée, il ne naît aucun effort interne ni aucune déformation dans les barres de la poutre du fait du déplacement  $A$ . Les déformations à porter dans le diagramme de Williot sont donc nulles et il suffit, dans celui-ci, d'élever des perpendiculaires successivement à la direction de chacune des barres. Quant à la ligne d'influence de  $d$  dans la poutre figure 2,  $\delta$ , elle s'obtient à l'aide d'un simple polygone de Crémona.

### Poutres à losanges hyperstatiques du premier degré.

Nous avons également étudié la poutre de la figure 3,  $\alpha$ , car elle constitue le système de base de ceux à croix de Saint-André, sous la forme d'un panneau. En ajoutant un panneau successivement à ce premier, on obtient finalement la poutre étudiée à croix de Saint-André, que nous avons d'ailleurs résolue par récurrence.

Fig. 1.

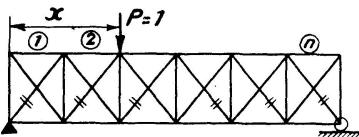


Fig. 3.

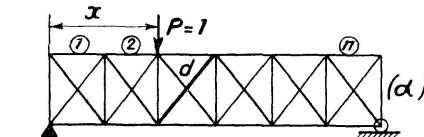
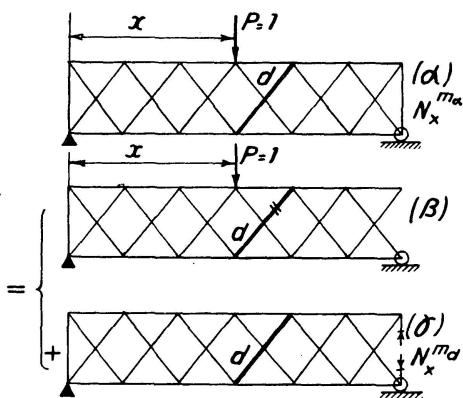
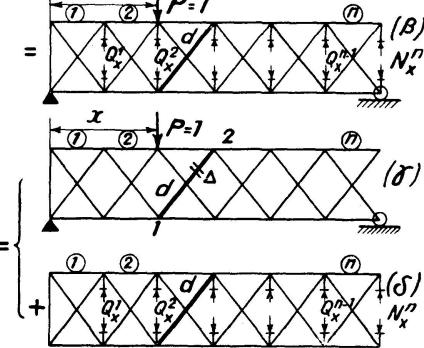


Fig. 2.



Nous avons résolu ce système de la manière suivante. Nous avons tout d'abord établi la ligne d'influence  $N_x^{m_d}$  de l'effort normal dans le montant de droite, par application du principe de Maxwell. Pour ce faire, nous coupions ce montant, nous appliquons aux deux lèvres de la coupure deux forces de traction, nous en déduisons les déformations longitudinales résultantes des barres et nous recherchons les déformées verticales des membrures qui, mesurées à l'échelle du rapprochement des lèvres, donnent les lignes d'influence  $N_x^{m_d}$  pour chacune des sollicitations des deux membrures par la charge mobile.

Quant à la ligne d'influence de l'effort normal dans une autre barre quelconque  $d$  (fig. 3,  $\alpha$ ), elle n'est autre que la somme des lignes d'influence de  $d$  considérée comme appartenant à la poutre isostatique à losanges ( $\beta$ ) et à la même poutre, mais sollicitée comme en ( $\gamma$ ).

La ligne d'influence de  $d$  dans la poutre figure 3,  $\beta$  s'obtient à l'aide d'un tracé de Williot très simple, de la même manière que celle de  $d$  dans la poutre figure 2,  $\gamma$ . Quant à la ligne d'influence de  $d$  dans la poutre figure 3,  $\gamma$ , elle s'obtient à l'aide d'un simple polygone de Cremona et est égale à  $N_x^{m_d}$  multiplié par une constante.

### Poutres droites articulées à croix de Saint-André.

Nous arrivons à l'objet principal de notre travail, c'est à dire au calcul exact des lignes d'influence des efforts normaux dans les barres des poutres droites, isostatiques extérieurement, à treillis articulé à croix de Saint-André.

Rappelons que le degré d'hyperstaticité de ces poutres est égal au nombre de panneaux. Rappelons également la raison pour laquelle nous avons choisi les montants comme barres surabondantes: c'est le seul moyen pour l'établissement de formules de récurrence, qui constituent sans aucun doute, une méthode directe, autant que simple, de calcul d'une poutre à nombre quelconque de panneaux.

L'étude des poutres à croix de Saint-André, telle que nous l'avons faite, se divise en deux parties:

1. Dans la première partie, nous déterminons les lignes d'influence des montants surabondants: ceux-ci se répartissent en deux catégories:
  - a) la première est constituée par le montant d'extrémité de droite;
  - b) la seconde, par les montants intermédiaires.
2. Dans la seconde partie, nous établissons les lignes d'influence des autres barres. Nous avons vu que la ligne d'influence d'une barre quelconque, diagonale ou de membrure, est égale à la somme des lignes d'influence de la même barre considérée comme appartenant soit à la poutre figure 2,  $\gamma$ , soit à la poutre figure 2,  $\delta$ , toutes deux isostatiques.

