

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 2 (1933-1934)

Artikel: Die Berechnung pyramidenartiger Scheibenwerke und ihre Anwendung auf Kaminkühler

Autor: Gruber, Ernst

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-3402>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DIE BERECHNUNG PYRAMIDENARTIGER SCHEIBENWERKE UND IHRE ANWENDUNG AUF KAMINKÜHLER.

LE CALCUL DES PAROIS EN FORME DE PYRAMIDE ET LEUR UTILISATION DANS LES TOURS DE RÉFRIGÉRATION.

THE DESIGN OF PYRAMID-SHAPED DISK WALLS AND THEIR APPLICATION ON COOLING TOWERS.

Dr. Ing. ERNST GRUBER, Wien.

A. Einleitung.

Die Scheibenwerke zerfallen in zwei Hauptgruppen: 1. in solche, die aus rechteckigen Einzelscheiben bestehen und prismatische Scheibenwerke genannt werden, und 2. in solche, deren Einzelflächen Trapeze oder Dreiecke sind und die wir pyramidenartige Scheibenwerke nennen wollen. Einige einfache Beispiele für deren bautechnische Anwendung sind in Abb. 1 und 2 dargestellt.

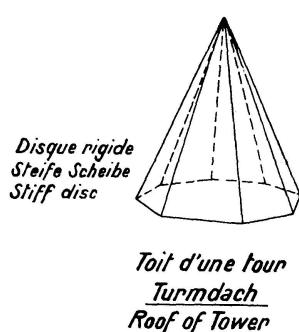


Fig. 1.

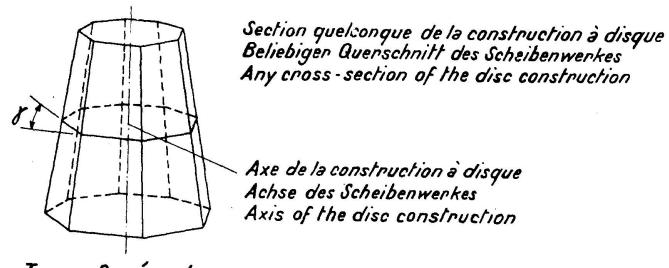


Fig. 2.

Während in den letzten Jahren schon einige Aufsätze über die Berechnung prismatischer Scheibenwerke erschienen sind, unter diesen auch ein Aufsatz des Verfassers im 1. Band 1932 dieser Abhandlungen, sind hingegen bis heute meines Wissens noch keine Versuche einer theoretischen Lösung von pyramidenartigen Scheibenwerken angestellt worden. Der folgende Aufsatz beschäftigt sich infolgedessen mit dieser letzteren Aufgabe.

Die oben genannte vorigjährige Abhandlung des Verfassers über prismatische Scheibenwerke hat sich sowohl mit dem gelenkartigen als auch mit dem im Eisenbetonbau ausschließlich üblichen steifknotigen Scheibenwerk beschäftigt und für beide Systeme allgemeine Lösungen gebracht. Das steifknotige System ist bekanntlich dadurch ausgezeichnet, daß seine Einzelflächen in den Schnittkanten nicht gelenkartig, sondern biegungssteif verbunden sind. Hierbei hat es sich gezeigt, daß einerseits die strenge Lösung eines steifknotigen Scheibenwerkes eine erhebliche Mehrrechenarbeit erfordert und

daß hingegen andererseits die Ergebnisse beider Systeme, wie an einem Beispiel dargelegt, oft erheblich voneinander abweichen.

Infolgedessen hat sich der Verfasser vor Beginn dieser Arbeit die grundlegende Frage vorgelegt, in welchen Fällen man auch bei steifknotigen Scheibenwerken zum Zwecke der Rechnungsvereinfachung ohne unzulässigen Fehler von der steifen Verbindung der Einzelflächen absehen darf, somit näherungswise auch steifknotige Scheibenwerke als Gelenkscheibenwerke berechnen darf. Hierbei ergab sich der einleuchtende Grundsatz, daß dies umso eher gestattet ist, je kleiner die zum Gelenkscheibenwerk gehörigen Formänderungen sind. In näherer Untersuchung ergab sich:

1. Die Formänderungen von Gelenkscheibenwerken werden umso kleiner, je größer die Neigungswinkel γ der aufeinander folgenden Einzelflächen sind (Abb. 2). Bei Winkeln über 40° wird der Fehler infolge Vernachlässigung der Steifknotigkeit in der Regel unbedeutend.

2. In sich geschlossene Scheibenwerke, siehe Abb. 2, sind in dieser Hinsicht günstiger als offene.

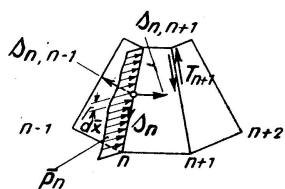


Fig. 3.

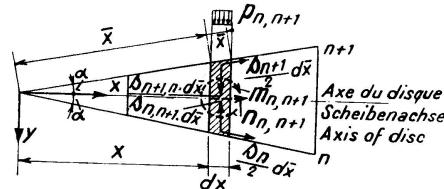


Fig. 4.

3. Die Verformung der Querschnitte eines Scheibenwerkes, d. s. die Schnitte senkrecht zur Achse des Scheibenwerkes, siehe Abb. 2, wird ganz erheblich vermindert, wenn man in größeren Abständen, besonders in den Querschnitten größter Formänderungen, biegungssteife Querscheiben, Querschotten oder Ringe einbaut. Als Beispiel hiezu diene der in Abb. 10 dargestellte Kaminkühler mit oberem Versteifungsring, der durch den dort notwendigen Revisionssteg gebildet wird. Somit kann auch bei ausreichender Anordnung obiger konstruktiver Maßnahmen das steifknotige System ohne nennenswerten Fehler durch ein Gelenkwerk ersetzt werden.

4. Die Zusatzspannungen infolge Steifknotigkeit sind bei pyramidenartigen Scheibenwerken geringer als bei prismatischen.

Aus diesen Richtsätzen ergibt sich, daß man eine große Anzahl von pyramidenartigen Scheibentragwerken statisch ausreichend genau als Gelenkwerke betrachten und dementsprechend berechnen kann. Infolgedessen beschäftigt sich der folgende Abschnitt B mit der allgemeinen Lösung des pyramidenartigen Gelenkscheibenwerkes ohne Versteifungsquerscheiben, Abschnitt C hingegen zeigt an Hand eines Anwendungsbeispiels den allgemeinen Lösungsvorgang, wenn Versteifungsquerscheiben vorhanden sind. Beide Abschnitte beschränken sich hiebei auf regelmäßige Scheibenwerksformen.

B. Gelenkscheibenwerk.

Im Folgenden wird die Auflösung eines allgemeinen pyramidenartigen Gelenkscheibenwerkes unter allgemeiner stetiger Belastung seiner Einzelscheiben durchgeführt. Zuerst werden die Flächenlasten pro Scheibe in bekannter Art durch gleichwertige Lasten längs der die Scheiben beiderseits begrenzenden Kanten ersetzt, so daß sich längs jeder Kante eine stetig ver-

teilte, aber sonst beliebige Linienlast $\bar{p}_n(\bar{x})$ ergibt, wie eine solche für die Kante n in Abb. 3 dargestellt ist. Diese beliebig gerichteten Lasten $\bar{p}_n(\bar{x})$ ersetzen wir gleichwertig durch folgende komponentale Lasten pro 1fdm Kante (\bar{x}) , Abb. 3:

$s_{n,n+1}$ in der Scheibe $n, n+1$ parallel zur Grundkante $n, n+1$ wirkend } 1)
 $s_{n,n-1}$ in der Scheibe $n-1, n$ parallel zur Grundkante $n-1, n$ wirkend } 1)
und s_n in der Kante n wirkend.

Ebenso geht man für jede andere Kante vor.

Die aus obiger Zerlegung in jede Scheibe fallenden Lasten s werden nun am zweckmä \ddot{a} igsten wie folgt zusammengefaßt, wobei die in den Kanten

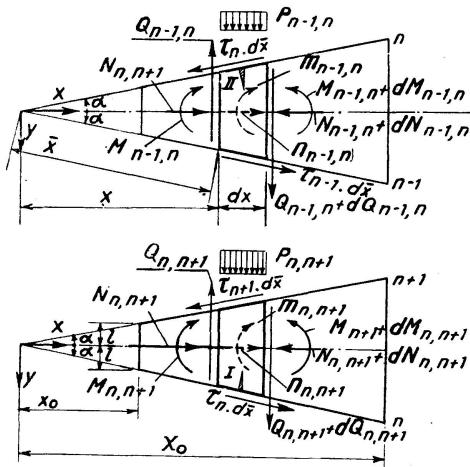


Fig. 5.

