Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 3 (1935)

Artikel: Tabellen zur Berechnung von Bogenträgern
Autor: Enyedi
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4144

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

TABELLEN ZUR BERECHNUNG VON BOGENTRÄGERN

TABLEAUX POUR LE CALCUL DES ARCS

TABLES FOR CALCULATION OF ARCHED STRUCTURES

Dr. ENYEDI, Budapest (Ungarn).

Die neueren weitgespannten Brücken und Dachkonstruktionen kommen in der Baupraxis mehr und mehr zur Ausführung und werden als eingespannte Bogen und Zweigelenkbogen ausgebildet.

Falls die Bogenachse eine Parabel ist, kann das Problem als genügend gelöst betrachtet werden, weil die statischen Werte aus den bisher erschienenen Tabellenwerken [1]) in einfacher Weise angeschrieben werden können. Falls aber die Achse eine Stützlinie ist, was in der Praxis fast immer der Fall ist, so mangelt es an Tabellen, welche die zur statischen Untersuchung nötigen Werte enthalten, wie die Winkler'schen Tabellen die Werte des durchlaufenden Trägers; es war daher immer unvermeidlich, die altbekannte, sehr mühsame und umständliche statische Berechnung durchzuführen, und gegebenenfalls auch mehrere Male zu wiederholen.

Die Tabellen der durchlaufenden Träger waren leichter zu berechnen, weil durch die Verhältniszahlen der Stützweiten die Konstruktion des Trägers mit unveränderlichen Querschnitten vollkommen bestimmt war. Demgegenüber ist aber die Bogenkonstruktion durch die Verhältniszahl der Bogenhöhe und Stützweite überhaupt nicht bestimmt, weil einerseits durch drei Punkte (Kämpfer und Scheitel), die von der erwähnten Verhältniszahl festgesetzt sind, unendlich viele Bogenachsen gezogen werden können, und weil andererseits die Bogenquerschnitte als veränderlich betrachtet werden müssen.

Die Schwierigkeiten können nur dann behoben werden, wenn sowohl die Bogenachse, als auch die Querschnittsänderungen von je einer Verhältniszahl, und zwar einzig und allein von diesen Verhältniszahlen abhängig gemacht werden können, weil in diesem Falle die Bogenkonstruktion mit diesen zwei Zahlenwerten, — Achsenbeiwert und Querschnittsbeiwert genannt —, eindeutig bestimmt ist. Falls der Bogen nur von zwei Beiwerten abhängig ist, so bietet es keine Schwierigkeit mehr, die zur statischen Untersuchung nötigen Werte für jene Beiwerte zu berechnen. Die Resultate werden dann in entsprechender Weise tabellarisch zusammengestellt, woraus die statischen Werte immer entnommen werden können.

Es erscheint also als notwendig, zuerst die Gleichung der Bogenachse aufzustellen und die Gesetzmäßigkeit der Querschnittsänderung zu bestimmen; das Bogenproblem selbst wird immer sehr leicht gelöst, wenn die Bogenachse und die Querschnittsänderung nur von je einem Beiwert abhängig gemacht worden sind.

Die Bogenachse muß natürlich mit dem Seilpolygon einer bestimmten Belastung, und zwar im allgemeinen mit der ganzen ständigen und

[1]) M. CHALOS, Paris: Tables pour le calcul des arcs hyperstatiques en béton armé à fibre moyenne parabolique. Mémoires II, Seite 49. Dr. Ing. B. ENYEDI, Budapest: Tabellen zur Lösung der Bogenkonstruktionen (Parabelbogen). Berlin, 1929.

der halben rollenden Belastung, zusammenfallen (Fig. 1). Da aber das Eigengewicht der Bogenkonstruktion im allgemeinen noch nicht mit dem Seilpolygon übereinstimmt, muß auf Grund des erhaltenen Seilpolygons die Belastungsfläche nochmals festgestellt und das Seilpolygon neuerdings aufgezeichnet werden. Falls das zweite Seilpolygon das erste nicht deckt, — was eigentlich zu erwarten ist —, dann muß das Verfahren wiederholt werden, und zwar so oft, bis die Bogenachse mit dem Seilpolygon zusammenfällt. Sobald dies zutrifft, so ist die richtige Bogenachse, die Stützlinie, gefunden.

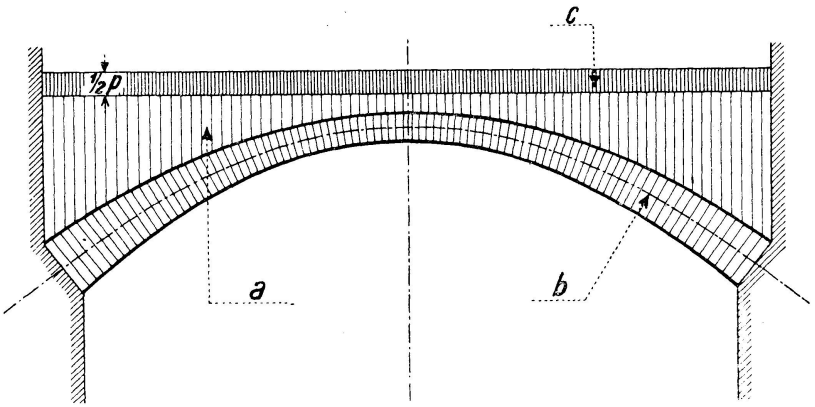

Fig. 1.

Um die Gleichung der Stützlinie aufstellen zu können, wird diese Zeichenarbeit mathematisch vollführt[2]). Die Belastungsfläche wird zuerst mit einer Parabel dritten Grades abgeschlossen, da diese mit der Stützlinie nahezu übereinstimmt (Fig. 2, I. und II.):

$$y_g = 8g\frac{x^3}{l^3}$$

wo g den größten Belastungsunterschied und l die Stützweite bedeutet. Wenn f die Bogenhöhe, g_0 die Belastung am Scheitel sind, und

$$g = \gamma g_0$$

ferner

$$x = \xi l$$

dann wird nach vollführter Berechnung[2]) die Gleichung des ersten Seilpolygons (Fig. 2, III.):

$$y = 8f\frac{5 + 4\gamma\xi^3}{10 + \gamma}\xi^2 \tag{1}$$

Es wird das zeichnerische Verfahren mathematisch fortgesetzt, d. h. die Belastungsfläche wird unten mit dem Seilpolygon nach Gl. (1) begrenzt, wodurch sich die folgende Gleichung (2) für die Stützlinie ergibt:

$$y = 4f\frac{21(10 + \gamma) + 4\gamma(35 + 8\gamma\xi^3)\xi^2}{21(10 + \gamma) + \gamma(35 + \gamma)}\xi^2 \tag{2}$$

Da diese Gleichung eine Bogenachse darstellt, die mit der Begrenzungslinie der Belastungsfläche praktisch genommen zusammenfällt, und außerdem mit den in der Fachliteratur[3]) veröffentlichten Berechnungsresultaten keinen nennenswerten Unterschied aufweist, wird sie als Gleichung der Bogenachse

[2]) Siehe: Le Constructeur de Ciment Armé, 1933, Seite 265.

[3]) Dr. Ing. F. Kögler: Gewölbetabellen. Berlin, 1928. A. Strassner: Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke, II. Band. Berlin, 1921.

(Stützlinie) betrachtet. Die Verhältniszahl $\gamma = \frac{g}{g_0}$ ist der Achsenbeiwert, der von dem Eigengewicht der Konstruktion in einfacher Weise bestimmt wird.

Die Tabelle 1 enthält die Ordinaten der Stützlinien, — in den Zehntelpunkten der Bogenhälfte (Fig. 2, III.) —, die auf Grund der Gleichung (2) berechnet wurden, und die sich auf die Werte $\gamma = 0$, 1.2, 3.0, 5.0 und 8.0 beziehen. Die erste Stützlinie ist natürlich eine Parabel zweiten Grades.

Es ist selbstverständlich, daß die Gleichung der Bogenachse unabhängig davon ist, ob es sich um einen eingespannten Bogen oder Zweigelenkbogen handelt, daher ist die Gleichung (2) als Gleichung eines jeden Stützlinienbogens zu betrachten.

