

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 2 (1933-1934)

Artikel: Allgemeine Theorie des elastisch eingespannten Balkens

Autor: Ritter, M.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-3408>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ALLGEMEINE THEORIE DES ELASTISCH EINGESPANNNTEN BALKENS.

THÉORIE GÉNÉRALE DE LA POUTRE ENCASTRÉE ÉLASTIQUEMENT.

GENERALIZED THEORY OF THE ELASTICALLY RESTRAINED BEAM.

Prof. Dr. M. RITTER, Zürich.

Vor längerer Zeit hat der Verfasser die Theorie des elastisch eingespannten Balkens entwickelt und der Berechnung verschiedener biegsamer Stabwerke mit festen Knoten zu Grunde gelegt¹⁾). Nachstehend soll diese Theorie auf den Fall elastisch in der Höhenlage verschiebbarer Stützen ausgedehnt werden; diese Erweiterung ermöglicht die einfache Behandlung praktisch wichtiger Systeme mit beweglichen Knoten, so vor allem des durchlaufenden Balkens auf elastisch senkbaren Stützen und des Stockwerkrahmens.

1. Die Elastizitätsgleichungen.

Entsprechend den früheren Darstellungen wählen wir als statisch bestimmtes Grundsystem den einfachen Balken von der Stützweite l , an dem die Einspannmomente M_1 und M_2 als äußere Kräfte wirken, vergl. Abb. 1.

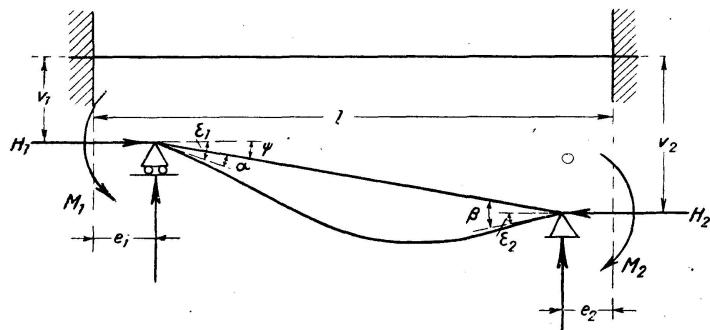


Fig. 1

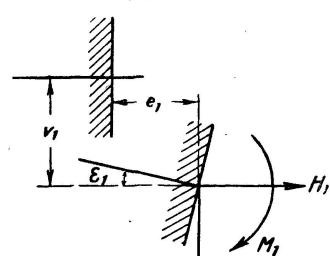


Fig. 2

Die Auflager verschieben sich in lotrechtem Sinne um die Strecken v_1 und v_2 (positiv nach abwärts), in waagrechtem Sinne um e_1 und e_2 (positiv gegen die Balkenmitte); diese Beträge werden als klein vorausgesetzt, weshalb für den „Drehwinkel“ ψ des Balkens mit genügender Genauigkeit

$$\psi = \frac{v_2 - v_1}{l}$$

gesetzt werden kann. Wir gehen von der Annahme aus, daß sich der Balken

¹⁾ Vergl. Schweizer Bauzeitung: Bd. 53, 1909 «Über die Berechnung elastisch eingespannter und kontinuierlicher Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment»; Bd. 57, 1911 »Der kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Stützen«; Bd. 61, 1913 «Der biegsame Rahmen mit Flächenlagerung». Ferner «Beiträge zur Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger ohne Scheitelgelenk», Berlin 1909.

mit Einschluß der Widerlager rein elastisch und dem Gesetze der Superposition gehorchend deformiert. Darnach gelten für die „Auflagerdrehwinkel“ ε_1 und ε_2 mit den in Abb. 1 eingetragenen Bezeichnungen die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha + \psi = \alpha_0 + M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 + \psi, \\ \varepsilon_2 &= \beta - \psi = \beta_0 + M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2 - \psi. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Darin bezeichnen α_0 und β_0 die Werte von α und β für $M_1 = M_2 = 0$, α_1 und β_1 diejenigen für $M_1 = 1$, α_2 und β_2 diejenigen für $M_2 = 1$.

Wir denken uns das linke Widerlager vom Balken losgetrennt und an der Schnittstelle die Schnittkräfte M_1 , A und H_1 als äußere Kräfte angebracht, vergl. Abb. 2. M_1 ist das Einspannmoment des Balkens, das mit umgekehrtem Vorzeichen am Widerlager angreift. A ist identisch mit dem lotrechten Auflagerdruck des Balkens, hat also den Wert