Avant d'exposer le principe de l'étude, nous pouvons écrire, en général, les deux équations suivantes, tirées du principe de Maxwell appliquée aux lignes d'influence des efforts normaux dans les barres surabondantes des poutres hyperstatiques:

$$LI = \frac{\text{déformée}}{\text{échelle} = \text{rapprochement des lèvres}} \quad (1)$$

et par suite:

$$\text{déformée} = LI \cdot (\text{échelle} = \text{rapprochement des lèvres}). \quad (2)$$

#### Première partie.

##### a) Ligne d'influence de l'effort normal dans le montant d'extrémité de droite.

Nous établissons tout d'abord une formule de récurrence entre  $N_x^r$  et  $N_x^{r-1}$ , où, en général,  $N_x^k$  représente la ligne d'influence de l'effort normal dans le montant  $k$  d'extrémité de droite de la poutre à croix de Saint-André formée par les  $k$  panneaux de gauche de la poutre totale, à  $n$  panneaux. Les montants sont numérotés  $0, 1, 2, \dots, k, \dots, r, \dots, n$  à partir du montant d'extrémité de gauche.

Nous adoptons les compressions comme positives en ce qui concerne les efforts normaux internes dans les barres. Les charges verticales seront dirigées positivement vers les bas.

Il est à noter que si nous avons pu établir une formule de récurrence, c'est grâce à la propriété suivante des montants: si nous considérons la poutre formée des  $r$  panneaux de gauche, si nous coupions le montant  $r$  et si nous appliquons deux forces unitaires de traction aux lèvres de la coupure, en vue de la détermination de la ligne d'influence de  $N_x^r$ , le panneau  $r$  agit de ce

fait sur la poutre à  $r-1$  panneaux avec deux forces unitaires et opposées telles qu'indiquées figure 4,  $\beta$ .

La ligne d'influence de  $N_x^r$  est la déformée de la poutre 1—2— $a$ — $b$  à  $r$  panneaux mesurée à l'échelle du rapprochement des lèvres du montant  $r$ . Nous convenons d'appeler rapprochement des lèvres le déplacement de celles-ci dans le sens que produirait un rapprochement des noeuds d'extrémités de la barre en question.

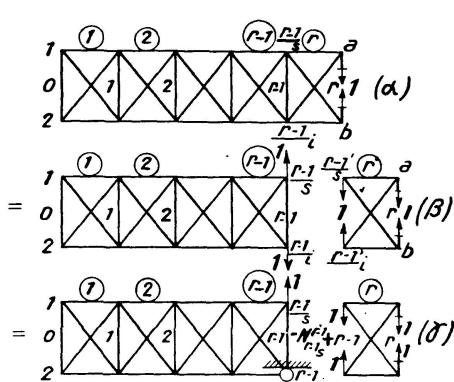


Fig. 4.

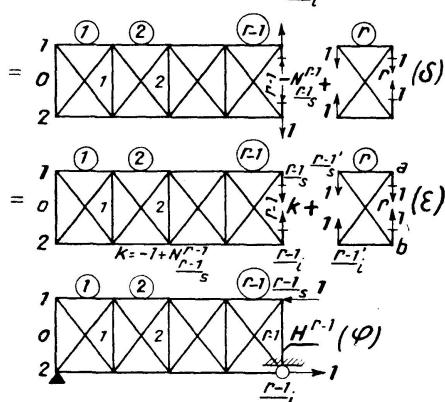


Fig. 4.

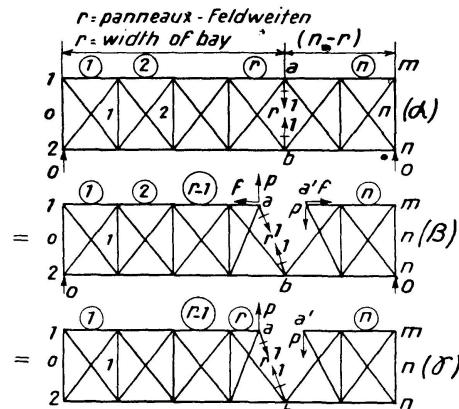
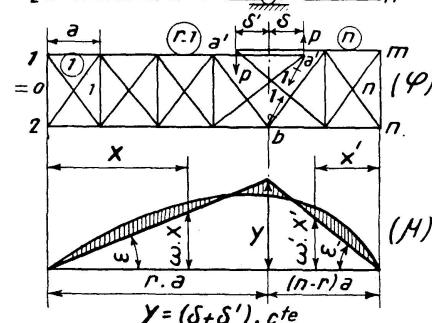
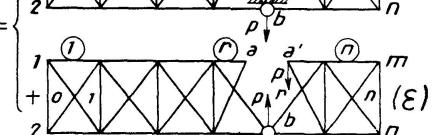


Fig. 5.