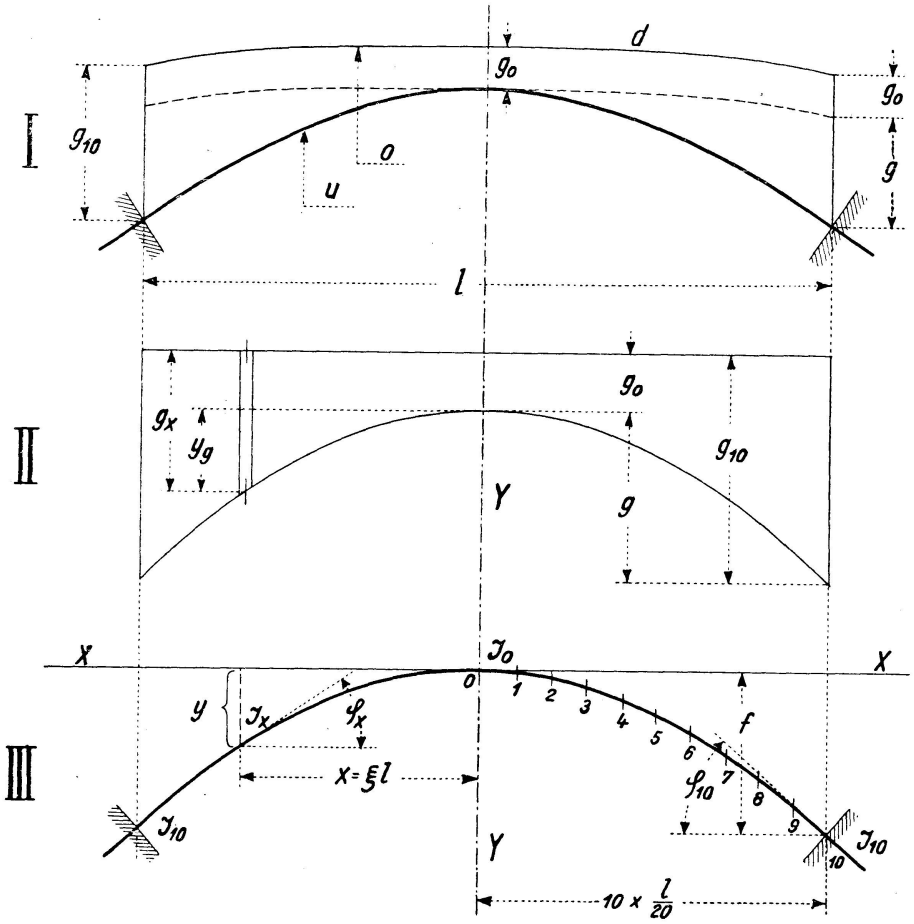

Fig. 2.

Die Querschnittsänderung. Eine Gesetzmäßigkeit für die Querschnittsänderung einer Bogenkonstruktion ist sehr schwer aufzustellen, da eine tatsächliche Gesetzmäßigkeit eigentlich gar nicht besteht. Auf Grund der ausgeführten Objekte kann man aber einen Zusammenhang suchen, der den tatsächlichen Querschnittsänderungen sehr nahe liegt, und sich mathematisch einfacher ausdrücken läßt. Mit Rücksicht darauf, daß sich die Querschnittshöhe im allgemeinen vom Scheitel bis zu den Kämpfern ziemlich gleichmäßig ändert, kann angenommen werden, daß die Änderung des Trägheitsmomentes der dritten Potenz der Abszissen proportional ist. Wenn diese Voraussetzung mathematisch ausgedrückt und wenn berücksichtigt wird, daß

das Trägheitsmoment $[J_x]$ auch von dem Neigungswinkel der Tangente $[\varphi_x]$ abhängt (Fig. 2, III.), so gelangt man zur Gleichung

$$J_x \cos \varphi_x = [1 + 8(k-1)\xi^3] J_0 \tag{3}$$

wo:

$$k = \frac{J_{10}}{J_0} \cos \varphi_{10} \tag{3a}$$

und J_0 bez. J_{10} das Trägheitsmoment im Scheitel bez. an den Kämpfern und φ_{10} den Neigungswinkel der Tangente an den Kämpfern bedeuten.

Tabelle 1.

Ordinaten der Bogenachse.

Ordonnées de l'axe de l'arc.

Ordinates of arch-axis.

Querschnitt Section	Gemessen vom Mesurée de la Meas'd fr.	Ordinaten, wenn der Achsenbeiwert γ = Ordonnées, si le coefficient γ = Ordinates, if axial factor γ =				
		0,0	1,2	3,0	5,0	8,0
0	Scheitel — Clef — Crown	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1		0,0100	0,0085	0,0071	0,0062	0,0053
2		0,0400	0,0340	0,0287	0,0250	0,0216
3		0,0900	0,0772	0,0657	0,0578	0,0503
4		0,1600	0,1389	0,1199	0,1066	0,0938
5		0,2500	0,2205	0,1935	0,1745	0,1558
6		0,3600	0,3236	0,2898	0,2656	0,2412
7		0,4900	0,4502	0,4127	0,3853	0,3570
8		0,6400	0,6030	0,5675	0,5408	0,5125
9		0,8100	0,7851	0,7605	0,7416	0,7209
10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0	Kämpfer — Naissance Spring-line	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1		0,9900	0,9915	0,9929	0,9938	0,9947
2		0,9600	0,9660	0,9713	0,9750	0,9784
3		0,9100	0,9228	0,9343	0,9422	0,9497
4		0,8400	0,8611	0,8801	0,8934	0,9062
5		0,7500	0,7795	0,8065	0 8255	0,8442
6		0,6400	0,6764	0,7102	0,7344	0,7588
7		0,5100	0,5498	0,5873	0,6147	0,6430
8		0,3600	0,3970	0,4325	0,4592	0,4875
9		0,1900	0,2149	0,2395	0,2584	0,2791
10		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Da zahlreiche Konstruktionen bezüglich Querschnittsänderungen untersucht worden sind, die gleich den in der Fachliteratur veröffentlichten Beispielen[4]) der Gleichung (3) entsprechen, wird zur weiteren Untersuchung angenommen, daß die Querschnittsänderungen eines Bogens von der Formel 3 zum Ausdruck gebracht werden können. Die Verhältniszahl k ist der Querschnittsbeiwert.

[4]) Kersten: Brücken in Eisenbeton, Band II, Seiten 59—60. Berlin, 1908. Dr. Ing. Max Ritter: Beiträge zur Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger, Seite 26. Berlin, 1909.

Der Querschnittsbeiwert k wird für den eingespannten Bogen, dessen Querschnitte vom Scheitel zu den Kämpfern hin wachsen, immer größer als Eins, und für den Zweigelenkbogen, umgekehrt, immer kleiner als Eins. Den zahlenmäßigen Wert desselben bestimmt man durch die Formel 3a.

Eingespannter Bogen. Um die Grundgleichungen eines eingespannten Bogens zu erhalten, muß der Bogen in der Entfernung vom Scheitel $x = \alpha l$ mit einer Einzelkraft P belastet werden (Fig. 3, II.). An den Einspannstellen A und B werden gleich große, und entgegengesetzt gerichtete horizontale Kräfte H, vertikale Auflagerkräfte V_A und V_B und Einspannmomente M_A und M_B auftreten. Das Momentenbild (Fig. 3, III.) wird in vier Teile (Fig. 3, IV.—VII.) aufgelöst, deren Wirkungen auf die Formänderungen einzeln berücksichtigt werden.

Wenn allgemein die Verdrehung und Verschiebung zwischen beliebigen Querschnitten gesucht würde, wäre diese Auflösung der Momentenbilder sehr schwer zu verwenden; da es sich aber zwecks Feststellung der statisch unbestimmten Reaktionen nur um die Verdrehung und Verschiebung zwischen den Einspannstellen handelt, können die vier Teilmomentenbilder in ihrer ganzen Länge auf einmal in die statische Untersuchung einbezogen werden, weshalb die vier Teilmomentenbilder sehr vorteilhaft verwendet werden können.

Aus den Teilmomentenbildern werden die Formänderungsbilder derart bestimmt, daß die einzelnen Momentenordinaten laut Formel 3 umgerechnet werden; die Ordinaten der Formänderungsbilder sind nämlich die Winkeländerungen $M\,ds/EJ$, deren allgemeiner Wert ist:

$$\frac{M_x\,ds}{EJ_x} = \frac{M_x\,dx}{\cos\varphi_x}\,\frac{\cos\varphi_x}{E[1+8(k-1)\xi^3]J_0} = \frac{M_x\,dx}{EJ_0\,[1+8(k-1)\xi^3]}$$

bzw. mit EJ_0 multipliziert:

$$\frac{M_x\,dx}{1+8(k-1)\xi^3} \tag{4}$$

Bei der Untersuchung des eingespannten Bogens müssen aus den vier Teilmomentenbildern vier Formänderungsbilder gebildet werden.

Die Einspannstellen A und B können sich gegenseitig weder verdrehen, noch verschieben. Da aber die Fläche der Formänderungsbilder mit dem Verdrehungswinkel gleich ist, und zwischen A und B die vier ganzen Teilmomentenbilder wirken, ist es sicher, daß die Flächen der aus den vier Teilmomentenbildern gebildeten Formänderungsbilder zusammen den Wert Null haben müssen.

In Anbetracht dessen, daß das Drehmoment der Formänderungsbilder die Verschiebungen ergibt, und A und B gegeneinander weder in horizontaler noch in vertikaler Richtung eine Verschiebung aufweisen, ist es auch sicher, daß das Drehmoment der vier Formänderungsbilder, bezogen auf die horizontale oder vertikale Achse durch A und B, das heißt die Summe des Drehmomentes, ebenfalls den Wert Null haben muß.

Die vier Formänderungsbilder stellen daher ein Gleichgewichtssystem dar, und es muß das Drehmoment für jede beliebige Achse verschwinden.