$$A = A_0 + \frac{M_2 - M_1}{l}, \quad (2)$$

wo A_0 den Auflagerdruck für freie Auflagerung bezeichnet. H_1 bezeichnet eine waagrechte, in der Balkenachse wirkende Kraft. Im Sinne der Definition der „elastischen Einspannung“ nehmen wir an, daß das Widerlager durch keine andern Ursachen deformiert wird, als durch die ihm vom Balken zugeführten Kräfte M_1 , A und H_1 . Nach dem Gesetze der Superposition sind alsdann die Bewegungen ε_1 , v_1 und e_1 lineare Funktionen von M_1 , A und H_1 oder mit Rücksicht auf Gleichung (2) auch von M_1 , M_2 , A_0 und H_1 . Wir können in den Rechnungen H_1 ausschalten, indem wir e_1 als gegebene Größe betrachten; dann läßt sich nämlich H_1 eliminieren und ε_1 und v_1 ergeben sich als lineare Funktionen von M_1 , M_2 , A_0 und e_1 . Dieses Vorgehen vereinfacht die Theorie wesentlich, und empfiehlt sich, weil bei den meisten Anwendungen die waagrechten Verschiebungen der Einspannstellen bekannt oder in einfacher Weise aus Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen sind. In gleicher Weise lassen sich die Bewegungen ε_2 , v_2 und e_2 des rechten Widerlagers als lineare Funktionen ihrer Ursachen, M_1 , M_2 , B_0 und e_2 darstellen.

Für die Drehungen ε_1 und ε_2 der Widerlager schreiben wir nach dem Gesagten

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{10} - M_1 \varepsilon_{11} + M_2 \varepsilon_{12} + \varepsilon_{1e}, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{20} - M_2 \varepsilon_{22} + M_1 \varepsilon_{21} + \varepsilon_{2e}. \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

Darin bezeichnen ε_{10} und ε_{20} die Drehungen bei freier Auflagerung des Balkens ($M_1 = M_2 = 0$, $e_1 = 0$), ε_{11} und ε_{12} die Drehungen links für $M_1 = -1$ bzw. $M_2 = 1$ ($e_1 = 0$), ε_{22} und ε_{21} die Drehungen rechts für $M_2 = -1$ bzw. $M_1 = 1$ ($e_2 = 0$), ε_{1e} die Drehung links für e_1 , ε_{2e} die Drehung rechts für e_2 . Den Werten ε_{11} und ε_{22} ist das Minuszeichen beigefügt, damit für ein negatives Einspannmoment die betreffenden Beiträge positiv ausfallen.

Sinngemäß lauten nach dem Gesetze der Superposition die Gleichungen für die lotrechten Auflagerverschiebungen v_1 und v_2

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_{10} - M_1 v_{11} + M_2 v_{12} + v_{1e}, \\ v_2 &= v_{20} - M_2 v_{22} + M_1 v_{21} + v_{2e}. \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

Bei der Berechnung der Formänderungen ε und v ist zu beachten, daß sowohl $M_1 = -1$ als auch $M_2 = 1$ im Balken die Querkraft $Q = \frac{1}{l}$ erzeugen, die neben dem Moment am Widerlager als äußere Kraft anzubringen ist; ferner

wirken noch die Horizontalkräfte H_1 und H_2 , die in den Gleichungen (3) nicht direkt erscheinen, aber für die Zustände $e = 0$, e_1 und e_2 leicht ermittelt werden können.

Der Drehwinkel ψ des Balkens (positiv im Sinne des Uhrzeigers) kann mit Hilfe der Gleichungen (3_b) ebenfalls als lineare Funktion der ihn erzeugenden Ursachen dargestellt werden. Wir finden

$$\psi = \frac{v_2 - v_1}{l} = \frac{v_{20} - v_{10}}{l} + M_1 \frac{v_{11} + v_{21}}{l} - M_2 \frac{v_{22} + v_{12}}{l} + \frac{v_{2e} - v_{1e}}{l},$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$\psi = \psi_0 + M_1 \psi_1 - M_2 \psi_2 + \psi_e, \quad (4)$$

wobei ψ_0 , ψ_1 , ψ_2 und ψ_e die Drehwinkel für freie Auflagerung, $M_1 = 1$, $M_2 = -1$ und für die waagrechten Verschiebungen e_1 und e_2 bezeichnen. Gleichung (4) heißt die Superpositionsgleichung des Drehwinkels.

Indem wir die Ausdrücke für e_1 , e_2 und ψ in die Grundgleichungen (1) einsetzen, gewinnen wir die Elastizitätsgleichungen des elastisch eingespannten Balkens; sie lauten

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \psi_0 - \varepsilon_{10} + \psi_e - \varepsilon_{1e} + M_1(\alpha_1 + \psi_1 + \varepsilon_{11}) + M_2(\alpha_2 - \psi_2 - \varepsilon_{12}) &= 0, \\ \beta_0 - \psi_0 - \varepsilon_{20} - \psi_e - \varepsilon_{2e} + M_2(\beta_2 + \psi_2 + \varepsilon_{22}) + M_1(\beta_1 - \psi_1 - \varepsilon_{21}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2. Festpunkte und Festpunktmomente.

Um die Auswertung der Elastizitätsgleichungen zu erleichtern, empfiehlt sich die Einführung neuer überzähliger Größen M'_1 und M'_2 . Wir denken uns an den Balkenenden starre Scheiben angeschlossen, und verlegen die durch die Einspannung bedingten Reaktionen an die Endpunkte O_1 und O_2 in den waagrechten Abständen a und b von den Auflagern, vergl. Abb. 3.

