

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 2 (1933-1934)

Artikel: Die Bemessung unvollkommen eingespannter Stahl "I"-Deckenträger unter Berücksichtigung der plastischen Formänderungen
Autor: Kazinczy, G.v.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-3405>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DIE BEMESSUNG UNVOLLKOMMEN EINGESPANNTER STAHL „I“-DECKENTRÄGER UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER PLASTISCHEN FORMÄNDERUNGEN.

LES CALCULS DES POUTRES DE PLANCHER MÉTALLIQUES EN Σ I
PARTIELLEMENT ENCASTRÉES, EN TENANT COMPTE DES DÉFOR-
MATIONS PLASTIQUES.

THE DESIGN OF NOT FULLY RESTRAINED STEEL 'I' FLOORBEAMS
CONSIDERING PLASTIC DEFORMATIONS.

Dr. Ing. G. v. KAZINCZY, städt. Baurat, Budapest.

In Budapest wurden seit mehr als 15 Jahren von mehreren Konstrukteuren im Hochbau Decken verwendet, in welchen die Stahl „I“-Träger als eingespannt gerechnet wurden. Diese Träger wurden manchmal sogar mit $pl^2/24$ berechnet, für den Fall, daß die doppelt so großen negativen Momente durch Verstärkung des „I“-Trägers mit der Betondeckenplatte und durch geeignete Eisenarmierung aufgenommen wurden. Probebelastungen und Versuche haben die gewünschte Sicherheit solcher Decken bestätigt.

Durch neuere genauere Untersuchungen wurde nachgewiesen, daß die erhöhte Tragfähigkeit nur teilweise auf die Wirkung der Einspannung zurückzuführen ist, da die Betonummantelung der Träger und die unrichtig ermittelte Traggrenze des „I“-Trägers auch eine gewisse günstige Wirkung ausübt. Die starke, also unzulässige Formänderung des Trägers beginnt nicht mit dem Erreichen der Fließgrenze in der äußersten Faser, also bei einem Moment gleich $W\sigma_f$, sondern nur dann, wenn die ganze Höhe des Flansches ins Fließen kommt. Dies soll das kritische Moment genannt werden. $M_k = K\sigma_f$; $K > W$. Über die Wirkung der Einbetonierung habe ich am Kongreß während der Diskussion ausführlich berichtet.

In einem statisch unbestimmten Träger ist die Größe des Tragvermögens nicht dann erreicht, wenn in einem Querschnitt M_k erreicht wird, da an dieser Stelle auch bei Weiterbelastung das Moment konstant bleibt und die weiteren Momente an anderen Stellen sich derart verteilen, als ob im vorerwähnten Querschnitt ein Gelenk wäre. Bei einem vollkommen eingespannten Träger wird — wegen der plastischen Formänderung an der Einspannstelle — die Tragfähigkeit nur dann erschöpft, falls auch die positiven Momente den kritischen Wert erreichen, usw. $M_- = M_+ = K\sigma_f = ql^2/16$. Sind die Trägerender: nicht vollkommen eingespannt, so wird das M_k an der Einspannstelle später erreicht, aber das Endresultat bleibt das gleiche. Ist die Einspannung sehr unvollkommen (nachgiebig), so wird erst in Balkenmitte die Fließgrenze erreicht; sodann werden bei Weiterbelastung die Einspannmomente rascher anwachsen, und die Grenze des Tragvermögens wird wieder bei $M = ql^2/16$ erreicht. Daraus könnte man folgern, daß nach der Plastizitätstheorie auch der unvollkommen eingespannte Träger immer nach der

Betonklotz von $30 \times 38 \times 75$ cm Abmessung eingemauert; Linie „C“ der gleiche Träger wie bei „B“, jedoch der Klotz aus Eisenbeton und unter dem Trägerflansch am Auflager 6.5 cm Beton; Linie „D“, wie „C“, jedoch mit