Zur weiteren Untersuchung müssen die Flächen und Schwerpunkte der vier Formänderungsbilder bestimmt werden. Es ist selbstverständlich, daß die einzelnen Elemente eines jeden Formänderungsbildes, d. h. die Verdrehungswinkel, als eine im Bogenquerschnitt konzentrierte Belastung gedacht werden müssen.

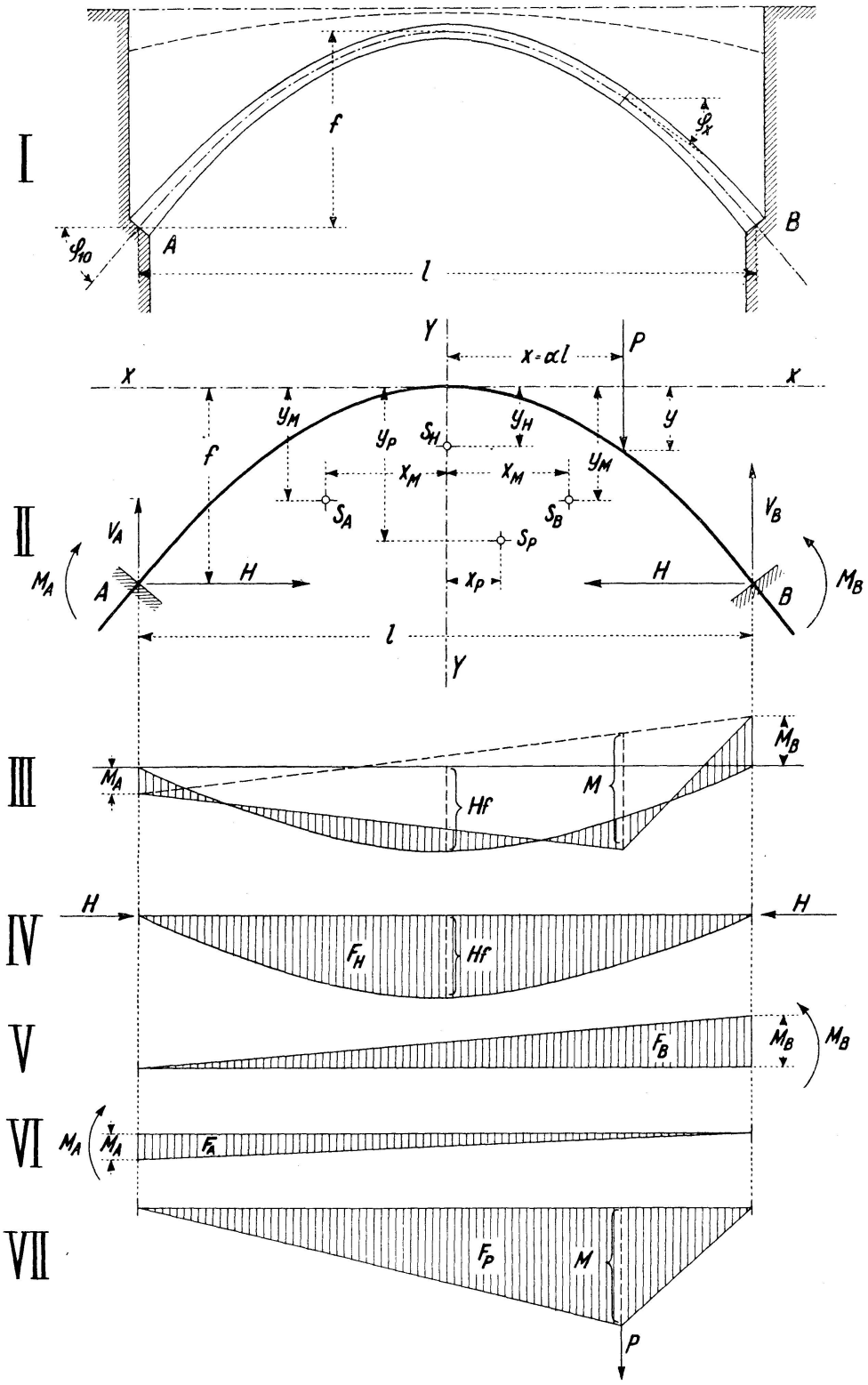
I
f
φ_x
φ_{10}
A
B
l
II
Y
x = αl
P
x
x
y_M
y_P
S_H
y_H
y
f
x_M
x_M
y_M
S_A
S_B
S_P
V_A
V_B
M_A
A
H
x_P
H
B
M_B
l
Y
III
M_A
M_B
Hf
M
IV
H
H
F_H
Hf
V
F_B
M_B
M_B
VI
M_A
M_A
F_A
VII
F_P
M
P

Fig. 3.

Das erste Formänderungsbild ist aus dem Momentenbild Fig. 3, IV. abzuleiten. Falls die Horizontalkraft $H = 1$ ist, dann ist das Größtmoment $Hf = f$; es wird vorläufig vorausgesetzt, daß sowohl l, als auch f die Einheitsgröße haben; wenn dann die Fläche den Wert F_h hat, dann ist die Fläche des richtigen Formänderungsbildes:

$$F_H = Hflf_h \tag{5a}$$

Der Schwerpunkt des Formänderungsbildes $[S_H]$ liegt in der Mittelachse und wenn die Ordinate im Falle $H = 1$, $l = 1$ und $f = 1$ den Wert y_h hat, dann ist die richtige Ordinate:

$$y_H = fy_h \tag{5b}$$

Die Werte F_h und y_h hängen nur von den γ- und k-Werten ab, daher sind sie konstante Werte eines eingespannten Bogens.

Das zweite Formänderungsbild ist ein Dreieck (Fig. 3, V.); vorausgesetzt, daß $M_B = 1$, $l = 1$ und $f = 1$ ist, sind der Flächeninhalt bez. die Abszisse und Ordinate des Schwerpunktes $[S_B]$ vom Formänderungsbilde F_m bez. x_m und y_m; die richtigen Werte sind dann:

$$F_M^B = lM_BF_m \qquad x_M^B = lx_m \qquad y_M^B = fy_m \tag{6}$$

Vom dritten Formänderungsbild (Fig. 3, VI.) folgt:

$$F_M^A = lM_AF_m \qquad x_M^A = lx_m \qquad y_M^A = fy_m \tag{7}$$

wo die konstanten Werte F_m, x_m und y_m ebenfalls nur von γ- und k-Werten abhängen.

Das vierte Momentenbild ist ein Dreieck (Fig. 3, VII.), dessen größte Ordinate unter der Einzelkraft P, die in der Entfernung $x = \alpha l$ von der Mittelachse steht, den Wert hat:

$$M = \frac{P\left(\frac{l}{2} + \alpha l\right)\left(\frac{l}{2} - \alpha l\right)}{l} = Pl\left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right)$$

In dem Falle $P = 1$, $l = 1$ und $f = 1$ sind die Fläche bez. die Abszisse und Ordinate des Schwerpunktes $[S_P]$ vom Formänderungsbilde F_P bez. x_p und y_p, somit sind die richtigen Werte:

$$F_P = Pl^2F_p \qquad x_P = lx_p \qquad y_P = fy_p \tag{8}$$

wo die konstanten Werte F_p, x_p und y_p von den γ- und k-Werten, aber auch von der Lage der Einzelkraft P, d. h. auch von α abhängig sind.

Da die vier Formänderungsbilder, die als in ihrem Schwerpunkte wirkende Kräfte aufzufassen sind, ein Gleichgewichtssystem bilden, muß zuerst die Summe der Flächen verschwinden:

$$Hflf_h + lM_BF_m + lM_AF_m + Pl^2F_p = 0$$

Ferner müssen die Drehmomente, bezogen auf die Horizontale S_AS_B und auf die Vertikale durch S_B, ebenfalls verschwinden:

$$Hflf_h(y_h - y_m)f + Pl^2F_p(y_p - y_m)f = 0$$
$$Hflf_hx_ml + lM_AF_m2lx_m + Pl^2F_p(x_m - x_p)l = 0$$

Die Gleichgewichtsgleichungen sind nach der Vereinfachung:

$$Hff_h + (M_A + M_B)F_m + PlF_p = 0 \tag{9}$$
$$Hf(y_h - y_m)F_h + PlF_p(y_p - y_m) = 0 \tag{10}$$
$$HfF_hx_m + 2M_AF_mx_m + PlF_p(x_m - x_p) = 0 \tag{11}$$

In den Gleichungen (9)—(11) haben die Faktoren: F_h, y_h, F_m, x_m, y_m, F_p, x_p und y_p konstante Zahlenwerte; sie sind daher Festwerte des Bogens und können für jeden Bogen und für die verschiedenen Lagen von P, das heißt für jeden praktischen Wert von γ, k und α, berechnet werden. Die Gleichungen bestimmen die drei Unbekannten: H, M_A und M_B, und können daher als die Grundgleichungen des eingespannten Bogens betrachtet werden.