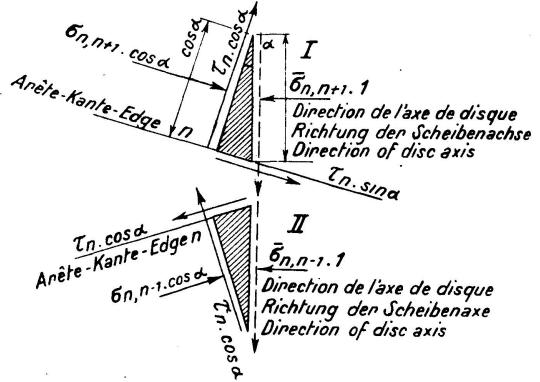


Fig. 6.

wirkenden Lasten s_n je zur Hälfte auf die beiden benachbarten Scheiben aufgeteilt werden, Abb. 4:

$$1. \text{ in eine Transversallast: } p_{n,n+1} = (s_{n+1,n} - s_{n,n+1}) \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\tan \alpha}{2} (s_n - s_{n+1}) \quad 2)$$

$$2. \text{ in eine Achsiallast: } n_{n,n+1} = \frac{1}{2}(s_n + s_{n+1}) \quad 3)$$

$$3. \text{ in eine Momentenlast: } m_{n,n+1} = \frac{x}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot (s_{n+1} - s_n) \quad 4)$$

wobei alle diese Lasten auf die Längeneinheit der Scheibenachse x bezogen sind.

Da die Scheiben miteinander nur gelenkig verbunden sind, können von einer Scheibe zur anderen nur Schubkräfte T_n übertragen werden (siehe Abb. 3). Es wirken daher auf eine aus dem Verbande losgelöste Scheibe $n, n+1$ nur die Lasten $p_{n, n+1}, n_{n, n+1}, m_{n, n+1}$ und die Schnittkräfte T_n und T_{n+1} ein. Da alle diese Kraftwirkungen in einer Ebene liegen, ergibt sich, daß das ganze Scheibenwerk in ebene Träger zerfällt.

Wir schneiden nun aus zwei benachbarten Scheiben $n, n+1$ und $n-1, n$ zwei Elemente heraus und bringen an diesen die freiwerdenden Querschnittskräfte M , N und Q , die pro Längeneinheit der Kante bezogene Schubspannung τ_n und die Belastungen p , n und m an. In Abb. 5 sind beide Elemente, in eine Ebene geklappt, zur Darstellung gebracht. Nach Obigem wird jedes der beiden Elemente von einem ebenen Kraftsystem ergriffen. Es ergeben sich daher für das Element $n, n+1$ folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$Q'_{n,n+1} = -(\tau_n + \tau_{n+1}) \operatorname{tg} \alpha - p_{n,n+1} \quad 5)$$

$$N'_{n,n+1} = (\tau_n - \tau_{n+1}) + n_{n,n+1} \quad 6)$$

$$M'_{n,n+1} = Q_{n,n+1} - x(\tau_{n+1} + \tau_n) \operatorname{tg} \alpha + m_{n,n+1} \quad 7)$$

Dieses Gleichungssystem können wir durch Elimination der Größe $Q_{n,n+1}$ vereinfachen. Hierzu differentieren wir Gl. 7 und setzen in diese so erhaltene Gleichung Gl. 5 ein. Es ergibt sich also

$$M''_{n,n+1} = -\frac{d}{dx} [x(\tau_n + \tau_{n+1}) \operatorname{tg} \alpha] - \operatorname{tg} \alpha (\tau_n + \tau_{n+1}) - p_{n,n+1} + m'_{n,n+1} \quad 8)$$

Man sieht nun, daß durch die Differentialgleichungen 6) und 8) die inneren Kräfte M und N und somit die Randspannungen der einzelnen Scheiben als Funktionen der τ_n und der Belastungen bestimmbar sind. Unsere nächste Aufgabe ist es daher, die τ_n zu ermitteln. Da die einzelnen Scheiben längs der Kanten n unverschieblich verbunden sind, müssen die Randspannungen zweier benachbarter Scheiben $n, n+1$ und $n-1, n$ längs der Kante n punktweise übereinstimmen. Es gilt daher für jede Kante die Kontinuitätsbedingung

$$\sigma_{n,n-1} = \sigma_{n,n+1} \quad 9)$$

wenn die σ die zur Kante n parallel gerichteten Normalspannungen bedeuten. Solche Gleichungen gibt es nun ebensoviel als Kanten, somit als unbekannte Funktionen $\tau_n(x)$ vorhanden sind. Daraus folgt, daß wir aus den Gl. 9 die τ_n bestimmen können.

Hierzu schneiden wir aus den Rändern zweier benachbarter Scheiben je ein dreieckiges Volumselement I und II heraus und bringen an diesen die freiwerdenden Spannungen σ , τ und $\bar{\sigma}$ als äußere Kräfte an, Abb. 6. σ bedeutet, wie aus Abb. 6 ersichtlich ist, die zur x -Achse parallel wirkende Normalspannung. Eine einfache Gleichgewichtsbetrachtung an I und II ergibt

$$\sigma_{n,n+1} = \frac{\bar{\sigma}_{n,n+1}}{\cos^2 \alpha} - \frac{2 \tau_n}{d} \operatorname{tg} \alpha \quad 10)$$

$$\sigma_{n,n-1} = \frac{\bar{\sigma}_{n,n-1}}{\cos^2 \alpha} + \frac{2 \tau_n}{d} \operatorname{tg} \alpha \quad 11)$$

Durch Subtraktion von Gl. 10 und 11 erhalten wir die Kontinuitätsbedingung 9 in der neuen Form

$$\bar{\sigma}_{n,n+1} - \bar{\sigma}_{n,n-1} - \frac{4 \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{d} \tau_n = 0 \quad 12)$$

Ist nun der Winkel α nicht zu groß, so ergibt sich nach MOHR

$$\bar{\sigma}_{n,n-1} = \frac{3 M_{n-1,n}}{2 x^2 d \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{N_{n-1,n}}{2 x d \operatorname{tg} \alpha} \quad 13)$$

Wir müssen nun aus Gl. 6, 7, 8, 12, 13 alle Größen bis auf die τ_n eliminieren. Hierzu setzen wir zunächst Gl. 13 in Gl. 12 ein, multiplizieren mit $2 x^2 \cdot d \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$ und differentieren nachher einmal nach x . Es ergibt sich auf diese Weise

$$3(M'_{n-1,n} + M'_{n,n+1}) \operatorname{tg} \alpha + x(N'_{n-1,n} - N'_{n,n+1}) \operatorname{tg} \alpha + \\ + (N_{n-1,n} - N_{n,n+1}) \operatorname{tg} \alpha + 8 \operatorname{tg} \alpha \cdot a \cdot \frac{d}{dx} (x^2 \tau_n) = 0 \quad 14)$$

wobei $a = \sin^2 \alpha$ bedeutet. Differentieren wir Gl. 14 noch einmal nach x und setzen wir in die so erhaltene Gleichung die Gl. 6 und 8 ein, so erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha \cdot x \frac{d}{dx} (\tau_{n-1} + 4 \tau_n + \tau_{n+1}) + 2 \text{tg } \alpha (\tau_{n-1} + 4 \tau_n + \tau_{n+1}) &= 4a \text{tg } \alpha \frac{d^2}{dx^2} (x^2 \tau_n) + \\ + \left\{ -\frac{3}{2} p_{n-1, n} - \frac{3}{2} p_{n, n+1} + \frac{3}{2} m'_{n-1, n} + \frac{3}{2} m'_{n, n+1} + \frac{d}{dx} [x \cdot \text{tg } \alpha (n_{n, n+1} - n_{n-1, n})] + (n_{n, n+1} - n_{n-1, n}) \text{tg } \alpha \right\} \end{aligned} \quad 15$$

in denen nur mehr die unbekannten Funktionen $\tau_n(x)$ vorhanden sind.