La déformée de la poutre à  $r$  panneaux peut s'obtenir comme suit: on peut déterminer d'abord la déformée de la poutre  $r-1$  panneaux (fig. 4,  $\beta$ ), puis prolonger cette déformée dans le panneau  $r$  et ramener l'appui  $b$  sur son horizontale initiale.

Supposons connue la ligne d'influence de  $N_x^{r-1}$ . Sous l'effet de la mise en charge en  $r-1_s$  et  $r-1_i$  (figure 4,  $\beta$ ), il naît dans le montant  $r-1$  un effort normal  $-N_{r-1_s}^{r-1}$ . En effet, la force 1 en  $r-1_i$  n'est autre que la réaction d'un appui en  $r-1_i$  due à l'action de la force extérieure 1 au noeud  $r-1_s$  de la membrure supérieure.

Cela étant, nous ne changerons rien à la déformée de (1, 2,  $r-1_s$ ,  $r-1_i$ ), si nous coupons le montant  $r-1$ , si nous appliquons aux deux lèvres les compressions  $-N_{r-1_s}^{r-1}$  ou bien les tractions  $+N_{r-1_s}^{r-1}$  et si nous transportons, jusqu'aux lèvres, les forces unitaires qui agissaient en  $r-1_s$  et

$r - 1_s$ . Dès lors, la déformée sera identique à celle produite par deux forces de traction  $k = -1 + N_{r-1_s}^{r-1}$  des lèvres du montant  $r - 1$ . Si nous déterminons le rapprochement  $A_{r-1}^{r-1}$  de ces lèvres sous l'action des forces de traction  $k$ , nous savons, d'après l'équation (2), que la déformée du tronçon à  $r - 1$  panneaux n'est autre que le produit de la ligne d'influence de  $N_x^{r-1}$  par l'échelle  $A_{r-1}^{r-1}$ .

Par suite de la déformation de la poutre à  $r - 1$  panneaux, les noeuds  $r - 1_s$  et  $r - 1_i$  subissent un déplacement relatif qui possède une composante verticale et une composante horizontale. La composante verticale est fonction seulement de l'effort normal  $N_{r-1_s}^{r-1}$  développé dans le montant  $r - 1$ .

Quant à la composante horizontale, elle n'est autre que le produit de l'effort normal  $H^{r-1}$  développé dans le montant  $r - 1$  par un couple de deux forces unitaires appliquées en  $r - 1_s$  et en  $r - 1_i$  comme l'indique la figure 4,  $\varphi$ , produit de  $H^{r-1}$  par le rapprochement  $A_{r-1}^{r-1}$  des deux lèvres du montant  $r - 1$  dû aux forces de traction  $k = -1 + N_{r-1_s}^{r-1}$ .

Nous sommes donc en possession du déplacement relatif de  $r - 1_s$  et  $r - 1_i$ , à condition de supposer connus  $H^{r-1}$  et la ligne d'influence  $N_x^{r-1}$ .

D'autre part, remarquons que le panneau  $(r - 1'_s, r - 1'_i, a, b)$  est déformable. Nous pouvons donc le déformer, sans lui appliquer d'effort supplémentaire aux forces unitaires qui le sollicitaient tout d'abord, de manière à ramener  $r - 1'_s$  et  $r - 1'_i$  en contact avec  $r - 1_s$  et  $r - 1_i$ . On déduit donc, des déplacements de ceux-ci et des déformations des barres du panneau  $r$  sous l'effet des forces unitaires extérieures, les déplacements relatifs vertical et horizontal des noeuds d'extrémités du montant  $r$ . Par suite, on peut déterminer le rapprochement des lèvres de celui-ci sous l'effet de deux forces unitaires de traction qui y sont appliquées. Ce rapprochement est fonction de  $N_{r-1_s}^{r-1}$  et de  $H^{r-1}$ , ce qui s'explique par ce qui précède.

C'est ainsi que nous avons établi une formule de récurrence, d'ailleurs simple, entre  $H^{r-1}$  et  $H^r$ , en déterminant le déplacement relatif horizontal de  $a$  et  $b$ , à partir du déplacement relatif horizontal de  $r - 1_s$  et  $r - 1_i$ .