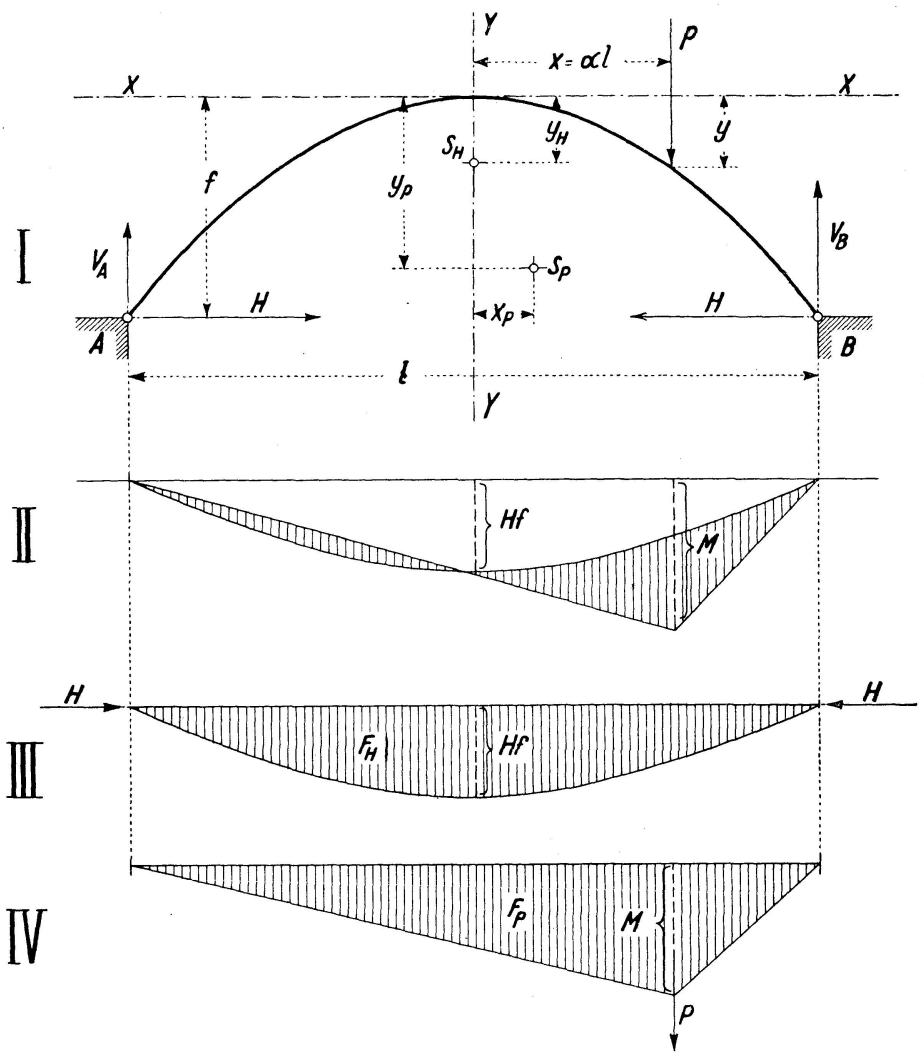

Fig. 4.

Der Unterschied zwischen einem beiderseits eingespannten Bogen und einem geraden Träger liegt natürlich nur in der Form der Bogenachse. Die Auflösung des Momentenbildes führte beim Bogen zu vier Teilmomentenbildern, während die altbekannte Ritter'sche Theorie das Momentenbild eines eingespannten geraden Trägers in drei Teile auflöst. Wenn man zu den drei Teilmomentenbildern des eingespannten Trägers das vierte von der Horizontalkraft hervorgerufene Momentenbild nach Fig. 3, IV. hinzufügt, erhält man das Momentenbild des eingespannten Bogens. Es ist daher sicher, daß die statische Untersuchung des eingespannten Bogens und Trägers sich voneinander nur durch das, der gebogenen Achse entsprechende, vierte Momentenbild unterscheiden; es ist daher auch sicher, daß die Lösung des ein-

Tabelle 2.

Reaktionskräfte des eingespannten Bogens.
Réactions de l'arc encastré. — Reactions of the restrained arch.

Achsenbeiwert / Coefficient de l'axe / Axial factor } $\gamma = 3{,}0$ — Querschnittsbeiwert / Coefficient de la section / Cross-sectional factor } $k = 2$

Querschnitt / Section / Cross-section	Horizontale / Horizontal	Linksseitige / à gauche / left	Rechtsseitige / à droite / right	Linksseitiges / à gauche / left	Rechtsseitig. / à droite / right
		vertikale — verticale / vertical		Einspannmoment / Moment d'encastrement / Moment of restraint	
	Auflagerkraft — Réaction / Abutment-reaction				
1	2	3	4	5	6
9	0,007923	0,994561	0,005439	−0,040465	+0,004096
8	0,029466	0,977860	0,022140	−0,063187	+0,014673
7	0,060874	0,949719	0,050281	−0,070690	+0,029029
6	0,098067	0,910325	0,089675	−0,065932	+0,044393
5	0,137254	0,860281	0,139719	−0,051872	+0,058409
4	0,174699	0,800650	0,199350	−0,031689	+0,068961
3	0,207210	0,732905	0,267095	−0,008402	+0,074503
2	0,232208	0,658854	0,341146	+0,015221	+0,074075
1	0,247926	0,580505	0,419495	+0,036889	+0,067394
0	0,253301	0,500000	0,500000	+0,054742	+0,054742
1	0,247926	0,419495	0,580505	+0,067394	+0,036889
2	0,232208	0,341146	0,658854	+0,074075	+0,015221
3	0,207210	0,267095	0,732905	+0,074503	−0,008402
4	0,174699	0,199350	0,800650	+0,068961	−0,031689
5	0,137254	0,139719	0,860281	+0,058409	−0,051872
6	0,098067	0,089675	0,910325	+0,044393	−0,065932
7	0,060874	0,050281	0,949719	+0,029029	−0,070690
8	0,029466	0,022140	0,977860	+0,014673	−0,063187
9	0,007923	0,005439	0,994561	+0,004096	−0,040465
Multiplikator	$\times \frac{Pl}{f}$	$\times P$		$\times Pl$	

gespannten Bogens als eine Verallgemeinerung der altbewährten Ritter'schen Theorie zu betrachten ist.

Zweigelenkbogen. Die Grundgleichung des Zweigelenkbogens kann auf dieselbe Art abgeleitet werden wie die Formeln (9)—(11).

Das Momentenbild (Fig. 4, II.) wird in zwei Teile aufgelöst (Fig. 4, III.—IV.). Wenn man das Gesetz verwenden will, daß die Endquerschnitte des Bogens sich gegeneinander weder verdrehen noch verschieben können, muß vorausgesetzt werden, daß die Verdrehungen der Stützgelenke A und B auch zu den Formänderungsbildern zu rechnen sind; dann hat man aber auch im Falle des Zweigelenkbogens vier Formänderungsbilder, und zwar zwei nach den Formeln 5 und 8, und die beiden Verdrehungswinkel A bez. B der Stützgelenke A bez. B; es ist ohne weiteres klar, daß die vier Formänderungsbilder Verdrehungswinkel darstellen, die als Kräfte in den Punkten S_H, S_P, A und B wirken.

Wenn die Verdrehung der Stützgelenke zu den Formänderungsbildern gerechnet werden, gibt es überhaupt keinen wesentlichen Unterschied zwi-

Tabelle 3.

Reaktionskräfte des Zweigelenkbogens.

Réactions de l'arc à deux articulations. — Reactions of the two-hinged arch.

Querschnitt Section Cross-section	Horizont. Reaktion, wenn der Achsenbeiwert γ den Wert hat Réaction horizontale, si le coefficient γ a la valeur Horizontal reaction, if the axial factor γ has the value					Linksseitige à gauche left	Rechtsseitige à droite right
						vertikale Reaktion verticale Réaction vertical Reaction	
	0,0	1,2	3,0	5,0	8,0		
1	2	3	4	5	6	7	8
9	0,031098	0,030648	0,030212	0,029893	0,029569	0,95	0,05
8	0,061313	0,060345	0,059411	0,058730	0,058034	0,90	0,10
7	0,089848	0,088279	0,086775	0,085678	0,084558	0,85	0,15
6	0,116000	0,113751	0,111612	0,110059	0,108476	0,80	0,20
5	0,139160	0,136206	0,133417	0,131400	0,129349	0,75	0,25
4	0,158813	0,155177	0,151766	0,149310	0,146819	0,70	0,30
3	0,174535	0,170297	0,166342	0,163504	0,160635	0,65	0,35
2	0,186000	0,181290	0,176911	0,173776	0,170613	0,60	0,40
1	0,192972	0,187963	0,183316	0,179996	0,176651	0,55	0,45
0	0,195312	0,190199	0,185461	0,182077	0,178669	0,50	0,50
1	0,192972	0,187963	0,183316	0,179996	0,176651	0,45	0,55
2	0,186000	0,181290	0,176911	0,173776	0,170613	0,40	0,60
3	0,174535	0,170297	0,166342	0,163504	0,160635	0,35	0,65
4	0,158813	0,155177	0,151766	0,149310	0,146819	0,30	0,70
5	0,139160	0,136206	0,133417	0,131400	0,129349	0,25	0,75
6	0,116000	0,113751	0,111612	0,110059	0,108476	0,20	0,80
7	0,089848	0,088279	0,086775	0,085678	0,084558	0,15	0,85
8	0,061313	0,060345	0,059411	0,058730	0,058034	0,10	0,90
9	0,031098	0,030648	0,030212	0,029893	0,029569	0,05	0,95
Multiplikator	$\times \frac{l}{f} P$					$\times P$	

schen einem eingespannten und einem Zweigelenkbogen; an Stelle der aus den Einspannmomenten herrührenden Formänderungsbilder des eingespannten Bogens müssen aber die Verdrehungswinkel der Stützgelenke des Zweigelenkbogens treten.