Unsere weitere Aufgabe besteht nun in der Integration des Systems 15. Es liegen simultane, lineare, nicht homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten vor. Durch Einführung der neuen Funktion $y_n = \tau_{n-1} + 4 \tau_n + \tau_{n+1}$ ergibt sich zunächst die Differentialgleichung

$$\text{tg } \alpha \cdot x y'_n + 2 \text{tg } \alpha \cdot y_n = 4a \text{tg } \alpha \frac{d^2}{dx^2} (x^2 \tau_n) + N_n \quad 16$$

Nehmen wir das erste Glied der rechten Seite obiger Gleichung zur Störungsfunktion hinzu, so lautet das Integral von Gl. 16

$$\tau_{n-1} + 4 \tau_n + \tau_{n+1} = \frac{C_n}{x^2} + \frac{1}{x^2 \text{tg } \alpha} \int x N_n dx + \frac{4a}{x^2} \int x \frac{d^2}{dx^2} (x^2 \tau_n) dx \quad 17$$

wobei C_n willkürliche Konstanten bedeuten.

Formen wir den zweiten Integralausdruck von Gl. 17 durch partielle Integration in

$$4ax \cdot \tau'_n + 4a \tau_n \quad 18) \text{ 1)}$$

um, so erhalten wir weiters

$$\tau_{n-1} + 4(1-a) \tau_n + \tau_{n+1} = 4ax \tau'_n + \frac{1}{x^2 \text{tg } \alpha} \int x N_n dx + \frac{C_n}{x^2} \quad 19)$$

Es ist hiemit die Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine solche erster Ordnung zurückgeführt. Diese können wir nun folgendermaßen auf eine lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten zurückführen. Multiplizieren wir jede der Gl. 19 der Reihe nach mit $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ und addieren wir alle so erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{n=m} [\lambda_{n-1} + 4(1-a) \lambda_n + \lambda_{n+1}] \tau_n = 4ax \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_n \tau'_n + \frac{1}{x^2 \text{tg } \alpha} \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_n \int x N_n dx + \frac{C_n}{x^2} \quad 20)$$

Es kann nun immer ein Multiplikator μ so gewählt werden, daß die Identität

$$\sum_{n=1}^{n=m} [\lambda_{n-1} + 4(1-a) \lambda_n + \lambda_{n+1}] \tau_n \equiv \mu \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_n \tau_n \quad 21)$$

erfüllt ist. Bedenkt man, daß $\tau_n \neq 0$ ²⁾, so ergibt sich, daß Gl. 21 nur bestehen kann, wenn

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1} + [4(1-a) - \mu] \lambda_n + \lambda_{n+1} &= 0 \\ n = 1, 2, 3 \dots m \end{aligned} \quad 22)$$

womit wir eine Differenzengleichung zur Bestimmung der Multiplikatoren λ und μ gefunden haben.

$$1) \frac{4a}{x^2} \int x \frac{d^2}{dx^2} \frac{(x^2 \tau_n)}{z} dx = \frac{4a}{x^2} \int x dz' = \frac{4a}{x^2} (xz' - z) = \frac{4a}{x^2} (x^3 \tau'_n + x^2 \tau_n)$$

²⁾ Diese triviale Lösung würde ein unbelastetes Tragwerk bedeuten.

Diese m Gleichungen enthalten $m + 2$ Unbekannten. Die beiden fehlenden λ gewinnen wir durch die jeweiligen Randbedingungen, die aus der Art des Tragwerkes und dessen Belastung erwachsen und die bei der Aufstellung des Gleichungssystems 15 für die τ_n zu berücksichtigen sind. So sind z. B. bei antisymmetrischer Belastung die zur Antisymmetrieebene symmetrisch liegenden τ_n einander gleich. Bei symmetrischer Belastung ergeben sich entweder die zur Symmetrieebene symmetrisch liegenden τ_n einander entgegengesetzt gleich bzw. es sind die in der Symmetrieebene liegenden τ_n identisch gleich Null. In letzterem Falle lauten also bei entsprechender Indexbezeichnung (Index 0 fällt in die Symmetrieebene) die Randbedingungen

$$\tau_0 = \tau_{m+1} = 0, \quad 22')$$

Die Berücksichtigung dieser Sonderwerte bei der Summierung Gl. 20 ergibt die uns noch fehlenden beiden Beziehungen

$$\lambda_0 = \lambda_{m+1} = 0. \quad 22'')$$

Die Lösung der allgemeinen Differenzengleichung 22 lautet:

$$\lambda_n = c \sin rn + c_2 \cos rn \quad 23)$$

wobei c_1 und c_2 willkürliche Konstanten bedeuten. Setzt man Gl. 23 in Gl. 22 ein, so erkennt man, daß r der Bedingung

$$2 \cos r + 4(1 - a) = \mu \quad 24)$$

genügen muß. Wegen $\lambda_0 = 0$ folgt $c_2 = 0$, während wegen $\lambda_{m+1} = 0$

$$\sin rn = 0 \quad 25)$$

oder

$$r_\varrho = \frac{\pi}{m+1} \cdot r; \quad r = 1, 2, \dots, m \quad 26)$$

wird.

Wir erhalten somit m verschiedene Werte μ_ϱ ($\varrho = 1, 2, 3, \dots, m$) für μ und ebenso m verschiedene Lösungssysteme

$$\lambda_{n\varrho} = c \sin r_\varrho n \quad 27)$$

Bestimmen wir die Konstante c von Gl. 27 so, daß

$$c \sum_{n=1}^{n=m} \sin^2 r_\varrho n = 1$$

wird, so ergibt sich die Lösung von Gl. 27 in normierter Form, nämlich

$$\lambda_{n\varrho} = \sqrt{\frac{2}{1+m}} \sin r_\varrho n \quad 28)$$

Nachdem wir nun die Bestimmung der Multiplikatoren μ und λ durchgeführt haben, können wir die Integration von Gl. 20 auch tatsächlich durchführen. Da wir im ganzen m Werte für μ_ϱ und m Wertesysteme für $\lambda_{n\varrho}$ gefunden haben, können wir Gl. 20 für jede Wertegruppe $\lambda_{n\varrho}$ einmal anschreiben und erhalten m Bestimmungsgleichungen für die τ_n . Setzen wir Gl. 21 in Gl. 20 ein und schreiben für

$$\sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho} \cdot \tau_n = z_\varrho; \quad \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho} \tau_n' = z_\varrho' \quad 29)$$

so ergibt sich die lineare Differentialgleichung

$$\mu_\varrho \cdot z_\varrho = 4 \alpha x z_\varrho' + \frac{1}{x^2 \operatorname{tg} \alpha} \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho} \int x N_n dx + \frac{c_n}{x^2} \quad 30)$$

$$\varrho = 1, 2, 3, \dots, m$$

deren Integral lautet

$$z_\varrho = \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho} \tau_n = C_\varrho^{(1)} \frac{1}{x^2} + C_\varrho^{(2)} x^{\frac{\mu}{4a}} - \frac{x^{\frac{\mu\varrho}{4a}}}{4a \operatorname{tg} \alpha} \int \frac{\sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho} \int x N_n dx}{x^{\frac{\mu\varrho}{4a} + 3}} dx \quad (31)$$

$$\varrho = 1, 2, 3, \dots, m$$

Beachtet man, daß Gl. 31 2 m willkürliche Konstanten enthält, so erkennt man, daß wir in Gl. 31 das allgemeine Integral von Gl. 15 gefunden haben, allerdings noch in impliziter Form. Während nun Gl. 31 für die Bestimmung der Integrationskonstanten $C_\varrho^{(1)}$ und $C_\varrho^{(2)}$ gut geeignet ist, ist sie für die Bestimmung der Unbekannten τ_n nicht bequem, da man hiezu m lineare Gleichungen auflösen muß, bei denen in jeder Gleichung alle m Unbekannten vorkommen. Wir werden daher Gl. 31 explizit darstellen. Betrachtet man die Differenzengleichung

$$b_{n-1} + 4(1-a)b_n + b_{n+1} = \tau_n \quad (32)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, m$$

so lautet die Lösung derselben

$$b = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \frac{\lambda_{n\varrho}}{\mu_\varrho} \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho} \tau_n = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \frac{\lambda_{n\varrho}}{\mu_\varrho} \cdot z_\varrho \quad (33)$$

da ja μ_ϱ die Eigenwerte und $\lambda_{n\varrho}$ die Eigenlösungen von Gl. 32 sind, siehe Gl. 22. Setzt man nun Gl. 33 in Gl. 32 ein und nimmt für $\lambda_{n\varrho}$ den Wert Gl. 28, so ergibt sich unter Bedachtnahme auf Gl. 24 nach einigen Reduktionen

$$\tau_n = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \lambda_{n\varrho} \cdot z_\varrho \quad (31')$$

womit das allgemeine Integral in expliziter Form gefunden ist.