Quant à la déformée de la poutre à  $r$  panneaux, elle s'obtient après correction due au fait que l'on doit ramener l'appui  $b$  sur son horizontale initiale. Cette déformée, divisée par le rapprochement vertical des lèvres de la coupure du montant  $r$  (formule 1), nous donne la ligne d'influence  $N_x^r$  de l'effort normal dans le montant  $r$  considéré comme montant d'extrémité de droite de la poutre à  $r$  panneaux. Nous avons vu au cours de l'exposé que cette ligne d'influence est fonction de  $N_x^{r-1}$  et de  $H^{r-1}$ , d'où la formule de récurrence :

$$N_x^r = f(N_x^{r-1}, H^{r-1}).$$

A noter que le rapprochement des lèvres de la coupure du montant  $r$  est égal au rapprochement des noeuds d'extrémités du montant dû à la déformation de toutes les autres barres, augmenté de l'allongement total des deux tronçons de noeuds.

En résumé, nous voyons que si nous avons déterminé la ligne d'influence du montant de droite de la poutre à 1 panneau, ce qui s'obtient directement en appliquant les formules du type de la figure 3 ou à l'aide d'un diagramme de Williot, nous pouvons, à l'aide de la formule de récurrence

entre  $N_x^r$  et  $N_x^{r-1}$ , calculer les lignes d'influence des montants 2, 3, ...,  $n-1$ ,  $n$ , de la poutre à  $n$  panneaux, considérés comme montants d'extrémité de droite des poutres particulières successives formées par les 2, 3, ...,  $n-1$ ,  $n$  panneaux de gauche de la poutre à  $n$  panneaux, en faisant varier progressivement  $r$  de 2 à  $n$ .

b) Passons à la recherche de la ligne d'influence de l'effort normal dans un montant intermédiaire  $r$  quelconque de la poutre totale à  $n$  panneaux.

Les deux parties de la poutre à gauche et à droite du montant  $r$  sont donc constituées respectivement de  $r$  et de  $n-r$  panneaux.

Si les charges extérieures  $P = 1$  sont verticales, on sait encore une fois que la ligne d'influence du montant  $r$  est la déformée verticale de la poutre, produite par deux forces unitaires de traction des lèvres d'une coupure faite dans ce montant, cette déformée étant mesurée à l'échelle  $A_r^r$  du rapprochement des lèvres (fig. 5, a).

On peut scinder le noeud  $a$  en deux parties, à condition d'appliquer à celles-ci leurs réactions mutuelles internes, ou bien, ce qui revient au même, les composantes horizontales et verticales de ces réactions. Les deux tronçons  $(1-2-a-b)$  et  $(a-b-m-n)$  de la poutre sont chacun en équilibre. L'équation statique des moments de chacun des tronçons autour du noeud  $b$  montre que  $f = 0$ .

En effet, les réactions des appuis 2 et  $n$  sont nulles et les moments des forces extérieures  $p$  et 1 sont chacun nuls, ces forces passant par  $b$ . Il en résulte que le moment total se réduit à  $f \cdot h$ ,  $h$  étant la hauteur de la poutre. Ce moment étant nul, on a nécessairement  $f = 0$  puisque  $h \neq 0$ .

Par conséquent, la réaction mutuelle des deux tronçons à  $r$  et à  $n-r$  panneaux se réduit, en  $a$ , à la composante verticale  $p$ .

On obtient ainsi la sollicitation de la figure 5,  $\gamma$ ,  $p$  étant provisoirement inconnu.  $p$  peut être déterminé par la condition que les déplacements relatifs verticaux des noeuds  $a$  et  $b$  d'une part,  $a'$  et  $b$  d'autre part, sont égaux.

La propriété ci-dessus énoncée, à savoir  $f = 0$ , est très importante, car, sans elle, nous n'aurions pu établir une équation de la ligne d'influence d'un montant intermédiaire  $r$  quelconque, en fonction de celle du même montant  $r$  considéré comme montant d'extrémité des deux tronçons à  $r$  et à  $n-r$  panneaux. Nous allons établir en principe cette relation.

Pour obtenir la ligne d'influence de l'effort normal dans le montant  $r$ , il suffit de calculer la déformée du tronçon de gauche à  $r$  panneaux, ainsi que celle du tronçon de droite à  $n-r$  panneaux et de remarquer que les noeuds  $a$  et  $a'$  subissent un déplacement relatif horizontal  $\delta + \delta'$  (figure 5,  $\varphi$ ) du fait de la déformation des deux tronçons. Rappelons que la composante verticale du déplacement relatif de  $a$  et  $a'$  est nulle. Cela étant, si l'on souleve le noeud  $b$  d'une hauteur  $y$ , telle que les deux parties  $a$  et  $a'$  viennent en contact, on conçoit que l'on aura la déformée réelle de toute la poutre en affectant les déformées individuelles des deux tronçons, des corrections  $\omega \cdot X$  et  $\omega' \cdot X'$  résultant du déplacement  $y$  (figure 5,  $\mu$ ). Si l'on mesure cette déformée à l'échelle du rapprochement des deux lèvres de la coupure du montant  $r$ , on aura la ligne d'influence de l'effort normal dans ce montant.