Die drei Grundgleichungen können derart angeschrieben werden, wie die Gleichungen (9)—(11); da aber die unbekannten Verdrehungswinkel A und B nicht bestimmt werden müssen, braucht man nur die Momentengleichung, bezogen auf die Horizontale AB, anzuschreiben:

$$H f l F_h (f - y_h f) + P l^2 F_p (f - y_p f) = 0$$

daher:

$$H f F_h (1 - y_h) + P l F_p (1 - y_p) = 0 \qquad (12)$$

In dieser Grundgleichung haben die Faktoren F_h, y_h, F_p und y_p konstante Zahlenwerte und sind als Festwerte des Zweigelenkbogens zu betrachten und sie können für jeden praktischen Fall von γ, k und α berechnet werden. Die Grundgleichung (12) ergibt die einzige Unbekannte, die Horizontalkraft H.

Es ist zu bemerken, daß der Querschnittsbeiwert k beim Zweigelenkbogen immer zu Eins angenommen werden kann, weil die nicht zu große Änderung des Querschnittes die statischen Werte beinahe nicht beeinflußt.

Einflußlinien der Reaktionen. Die Unbekannten des eingespannten Bogens sind auf Grund der Gleichungen (9)—(11):

Tabelle 4.

Momenteneinflüsse des eingespannten Bogens.

Influences des moments de l'arc encastré. — Moment-Influences of the restrained arch.

Achsenbeiwert / Coefficient de l'axe / Axial factor } $\gamma = 3{,}0$

Querschnittsbeiwert / Coefficient de la section / Cross-sectional factor } $k = 2$

Querschnitt / Section / Cross-section	Einflußlinien für Momente für den Querschnitt / Lignes d'influence pour moments pour la section — Lines of influence for moments for the cross-section										
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
9	−0,040465	+0,007365	+0,005564	+0,004066	+0,002820	+0,001785	+0,000930	+0,000229	−0,000337	−0,000780	−0,001108
8	−0,063187	−0,021351	+0,021855	+0,016187	+0,011458	+0,007514	+0,004238	+0,001534	−0,000663	−0,002407	−0,003723
7	−0,070690	−0,037783	−0,002046	+0,036016	+0,026021	+0,017645	+0,010650	+0,004837	+0,000070	−0,003759	−0,006705
6	−0,065932	−0,043903	−0,017314	+0,013022	+0,046486	+0,032558	+0,020856	+0,011057	+0,002945	−0,003657	−0,008837
5	−0,051872	−0,041730	−0,025206	−0,003439	+0,022706	+0,052503	+0,035415	+0,020990	+0,008925	−0,001026	−0,008985
4	−0,031689	−0,033497	−0,027181	−0,014192	+0,004370	+0,027579	+0,054753	+0,035317	+0,018886	+0,005145	−0,006063
3	−0,008402	−0,021384	−0,024730	−0,020160	−0,008981	+0,007710	+0,028105	+0,054519	+0,033498	+0,015667	+0,000841
2	+0,015221	−0,007450	−0,019324	−0,022327	−0,017922	−0,007341	+0,008511	+0,028868	+0,053219	+0,031146	+0,012440
1	+0,036889	+0,006536	−0,012289	−0,021642	−0,023087	−0,017937	−0,007160	+0,008428	+0,028280	+0,051950	+0,029215
0	+0,054742	+0,019076	−0,004811	−0,019022	−0,025152	−0,024545	−0,018188	−0,006917	+0,008711	+0,028239	+0,051441
1	+0,067394	+0,028990	+0,002115	−0,015290	−0,024785	−0,027685	−0,024958	−0,017421	−0,005619	+0,010001	+0,029215
2	+0,074075	+0,035519	+0,007760	−0,011129	−0,022610	−0,027914	−0,027948	−0,023476	−0,015010	−0,002969	+0,012440
3	+0,074503	+0,038231	+0,011594	−0,007127	−0,019238	−0,025838	−0,027734	−0,025610	−0,019922	−0,011043	+0,000841
4	+0,068961	+0,037088	+0,013339	−0,003737	−0,015240	−0,022096	−0,024987	−0,024488	−0,020984	−0,014790	−0,006063
5	+0,058409	+0,032523	+0,013019	−0,001242	−0,011125	−0,017356	−0,020472	−0,020925	−0,019018	−0,014997	−0,008985
6	+0,044393	+0,025390	+0,010947	+0,000250	−0,007319	−0,012279	−0,015013	−0,015844	−0,014989	−0,012625	−0,008837
7	+0,029029	+0,016964	+0,007729	+0,000820	−0,004147	−0,007495	−0,009463	−0,010247	−0,009986	−0,008787	−0,006705
8	+0,014673	+0,008723	+0,004143	+0,000689	−0,001826	−0,003556	−0,004618	−0,005108	−0,005091	−0,004621	−0,003723
9	+0,004096	+0,002470	+0,001212	+0,000258	−0,000444	−0,000935	−0,001246	−0,001404	−0,001425	−0,001324	−0,001108

Tabelle 5.

Momenteneinflüsse des Zweigelenkbogens.

Influences des moments de l'arc à deux articulations. — Moment-Influences of the two-hinged arch.

Achsenbeiwert
Coefficient de l'axe
Axial factor } $\gamma = 3{,}0$

Querschnitt Section Cross-section	Einflußlinien für Momente für den Querschnitt Lignes d'influence pour moments pour la section — Lines of influence for moments for the cross-section									
	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
9	+ 0,040264	+ 0,031934	+ 0,024757	+ 0,018544	+ 0,013134	+ 0,008411	+ 0,004273	+ 0,000656	− 0,002497	− 0,005212
8	+ 0,030771	+ 0,064305	+ 0,050108	+ 0,037806	+ 0,027085	+ 0,017712	+ 0,009492	+ 0,002294	− 0,003990	− 0,009411
7	+ 0,021717	+ 0,047470	+ 0,076537	+ 0,058373	+ 0,042516	+ 0,028629	+ 0,016426	+ 0,005716	− 0,003659	− 0,011775
6	+ 0,013269	+ 0,031728	+ 0,054450	+ 0,080733	+ 0,059985	+ 0,041770	+ 0,025721	+ 0,011591	− 0,000820	− 0,011612
5	+ 0,005547	+ 0,017297	+ 0,034144	+ 0,055247	+ 0,079899	+ 0,057579	+ 0,037848	+ 0,020412	+ 0,005030	− 0,008417
4	− 0,001348	+ 0,004361	+ 0,015868	+ 0,032216	+ 0,052601	+ 0,076431	+ 0,053205	+ 0,032589	+ 0,014311	− 0,001766
3	− 0,007339	− 0,006943	− 0,000193	+ 0,011864	+ 0,028345	+ 0,048602	+ 0,072086	+ 0,048432	+ 0,027339	+ 0,008658
2	− 0,012370	− 0,016514	− 0,013900	− 0,005642	+ 0,007321	+ 0,024301	+ 0,044712	+ 0,068166	+ 0,044345	+ 0,023089
1	− 0,016404	− 0,024284	− 0,025161	− 0,020191	− 0,010344	+ 0,003664	+ 0,021228	+ 0,041946	+ 0,065486	+ 0,041684
0	− 0,019418	− 0,030212	− 0,033921	− 0,031715	− 0,024574	− 0,013224	+ 0,001724	+ 0,019862	+ 0,040856	+ 0,064539
1	− 0,021404	− 0,034284	− 0,040161	− 0,040191	− 0,035344	− 0,026336	− 0,013772	+ 0,001946	+ 0,020486	+ 0,041684
2	− 0,022370	− 0,036514	− 0,043900	− 0,045642	− 0,042679	− 0,035700	− 0,025288	− 0,011834	+ 0,004345	+ 0,023089
3	− 0,022339	− 0,036943	− 0,045193	− 0,048136	− 0,046655	− 0,041398	− 0,032914	− 0,021568	− 0,007661	+ 0,008658
4	− 0,021348	− 0,035639	− 0,044132	− 0,047784	− 0,047400	− 0,043570	− 0,036795	− 0,027411	− 0,015689	− 0,001766
5	− 0,019453	− 0,032703	− 0,040856	− 0,044753	− 0,045101	− 0,042421	− 0,037152	− 0,029588	− 0,019970	− 0,008417
6	− 0,016731	− 0,028272	− 0,035550	− 0,039267	− 0,040015	− 0,038230	− 0,034280	− 0,028409	− 0,020820	− 0,011612
7	− 0,013283	− 0,022530	− 0,028463	− 0,031628	− 0,032484	− 0,031371	− 0,028574	− 0,024285	− 0,018659	− 0,011775
8	− 0,009229	− 0,015695	− 0,019892	− 0,022194	− 0,022915	− 0,022288	− 0,020508	− 0,017706	− 0,013990	− 0,009411
9	− 0,004736	− 0,008067	− 0,010243	− 0,011456	− 0,011866	− 0,011589	− 0,010727	− 0,009345	− 0,007497	− 0,005212