Die bisherigen Beziehungen gelten natürlich für jedes reguläre pyramidenartige Scheibenwerk. Die Integrationskonstanten der Gl. 31 können jedoch nicht mehr allgemein angegeben werden. Man muß hiezu vielmehr auf die Bauart und Belastung des jeweils vorliegenden Tragwerkes eingehen. Wir wollen dies für einen Kaminkühler für Windangriff vorführen. Dabei nehmen wir an, daß nur eine Scheibe belastet ist. (Siehe Abb. 10.) Durch Übereinanderlagerung mehrerer solcher Belastungen kann man die Spannungen für den Fall, daß das gesamte Tragwerk unter Winddruck steht, bestimmen. Nehmen wir den Wind horizontal wirkend an und vernachlässigen die kleinen Belastungsglieder n und m (siehe Gl. 3, 4), so ergibt sich die Belastungsfunktion

$$N_n = A_n x; \quad A_0 = A_1 = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \gamma} w; \quad A_2 = A_3 = \dots = 0. \quad (34)$$

Da es sich um m simultane Differentialgleichungen zweiter Ordnung handelt, benötigen wir $2m$ Randbedingungen. Zunächst sehen wir, daß der obere Rand kraftfrei ist. Es ist daher

$$\dot{\tau}_n = 0 \quad (4)$$

³⁾ Handelt es sich für die τ_n um andere Randbedingungen als Gl. 22, so sind hiefür die dazu gehörigen $\lambda_{n\varrho}$ und μ_ϱ zu ermitteln und in Gl. 31 einzusetzen.

⁴⁾ Von nun an bedeuten die oben genannten Funktionen den Funktionswert derselben an der Stelle $x = x_0$ (Abb. 5).

womit wir m Bedingungen gefunden haben. Außerdem ist $Q = 0$, weshalb aus Gl. 6 und 7 $\dot{M}' = \dot{N}' = 0$ folgt. Setzt man diese Ergebnisse in Gl. 14 ein, so folgt mit $\dot{N} = 0$

$$16 \operatorname{tg} \alpha \cdot a x_0 \dot{\tau}_n' = 0; \quad \dot{\tau}_n' = 0 \quad (36)$$

womit wir die restlichen Bedingungen erhalten haben.

Bestimmt man nun mit Hilfe der Gl. 31 und der obigen Randbedingungen die Konstanten $C_\varrho^{(1)}$ und $C_\varrho^{(2)}$, macht das Ergebnis mit Hilfe der Gl. 31' explizit, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \tau_n = & \frac{x_0}{3 \operatorname{tg} \alpha} \left[\frac{x}{x_0} - \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-2} \right] \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \frac{\lambda_{n\varrho}}{\mu_\varrho - 4a} \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho} A_n + \\ & + 4l \cos^2 \alpha \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \frac{\lambda_{n\varrho}}{(\mu_\varrho - 4a)(\mu_\varrho + 8a)} \left[\left(\frac{x}{x_0} \right)^{-2} - \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{\mu_\varrho}{4a}} \right] \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho} A_n \end{aligned} \quad (37)$$

In diesem Ausdruck verursacht das zweite Glied große Ziffernrechnungen. Glücklicherweise ist es in Bezug auf das erste Glied sehr klein, so daß wir es ganz unterdrücken dürfen⁵⁾. Wir können uns jedoch von dem Einfluß dieser Annäherung auf das Endergebnis überzeugen, indem wir die nähungsweise berechneten Spannungen $\bar{\sigma}$ in die exakte Gl. 12 einsetzen. Diese Substitution wird nicht auf 0 ausgehen, sondern einen Rest Δ ergeben, aus dessen Größe man auf die Genauigkeit der Rechnung schließen kann. Da die Kontrolle erst am Schluß der Rechnung durchgeführt werden muß, ist sie eine durchgreifende.

Greifen am oberen Rand in jeder Scheibe ebene horizontale Tangentialkräfte $P_{n-1, n}$ an, so ergibt eine ähnliche Ableitung wie oben

$$\tau_n = - \frac{3}{2 \operatorname{tg} \alpha} \frac{x_0}{x^2} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \frac{\lambda_{n\varrho}}{\mu_\varrho - 4a} \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho} (P_{n-1, n} + P_{n, n+1}) \quad (38)$$

ein Resultat, das wir im folgenden Abschnitt benötigen werden. Dabei sind die P mit den p gleichgerichtet anzunehmen (siehe Abb. 5 und 9).

C. Die durch biegungssteife Scheiben verstärkten pyramidenartigen Gelenkwerke.

Wir wollen diese Theorie an Hand eines Kaminkühlers, der am oberen Rand durch einen biegungssteifen Ring zusammengehalten wird, erörtern, siehe Abb. 10. Wie es naheliegend ist, wählen wir das im vorhergehenden Abschnitt behandelte gewöhnliche Gelenkwerk als Grundsystem. Hiezu führen wir im oberen Ring in den Knotenpunkten n Gelenke ein und bringen an diese die unbekannten Schnittmomente X_n als äußere Kräfte an, Abb. 9. Das von den gegebenen Belastungen und den X_n ergriffene Grundsystem können wir nun nach den Methoden des vorhergehenden Abschnittes auflösen. Hiezu ersetzen wir zunächst die X_n durch Kräfte $P_{n-1, n}$ (Abb. 9), welche in der Ringebene längs der oberen Scheibenränder wirken. Eine einfache Gleichgewichtsbetrachtung ergibt diese zu

⁵⁾ Man erhält auch dasselbe Ergebnis, indem man in Gl. 19 nähungsweise $4a x \tau_n' = 4a \tau_n$ setzt, was bei schwach gekrümmten τ -Linien richtig ist. Eine etwas langwierige Rechnung ergibt, daß das nähungsweise ermittelte Integral die Gl. 15 und die Randbedingung Gl. 35 genau erfüllt. Der zweiten Randbedingung Gl. 36 ist jedoch nur nähungsweise Genüge geleistet.

$$P_{n-1,n} = (-X_{n-2} + 3X_{n-1} - 3X_n + X_{n+1}) \frac{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{41} \quad 39)$$

Es ergibt sich nun durch Übereinanderlagerung der Resultate Gl. 37 und 38

$$\tau_n = \frac{x_0 w}{2 \sin \gamma} \left[\xi - \frac{1}{\xi^2} \right] \underbrace{\sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \frac{\lambda_{n\varrho}}{\mu_{\varrho} - 4a} \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho} a_n}_{b_n} - \frac{3}{2 \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{1}{\xi \cdot x} \underbrace{\sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \frac{\lambda_{n\varrho}}{\mu_{\varrho} - 4a} \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho} (P_{n-1,n} + P_{n,n+1})}_{\bar{P}_n} \quad 40)$$

$$a_0 = a_1 = 1; \quad a_2 = a_3 = \dots = 0; \quad \frac{x}{x_0} = \xi$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gl. 6 und 7 ein, so erhalten wir durch bestimmte Integration von x_0 bis x

$$M_{n-1,n} = \mathfrak{M}_{n-1,n} - \frac{x_0^2 w \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \gamma} x \left(\frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{\xi} - \frac{3}{2} \right) (b_{n-1} + b_n) - \frac{3x}{2} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) (\bar{P}_{n-1} + \bar{P}_n) - P_{n-1,n} x_0 (\xi - 1) \quad 41)$$

$$N_{n-1,n} = \frac{x_0^2 w}{2 \sin \gamma} \left(\frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{\xi} - \frac{3}{2} \right) (b_{n-1} - b_n) + \frac{3}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) (\bar{P}_{n-1} - \bar{P}_n) \quad 42)$$

womit wir sämtliche innere Kräfte als Funktionen der X_n und der äußeren Belastungen gefunden haben. Dabei bedeutet $\mathfrak{M}_{n-1,n}$ das Moment, das in der Scheibe $n-1, n$ allein durch die äußeren Lasten entsteht, wenn das Gelenkwerk längs der Kanten n aufgeschnitten wird.

Stellen wir nun für den Scheibenring die Dreimomentengleichungen

$$X_{n-1} + 4X_n + X_{n+1} + \frac{3JE}{l} (\ddot{\vartheta}_{n-1,n} - \ddot{\vartheta}_{n,n+1}) = 0 \quad 43)$$

auf, so erhalten wir in diesen die Bestimmungsgleichungen für die X_n .