Or, la déformée individuelle du tronçon de gauche s'obtient directement en fonction de la ligne d'influence du montant  $r$  considéré comme montant

d'extrémité de la poutre à  $r$  panneaux. En effet, dans la sollicitation de la figure 5,  $\delta$ , on peut, sans changer la déformée, transporter les forces  $p$  extérieures jusqu'aux lèvres du montant  $r$ . Dès lors, on réalise la sollicitation utilisée pour déterminer la ligne d'influence du montant  $r$ , considéré comme montant d'extrémité du tronçon  $(1 - 2 - a - b)$  à  $r$  panneaux: on a ainsi soumis les lèvres à deux forces de traction  $k = 1 - p$ . D'après l'équation (2), la déformée du tronçon  $(1 - 2 - a - b)$  sera égale au produit de la ligne d'influence de  $N'_x$  par l'échelle du rapprochement des lèvres dû à  $k$ .

Quant à la déformée du tronçon  $(m - n - a' - b)$ , on peut encore, sans la changer, introduire les deux branches du montant  $r$  coupé, aux noeuds  $a'$  et  $b$ , et transporter les forces de traction  $p$  aux lèvres de la coupure. On sera ramené à une sollicitation analogue à celle du tronçon  $(1 - 2 - a - b)$  et la déformée du tronçon  $(m - n - a' - b)$  sera de même, à l'échelle près, égale à la ligne d'influence de l'effort normal dans le montant  $r$  considéré comme montant d'extrémité du tronçon de droite à  $n - r$  panneaux.

Or, les lignes d'influence des montants d'extrémité ont été calculées en appliquant l'équation de récurrence entre  $N'_x$  et  $N'^{-1}_x$  à partir de la poutre à un panneau et jusqu'à la poutre à  $n$  panneaux. Une fois ces dernières établies, la ligne d'influence d'un montant intermédiaire quelconque s'obtient donc rapidement.

D'ailleurs, il suffit d'établir l'équation de la ligne d'influence du montant intermédiaire  $r$  pour l'intervalle  $o - r$  du tronçon de gauche. En effet, pour l'intervalle de droite  $o - (n - r)$ , il suffit de retourner la poutre bout pour bout et de remplacer  $r$  par  $n - r$  dans la formule relative à l'intervalle  $o - r$ .

### Résumé de la première partie.

Nous avons vu tantôt, au paragraphe a, que la formule de récurrence des montants d'extrémités nous permet de calculer en particulier les lignes d'influence des montants  $1, 2, \dots, n - 1$ , considérés comme montants d'extrémités des poutres à  $1, 2, \dots, n - 1$  panneaux. Nous venons de voir à l'instant que ces lignes d'influence particulières ne sont pas établies inutilement, lors de la détermination de la ligne d'influence du montant  $n$  d'extrémité, mais qu'elles servent directement au calcul des lignes d'influence des montants intermédiaires  $1, 2, \dots, n - 1$  de la poutre à  $n$  panneaux, en les considérant une première fois comme montants d'extrémités des tronçons de gauche et une seconde fois comme montants d'extrémités des tronçons de droite. Par conséquent, aucun travail n'est inutile lors de l'application de la méthode.

### Seconde partie.

#### Lignes d'influence des diagonales et des barres des membrures.

Etant maintenant en possession des lignes d'influence de tous les montants surabondants, il nous reste à déterminer celles des diagonales et des barres des membrures. Nous sommes d'ailleurs ramenés à l'étude d'une poutre isostatique à losanges. C'est ce que montre la sollicitation de la figure 2,  $\beta$ , que l'on peut décomposer suivant les deux sollicitations des figures 2,  $\gamma$  et  $\delta$ .

Comme nous avons vu, la ligne d'influence d'une barre quelconque  $d$  est la somme des lignes d'influence de la même barre, dans les poutres 2,  $\gamma$  et 2,  $\delta$ .

La ligne d'influence dans la poutre ( $\gamma$ ) s'obtient par application du principe des travaux virtuels, cette poutre étant isostatique. Nous avons montré que l'emploi du tracé de Williot pour le calcul de la déformée est particulièrement simple, les déformations longitudinales des barres étant nulles.

Quant à la ligne d'influence dans la poutre ( $\delta$ ), elle s'obtient par le tracé ou le calcul d'un polygone de Cremona très simple également, étant donné que les forces extérieures  $Q$  et  $N$  sont deux à deux égales et opposées et que la poutre est symétrique par rapport à l'horizontale des noeuds de croisement des diagonales.