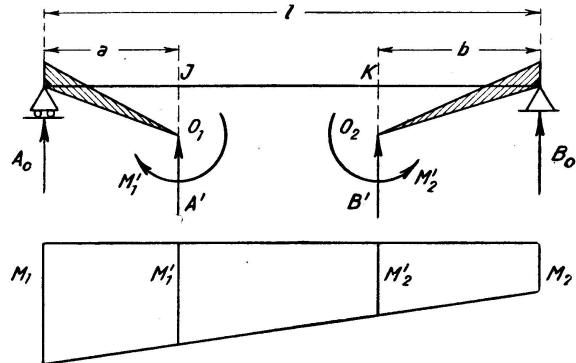


Fig. 3

Diese Transformation ergibt die lotrechten Kräfte

$$A' = -B' = \frac{M_2 - M_1}{l}$$

und die Momente M'_1 und M'_2 , die sich aus M_1 und M_2 leicht berechnen lassen. Die Momentengleichungen für die Auflager ergeben

$$M_1 = M'_1 - A'a = M'_1 - \frac{M_2 - M_1}{l} a,$$

$$M_2 = M'_2 - B'b = M'_2 - \frac{M_1 - M_2}{l} b,$$

woraus

$$\left. \begin{aligned} M_1' &= M_1 \frac{l-a}{l} + M_2 \frac{a}{l}, \\ M_2' &= M_2 \frac{l-b}{l} + M_1 \frac{b}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Zeichnet man für den mit M_1 und M_2 belasteten, einfachen Balken das Momentendiagramm, so bedeuten gemäß Gleichung (6) M_1' und M_2' dessen Ordinaten in den Abständen a und b von den Auflagern, vergl. Abb. 3. Umgekehrt liefern die Gleichungen (6) mit der Bezeichnung $l-a-b=c$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M_1' \frac{l-b}{c} - M_2' \frac{a}{c}, \\ M_2 &= M_2' \frac{l-a}{c} - M_1' \frac{b}{c}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die erste der Elastizitätsgleichungen (5) ein und fassen zur Abkürzung alle Glieder, die die Einspannmomente nicht enthalten, in dem Ausdrucke α_0' zusammen. Die Gleichung lautet dann

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \psi_1 + \varepsilon_{11}) \left(M_1' \frac{l-b}{c} - M_2' \frac{a}{c} \right) \\ + (\alpha_2 - \psi_2 - \varepsilon_{12}) \left(M_2' \frac{l-a}{c} - M_1' \frac{b}{c} \right) + \alpha_0' = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{M_1'}{c} [l(\alpha_1 + \psi_1 + \varepsilon_{11}) - b(\alpha_1 + \alpha_2 + \psi_1 - \psi_2 + \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12})] \\ + \frac{M_2'}{c} [l(\alpha_2 - \psi_2 - \varepsilon_{12}) - a(\alpha_1 + \alpha_2 + \psi_1 - \psi_2 + \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12})] + \alpha_0' = 0. \end{aligned}$$

Jetzt verfügen wir über den Abstand a derart, daß die Gleichung von M_2' befreit wird, indem wir den Abstand a zu

$$a = \frac{\alpha_2 - \psi_2 - \varepsilon_{12}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \psi_1 - \psi_2 + \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}} l \quad (8a)$$

wählen. Daraus folgt zunächst

$$\alpha_1 + \psi_1 + \varepsilon_{11} = \frac{l-a}{a} (\alpha_2 - \psi_2 - \varepsilon_{12}),$$

und die Elastizitätsgleichung geht über in

$$\frac{M_1'}{c} \left[\frac{l(l-a)}{a} (\alpha_2 - \psi_2 - \varepsilon_{12}) - \frac{lb}{a} (\alpha_2 - \psi_2 - \varepsilon_{12}) \right] + \alpha_0' = 0.$$

Wird α_0' wieder ausführlich geschrieben, so ergibt sich daraus

$$M_1' = - \frac{a}{l} \frac{\alpha_0 + \psi_0 - \varepsilon_{10} + \psi_e - \varepsilon_{1e}}{\alpha_2 - \psi_2 - \varepsilon_{12}}. \quad (9a)$$

In gleicher Weise läßt sich die zweite der Elastizitätsgleichungen (5) vereinfachen. Wir definieren den Abstand b zu

$$b = \frac{\beta_1 - \psi_1 - \varepsilon_{21}}{\beta_1 + \beta_2 + \psi_2 - \psi_1 + \varepsilon_{22} - \varepsilon_{21}} \quad (8b)$$

und erhalten nach analoger Rechnung

$$M_2' = -\frac{b}{l} \frac{\beta_0 - \psi_0 - \varepsilon_{20} - \psi_e - \varepsilon_{2e}}{\beta_1 - \psi_1 - \varepsilon_{21}} l. \quad (9b)$$

Entsprechend der Theorie des Balkens auf festen Stützen bezeichnen wir die Lotrechten durch die Endpunkte der starren Scheiben (Abb. 3), deren Lage von der Belastung und von den waagrechten Verschiebungen e_1 und e_2 unabhängig ist, als Festlinien und ihre Schnittpunkte J und K mit der Balkenachse als Festpunkte; die Momente M_1' und M_2' heißen sinngemäß Festpunktmomente.