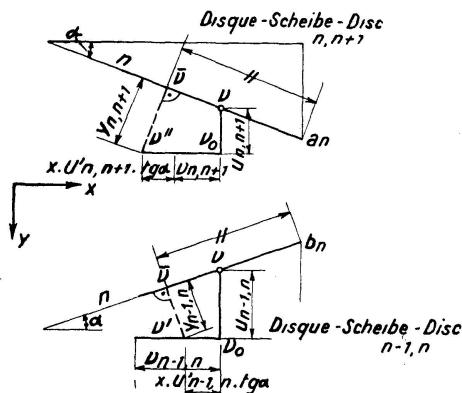


Fig. 7.

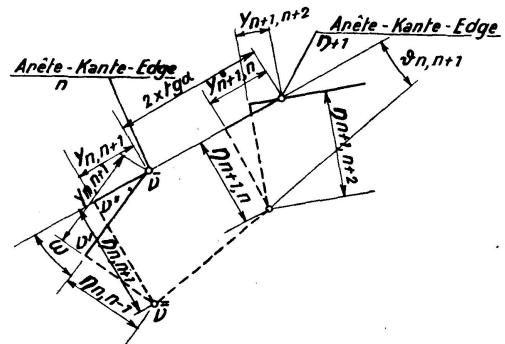


Fig. 8.

Um die in diesen Gleichungen auftretenden Sehnendrehwinkel ϑ angeben zu können, müssen wir uns zuerst mit den Verformungen der pyramidenartigen Scheibenwerke im allgemeinen befassen.

Denken wir uns das Gelenkwerk längs der Kanten n aufgeschnitten, so könnte sich jede Scheibe $n-1, n$ für sich in ihrer Ebene den inneren Kraftwirkungen $M_{n-1,n}$ und $N_{n-1,n}$ gemäß verformen. Dabei wird jeder Punkt

der Scheibenachse eine Verschiebung $v_{n-1,n}$ in Richtung der x -Achse und eine Verschiebung $u_{n-1,n}$ normal zu derselben ausführen. In Abb. 7 sind die Ränder zweier benachbarter Scheiben $n-1, n$ und $n, n+1$ in eine Ebene geklappt dargestellt. Es würde sich also der Punkt v der Kante n als Punkt der Scheibe $n, n+1$ von v nach v'' und als Punkt der Scheibe $n-1, n$ von v nach v' bewegen. Dabei bestehen die Verschiebungen vv'' und vv' aus je drei Komponenten und zwar aus der transversalen Verschiebung u , aus der Achsenverschiebung v und aus der von der Verdrehung der Scheibenquerschnitte herrührenden Verschiebung $x \operatorname{tg} \alpha \cdot u'$. Infolge dieser Bewegungen wird das aufgeschnittene Scheibenwerk längs der Kante n klaffen. Es muß also in den Kanten n der Zusammenhang zweier benachbarter Scheiben wieder punktweise hergestellt werden. Dies kann nur so geschehen, daß sich v'' normal auf die Scheibe $n, n+1$ und v' normal auf die Scheibe $n-1, n$ bewegt, denn jede andere Möglichkeit würde Verformungen in den Scheiben bedingen, welche mit den inneren Kräften M und N nicht in Einklang stünden. Da gemäß Gl. 9 $a_n \bar{v} = b_n \bar{v}$ sein muß, liegen die beiden oben erwähnten normalen Bewegungsrichtungen in einer Ebene, welche durch die Punkte v'' und

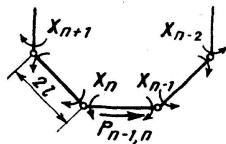


Fig. 9.

v' geht und auf die Kante n senkrecht steht. In Abb. 8 sind die für die Kanten n und $n+1$ bestehenden obigen Normalebenen in eine Ebene geklappt zur Darstellung gebracht. Aus dieser Abbildung ergibt sich der Öffnungswinkel zweier benachbarter Sehnen zu

$$\varphi_n = \vartheta_{n-1,n} - \vartheta_{n,n+1} = \frac{\vartheta_{n-1,n} - \vartheta_{n,n-1} - \vartheta_{n,n+1} + \vartheta_{n+1,n}}{2x \operatorname{tg} \alpha} \quad 44)$$

Lösen wir nun die Vierecke $\bar{v} v v_0 v''$ $\bar{v} v v_0 v'$ und $\bar{v} v'' \bar{v} v'$ auf und eliminieren aus allen diesen Gleichungen alle Größen bis auf die u und v , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vartheta_{n-1,n} - \vartheta_{n,n+1} &= \frac{\cos \alpha}{2x \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varepsilon} \cdot \sum_{t=0}^{t=3} (-1)^t \cdot u_{n-2+t, n-1+t} + \\ &+ \frac{\sin \alpha}{2 \sin \varepsilon} \sum_{t=0}^{t=3} (-1)^t u'_{n-2+t, n-1+t} - (u_{n-1,n} - u_{n,n+1}) \frac{\cos \alpha}{x \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon} \\ &- (u'_{n-1,n} - u'_{n,n+1}) \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - (v_{n-1,n-2} - v_{n,n-1} - v_{n,n+1} + v_{n+1,n+2}) \cdot \frac{\sin \alpha}{2x \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon} \end{aligned} \quad 45)$$

Die in diesen Gleichungen auftretenden Verschiebungen v und u ergeben sich nun weiters aus den Biegelinien, nach welchen sich die in ihrer Ebene frei beweglich gemachten Scheiben unter dem Einfluß der M und N verformen. Es ergibt sich nach MOHR unter Zuhilfenahme der Gl. 41 und 42

$$\begin{aligned} u_{n-1,n} &= -\frac{3}{2Ed \operatorname{tg}^3 \alpha} \int_x^{\kappa x_0} \frac{\psi - x}{\psi^3} \mathfrak{M}_{n-1,n} d\psi + \frac{3x_0^2 w \cdot k_4(\xi)}{4Ed \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin \gamma} (b_{n-1} + b_n) + \\ &+ \frac{9k_5(\xi)}{4Ed \operatorname{tg}^3 \alpha} (\bar{P}_{n-1} + \bar{P}_n) + \frac{3k_6(\xi)}{2Ed \operatorname{tg}^3 \alpha} P_{n-1,n} \end{aligned} \quad 46)$$

$$u_{n-1, n} = \frac{3}{2Ed \operatorname{tg}^3 \alpha} \int_x^{\kappa x_0} \frac{\mathfrak{M}_{n-1, n}}{\psi^3} d\psi - \frac{3x_0 w \cdot k_1(\xi)}{4Ed \operatorname{tg}^2 \alpha \sin \gamma} (b_{n-1} + b_n) - \frac{9k_2(\xi)}{4Ed x_0 \operatorname{tg}^3 \alpha} (\bar{P}_{n-1} + \bar{P}_n) - \frac{3k_3(\xi)}{2Ed x_0 \operatorname{tg}^3 \alpha} P_{n-1, n} \quad 47)$$

$$v_{n-1, n} = -\frac{x_0^2 w \cdot k_7(\xi)}{4Ed \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \gamma} (b_{n-1} - b_n) + \frac{3k_8(\xi)}{4Ed \operatorname{tg}^2 \alpha} (\bar{P}_{n-1} - P_n) \quad 48)$$

wobei

$$\begin{aligned} z &= \frac{X_0}{x_0}; \quad k_1(\xi) = \left(\frac{1}{2\xi^2} - \frac{\xi}{2} - \frac{3}{2\xi} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{2z^3} \right); \quad k_2(\xi) = \left(\frac{1}{2\xi^2} - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} \right) \\ k_3(\xi) &= \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2\xi^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} \right); \quad k_4(\xi) = \left[\frac{\xi^2}{4} + \xi \left(-\frac{z}{2} + \frac{1}{2z^2} - \frac{3}{2z} \right) + \frac{3}{2} l \frac{\xi}{z} + \frac{1}{2\xi} + \frac{z^2}{4} - \frac{1}{z} + \frac{3}{2} \right] \\ k_5(\xi) &= \left[\xi \left(\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{2\xi} + l \frac{\xi}{z} - \frac{1}{z} + 1 \right]; \quad k_6(\xi) = \left[\xi \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} \right) - \frac{1}{2\xi} - l \frac{\xi}{z} + \frac{1}{z} - 1 \right] \\ k_7(\xi) &= \left(-\frac{\xi^2}{4} + \frac{1}{\xi} + \frac{3}{2} l \frac{\xi}{z} + \frac{z^2}{4} - \frac{1}{z} \right); \quad k_8(\xi) = \left(-\frac{1}{\xi} + \frac{1}{z} - l \frac{\xi}{z} \right) \quad \text{bedeutet.} \quad 49) \end{aligned}$$

Setzen wir in Gl. 49 $\xi = \frac{x_0}{x} = 1$ und eliminieren aus Gl. 43, 45, 46, 47, 48 alle Größen bis auf die X_n , so gelangen wir zu den Elastizitätsgleichungen unserer Aufgabe.