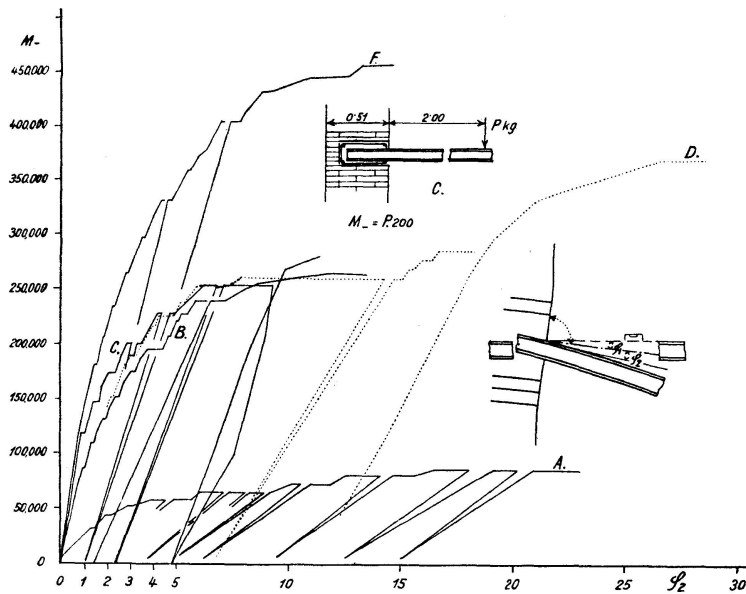


Fig. 2.

speziellen Eiseneinlagen; Linie „F“ wie „D“, jedoch mit 32 cm tiefen Einspannungen. Aus dem Schaubild ist zu ersehen, daß Ziegelmauerwerk nicht

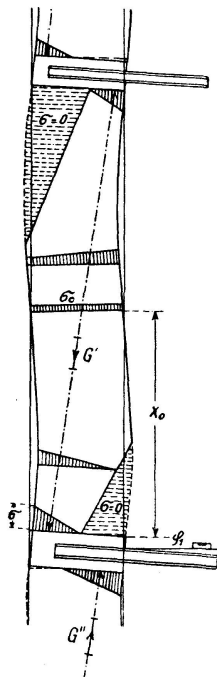


Fig. 3.

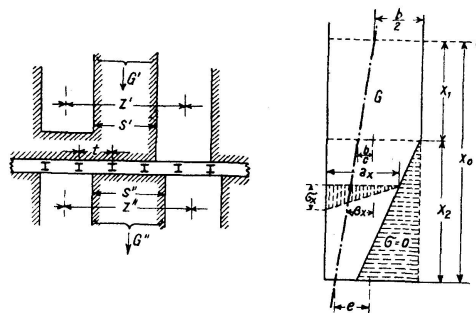


Fig. 4.

geeignet ist, eine nennenswerte Einspannung zu erzielen. Die plastische Formänderung ist sehr groß. Es traten dabei Risse auf, Bruch erfolgte jedoch nicht. Träger als eingespannt zu berechnen, ist nur möglich, wenn man diese in einem Eisenbetonmauerrost, dessen Torsionswiderstand die Momente auf

den auf Biegung und Druck beanspruchten Mauerwerkspfeiler verteilt, einspannt. Die relative Winkeländerung des Einspannquerschnittes zu dem Mauerrost (Annahme: Stahlträger, Weißkalkmörtelmauerwerk, minderwertiger Beton) kann durch die nachfolgende aus die Versuchsergebnisse abgeleitete empirische Formel (Hyperbel) ausgedrückt werden.

$$\varphi_2 = \frac{M}{145\,000\,000} + 0,00115 \frac{M}{M_t - M},$$

wobei $M_t = 1800 h^{1,6}$ (h = Einspanntiefe, M_t größtes Moment). Will man die Hyperbel durch zwei Gerade ersetzen, so sind deren Gleichungen:

$$1) M = \alpha_2 \varphi = 875\,000 h^{1,3} \varphi \quad \text{und} \quad 2) M_t' = \text{const} = 1650 h^{1,6}$$

Bei der Lösung der Formänderung des Mauerwerkspfeilers (Abb. 3) können wir ruhig den Ort des Momentennullpunktes willkürlich in der Mitte der Höhe des Stockwerkes annehmen. (Es ist möglich, nachzuweisen, daß die Abweichungen ganz gering sind, nur bei biegungsfesten Pfeilern trifft dies nicht zu. Es wird die Winkeländerung (φ) des untersten Querschnittes bzw. des Mauerrostes in Abhängigkeit von der Exzentrizität (e) der Belastung (G) des Pfeilers

$$d\varphi = \frac{d\varepsilon_x}{a_x} = \frac{\sigma_x}{E_m a_x} dx; \quad a_x = 3 \left(\frac{b'}{2} - \beta x \right); \quad \sigma_x = \frac{2 G'}{s' a_x}$$

$$\varphi = \int_{x_1}^{x_0} \frac{2 G'}{9 s' E_m} \cdot \frac{1}{(b'/2 - \beta x)^2} dx + \frac{G' x_0}{6 e' b' s' E_m}$$

$$\varphi = \frac{4 G' x_0}{9 E_m s' b' e'} \left(\frac{1}{1 - 2 e'/b'} - \frac{9}{8} \right)$$

(Die Bedeutung der einzelnen Zeichen ist aus der Abb. 4 zu ersehen.)