$$H = \frac{y_p - y_m}{y_m - y_h} \frac{F_p}{F_h} \frac{l}{f} P \tag{13}$$

$$M_A = \left[\frac{y_m - y_p}{y_m - y_h} + \frac{x_p}{x_m} - 1\right] \frac{F_p}{F_m} \frac{l}{2} P \tag{14}$$

$$M_B = \left[\frac{y_m - y_p}{y_m - y_h} - \frac{x_p}{x_m} - 1\right] \frac{F_p}{F_m} \frac{l}{2} P \tag{15}$$

und die Horizontalkraft des Zweigelenkbogens aus der Gleichung (12):

$$H = \frac{y_p - 1}{1 - y_h} \frac{F_p}{F_h} \frac{l}{f} P \tag{16}$$

Da die Zahlenwerte der Unbekannten mit der Spannweite und Bogenhöhe in linearem Verhältnis stehen, kann man Tabellen aufstellen, die die Reaktionen durch eine Multiplikation mit $\frac{l}{f}$ bez. l ergeben, und dabei die Tabellenwerte nur von den Abmessungen des Bogens (γ, k) abhängen.

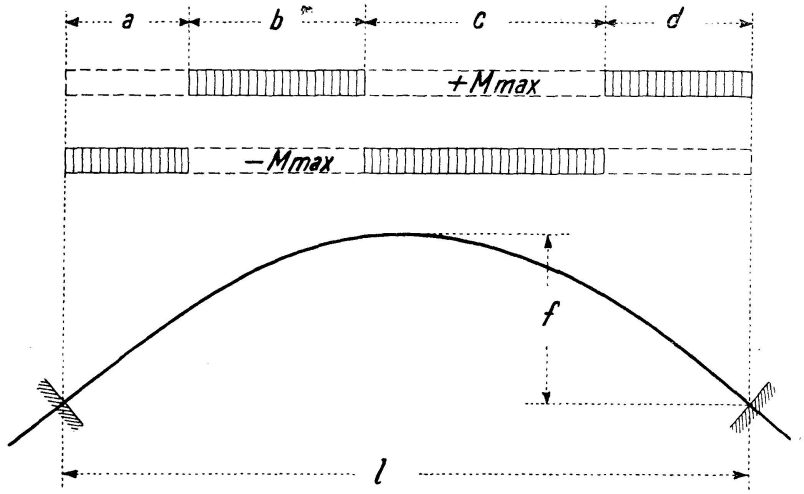

Fig. 5.

Die Tabelle 2 enthält z. B. die Einflußzahlen der Reaktionen eines eingespannten Bogens, wenn der Achsenbeiwert $\gamma = 3{,}0$, der Querschnittsbeiwert $k = 2$, und die Tabelle 3 ergibt die Reaktionen eines Zweigelenkbogens, falls die Achsenbeiwerte 0, 1,2, 3,0, 5,0 und 8,0 sind. Ähnliche Tabellen für andere Beiwerte γ und k können ebenso einfach berechnet und aufgestellt werden [5]).

Einflußlinien für Momente. Da das von der Horizontalkraft hervorgerufene Moment Hf ebenfalls mit der Spannweite l zu vergrößern ist, muß das von den vier (Fig. 3, III.) bez. zwei (Fig. 4, II.) Momentenbildern zusammengesetzte Querschnittsmoment ebenfalls mit l multipliziert werden. Daher kann man das Momentenbild in jeder Lage der Einzelkraft berechnen, wodurch auch die Einflußlinien für Momente festgestellt sind.

Die Tabelle 4 enthält z. B. die Einflußlinien für Momente des eingespannten Bogens, wenn $\gamma = 3{,}0$ und $k = 2$, und die Tabelle 5 ergibt dieselben des Zweigelenkbogens, wenn $\gamma = 3{,}0$ und $k = 1$. Den übrigen Werten von γ und k entsprechend, sind die Tabellen auf dieselbe Art zu berechnen [5]).

[5]) Tableaux pour la solution des constructions en arc à deux articulations. Le Constructeur de Ciment Armé, 1933 und 1934. Tableaux pour la solution des constructions en arc encastré. Science et Industrie Travaux.

Tabelle 6.

Grenzmomente des eingespannten Bogens.

Moments limites de l'arc encastré. — Limiting moments of the fixed arch.

[Querschnitt — Section — Cross-section: 6]

Achsenbeiwert (γ) Coefficient de l'axe (γ) Axial factor (γ)	Querschnittsbeiwert (k) Coefficient de la section (k) Cross-sectional factor (k)	Länge der belasteten Strecken Longueurs chargées Loaded lengths				Grenzmoment Moment limite Limiting moment	Linksseitig. à gauche left (M_A)	Rechtsseitig. à droite right (M_B)	Linksseit. à gauche left (V_A)	Rechtsseit. à droite right (V_B)	Horizontale horizontal (H)	Vertikale verticale vertical (V)
							Einspannmoment Moment d'encastrement restraining moment		vertik. Auflagerkraft Réaction verticale vertical abutment-reaction		Komponente der Querkraft Composante de l'effort tranchant Shear-component	
		a	b	c	d	($\pm M_{max}$)	im Falle des Grenzmomentes pour le cas du moment limite for the limiting moment ($\pm M_{max}$)					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0,0	1	—	0,35495	—	—	+ 0,00737	− 0,01672	+ 0,00920	0,31788	0,03707	0,03047	0,11788
		—	—	0,64505	—	− 0,00736	+ 0,01672	− 0,00920	0,18212	0,46293	0,09453	0,18212
	2	—	0,33690	—	—	+ 0,00618	− 0,01887	+ 0,00922	0,30827	0,02863	0,02588	0,10827
		—	—	0,66310	—	− 0,00618	+ 0,01887	− 0,00922	0,19173	0,47137	0,09912	0,19173
	4	—	0,31430	—	—	+ 0,00510	− 0,02051	+ 0,00856	0,29397	0,02033	0,02059	0,09397
		—	—	0,68570	—	− 0,00510	+ 0,02051	− 0,00856	0,20603	0,47967	0,10441	0,20603
	7	—	0,29501	—	0,26860	+ 0,00453	− 0,01513	− 0,01151	0,29119	0,27242	0,02903	0,09119
		—	—	0,43639	—	− 0,00453	+ 0,01513	+ 0,01151	0,20881	0,22758	0,09597	0,20881
1,2	1	—	0,34282	—	—	+ 0,00702	− 0,01519	+ 0,00990	0,30915	0,03367	0,02900	0,10915
		—	—	0,65718	—	− 0,00868	+ 0,01997	− 0,00513	0,19085	0,46633	0,09879	0,19085
	2	—	0,32610	—	—	+ 0,00594	− 0,01725	+ 0,00990	0,30010	0,02600	0,02488	0,10010
		—	—	0,67390	—	− 0,00755	+ 0,02272	− 0,00444	0,19990	0,47400	0,10386	0,19990
	4	—	0,30435	—	—	+ 0,00496	− 0,01878	+ 0,00914	0,28595	0,01840	0,01988	0,08595
		—	—	0,69565	—	− 0,00652	+ 0,02495	− 0,00296	0,21405	0,48160	0,10983	0,21405
	7	—	0,28958	—	0,21187	+ 0,00436	− 0,01597	− 0,00522	0,28085	0,22060	0,02342	0,08085
		—	—	0,49855	—	− 0,00588	+ 0,02268	+ 0,01193	0,21915	0,27940	0,10702	0,21915
3,0	1	—	0,33321	—	—	+ 0,00663	− 0,01395	+ 0,01047	0,30211	0,03110	0,02795	0,10211
		—	—	0,66679	—	− 0,01008	+ 0,02301	− 0,00140	0,19789	0,46890	0,10232	0,19789
	2	—	0,31635	—	—	+ 0,00562	− 0,01586	+ 0,01040	0,29256	0,02379	0,02399	0,09256
		—	—	0,68365	—	− 0,00902	+ 0,02636	+ 0,00011	0,20744	0,47621	0,10824	0,20744
	4	—	0,29670	—	—	+ 0,00472	− 0,01734	+ 0,00967	0,27970	0,01700	0,01953	0,07970
		—	—	0,70330	—	− 0,00807	+ 0,02929	+ 0,00228	0,22030	0,48300	0,11465	0,22030
	7	—	0,28424	—	0,15805	+ 0,00414	− 0,01640	+ 0,00050	0,27324	0,16905	0,01984	0,07324
		—	—	0,55771	—	− 0,00744	+ 0,02948	+ 0,01257	0,22676	0,33095	0,11587	0,22676
5,0	1	—	0,32659	—	—	+ 0,00635	− 0,01307	+ 0,01084	0,29718	0,02941	0,02725	0,09718
		—	—	0,67341	—	− 0,01110	+ 0,02530	+ 0,00140	0,20282	0,47059	0,10480	0,20282
	2	—	0,30956	—	—	+ 0,00539	− 0,01487	+ 0,01074	0,28725	0,02231	0,02340	0,08725
		—	—	0,69044	—	− 0,01012	+ 0,02913	+ 0,00352	0,21275	0,47769	0,11139	0,21275
	4	—	0,29221	—	—	+ 0,00455	− 0,01635	+ 0,01011	0,27598	0,01623	0,01946	0,07598
		—	—	0,70779	—	− 0,00926	+ 0,03263	+ 0,00617	0,22402	0,48377	0,11805	0,22402
	7	—	0,28032	—	0,07155	+ 0,00398	− 0,01703	+ 0,00740	0,26802	0,08385	0,01709	0,06802
		—	—	0,64813	—	− 0,00868	+ 0,03491	+ 0,01048	0,23198	0,41615	0,12256	0,23198
8,0	1	—	0,32012	—	—	+ 0,00608	− 0,01218	+ 0,01123	0,29229	0,02783	0,02663	0,09229
		—	—	0,67988	—	− 0,01215	+ 0,02777	+ 0,00436	0,20771	0,47217	0,10733	0,20771
	2	—	0,30286	—	—	+ 0,00517	− 0,01388	+ 0,01106	0,28194	0,02092	0,02286	0,08194
		—	—	0,69714	—	− 0,01128	+ 0,03212	+ 0,00718	0,21806	0,47908	0,11467	0,21806
	4	—	0,28767	—	—	+ 0,00437	− 0,01534	+ 0,01058	0,27221	0,01546	0,01941	0,07221
		—	—	0,71233	—	− 0,01052	+ 0,03625	+ 0,01033	0,22779	0,48454	0,12167	0,22779
	7	—	0,27625	—	0,06327	+ 0,00384	− 0,01605	+ 0,00832	0,26446	0,07506	0,01714	0,06446
		—	—	0,66048	—	− 0,01000	+ 0,03906	+ 0,01470	0,23554	0,42494	0,12674	0,23554
Multiplikator		$\times l$				$\times pl^2$			$\times pl$		$\times \frac{pl^2}{f}$	$\times pl$