Führt man diese mühsame Rechnung durch, so kann man feststellen, daß jedes Glied, welches von der Achsverlängerung v und den Verdrehungen u' herrührt, mit dem kleinen Faktor $\operatorname{tg}^2 \alpha$ behaftet auftritt. Da $\operatorname{tg} \alpha$ immer ungefähr 0,10 ist, gelangen wir zu dem wichtigen Ergebnis, daß bei pyramidenartigen Scheibenwerken der Einfluß der Achsverlängerungen und Querschnittsverdrehungen auf die Deformation der Querschnitte des gesamten Scheibenwerkes vernachlässigt werden kann. Man begeht damit nur Fehler zweiter Ordnung.

Macht man von dieser Erkenntnis Gebrauch, so ergeben sich die Elastizitätsgleichungen der X_n zu

$$\begin{aligned} X_{n-1} + 4X_n + X_{n+1} + 3A \dot{k}_4 (b_{n-2} - b_{n+2}) - 6A \dot{k}_4 \cos \varepsilon (b_{n-1} - b_{n+1}) \\ + \left[3B \dot{k}_5 (\bar{P}_{n-2} - \bar{P}_{n+2}) - 6B \dot{k}_5 \cos \varepsilon (\bar{P}_{n-1} - \bar{P}_{n+1}) \right] \frac{4l}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} + \\ + 2B \dot{k}_6 \sum_0^3 (-1)^v P_{n-2+v, n-1+v} \cdot \frac{4l}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} - 4B \dot{k}_6 \cos \varepsilon (P_{n-1, n} - P_{n, n+1}) \frac{4l}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} \end{aligned} \quad 50)$$

$$-C \int_{x_0}^{\kappa x_0} \frac{x - x_0}{x^3} \sum_0^3 (-1)^v \mathfrak{M}_{n-2+v, n-1+v} dx + 2C \cos \varepsilon \int_{x_0}^{\kappa x_0} \frac{x - x_0}{x^3} (\mathfrak{M}_{n-1, n} - \mathfrak{M}_{n, n+1}) dx = 0 \quad 50)$$

worin

$$A = \frac{3wJ \cos \alpha}{32d \operatorname{tg}^4 \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \varepsilon}; \quad B = \frac{9J \cos \alpha \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{32dl^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \cdot \sin \varepsilon}; \quad C = \frac{9J \cos \alpha}{4dl^2 \operatorname{tg}^3 \alpha \cdot \sin \varepsilon} \quad 51)$$

bedeutet.

Setzen wir diese Ergebnisse in Gl. 39, 40, 41, 42 ein, so erhalten wir die inneren Kräfte M und N , mit welchen wir die Randspannungen $\bar{\sigma}$ nach Gl. 13 ermitteln können. Für die untere Einspannstelle des Kühlers ergeben sich diese allgemein zu

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{n,n-1} &= \frac{3lw}{2dz^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin \gamma} \left[\frac{z^3}{6} - \frac{z}{2} + \frac{1}{3} \right] - \frac{lw}{2z d \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin \gamma} (b_{n-1} + 2b_n) \\ &+ \frac{3(z-1)}{2dz^2 l \operatorname{tg} \alpha} (\bar{P}_{n-1} + 2\bar{P}_n - P_{n-1,n}) \frac{4l}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} \\ \bar{\sigma}_{n-1,n} &= - \frac{3lw}{2dz^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin \gamma} \left[\frac{z^3}{6} - \frac{z}{2} + \frac{1}{3} \right] + \frac{lw}{2z d \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin \gamma} (2b_{n-1} + b_n) \\ &+ \frac{3(z-1)}{2dz^2 l \operatorname{tg} \alpha} (2\bar{P}_{n-1} + \bar{P}_n - P_{n-1,n}) \frac{4l}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} \quad (52)\end{aligned}$$

Bei allen Gleichungen sind für symmetrische Belastungen die X_n symmetrisch, alle anderen Größen jedoch antisymmetrisch in Bezug auf die Symmetrieebene.

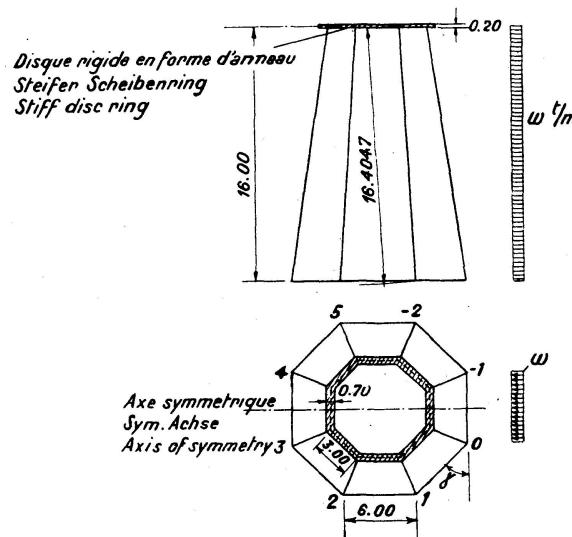


Fig. 10.

D. Praktische Anwendung.

Wir wollen nun die Berechnung eines achteckigen Kühlerturmes mit oberem Versteifungsring durchführen. Man kann zweckmäßig den Versteifungsring als Revisionssteg ausbilden. In Abb. 10 ist das Tragwerk mit seinen Abmessungen dargestellt.

Zuerst müssen wir sämtliche Konstante berechnen. Es ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,091437; \quad 4a = 0,033172; \quad x_0 = 16,4047; \quad z = 2$$

$$\dot{k}_4 = +0,08528; \quad \dot{k}_5 = -0,56815; \quad \dot{k}_6 = +0,06815$$

$$A = 155,464 w; \quad B = 21,576; \quad C = 107,24$$

$$\varepsilon = 43^\circ 49' 48''$$

Ferner ergeben sich aus Gl. 34 die Belastungsglieder

$$N_0 = N_1 = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha \cdot w}{2 \sin \vartheta} x = A_0 x = A_1 x; \quad A_2 = A_3 = 0 \quad 53)$$

Das vom Wind und von den X_n ergriffene Gelenkwerk ist nach Gl. 40 aufzulösen. Hierzu brauchen wir nicht etwa die Eigenlösungen μ_ϱ und $\lambda_{n\varrho}$ der Differenzengleichung 22 tatsächlich zu bestimmen. Betrachtet man nämlich die Differenzengleichung

$$\tau_{n-1} + 4(1-2a)\tau + \tau_{n+1} = A_n \quad 54)$$

so lautet deren Lösung

$$\tau_n = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \frac{\lambda_{n\varrho}}{\mu_\varrho - 4a} \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho} A_n \quad 55)$$

Man erhält also die in Gl. 37 und 38 vorkommenden Koeffizienten $\sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \frac{\lambda_{n\varrho}}{\mu_\varrho - 4a} \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho}$, indem man Gl. 54 mit Berücksichtigung der Randbedingungen für die τ_n als lineares Gleichungssystem anschreibt und dieses nach den Regeln der Algebra auflöst. Die in der Lösung vorkommenden Beiwerte der rechten Seiten A_n sind die gesuchten Koeffizienten $\sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \frac{\lambda_{n\varrho}}{\mu_\varrho - 4a} \cdot \sum_{n=1}^{n=m} \lambda_{n\varrho}$.