Auf den Mauerrost wirkt aber außer dem gegebenen Moment $M' = G'e'$ noch von unten ein Moment durch die Exzentrizität des Auflagerdruckes $M'' = G''e''$ und für den Fall, daß man die Momente auf den inneren Rand des unteren Mauerpfeilers bezieht und erlaubt, daß die untere Mauer dicker sein kann, so ist weiter das Moment

$$M_- = -M' - M'' + C \quad \text{wobei} \quad C = G''b''/2 - G'(b'' - b')/2$$

Wir bezeichnen mit ' die Buchstaben, die sich auf das obere, mit '' jene, welche sich auf das untere Mauerwerk beziehen. Wollen wir die $M-\varphi$ -Linie, welche die Form ähnlich einer Hyperbel hat, durch eine einfachere empirische Hyperbel ersetzen, so ist deren Gleichung

$$\varphi_1 = \frac{M - C}{1,25 \alpha_1} + \frac{M_f - C}{135\,000\,000} \cdot \frac{M - C}{1,1(M_f - C) - (M - C)}$$

In dieser Gleichung bedeutet M_f jenes größte Moment, welches das Mauerwerk überhaupt aufnehmen kann, wobei die Randspannungen bis zur Bruchgrenze reichen.

$$M_f = \frac{2 G'^2}{3 \sigma'_m s'} + \frac{2 G''^2}{3 \sigma''_m s''} - G' b''$$

$$\alpha_1 = 0,75 \left(\frac{E'_m b'^3 s' t}{6 x'_0 z'} + \frac{E''_m b''^3 s'' t}{6 x''_0 z''} \right)$$

Die resultierende Winkeländerung des Einspannquerschnittes setzt sich aus den vorerwähnten zwei Arten der Formänderung zusammen.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Wollen wir nun die Winkeländerung des Einspannquerschnittes bestimmen, die durch die Belastung des Balkens entsteht, so zeichnen wir sowohl die $M-\varphi$ -Linie des Mauerwerkes (in welchem die Formänderungen der Auflagerdrücke auch berücksichtigt sind), als auch dieselbe Linie des Trägers (Abb. 5). Beim Schnittpunkt beider Linien (1) ist die Bedingung des Gleichgewichtes erfüllt, oder bei einer unvollkommenen (nachgiebigeren) Einspannung im Punkte (2). Bei größerer Belastung verschiebt sich die $M-\varphi$ -Linie des Trägers parallel nach rechts aufwärts. Das größtmögliche Moment ist aber $K\sigma_j$, die mit 3 gekennzeichnete Gleichgewichtslage ist also unmöglich. Es muß auf einer kurzen Strecke nächst der Einspannstelle der Träger zu fließen beginnen. Die innere Grenze des Fließbereiches besitzt eine Winkeländerung

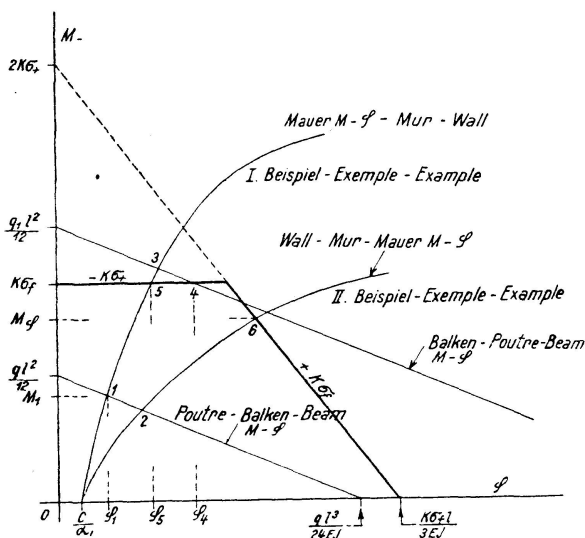


Fig. 5.