Wenn die Auflager in lotrechter Richtung unverschieblich sind, so vereinfachen sich die Abstände (8) und (9), weil dann alle Drehwinkel ψ , sowie auch die Größen ε_{10} , ε_{20} , ε_{12} , ε_{21} verschwinden. Die Festpunktabschnitte betragen in diesem Sonderfalle

$$a = \frac{\alpha_2 l}{\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon_{11}}, \quad b = \frac{\beta_1 l}{\beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_{22}}, \quad (10)$$

und die Festpunktmomente lauten

$$M_1' = -\frac{a}{l} \frac{\alpha_0 - \varepsilon_{1e}}{\alpha_2}, \quad M_2' = -\frac{b}{l} \frac{\beta_0 - \varepsilon_{2e}}{\beta_1}. \quad (11)$$

3. Besondere Belastungen.

Wir setzen in der Folge voraus, das maßgebende Trägheitsmoment J sei längs der Balkenachse konstant. Dann lassen sich die Ausdrücke der Festpunktmomente in eine für die numerische Berechnung geeignete Form bringen.

Es handle sich zunächst um die gleichmäßig verteilte Belastung g pro Längeneinheit des Trägers. Die Elastizitätslehre liefert für die Auflagerdrehwinkel bei konstantem Trägheitsmoment die Ausdrücke

$$\alpha_0 = \beta_0 = \frac{gl^3}{24EJ}, \quad \alpha_2 = \beta_1 = \frac{l}{6EJ}.$$

Nach der eingeführten Bezeichnungsweise ist v_{12} die Einsenkung des linken Widerlagers infolge $M_2 = 1$ und $M_1 = 0$, also für die am linken Widerlager angreifende Querkraft $Q = \frac{1}{l}$; somit erzeugt die Belastung g im Grundsystem die Einsenkung

$$v_{10} = v_{12} A_0 l = v_{12} \frac{gl^2}{2}.$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für v_{20} und ε_{10} , und wir erhalten daher

$$\psi_0 - \varepsilon_{10} = \frac{v_{20} - v_{10}}{l} - \varepsilon_{10} = (v_{21} - v_{12}) \frac{gl}{2} - \varepsilon_{12} \frac{gl^2}{2}.$$

Nach dem MAXWELL'schen Satze besteht ferner die Beziehung

$$\varepsilon_{12} = \frac{v_{11} - v_{12}}{l}, \quad (12)$$

deshalb wird einfacher

$$\psi_0 - \varepsilon_{10} = (v_{21} - v_{11}) \frac{gl}{2}$$

Ferner ist

$$\psi_2 + \varepsilon_{12} = \frac{\nu_{22} + \nu_{12}}{l} + \frac{\nu_{11} - \nu_{12}}{l} = \frac{\nu_{11} + \nu_{22}}{l}.$$

Damit folgt für gleichmäßig verteilte Belastung und unter Ausschluß der waagrechten Verschiebungen

$$\begin{aligned} M'_1 &= -\frac{a}{l} \frac{\alpha_0 + \psi_0 - \varepsilon_{10}}{\alpha_2 - \psi_2 - \varepsilon_{12}} = -\frac{a}{l} \frac{\frac{gl^2}{4} \alpha_2 + \frac{gl}{2} (\nu_{21} - \nu_{11})}{\alpha_2 - \frac{\nu_{11} + \nu_{22}}{l}} \\ M'_1 &= -\frac{gal}{4} \cdot \frac{\alpha_2 l + 2(\nu_{21} - \nu_{11})}{\alpha_2 l - (\nu_{11} + \nu_{22})}; \end{aligned} \quad (13a)$$

entsprechend läßt sich ableiten

$$M'_2 = -\frac{gb\ell}{4} \cdot \frac{\beta_1 \ell + 2(\nu_{12} - \nu_{22})}{\beta_1 \ell - (\nu_{11} + \nu_{22})}. \quad (13b)$$

In gleicher Weise lassen sich die Ausdrücke der Festpunktmomente für eine Einzellast P in den Abständen x und x' von den Auflagerlotrechten ableiten. Für die Auflagerdrehwinkel im Grundsystem gelten die Formeln

$$\alpha_0 = P \cdot \frac{xx'(l+x')}{6lEJ}, \quad \beta_0 = P \cdot \frac{x'x(l+x)}{6lEJ};$$

ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi_0 - \varepsilon_{10} &= \nu_{21} B_0 - \nu_{12} A_0 - \varepsilon_{12} A_0 l \\ &= \nu_{21} B_0 - \nu_{11} A_0 = \nu_{21} \cdot P \frac{x}{l} - \nu_{11} \cdot P \frac{x'}{l}. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} M'_1 &= -\frac{a}{l} \frac{P \frac{xx'(l+x')}{l^2} \alpha_2 + \nu_{21} P \frac{x}{l} - \nu_{11} P \frac{x'}{l}}{\alpha_2 - \frac{\nu_{11} + \nu_{22}}{l}} \\ &= -P \frac{axx'(l+x')}{l^3} \cdot \frac{\alpha_2 l + \nu_{21} \frac{l^2}{x'(l+x')} - \nu_{11} \frac{l^2}{x(l+x')}}{\alpha_2 l - (\nu_{11} + \nu_{22})}; \end{aligned} \quad (14a)$$

ebenso findet man

$$M'_2 = -P \frac{bx'x(l+x)}{l^3} \cdot \frac{\beta_1 l + \nu_{12} \frac{l^2}{x(l+x)} - \nu_{22} \frac{l^2}{x'(l+x)}}{\beta_1 l - (\nu_{11} + \nu_{22})}. \quad (14b)$$

Es ist möglich, die bekannten MOHR'schen Konstruktionen zur graphischen Ermittlung der Schlußlinie der Momentenfläche auf den Balken mit elastisch verschiebbaren Stützen auszudehnen. Zu diesem Zwecke führt man „gedachte Belastungen“ ein, die so angesetzt werden, daß der Gültigkeitsbereich der graphischen Konstruktionen erweitert wird. Für gleichmäßig verteilte Belastung lauten beim Balken auf festen Stützen die Festpunktgemomente

$$M'_1 = -\frac{gal}{4}, \quad M'_2 = -\frac{gb\ell}{4}.$$

Für elastisch senkbare Stützen setzen wir statt g

$$g_1 = g \frac{\alpha_2 l + 2(v_{21} - v_{11})}{\alpha_2 l - (v_{11} + v_{22})}, \quad g_2 = g \frac{\beta_1 l + 2(v_{12} - v_{22})}{\beta_1 l - (v_{11} + v_{22})},$$

womit die Gleichungen (13) in

$$M_1' = -\frac{g_1 a l}{4}, \quad M_2' = -\frac{g_2 b l}{4} \quad (15)$$

übergehen. Im Falle der Einzellast P setzen wir

$$P_1 = P \frac{\alpha_2 l + v_{21} \frac{l^2}{x'(l+x)} - v_{11} \frac{l^2}{x(l+x)}}{\alpha_2 l - (v_{11} + v_{22})},$$

$$P_2 = P \frac{\beta_1 l + v_{12} \frac{l^2}{x(l+x)} - v_{22} \frac{l^2}{x'(l+x)}}{\beta_1 l - (v_{11} + v_{22})},$$

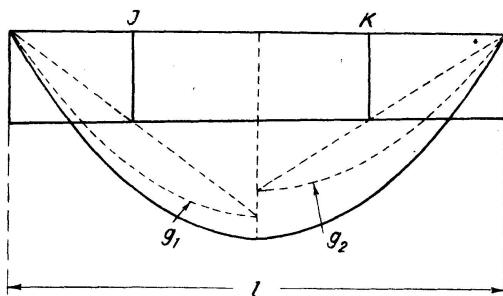


Fig. 4 a

und erhalten für die Festpunkt-momente

$$M_1' = -P_1 \frac{axx'(l+x')}{l^3},$$

$$M_2' = -P_2 \frac{bx'x(l+x)}{l^3}. \quad (16)$$

Das sind die bekannten Beziehungen, die der graphischen Lösung für eine Einzellast zu Grunde liegen. In Abb. 4 sind die daraus leicht abzuleitenden Konstruktionen für die Schlußlinie dargestellt; sie unterscheiden sich von

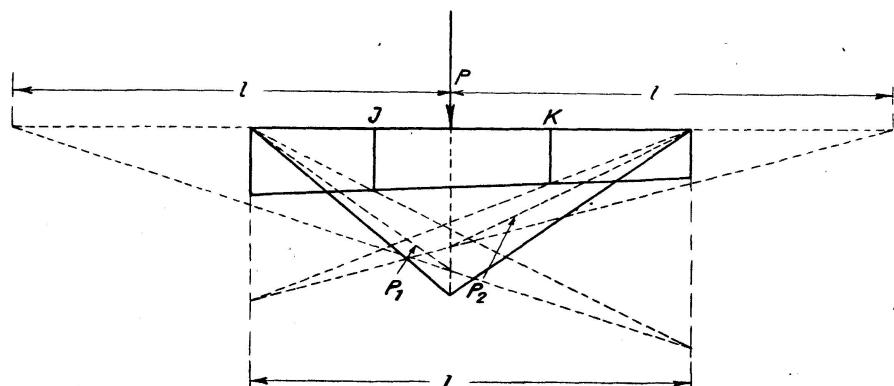


Fig. 4b

den MOHR'schen Konstruktionen für feste Stützen nur dadurch, daß an Stelle der wirklichen Belastungen g bzw. P die „gedachten“ Belastungen g_1 , g_2 bzw. P_1 , P_2 treten. Das Aufzeichnen der Einflußlinien für Momente und Querkräfte kann im Prinzip nach derselben einfachen Methode erfolgen, wie beim Balken auf festen Stützen.