Für unseren besonderen Fall lauten die Randbedingungen $\tau_0 = -\tau_{-1}$; $\tau_3 = -\tau_4$. Unser Gleichungssystem 54 ergibt sich daher zu

$$\begin{aligned} 2,93366 \tau_0 + \tau_1 &= A_1 \\ \tau_0 + 3,93366 \tau_1 + \tau_2 &= A_2 \\ \tau_1 + 3,93366 \tau_2 + \tau_3 &= A_3 \\ \tau_2 + 2,93366 \tau_3 &= A_4 \end{aligned} \quad 56)$$

dessen Lösung

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0,375924 A_0 - 0,102833 A_1 + 0,028623 A_2 - 0,009755 A_3 \\ \tau_1 &= -0,102833 A_0 + 0,301677 A_1 - 0,083969 A_2 + 0,028623 A_3 \\ \tau_2 &= 0,028623 A_0 - 0,083969 A_1 + 0,301677 A_2 - 0,102833 A_3 \\ \tau_3 &= -0,009755 A_0 + 0,028623 A_1 - 0,102833 A_2 + 0,375924 A_3 \end{aligned} \quad 57)$$

lautet.

Nach Gl. 53 ergeben sich die b_n der Gl. 40 durch algebraische Addition der Beiwerte von A_0 und A_1 der Gl. 57 zu

$$\begin{aligned} b_0 &= 0,271955 \\ b_1 &= 0,198844 \\ b_2 &= -0,055350 \\ b_3 &= 0,018868 \end{aligned} \quad 58)$$

Bildet man nun unter Berücksichtigung der Randbedingungen $X_0 = X_1$; $X_1 = X_{-2}$; $X_3 = X_4$; $X_2 = X_5$ nach Gl. 39 die $P_{n-1, n} + P_{n, n+1} = P_n$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} P_0 &= [2X_0 - 3X_1 + X_2] \cdot \frac{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{4l} \\ P_1 &= [X_0 - 2X_2 + X_3] \cdot " \\ P_2 &= [-X_0 + 2X_1 - X_3] \cdot " \\ P_3 &= [-X_1 + 3X_2 - 2X_3] \cdot " \end{aligned} \quad 59)$$

Setzen wir Gl. 59 in Gl. 57 ein, so erhalten wir die \bar{P} als Funktion der X_n

$$\begin{aligned}\bar{P}_0 &= +0,620392 X_0 - 1,060772 X_1 + 0,552325 X_2 - 0,111946 X_3 \\ \bar{P}_1 &= +0,179980 X_0 + 0,119460 X_1 - 0,620319 X_2 + 0,328401 X_3 \\ \bar{P}_2 &= -0,328408 X_0 + 0,620392 X_1 - 0,111946 X_2 - 0,179980 X_3 \\ \bar{P}_3 &= +0,111946 X_0 - 0,552325 X_1 + 1,060772 X_2 - 0,620392 X_3\end{aligned}\quad 60)$$

Da

$$\int_{x_0}^{x_0} \mathfrak{M}_{n-1, n} \frac{x - x_0}{x^3} dx = \frac{l x_0 w}{2 \sin \gamma} \left[\frac{\gamma^2}{6} - \frac{\gamma}{3} - \frac{5}{3\gamma} + \frac{1}{3\gamma^2} + \frac{3}{2} - l\gamma \right] \quad 61)$$

können wir nach Gl. 50 die Elastizitätsgleichungen bestimmen und erhalten

$$\begin{aligned}-31,4955 X_0 + 56,7157 X_1 - 10,2526 X_2 - 8,9672 X_3 &= -186,5634 w \\ +56,7157 X_0 - 98,4666 X_1 + 58,0029 X_2 - 10,2527 X_3 &= 230,0581 " \\ -10,2526 X_0 + 58,0029 X_1 - 98,4666 X_2 + 56,7157 X_3 &= -105,3492 " \\ -8,9672 X_0 - 10,2528 X_1 + 56,7137 X_2 - 31,4955 X_3 &= 7,2287 "\end{aligned}\quad 62)$$

deren Lösungen lauten

$$X_0 = 5,3593 w; \quad X_1 = -5,8833 w; \quad X_2 = -0,3161 w; \quad X_3 = +2,6386 w \quad 63)$$

Mit diesen Werten ergibt sich nach Gl. 39

$$\begin{aligned}\frac{4l}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} P_{-1,0} &= 0 \\ " \quad P_{01} &= +5,4870 w \\ " \quad P_{12} &= -8,1396 " \\ " \quad P_{23} &= -0,3422 " \\ " \quad P_{34} &= 0\end{aligned}\quad 64)$$

und nach Gl. 60

$$\begin{aligned}\frac{4l}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} \bar{P}_0 &= +2,0960 w \\ " \quad \bar{P}_1 &= -0,6620 " \\ " \quad \bar{P}_2 &= -2,1437 " \\ " \quad \bar{P}_3 &= +0,6141 "\end{aligned}\quad 65$$

Setzt man nun Gl. 58, 64 und 65 in Gl. 52 ein, so ergeben sich die Normalspannungen im Fuße des Kühlturmes zu

$$\begin{aligned}\sigma_{0,-1} &= -150,33 w \text{ t/m}^2 & \sigma_{10} &= +158,85 w \text{ t/m}^2 \\ \sigma_{01} &= -143,77 " & \sigma_{12} &= 166,88 " \\ \sigma_{21} &= -21,16 " & \sigma_{32} &= 5,93 " \\ \sigma_{23} &= -21,94 " & \sigma_{34} &= 5,28 "\end{aligned}\quad 66)$$

Die Schubspannungen an der Stelle $x = x_0 z$ ergeben sich nach Gl. 40 zu

$$\tau_0 = 2,155 w \text{ t/m}; \quad \tau_1 = 1,796 w \text{ t/m}; \quad \tau_2 = -0,266 w \text{ t/m}; \quad \tau_3 = 0,103 w \text{ t/m} \quad 67)$$

Wir können nun die auf S. 213 angedeutete Kontrolle durchführen. Hierzu setzen wir diese Spannungen in Gl. 12 ein und erhalten die Reste Δ zu

$$\begin{aligned}-143,77 + 150,33 - 7,82 &= -1,26 \\ -21,94 + 21,16 + 0,97 &= -0,19 \\ 166,88 - 158,85 - 6,52 &= +1,51 \\ 5,28 - 5,93 - 0,37 &= -1,02\end{aligned}\quad 68)$$

Man ersieht hieraus, daß die bei Gl. 37 gemachte Vernachlässigung von sehr geringem Einfluß ist.

Wir müssen uns noch überzeugen, welchen Einfluß die steifen Kantenverbindungen ausüben. Wir wollen die dadurch auftretenden Spannungen für den Scheibenwerksquerschnitt in der halben Höhe des Kühlturmes rechnen. Hiezu müssen wir zunächst nach Gl. 46 und 49 für jede einzelne Scheibe die Ausbiegung u rechnen. Aus diesen ergibt sich nach Gl. 45 die Differenz zweier benachbarter Sehnendrehwinkel. Sind uns diese bekannt, so sind wir im Stande, die Dreimomentengleichungen (Gl. 43) aufzustellen. Diese lauten für die Randbedingungen $X_0 = X_{-1}$; $X_3 = X_4$

$$\begin{aligned} 5X_0 + X_1 &= 0,732 \frac{wd^2}{6l \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ X_0 + 4X_1 + X_2 &= -1,421 \quad " \\ X_1 + 4X_2 + X_3 &= 0,927 \quad " \\ X_2 + 5X_3 &= -0,240 \quad " \end{aligned} \quad (69)$$

Die Auflösung derselben ergibt

$$X_0 = 0,0345 w \text{ tm}; \quad X_1 = -0,0685 w; \quad X_2 = 0,0520 w; \quad X_3 = -0,0168 w$$

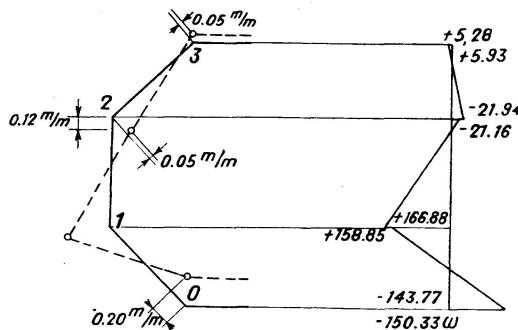


Fig. 12.

Fig. 11.

Dem größten dieser Momente entspricht für $w = 0,150 \text{ t/m}^2$ in der Kante 1 eine Biegespannung

$$\sigma = \frac{0,0685 \cdot 0,150 \cdot 6}{0,12} = 6,15 \text{ t/m}^2$$

Die Spannungen im Querschnitt knapp unterhalb des Versteifungsringes ergeben sich aus der Tatsache, daß sich dieser Scheibenquerschnitt genau so verformt wie der Versteifungsring. Die Biegungsmomente verhalten sich daher wie die bezüglichen Trägheitsmomente. Für das Ringmoment 5,8833 w ergibt sich also das entsprechende Biegemoment des obersten Scheibenquerschnittes

$$X = \frac{0,1^3 \cdot 1,0}{0,70^3 \cdot 0,2} \cdot 5,8833 w = 0,086 w \text{ tm}$$

Die dazugehörige Kantenspannung beträgt $7,75 \text{ t/m}^2$.