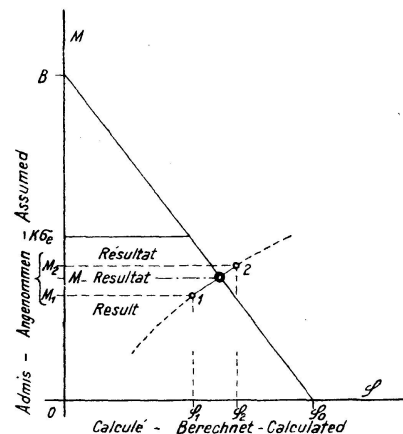


Fig. 6.

φ_4 und die äußere eine solche φ_5 und so sind die 3 Bedingungen erfüllt. Schneidet also die $M-\varphi$ Linie das Liniestück $-K\sigma_f$, so ist die Tragfähigkeit des Trägers erschöpft, falls $K = \frac{ql^2}{16\sigma_f}$ ist. Zeichnen wir nun jene

M -Werte und die dazu gehörigen φ , bei welchen die Fließgrenze in der Mitte erreicht wird, in die Abbildung ein, so bekommen wir die mit $+K\sigma_f$ bezeichnete Linie. Schneidet die $M-\varphi$ Linie der Mauer dieses Linienstück, so wird zuerst in der Mitte die Fließgrenze erreicht und ist eine weitere Belastung wegen der großen bleibenden Durchbiegung nicht ratsam. Die Bestimmung

dieser Grenzbelastung geschieht aus $M_k = \frac{q l^2}{x}$, wobei $x = 8 \frac{K_{\sigma_f} + M_k}{K_{\sigma_f}}$. Die Ordinate des Schnittpunktes gibt das gleichzeitige negative Moment an.

Die vorerwähnten Betrachtungen beziehen sich auf die Grenzen des Tragvermögens; wollen wir jedoch die zulässige Belastung berechnen, so müssen wir den Sicherheitsfaktor in die Formeln einsetzen. Nehmen wir an, eine zweifache Sicherheit im Beton und Mauerwerk und eine 1.7fache gegen unzulässige Durchbiegung des Stahlträgers. Der beschränkte Umfang dieses Schreibens gestattet die vollständige Ableitung der Formel nicht, sodaß ich nur die Endresultate mitteile.

I. Gleiche Einspannung auf beiderseitigen Auflagern.

Es bedeutet l = Lichtweite, m = Trägerhöhe, K = Tragmodul, t = Entfernung der Träger voneinander, h = Länge der Einspannung (in dem Eisenbetonmaurrost), G = Belastung des Mauerpfeilers durch das Eigengewicht und ständige Lasten, b = Mauerdicke, s = Länge des Mauerpfeilers, z = Entfernung der Fenstermitte, x_0 = Entfernung des Momentnullpunktes im Pfeiler \cong halbe Stockwerkhöhe, E_m = Formänderungsmodul des Mauerwerkes (Gesamtzusammendrückung), Mauerwerk in Weißkalkmörtel = 7.500–10.000 kg/cm², in verlängertem Weißkalkmörtel = 13–15.000 kg/cm², in Zementmörtel = 30.000–35.000 kg/cm², σ_m = Bruchfestigkeit des Mauerwerkes, Mörtel wie vor, 30; 45; 70 kg/cm², q = Belastung kg/cm eines Balkens, σ_{ez} = die zul. Spannung des Eisens. Längen überall in cm, die Kraft in kg. Das Zeichen ' bezieht sich auf den oberen und " auf den unteren Mauerquerschnitt. (Siehe noch Abb. 4.)