4. Der einseitig elastisch eingespannte Balken.

Wir betrachten einen unbelasteten Balken, dessen rechtes Auflager sich aus irgendwelchen Ursachen, die rechts vom Balken liegen, um den Winkel

ε_2 gedreht und um die Strecke v_2 gesenkt hat, vergl. Abb. 5. Die Momentenlinie ist eine Gerade; der Wendepunkt habe vom linken Auflager den Abstand r_1 . Das linke Widerlager wird beansprucht durch das Moment M_1 und die Querkraft $\frac{M_2 - M_1}{l}$. Die Bewegungen ε_1 und v_1 sind somit lineare Funktionen von M_1 und M_2 , d. h. es liegt am linken Widerlager elastische Einspannung vor. Es gelten die Beziehungen (3 a) und (4 a)

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= -M_1 \varepsilon_{11} + M_2 \varepsilon_{12} + \varepsilon_{1e}, \\ v_1 &= -M_1 v_{11} + M_2 v_{12} + v_{1e}.\end{aligned}$$

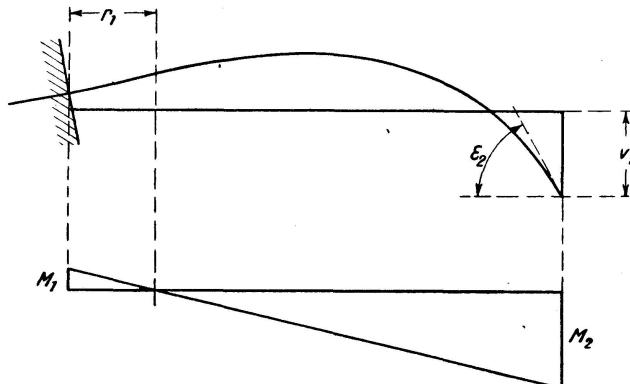


Fig. 5

Die Gleichungen (1) gehen damit über in

$$\begin{aligned}M_1 \left(\alpha_1 + \varepsilon_{11} + \frac{v_{11}}{l} \right) + M_2 \left(\alpha_2 - \varepsilon_{12} - \frac{v_{12}}{l} \right) + \frac{v_2 - v_{1e}}{l} - \varepsilon_{1e} &= 0, \\ M_1 \left(\beta_1 - \frac{v_{11}}{l} \right) + M_2 \left(\beta_2 + \frac{v_{12}}{l} \right) - \varepsilon_2 - \frac{v_2 - v_{1e}}{l} &= 0.\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Bewegungen ε_2 und v_2 des rechten Auflagerquerschnittes mit Beachtung der Beziehung (12) zu

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_2 &= M_1 (\alpha_1 + \beta_1 + \varepsilon_{11}) + M_2 (\alpha_2 + \beta_2 - \varepsilon_{12}) - \varepsilon_{1e}, \\ \frac{v_2}{l} &= -M_1 \left(\alpha_1 + \varepsilon_{11} + \frac{v_{11}}{l} \right) - M_2 \left(\alpha_2 - \frac{v_{11}}{l} \right) + \frac{v_{1e}}{l} + \varepsilon_{1e}.\end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

Der Abstand r_1 des Wendepunktes der elastischen Linie vom linken Auflager berechnet sich jetzt zu

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{M_1}{M_1 - M_2} l = \frac{l}{1 - \frac{M_2}{M_1}} \\ r_1 &= \frac{l}{1 + \frac{\alpha_1 + \varepsilon_{11} + \frac{v_{11}}{l}}{\alpha_2 - \frac{v_{11}}{l} + \frac{1}{M_2} \left(\frac{v_2 - v_{1e}}{l} - \varepsilon_{1e} \right)}}.\end{aligned} \quad (18a)$$

Die Lage des Wendepunktes ist demnach abhängig von M_2 und von den Bewegungen v_2 , v_{1e} und ε_{1e} . Sind diese Bewegungen gleich Null, so verschwindet auch der Einfluß von M_2 , d. h. r_1 wird zu einem Festwert.

In gleicher Weise lassen sich die Ausdrücke für ε_1 , v_1 und r_2 an einem Balken ableiten, dessen rechtes Auflager elastisch eingespannt ist, während das linke aus Ursachen, die links vom Balken liegen, Bewegungen ausführt und dadurch den Balken deformiert, vergl. Abb. 6. Mit Hilfe der Beziehungen (3 b) und (4 b)