### Applications.

Nous avons fait ensuite le calcul exact des lignes d'influence d'une poutre du type figure 3 et d'une poutre à croix de Saint-André. Nous les avons

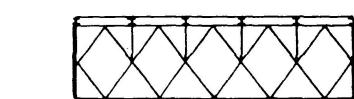
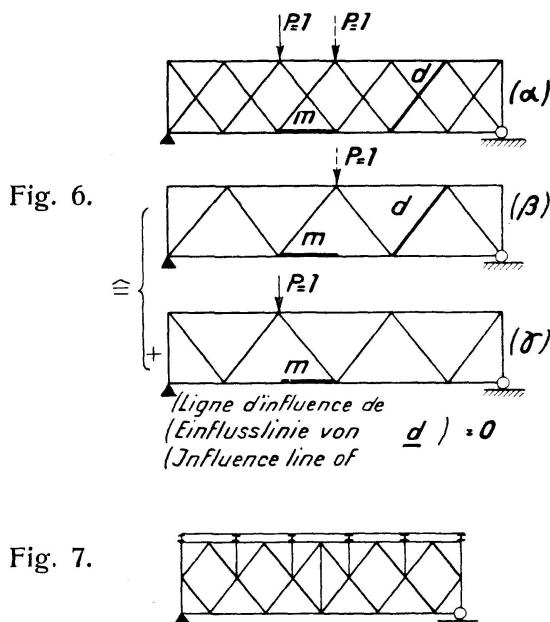


Fig. 8.

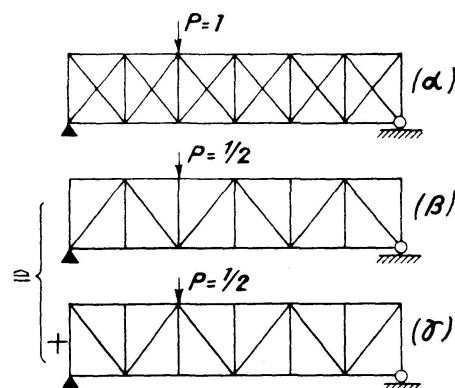


Fig. 9.

supposées toutes deux de même portée, de même hauteur, de même nombre de panneaux et sollicitées par les mêmes trains de charges. Nous avons pu ainsi mieux comparer leurs déformées.

Nous ferons également ci-après une discussion sommaire et une comparaison des propriétés des systèmes à losanges intérieurement isostatiques ou hyperstatiques du premier degré.

#### 1. Poutre du type figure 3 et systèmes isostatiques à losanges.

Après avoir tracé les lignes d'influence exactes du système de la figure 3 (ou fig. 6), nous avons montré que l'on peut calculer celui-ci comme poutre multiple d'un genre particulier, d'ailleurs tout à fait différent de celui que donne J. Résal dans son cours de ponts métalliques.

En effet, on peut supposer que la charge mobile  $P = 1$  est appliquée totalement à chacune des poutres isostatiques (fig. 6,  $\beta$  et  $\gamma$ ) qui composent la poutre hyperstatique ( $\alpha$ ) mais seulement aux noeuds correspondants dans l'une ou l'autre poutre ( $\beta$ ) ou ( $\gamma$ ). De cette hypothèse,

on déduit les ordonnées de la ligne d'influence d'une barre quelconque  $d$  ou  $m$ , au droit de chacun des noeuds de la membrure sollicitée par les charges mobiles, en les supposant alternativement égales aux ordonnées, au droit des noeuds correspondants, des lignes d'influence de  $d$  ou  $m$ , dans les poutres ( $\beta$ ) ou ( $\gamma$ ).

M. J. Résal suppose, au contraire, que chacune des poutres isostatiques composantes reprend la moitié des charges. On arrive ainsi à faire de grosses erreurs, tout particulièrement sur les lignes d'influence des diagonales.

Au contraire, les lignes d'influence obtenues par la méthode approchée résumée ci-dessus sont toutes, indistinctement, presque identiques aux lignes d'influence exactes. L'erreur relative sur les ordonnées que l'on peut importantes, c'est à dire sur celles qui sont seules intéressantes, ne dépasse pas 3 % et est presque toujours inférieure. Cette méthode peut donc être utilisée sans crainte pour la prédétermination des sections et peut même suffire pour le calcul définitif de celles-ci.

Quant aux surfaces des lignes d'influence, l'erreur relative est au maximum de 3 % pour les membrures. Pour les lignes d'influence des diagonales, qui comportent deux zones de signes contraires, l'erreur peut devenir importante pour les panneaux médians, car, pour ceux-ci les deux zones de signes contraires sont de même ordre de grandeur. Toutefois, ces dernières diagonales sont toujours choisies beaucoup plus fortes que ce que donnent les calculs, ceux-ci conduisant à des sections de loin inférieures au minimum admis dans la pratique.

En outre, les lignes d'influence du système figure 3 ont, comme celles des poutres isostatiques à losanges, une allure fortement dentelée, qui présente de sérieux inconvénients tels que: effet du freinage relativement grand, effets dynamiques importants par suite des variations brusques des sollicitations des barres. Les poutres de faible portée présentent le danger de résonance, surtout pour les diagonales, par suite de la faible distance entre les pointes des lignes d'influence, qui peut être égale par exemple à la circonference des roues d'une locomotive, dont le balourd frappera donc le pont avec la même alternance que celle des sommets des lignes d'influence.