Grenzmomente. Die Einflußlinien für Momente bestimmen die Strecken, die zu belasten sind, um die Grenzmomente des Bogens im Falle einer gleichmäßig verteilten rollenden Belastung p zu erhalten (Fig. 5). Die Grenzmomente können, — ebenso wie die Einflußmomente — in Tabellen zusammengestellt werden, deren Werte nur mit pl^2 zu vergrößern sind.

Die Tabelle 6 enthält z. B. die Grenzmomente des Querschnittes 6, ($\alpha = 0{,}30$) eines eingespannten Bogens, dessen Achsenbeiwerte $\gamma = 0$, 1,2, 3,0, 5,0 und 8,0 und Querschnittsbeiwerte $k = 1$, 2, 4 und 7 sind. Die Tabelle ergibt auch die gleichzeitig auftretenden Reaktionen und Querkräfte, so z. B. wenn $\gamma = 3$ und $k = 2$ sind, wird das positive Grenzmoment:

$$+ M_{max} = 0{,}00562\, pl^2$$

und die gleichzeitig auftretenden horizontalen und vertikalen Querkräfte sind:

$$H = 0{,}02399\, pl^2/f$$
$$V = 0{,}09256\, pl$$

Ähnliche Tabellen lassen sich für jeden Querschnitt aufstellen [5]).

Die Tabelle 7 ergibt die Grenzmomente und die gleichzeitig auftretenden Reaktionen und Querkräfte eines Zweigelenkbogens, für $\gamma = 3$ und $k = 1$, so ist z. B. für den Querschnitt 6 das positive Grenzmoment:

$$+ M_{max} = 0{,}014643\, pl^2$$

und die gleichzeitig auftretenden horizontalen und vertikalen Querkräfte sind:

$$H = 0{,}038580\, pl^2/f$$
$$V = 0{,}110210\, pl$$

Ähnliche Tabellen sind auch für die übrigen Werte von γ und k zu berechnen [5]).

Es ist ersichtlich, daß diese Tabellen tatsächlich so verwendet werden können, wie die Winkler'schen Tabellen für durchlaufende Träger.

Selbstredend können auch für andere Belastungen (gleichmäßige Vollbelastung, gleichmäßige Belastung einer Bogenhälfte, parabelförmige Vollbelastung, Dreieckbelastungen, etc.) ebenfalls Tabellen aufgestellt werden, die auch die mit der Belastung gleichmäßig auftretenden Reaktionen ergeben.

Schlußbemerkungen. Die Tabellen, die auf der angegebenen Weise berechnet sind, ergeben sämtliche Zahlenwerte, die zur statischen Untersuchung eines eingespannten oder Zweigelenkbogens nötig sind; es ist bei diesen Konstruktionen derart vorzugehen, wie bei einem durchlaufenden Träger. Zuerst muß das Eigengewicht angenommen, und auf Grund dessen und der rollenden Belastung die Grenzmomente und Querkräfte aus den Tabellen entnommen werden; die mehrfache und zeitraubende Wiederholung der Berechnung fällt daher gänzlich fort. Die Tabellen sind für alle Spannweiten, Bogenhöhen und Stichverhältnisse verwendbar, da die Zahlenwerte von ihnen vollkommen unabhängig sind.

Die Tabellen müssen natürlich in jedem praktischen Fall verwendbar bleiben, daher wurden sie für den eingespannten Bogen auf Grund der

γ-Werte von: 0,0 1,2 3,0 5,0 8,0
k-Werte von: 1 2 4 7
α-Werte von: 0 0,05 0,10 0,15 .... 0,40 0,45 0,50

berechnet. Für den Zweigelenkbogen sind dieselben γ- und α-Werte bei-

Tabelle 7.

Grenzmomente des Zweigelenkbogens.
Moment limite de l'arc à deux articulations.
Limiting moments of the two-hinged arch.

(Achsenbeiwert — Coefficient de l'axe — Axial factor: $\gamma = 3{,}0$.)

Querschnitt / Section / Cross-section	Länge der belasteten Strecken / Longueurs chargées / Loaded lengths			Grenzmoment / Moment limite / Limiting moment	Linksseitige / à gauche / left	Rechtsseit. / à droite / right	Horizontale / horizontal	Vertikale / verticale / vertical
					(V_A)	(V_B)	(H)	(V)
					vertikale Auflagerkraft / Réaction verticale / vertical abutment-reaction		Komponente d. Querkraft / Composante de l'effort tranchant / Shear-component	
	a	b	c	$(\pm M_{max})$	im Falle des Grenzmomentes / pour le cas de moment limite / for the limiting moment $\}$ $(\pm M_{max})$			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	—	0,2902	—	+0,005551	0,248092	0,042108	0,023396	0,198092
	—	—	0,7098	−0,010362	0,251908	0,457892	0,095856	0,251908
8	—	0,3193	—	+0,009788	0,268324	0,050976	0,027850	0,168324
	—	—	0,6807	−0,016363	0,231676	0,449024	0,091402	0,231676
7	—	0,3494	—	+0,012788	0,288360	0,061040	0,032720	0,138360
	—	—	0,6506	−0,019073	0,211640	0,438960	0,086532	0,211640
6	—	0,3839	—	+0,014643	0,310210	0,073690	0,038580	0,110210
	—	—	0,6161	−0,019334	0,189790	0,426310	0,080672	0,189790
5	—	0,4207	—	+0,015437	0,332206	0,088494	0,045091	0,082206
	—	—	0,5793	−0,017862	0,167794	0,411506	0,074161	0,167794
4	—	0,4608	—	+0,015283	0,354632	0,106168	0,052389	0,054632
	—	—	0,5392	−0,015234	0,145368	0,393832	0,066863	0,145368
3	—	0,5056	—	+0,014298	0,377784	0,127816	0,060664	0,027784
	—	—	0,4944	−0,011962	0,122216	0,372184	0,058588	0,122216
2	—	0,5571	—	+0,012639	0,401920	0,155180	0,070144	0,001920
	—	—	0,4429	−0,008465	0,098080	0,344820	0,049108	0,098080
1	—	0,4108	—	+0,011023	0,241263	0,169537	0,068581	-0,001437
	0,2073	—	0,3819	−0,005676	0,258737	0,330463	0,050671	0,051437
0	—	0,3830	—	+0,010497	0,191500	0,191500	0,066917	0,000000
	0,3085	—	0,3085	−0,004746	0,308500	0,308500	0,052335	0,000000
Multiplikator	$\times l$			$\times pl^2$	$\times pl$		$\times \frac{pl^2}{f}$	$\times pl$

behalten worden, nur k war immer Eins, weil die Querschnittsänderung, — wie schon erwähnt —, die statischen Werte fast nicht beeinflußt. In einem Zwischenfalle von γ, k und α sind natürlich die entsprechenden Tabellenwerte zu interpolieren.