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= -M_2 \varepsilon_{22} + M_1 \varepsilon_{21} + \varepsilon_{2e}, \\ v_2 &= -M_2 v_{22} + M_1 v_{21} + v_{2e}\end{aligned}$$

und der Grundgleichungen (1) erhalten wir

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_1 &= M_2 (\beta_2 + \alpha_2 + \varepsilon_{22}) + M_1 (\beta_1 + \alpha_1 - \varepsilon_{21}) - \varepsilon_{2e}, \\ \frac{v_1}{l} &= -M_2 \left(\beta_2 + \varepsilon_{22} + \frac{v_{22}}{l} \right) - M_1 \left(\beta_1 - \frac{v_{22}}{l} \right) + \frac{v_{2e}}{l} + \varepsilon_{2e}.\end{aligned}\right\} \quad (17b)$$

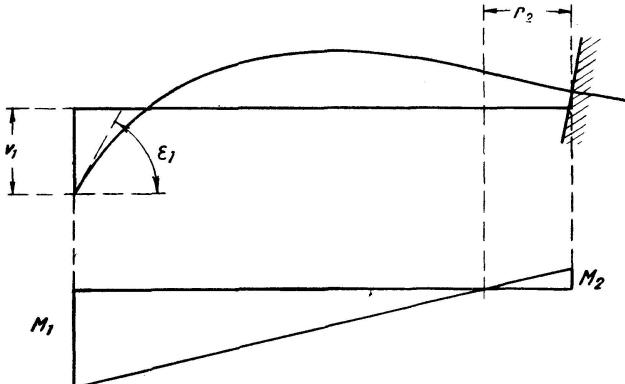


Fig. 6.

Der Wendepunkt der elastischen Linie hat vom rechten Auflager den Abstand

$$\begin{aligned}r_2 &= \frac{M_2}{M_2 - M_1} l \\ r_2 &= \frac{l}{1 + \frac{\beta_2 + \varepsilon_{22} + \frac{v_{22}}{l}}{\beta_1 - \frac{v_{22}}{l} + \frac{1}{M_2} \left(\frac{v_1 - v_{2e}}{l} - \varepsilon_{2e} \right)}}. \quad (18b)\end{aligned}$$

5. Die Elastizitätsmasse der Widerlager.

Die Anwendung der Theorie des elastisch eingespannten Balkens erfordert die Berechnung der „Elastizitätsmaße“ der Widerlager, d. h. der verschiedenen Formänderungen ε und v , die in den Gleichungen auftreten. Werden die Widerlager durch keine andern Kräfte deformiert, als durch die ihnen vom Balken zugeführten Auflagerkräfte und Momente, so können sie als „einseitig elastisch eingespannte Träger“ im Sinne der Definitionen betrachtet werden, die den Gleichungen (17) zu Grunde liegen.

Wir begnügen uns nachstehend, den Fall des elastisch eingespannten Balkens auf senkbaren Stützen nach Abb. 7 zu behandeln. Zur Berechnung von ε_{11} sind am rechten Auflager $M = -1$ und $Q = \frac{1}{l}$ als angreifende Kräfte anzubringen, unter l die Stützweite des rechts anschließenden, belasteten

Balkens verstanden. Die Auflagerreaktion A berechnet sich leicht zu

$$A = \frac{M_1}{l} + \frac{1}{l'} + \frac{1}{l},$$

somit senkt sich die rechte Stütze um

$$\nu_{11} = k \cdot A = k \left(\frac{M_1}{l'} + \frac{1}{l'} + \frac{1}{l} \right); \quad (19)$$

darin bezeichnet k das Elastizitätsmaß der Stütze, d. h. die Stützensenkung für $A = 1$. Zur Berechnung von ν_{11} steht ferner Gleichung (17 a) zur Verfügung; wird darin $M_2 = -1$ gesetzt und vom Einflusse waagrechter Verschiebungen abgesehen, so ergibt sich

$$\frac{\nu_{11}}{l'} = -M_1 \left(\alpha'_1 + \varepsilon'_{11} + \frac{\nu'_{11}}{l'} \right) + \alpha'_2 - \frac{\nu'_{11}}{l'}.$$

Die Summanden sind mit Strich versehen, da sie sich auf die Öffnung l' beziehen und von den entsprechenden Werten der Öffnung l unterschieden werden müssen.

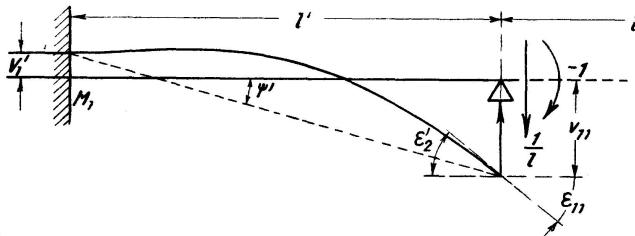


Fig. 7

Werden die beiden Ausdrücke für ν_{11} einander gleichgesetzt, so lässt sich das Moment M_1 am linken, elastisch eingespannten Auflager berechnen. Man findet

$$M_1 = \frac{\alpha'_2 - \frac{\nu'_{11}}{l'} - \frac{k}{l'} \left(\frac{1}{l'} + \frac{1}{l} \right)}{\alpha'_1 + \varepsilon'_{11} + \frac{\nu'_{11}}{l'} + \frac{k}{l'^2}} \quad (20)$$