Les poutres à losanges peuvent devenir intéressantes dans le cas des ponts de grande portée, dont l'effet modérateur du poids mort peut l'emporter sur les effets dynamiques des charges mobiles.

Un cas très intéressant d'application des systèmes à losanges isostatiques et hyperstatiques du premier degré est celui où les charges sont reportées par des traverses, rien qu'au droit des noeuds de croisement des diagonales, soit directement, soit par l'intermédiaire de demi-montants, ce qui est le plus fréquent, étant donné qu'alors les traverses peuvent être fixées au niveau d'une des membrures. On constate en effet, dans ce cas, que les lignes d'influence n'ont plus de variations brusques, que leurs pointes maxima sont réduites et que pour celles des diagonales, les ordonnées sont réduites de moitié. D'ailleurs, on conçoit que cette disposition fait travailler également les deux trains de diagonales. Celles-ci reprennent donc la moitié de l'effort tranchant.

Le cas où les charges sont transmises par traverses au droit des noeuds de croisement des diagonales et en même temps au droit des noeuds situés aux sommets des losanges, présente les mêmes inconvénients que celui où les traverses n'existent qu'au droit de ces derniers: les dentelures des lignes d'influence subsistent et les diagonales reprennent chacune, la totalité de l'effort tranchant.

La disposition intéressante des demi-montants est appliquable uniquement dans les systèmes isostatiques à losanges du type figure 7 et dans les systèmes à losanges hyperstatiques du premier degré du type fig. 8. Dans ces derniers (fig. 8), les montants d'extrémités sont rigides à la flexion, en leur milieu.

Au contraire, cette disposition n'est guère pratique dans les poutres du type figure 6, car l'entre-distance des traverses d'extrémité serait différente, la moitié, de celle des traverses médianes.

## 2. Poutres à croix de Saint-André.

Les lignes d'influence exactes des poutres à croix de Saint-André nous ont permis également d'établir une méthode approchée, basée sur la considération de la poutre figure 9,  $\alpha$ , comme poutre multiple composée des deux poutres isostatiques ( $\beta$ ) et ( $\gamma$ ). Mais cette fois, la décomposition en poutres isostatiques se fait de la manière habituelle, utilisée jusque maintenant par intuition, comme l'a fait le professeur J. Résal, à savoir que l'on suppose les poutres ( $\beta$ ) et ( $\gamma$ ) soumises chacune à la moitié des charges.

On obtient ainsi des lignes d'influence approchées qui ont la même allure que les lignes d'influence exactes. Ces dernières ont une allure très favorable; les alternances sont sensiblement nulles. En outre, signalons cette propriété très importante que les montants travaillent très peu, à part les montants d'extrémités. Ils interviennent donc très favorablement par leur présence, tout en n'étant eux-mêmes que faiblement sollicités.

Il est à noter toutefois que la précision de la méthode approchée est moins grande que pour les systèmes du type figure 6. L'erreur sur les ordonnées des lignes d'influence des membrures est au maximum de 4 % seulement, mais elle est plus grande sur celles des diagonales: elle varie entre 14 % pour les diagonales d'extrémités et 20 % pour les diagonales médianes, mais ces dernières sont en général choisies plus fortes que ce que donne le calcul, de sorte que l'erreur ne dépasse pas, pratiquement, 15 %.

Sur les surfaces des lignes d'influence, l'erreur relative n'est que de 1 % pour les membrures; pour les diagonales, elle ne dépasse pas en moyenne 10 %, mais peut atteindre 100 % pour les diagonales du milieu de la poutre. Encore une fois, cette dernière erreur de 100 % ne présente aucun danger, les diagonales médianes étant toujours choisies trop fortes.

On trouve que les diagonales reprennent la moitié de l'effort tranchant, tandis que les membrures sont sollicitées également et reprennent le moment pris par rapport au noeud de croisement des deux diagonales qu'elles comprennent.

Quoique la précision de la méthode approchée ne soit plus aussi grande, celle-ci peut encore remplacer avantageusement la méthode exacte dans la plupart des cas. Elle est très satisfaisante pour le calcul des sections.

Toutefois, il convient de calculer les lignes d'influence exactes lorsqu'on veut faire des vérifications entre les déformations. Nous avons en effet constaté à ce propos un aspect particulier du diagramme de Williot lorsqu'on l'applique aux poutres isostatiques extérieurement mais à barres surabondantes. Dans ce cas, le nombre de vérifications auxquelles doit répondre le tracé de Williot est égal au degré d'hyperstaticité ou au nombre de barres surabondantes, en l'occurrence égal au nombre de panneaux de la poutre à croix de Saint-André. Il faut en effet que la différence des déformées des deux membrures soit égale, au droit de chaque montant, à la

déformation longitudinale de celui-ci. C'est pour faire ces vérifications qu'il est nécessaire de calculer les lignes d'influence exactes avec très grande précision.