Die Einflüsse der Normalkräfte und der Temperaturänderung, womit die vorher erhaltenen Resultate zu ergänzen sind, werden in ähnlicher Art berechnet, wie die Wirkung der vertikalen Belastungen.

Zusammenfassung.

Die statischen Werte eines Trägers auf zwei Stützen, eines durchlaufenden Trägers, sogar auch eines Rahmens mit einer oder mehreren Öffnungen können dem betreffenden Tabellenwerk oder der Formelsammlung immer entnommen werden, oder man kann sie durch eine Berechnung einfachster Art erhalten. Die Parabelbögen können gewissermaßen auch als gelöst betrachtet werden, womit aber das Bogenproblem noch nicht erledigt ist, weil die Achse der Bogenkonstruktionen fast ausnahmslos nach der Stützlinie einer bestimmten Belastung geformt wird.

Es wurde daher versucht, Tabellen zur genauen und raschen Berechnung des eingespannten und Zweigelenkbogens aufzustellen; die Gleichung der Bogenachse, d. h. die Stützlinie ist:

$$y = 4f \frac{21(10+\gamma) + 4\gamma(35 + 8\gamma\xi^3)\xi^2}{21(10+\gamma) + \gamma(35+\gamma)} \xi^2$$

wo:

$$\gamma = \frac{g}{g_0}$$

und g bez. g_0 den größten Belastungsunterschied bez. die Belastung am Scheitel, und f die Bogenhöhe bedeuten. Diese Gleichung, die für die eingespannten und Gelenkkonstruktionen gleichfalls gültig ist, weist gegenüber den in der Fachliteratur veröffentlichten Resultaten keinen bemerkenswerten Unterschied auf.

Die Gesetzmäßigkeit der Querschnittsänderungen des eingespannten Bogens wurde auf Grund ausgeführter Konstruktionen aufgestellt:

$$J_x \cos\varphi_x = [1 + 8(k-1)\xi^3] J_0$$

wo:

$$k = \frac{J_{10}}{J_0} \cos\varphi_{10}$$

und J_0, J_x bez. J_{10} das Trägheitsmoment am Scheitel, in der Entfernung $x = \xi l$ vom Scheitel, bez. an den Kämpfern, und φ_x bez. φ_{10} den Neigungswinkel der Tangenten in der Entfernung x, bez. an den Kämpfern bedeuten. Die Zweigelenkbogen wurden mit konstantem Querschnitt berechnet, da die Wirkung der Querschnittsänderungen unbedeutend bleibt.

Die Grundgleichungen der Bogenkonstruktionen wurden durch die Aufteilung der Momentenbilder aufgestellt, in gleicher Weise, wie die altbewährte Ritter'sche Theorie mit den durchlaufenden Trägern vorgeht. Die Momentenbilder des eingespannten Bogens wurden in 4, jene des Zweigelenkbogens in 2 Teile aufgelöst, wodurch es möglich war, sämtliche statischen Werte zu berechnen und in Tabellen zusammenzustellen.

Die Verwendung der Tabellen ist sehr einfach, wie es die Zahlenbeispiele bewiesen haben; man muß zuerst immer die Beiwerte der fraglichen Bogenkonstruktionen bestimmen (γ, k), und danach die Reaktionen, Einflußzahlen, Grenzmomente, etc. den betreffenden Tabellen entnehmen, die nötigenfalls auch mit den Werten infolge der Normalkräfte und Temperaturänderungen leicht ergänzt werden können.

Die Tabellen sind so zu verwenden, wie die Winkler'schen Tabellen für die durchlaufenden Träger.

Résumé.

Les caractéristiques statiques d'une poutre reposant sur deux appuis, d'une poutre continue et même d'un cadre comportant une ou plusieurs ouvertures peuvent toujours être déduites des tableaux ou formules corrélatives ou déterminées à partir d'un calcul très simple. Dans une certaine mesure, les arcs paraboliques peuvent également être considérés comme constituant un problème résolu; le problème de l'arc lui-même ne l'est toutefois pas encore, parce que, presque sans exception, les axes des ouvrages en arc épousent la forme de la ligne des pressions pour une charge déterminée.

L'auteur a donc cherché à établir des tables permettant le calcul rapide et précis de l'arc encastré et de l'arc à deux articulations; l'équation de l'axe de l'arc, c'est-à-dire de la ligne des pressions, est la suivante:

$$y = 4f \frac{21(10+\gamma) + 4\gamma(35 + 8\gamma\xi^3)\xi^2}{21(10+\gamma) + \gamma(35+\gamma)} \xi^2$$

avec:

$$\gamma = \frac{g}{g_0}$$

g et g_0 réprésentant les plus grands écarts de charge et la charge à la clef et f la hauteur de l'arc. Cette équation, qui est également valable pour les ouvrages encastrés et à articulations, ne présente aucune différence notable par rapport aux résultats qui ont été déjà publiés dans la littérature technique.

La loi de déformation des sections de l'arc encastré a été déterminée d'après des constructions effectives:

$$J_x \cos\varphi_x = [1 + 8(k-1)\xi^3] J_0$$

avec:

$$k = \frac{J_{10}}{J_0} \cos\varphi_{10}$$

J_0, J_x et J_{10} représentant les moments d'inertie à la clef, à la distance $x = \xi l$ de la clef et aux naissances, φ_x et φ_{10} représentant les pentes des tangentes à la distance x et aux naissances. Les arcs à deux articulations ont été calculés avec section constante, car l'influence des variations de section est négligeable.

Les équations de base des ouvrages en arc ont été établies d'après le même principe de répartition des moments que celui que fait intervenir la théorie bien connue de Ritter dans le cas des poutres continues. Le diagramme des moments de l'arc encastré a été résolu en 4 parties, celui de l'arc à deux articulations en 2 parties, ce qui a permis de déterminer toutes les caractéristiques statiques et d'établir des tableaux.

L'emploi de ces tableaux est très simple, ainsi que le montrent les exemples numériques; il faut tout d'abord déterminer les coefficients des ouvrages à étudier (γ, k) puis les réactions, les influences, les moments limites, etc., à partir des tableaux, qui peuvent en cas de besoin être complétés très facilement avec les valeurs résultant des efforts normaux et des variations de la température.

Les tableaux doivent être utilisés dans les mêmes conditions que ceux de Winkler pour les poutres continues.

Summary.

The static characteristics of a girder resting on two supports, of a continuous girder and even of a frame with one or more openings, can always be deduced from the corresponding tables or formulae, or determined from a very simple calculation. To a certain extent the parabolic arches may also be regarded as solved; but the problem of the arch itself is not yet settled, since the axes of arched structures take almost without exception the form of the line of pressure for any definite load.

The author has therefore endeavoured to prepare tables which will allow of rapid and exact calculation of fixed and two-hinged arches; the equation of the axis of the arch, i. e. of the line of pressure is as follows:

$$y = 4f \frac{21(10+\gamma) + 4\gamma(35 + 8\gamma\xi^3)\xi^2}{21(10+\gamma) + \gamma(35+\gamma)} \xi^2$$

where:

$$\gamma = \frac{g}{g_0}$$

g and g_0 being the greatest difference of load and the load at the crown, and f the rise of the arch. This equation, which holds good for fixed and articulated structures, displays no great difference as compared with the results already published in technical literature.

The law of deformation of the cross-sections of the fixed arch has been determined from actual structures:

$$J_x \cos \varphi_x = [1 + 8(k-1)\xi^3] J_0$$

where:

$$k = \frac{J_{10}}{J_0} \cos \varphi_{10}$$

and J_0, J_x and J_{10} signify the moments of inertia at the crown, at the distance $x = \xi l$ from the crown and at the springers; whilst φ_x and φ_{10} are the slopes of the tangents at the distance x and at the springers. The two-hinged arches have been calculated with constant cross-section, since the effect of variation in cross-section is negligible.

The basic equations for arched structures have been established according to the same principle of distribution of the moments as adopted in the well-known theory of Ritter for continuous girders. The diagram of the moments of the fixed arch has been resolved into 4 parts, and the diagram of the moments of the two-hinged arch into 2 parts, thus permitting all the static characteristics to be determined and the tables to be prepared.

These tables are very easy to use, as is shown by numerical examples. First of all it is necessary to determine the coefficients of the structures to be studied (γ, k), and then the reactions, influence figures, limiting moments, etc., from the tables, which may if necessary be supplemented very easily with the values resulting from normal forces and variations in temperature.

The tables are to be used in the same way as the Winkler tables for continuous girders.