Das linke, elastisch eingespannte Auflager senkt sich gemäß Gleichung (3 b) um

$$\nu'_1 = -\nu'_{11} M_1 - \nu'_{12} \cdot 1.$$

Der Stabdrehwinkel ψ' in der Öffnung l' hat den Wert

$$\psi' = \frac{x_{11} - \nu'_1}{l'} = \frac{k}{l'} \left(\frac{1}{l'} + \frac{1}{l} \right) + \frac{\nu'_{12}}{l'} + M_1 \left(\frac{k}{l'^2} + \frac{\nu'_{11}}{l'} \right).$$

Gleichung (1) ergibt für die Drehung des rechten Widerlagers

$$\varepsilon'_2 = -\varepsilon_{11} = M_1 \beta'_1 - 1 \cdot \beta'_2 - \psi$$

oder

$$\varepsilon_{11} = \beta'_2 + \frac{k}{l'} \left(\frac{1}{l'} + \frac{1}{l} \right) + \frac{\nu'_{12}}{l'} - M_1 \left(\beta'_1 - \frac{k}{l'^2} - \frac{\nu'_{11}}{l'} \right). \quad (21)$$

Zur Berechnung von ε_{12} belastet man das rechte Balkenende mit $Q = \frac{1}{l}$. Die rechte Stütze senkt sich um

$$\nu_{12} = kA = k\left(\frac{M_1}{l'} + \frac{1}{l}\right), \quad (22)$$

die linke um
daher ist jetzt

$$\nu'_1 = -\nu'_{11} M_1 \quad (M_2 = 0),$$

$$\psi = \frac{k}{l'l} + M_1 \left(\frac{k}{l'^2} + \frac{\nu'_{11}}{l'} \right)$$

und aus Gleichung (1) folgt

$$\varepsilon_{12} = \frac{k}{l'l} - M_1 \left(\beta'_1 - \frac{k}{l'^2} - \frac{\nu'_{11}}{l'} \right), \quad (23)$$

worin

$$M_1 = -\frac{\frac{k}{l'l}}{\alpha'_1 + \varepsilon'_{11} + \frac{\nu'_{11}}{l'} + \frac{k}{l'^2}}. \quad (24)$$

Die vorstehenden Beziehungen ermöglichen die Berechnung der Elastizitätsmaße ε_{11} , ε_{12} , ν_{11} und ν_{12} unter der Voraussetzung, daß die Elastizitätsmaße des linken, benachbarten Auflagers bekannt sind. In manchen Fällen können die Beziehungen im Sinne von Rekursionsformeln verwendet werden, so besonders beim durchlaufenden Balken auf frei drehbaren, elastisch senkbaren Stützen. Wird bei diesem System eine Öffnung belastet, so berechnen sich die Elastizitätsmaße der angrenzenden Auflager, indem man von den beiden Enden her gegen die belastete Öffnung fortschreitet. Die Berechnung unterscheidet sich im Prinzip nicht von der bekannten Behandlung des durchlaufenden Balken auf festen Stützen mit Hilfe der Festpunkte; nur sind beim Balken auf elastisch senkbaren Stützen die Wendepunkte der elastischen Linie in den unbelasteten Öffnungen nicht Festwerte, sondern in ihrer Lage von der Belastung abhängig. Für jede Öffnung links der belasteten Öffnung gilt Gleichung (18 a), für jede Öffnung rechts davon Gleichung (18 b). Die hier entwickelten Beziehungen bilden auch die Grundlage für kompliziertere Gebilde z. B. für den durchlaufenden Balken auf elastisch senkbaren und elastisch drehbaren Stützen und für den Stockwerkrahmen. Ob das Verfahren bei der praktischen Anwendung Vorteile bietet im Vergleich zu der Methode der Iteration, die sich für Stabwerke mit beweglichen Knoten hervorragend eignet, muß vorläufig dahin gestellt bleiben.

Zusammenfassung.

Die Theorie des beidseitig elastisch eingespannten Balkens wird auf den Fall elastisch senkbarer Stützen erweitert. Mit Hilfe von Festpunkten und Festpunktmomenten lassen sich einfache Beziehungen zur Bestimmung der Schlußlinie der Momentenfläche aufstellen. Die Formänderung der Widerlager wird für den Fall, daß diese wieder elastisch eingespannte Stäbe darstellen, behandelt.

Résumé.

L'auteur étend la théorie de la poutre encastrée élastiquement des deux côtés au cas où les appuis sont susceptibles d'un affaissement élastique. En

faisant intervenir les points fixes et les moments de points fixes, on arrive à des relations simples pour la détermination de la ligne de fermeture de l'aire des moments. L'auteur étudie la déformation des appuis dans le cas où ils sont constitués eux-mêmes par des éléments à encastrement élastique.

Summary.

The theory of beams flexibly fixed at both ends is extended to the case of elastically yielding supports. With the help of fixed points and fixed-point moments, simple relations can be found for determining the closing line of the diagram of the moments. The change in shape of the abutments is treated for the case where these again represent flexibly fixed bars.