A. Näherungsrechnung: die $M-\varphi$ Linie der Mauer wird durch zwei Gerade ersetzt.

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \alpha_1 = 0,6 t \left(\frac{E'_m b'^3 s'}{6 x'_0 z'} + \frac{E''_m b''^3 s''}{6 x''_0 z''} \right) & 5) \quad M_f = \left(\frac{G' b''}{z'} - \frac{2 G'^2}{3 s' z' \sigma'_m} - \frac{2 G''^2}{3 s'' z'' \sigma''_m} \right) \frac{t}{2} \\
 2) \quad \alpha_2 = 700\,000 h^{1,3} & 6) \quad M_t = 825 h^{1,6} \\
 3) \quad \alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} & 7) \quad B = 2 K \sigma_{ez} \\
 4) \quad C = \frac{t}{2} \left[\frac{G'}{z'} \left(b'' - \frac{b'}{2} \right) - \frac{G'' b''}{z'' 2} \right] & 8) \quad \beta = 3 E_e \frac{K m}{l} \\
 9) \quad M_\varphi = \left(\frac{B}{\beta} + \frac{C}{\alpha_1} \right) : \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)
 \end{array}$$

Das Einspannungsmoment ergibt sich als positive Zahl. C hat gewöhnlich ein entgegengesetztes Vorzeichen.

Der kleinste Wert von M_f , M_t , M_φ soll mit M_k bezeichnet werden. Wenn $M_k \geq K \sigma_{ez}$ ist, dann kann der Träger nach der Formel $ql^2/16$ berechnet werden. Ist dagegen $M_k < K \sigma_{ez}$, dann ist, um die übermäßige Durchbiegung zu vermeiden, der Träger nach der Formel ql^2/x zu bemessen, wobei

$$x = 8 \frac{K \sigma_{ez} + M_k}{K \sigma_{ez}}.$$

B. Genauere Berechnung. Wir verwenden statt der Geraden die empirische Hyperbel. Durch Berechnung bestimmen wir einige Punkte der Hyperbel, welche in einer Zeichnung aufgetragen und miteinander verbunden werden. Der Schnittpunkt mit der $M-\varphi$ Linie des Balkens ergibt das gesuchte Einspannungsmoment (Abb. 6). Die Punkte der Hyperbel sind nach folgenden Gleichungen zu bestimmen, wobei die M -Werte nach Einheiten von rund 100.000 kg.cm angenommen werden.

$$\varphi_1 = \frac{M - C}{1,65 \alpha_1} + \frac{M_f - C}{270\,000\,000} \cdot \frac{M - C}{1,1 (M_f - C) - (M - C)}$$

$$\varphi_2 = \frac{M}{115\,000\,000} + 0,000\,575 \frac{M}{M_t/2 - M} \quad M_t = 900 h^{1,6} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

In der Zeichnung ist $B = 2 \sigma_{ez} K$ und $\varphi_0 = 2250 \text{ m/l}$. Ist der Stahl „I“-Träger mit Beton ummantelt, so ist $\varphi_0 = 2670 \text{ m/l}$.

II. Die Einspannung auf beiden Seiten des Trägers ist verschieden nachgiebig.

Die oberwähnte Berechnungsweise ist in diesem Falle ungültig. Unter der Annahme von 2 Geraden, statt den Hyperbeln und wenn mit „ l “ die Entfernung der Mitten beider Mauern bezeichnet wird, unter der Voraussetzung, daß die obere und untere Mauer gleich stark sind oder deren Mitten zusammenfallen, so kann der Träger als mittleres Feld eines durchlaufenden Balkens mit 3 Öffnungen aufgefaßt werden. Die beiden Nachbaröffnungen sind unbelastet und haben eine Spannweite von $l = \frac{3EI}{\alpha}$, der Wert α ist auf beiden Auflagern verschieden und wie in Formel 3.

Die Momente werden nach den CLAPEYRONschen Gleichungen oder graphisch ermittelt. Ergibt sich M_- größer als M_t oder M_f , so ist der kleinere der beiden Werte anzunehmen.

Für den Fall, daß die Deckenträger in einem Teil des Mauerrostes eingespannt werden, über oder unter welchem sich kein Mauerkörper (d. h. also eine Öffnung) befindet, so muß man noch die Formänderung des Mauerrostes berücksichtigen. Die Versuche haben bewiesen, daß derartige Deckenaufleger sehr kleine Festigkeit besitzen und es ist beim Projektieren die Anordnung solcher Deckenträger über oder unter Öffnungen zu vermeiden, oder dann kann nur mit einem ganz geringen Grad von Einspannung gerechnet werden. Die neuen ungarischen Eisenbetonbestimmungen geben diesbezüglich gewisse bewährte Faustregeln an.