Nous croyons que ces observations sont très générales et à la fois plus simples et plus exactes que les considérations approximatives qui figurent dans le cours de ponts métalliques de Mr. Jean Résal pour les poutres à croix de Saint-André. On ne trouve d'ailleurs, dans l'ouvrage de Résal, aucune comparaison entre la méthode approximative et le calcul exact: le degré d'exactitude n'est donc pas défini.

### 3. Déformées.

Enfin, nous avons tracé les déformées des poutres des types figures 6 et 9 pour une même mise en charge.

La déformée de la poutre figure 6 est à dentelures peu accentuées. La forme en dents de scie est totalement éliminée dans la déformée de la poutre à croix de Saint-André, qui affecte une forme régulière se rapprochant de celle d'une poutre à âme pleine.

Nous avons tracé ces déformées en vue de la détermination des rotations d'ensemble des barres, qui servent au calcul des efforts secondaires basé sur la méthode de Mohr. Nous savons, en effet, que l'hypothèse d'articulations aux noeuds est insuffisante dans la plupart des cas et qu'il faut superposer aux efforts principaux les efforts secondaires. Nous déterminerons ces derniers dans un autre travail. Pour l'instant, nous nous contenterons de signaler qu'ils sont très probablement assez élevés, du moins dans les systèmes isostatiques à losanges.

### Résumé.

Jusqu'à présent, dans l'établissement des lignes d'influence des efforts normaux dans les barres des poutres en treillis à croix de Saint-André, ou s'est généralement borné, par intuition, à considérer ce genre de poutre comme système multiple.

Il importe donc de voir si cette méthode approchée est suffisante. À cette fin, nous avons eu recours au principe des travaux virtuels et au principe de réciprocité de Maxwell, qui nous permet d'établir des formules de récurrence, constituant une des meilleures méthodes en ce qui concerne les poutres à degré d'hyperstaticité élevé et quelconque.

Ces équations de récurrence se répartissent en deux groupes, si nous choisissons les montants comme barres surabondantes: celles relatives aux mêmes montants considérés tels qu'ils se présentent réellement, c'est à dire comme montants intermédiaires.

Le calcul rigoureux montre que la méthode approchée peut suffire dans la plupart des cas, même dans la détermination des sections. Dans certains cas particuliers, par exemple dans le cas où des vérifications de déformations par le tracé de Williot doivent avoir lieu, il est cependant nécessaire de faire le calcul rigoureux avec une précision suffisante.

### Zusammenfassung.

Bis jetzt ist keine strenge Berechnung der Einflußlinien für die Normalkräfte in den Stäben der Fachwerke mit Strebekreuzen durchgeführt worden. Man hat sich stets darauf beschränkt, diese Art Träger durch Anschauung als mehrfache Systeme zu behandeln.

Es ist also wichtig, zu prüfen, ob diese Näherungsmethode genügt. Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit und des Satzes von Maxwell über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen konnten Rekursionsformeln aufgestellt werden, die für hochgradig statisch unbestimmte Träger die einfachsten Lösungen ergeben.

Diese Rekursionsgleichungen können in zwei Gruppen geteilt werden, wenn man die Pfosten als überzählige Stäbe wählt. Die Gleichungen der einen Gruppe beziehen sich auf die Pfosten, die als rechtsliegende Endpfosten der links von letzteren liegenden Trägerteile betrachtet werden und die der andern Gruppe beziehen sich auf die gleichen Pfosten, so wie sie sich tatsächlich darstellen, d. h. als Zwischenpfosten.

Die strenge Berechnung zeigt, daß die Näherungsmethode für die meisten Fälle genügen kann, sogar für die Bestimmung der Querschnitte. In gewissen Spezialfällen, z. B. für den Fall, daß eine Überprüfung von Verschiebungen nach dem Williot'schen Verfahren vorgenommen werden muß, ist es indessen erforderlich, die strenge Berechnung mit einer genügenden Genauigkeit durchzuführen.

### Summary.

Up to now no strict analysis of the lines of influence of the principal stresses in the members of trusses with crossed diagonals has been established. One has limited oneself, by intuition, to look upon such trusses as multiple systems.

It therefore is of importance to find out if this method of approximation be sufficient. By means of the principle of virtual work and of Maxwell's principle of reciprocity we were able to put up formulae of recurrence giving us the easiest approach and way of solution as regards statically highly indeterminate trusses.

These equations of recurrence may be divided into two groups when considering the posts or uprights as redundant members. The equations of one group refer to those posts which we look at as right-hand end-posts of the truss-members lying at their left; and the equations of the other group refer to the same posts such as they really present themselves, i. e. as intermediate uprights.

The strict analysis shows us that the approximate method may be sufficient for most cases, even for the determination of sections. In certain particular cases, e. g. where an examination of overall deformations by means of a Williot diagram has to take place, it becomes, nevertheless, necessary to apply the strict analysis with a sufficient accuracy.