Werden Steineisen- oder Rippendecken verwendet, die als eine einheitliche Platte betrachtet werden können, so schreiben die neuen ungarischen Eisenbetonbestimmungen vor, daß solche Decken in der Mitte der Spannweite auf die Breite zwischen 2 Fenstermitten als gleichmäßig verteilt mit M_+ berechnet werden können, jedoch die dazu gehörigen negativen Momente auf die Länge des Mauerpfeilers konzentriert zwischen den Öffnungen aufgenommen werden müssen.

Zusammenfassung.

Nach der Plastizitätslehre darf ein eingespannter I Stahl-Deckenträger mit $M = q l^2/16$ berechnet werden, wie das der Verfasser und andere Autoren bereits bewiesen haben. Es wird hier gezeigt, daß auch unvollkommen eingespannte Träger so bemessen werden dürfen. Ist aber die Einspannung so nachgiebig, daß die positiven Momente größer werden als die negativen, so werden, nach Erreichen der Fließgrenze in der Trägermitte, die Durchbiegungen so groß, daß es praktisch unzulässig ist, die Träger so zu bemessen. Man ist also gezwungen, die Winkeländerung des Einspannquerschnittes zu berücksichtigen.

Der Verfasser gibt die durch Versuche bestimmten Elastizitätsmodule der verschiedenen Mauerwerksarten und eine Formel an, mit welcher man die Formänderung der Mauerwerkspfeiler mit Ausschaltung der Zugspannungen bestimmen kann. Zur Lösung sind aber außerdem die lokalen Deformationen des Trägers an der Einspannstelle zu berücksichtigen. Der Verfasser hat diese durch Versuche bestimmt und mit Hilfe der empirischen Formeln (Hyperbeln) ausgedrückt.

Es werden gebrauchsfertige Formeln zur Bestimmung des Grades der Einspannung bei Stahl **I** Deckenträger in Mauerwerkspfeiler mittels Eisenbetonmauerrost angegeben. Die Ungarischen Eisenbetonbestimmungen beschäftigen sich sehr eingehend mit dieser Frage und geben gewisse Faustregeln an.

Résumé.

Suivant la théorie de l'élasticité, une poutrelle de plancher en acier en **I** encastrée peut être calculée en partant de $M = ql^2/16$ ainsi que l'auteur lui-même, et d'autres, l'ont déjà montré. L'auteur montre ici que les poutrelles imparfaitement encastrées elles-mêmes peuvent être également calculées de cette manière. Si toutefois l'encastrement est assez faible pour que les moments positifs soient supérieurs aux moments négatifs, les fléchissements au milieu de la poutrelle, après atteinte de la limite d'écoulement, deviennent si importants qu'un tel mode de calcul devient lui-même pratiquement inadmissible. On est alors obligé de tenir compte des déformations angulaires de la section d'encastrement.

L'auteur indique les modules d'élasticité déterminés au cours d'essais pour les différentes catégories de maçonneries et donne une formule permettant de déterminer la déformation de la pile en maçonnerie en excluant les contraintes de traction. La résolution demande en outre l'introduction des déformations locales de la poutrelle à l'endroit de l'encastrement. L'auteur a pu les déterminer expérimentalement et les exprimer à l'aide de formules empiriques (hyperboliques).

L'auteur indique enfin des formules d'application pratique pour la détermination du degré d'encastrement des poutrelles en acier en **I** dans les piles de maçonnerie (méthode de la grille — béton armé). Les Prescriptions hongroises concernant le béton armé ont fait une large place à cette question et donnent des règles pratiques.

Summary.

According to the plasticity theory, a rigidly fixed steel ceiling **I**-beam may be calculated with $M = ql^2/16$, as the author and others have already shown. It is shown here that also incompletely fixed beams may be so calculated. If, however, the fixing is so yielding that the positive moments become greater than the negative moments, the bendings in the middle of the beam, after the yield point has been reached, will become so great that it is practically impermissible to calculate the beams in this way. It is consequently necessary to consider the change in angle of the fixed cross-section.

The author gives the moduli of elasticity, determined by tests, of various kinds of masonry and also a formula with which the change in shape of the masonry piers, with elimination of the tensile stresses, may be determined. For the solution, however, the local deformations of the beam at the fixing positions must also be taken into consideration. The author has determined these by experiments and expresses them with the help of empirical formulae (hyperbolas).

Serviceable formulae are given for determining the degree of the rigid fixing for steel ceiling **I**-beams in masonry piers by means of reinforced concrete grillage. The Hungarian regulations for reinforced concrete pay very close attention to this question and give certain empirical rules.