Man sieht also, daß man den Einfluß der steifen Scheibenverbindungen tatsächlich vernachlässigen kann.

Wir haben auf Seite 207 angenommen, daß die Lasten nur längs der Kanten angreifen. Tatsächlich greifen diese aber zwischen den Kanten des Tragwerkes an und erzeugen in den einzelnen Scheiben Biegemomente X_n . Da man nach Obigem die durch die steifen Scheibenverbindungen auf-

tretenden Wirkungen vernachlässigen kann, ergeben sich diese Momente X_n , indem man in die zu den einzelnen Scheibenwerksquerschnitten gehörigen Dreimomentengleichungen die $\vartheta = 0$ setzt.

Um das Spannungsbild anschaulich vor Augen zu führen, sind die Normalspannungen, die im Fuß des Kühlturmes auftreten, in Abb. 11 dargestellt. Da auch die Verformungen des Tragwerkes von Interesse sein können, wurden dieselben für den Scheibenwerksquerschnitt in halber Höhe berechnet und in Abb. 12 dargestellt. Man sieht daraus deutlich, daß sich die Querschnitte immerhin noch so stark deformieren, daß die bisher übliche Berechnung solcher Kaminkühler als unten eingespannter Stab mit ringförmigem Querschnitt (Schornsteinberechnung) vollständig unrichtig wird.

Zusammenfassung.

Während vom Verfasser im Jahrgang 1932 dieser Zeitschrift die Theorie der gelenkigen und der steifknotigen prismatischen Scheibenwerke behandelt wurde, befaßt sich diese Abhandlung mit der Berechnung der pyramidenartigen Scheibenwerke. (Abb. 2.) — Zu Beginn der Arbeit wird die grundlegende Frage erörtert, in welchen Fällen man bei steifknotigen Scheibenwerken zum Zwecke einer einfacheren Rechnung ohne unzulässigen Fehler von der steifen Verbindung der Einzellochflächen absehen darf. Es ergibt sich der einleuchtende Grundsatz, daß dies umso mehr gestattet ist, je kleiner die zum Gelenkwerk gehörigen Formänderungen sind. Die nähere Untersuchung ergibt:

1. Die Formänderungen von Gelenkscheibenwerken sind umso kleiner, je größer die Neigungswinkel γ der aufeinanderfolgenden Einzellochflächen sind. (Siehe Abb. 2.)
2. In sich geschlossene Scheibenwerke sind in dieser Hinsicht günstiger als offene.
3. Die Verformung der Querschnitte eines Scheibenwerkes wird ganz erheblich vermindert, wenn man in größeren Abständen, besonders in den Querschnitten größter Formänderung, biegsame Querscheiben einbaut.
4. Die Zusatzspannungen infolge Steifknotigkeit sind bei pyramidenartigen Scheibenwerken geringer als bei prismatischen.

Aus diesen Richtsätzen ergibt sich, daß man eine große Anzahl von pyramidenartigen Scheibenwerken statisch ausreichend genau als Gelenkwerke berechnen kann. Es wird daher im Abschnitt B das „pyramidenartige Gelenkwerk“ allgemein gelöst, wobei als statisch unbestimmte Funktionen die längs der Kanten auftretenden Schubspannungen τ gewählt werden. Die zur Bestimmung der τ aufgestellten Elastizitätsgleichungen ergeben sich in der Form von simultanen, linearen, nichthomogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit veränderlichen Beiwerten. Für dieses Gleichungssystem wird unter Zuhilfenahme einer Differenzengleichung sowohl das exakte allgemeine Integral als auch eine für die Ziffernrechnung einfache Näherungslösung angegeben. Der Abschnitt C behandelt unter Zuhilfenahme der obigen Ergebnisse an Hand eines Kaminkühlers, der am oberen Rand durch einen biegsamen Ring zusammengehalten wird, „die durch biegsame Scheiben verstärkten pyramidenartigen Gelenkwerke“. — Schließlich wird im Abschnitt D ein achtseitiger Kühlturm mit oberem Versteifungsring für wagrechten Windangriff ziffernmäßig durchgerechnet. Es ergibt sich, daß die durch die Steifknotigkeit entstehenden Nebenspannungen tatsächlich ganz unbedeutend sind, falls

beim Entwurf des Bauwerkes die eingangs erwähnten 4 Grundsätze befolgt werden.

Résumé.

Dans le premier volume de ces Mémoires (1932), l'auteur a étudié la théorie des constructions prismatiques à parois minces, à noeuds rigides et articulées. Dans la présente étude, il aborde le calcul des constructions pyramidales à parois minces (figure 2). Il discute tout d'abord la question de savoir dans quels cas il est possible, sans erreur excessive et dans le but de simplifier les calculs, de laisser de côté la rigidité des assemblages entre les différentes surfaces élémentaires qui constituent les ouvrages à parois minces à noeuds rigides. Il en arrive à cette notion principale très claire, que cette simplification est d'autant plus admissible que les déformations correspondant aux articulations sont plus faibles.

L'étude montre ensuite que:

1^o Les déformations des constructions articulées sont d'autant plus faibles que les angles d'inclinaison relative des différents éléments entre eux (γ) sont plus grands (voir figure 2).

2^o Les constructions fermées sur elles-mêmes sont à ce point de vue plus avantageuses que les constructions ouvertes.

3^o La déformation des sections d'un ouvrage est notablement réduite par l'interposition d'éléments de renforcement plans transversaux rigides, admettant entre eux de grands écartements et placés tout particulièrement sur les sections accusant les plus fortes déformations.

4^o Les contraintes additionnelles résultant de la rigidité des assemblages sont plus faibles dans les constructions pyramidales que dans les constructions prismatiques.

Il résulte de ces notions essentielles que de très nombreuses constructions pyramidales peuvent être calculées statiquement d'une manière suffisamment précise comme ouvrages articulés. C'est pourquoi, dans le chapitre B, l'auteur étudie la résolution générale du problème de la construction pyramidale articulée, en considérant les contraintes de cisaillement τ qui se manifestent le long des arêtes comme des fonctions statiquement indéterminées. Les équations élastiques établies pour la détermination des contraintes τ se présentent sous la forme d'équations différentielles du second ordre, simultanées, linéaires, non homogènes, avec coefficients variables. En s'appuyant sur une équation aux différences, l'auteur indique pour ce système non seulement une solution approchée simple pour l'application pratique dans les calculs, mais également l'intégrale générale exacte.

Dans le chapitre C, il traite la question des constructions articulées pyramidales, à parois minces rigides de renforcement, en se basant sur les résultats qui précèdent, et en s'appuyant plus particulièrement sur le cas d'une tour de refroidissement renforcée à sa partie supérieure par un élément plan mince rigide.

Enfin, dans le chapitre D, est exposé le calcul complet d'une tour octogonale de refroidissement munie d'une couronne supérieure de renforcement, dans le cas d'un vent horizontal. Ce calcul montre que grâce à la rigidité des assemblages, les contraintes secondaires sont effectivement très peu importants si l'on prend soin de tenir compte des 4 notions essentielles signalées plus haut.

Summary.

In the 1932 issue of this journal, the author dealt with the theory of hinged and of rigidly jointed prismatic slab structures; he now, in this paper, considers the calculation of pyramid-like slab structures (fig. 2). First of all the fundamental question is discussed, in what cases, in rigidly jointed slab structures, the rigid connection of the separate surfaces may be neglected without any impermissible error, in order to simplify the calculation. The result is the obvious principle that the smaller the changes of shape occurring in the hinged structure, the less will be the error caused by neglecting the rigidity of the joints. A closer investigation shows that:

1) The greater the angle of inclination γ of the successive separate surfaces to each other, the smaller will be the changes of shape in hinged slab structures. (See fig. 2).

2) Slab structures closed in themselves are in this respect more favourable than open ones.

3) The deformation of the cross-section of a slab structure is very considerably reduced, if transverse slabs resistant to bending are built-in at great distances from each other and particularly in the cross-sections where the deformation is greatest.

4) The additional stresses in consequence of rigid joints are smaller in pyramid-like slab structures than in prismatic ones.

From these leading principles it results that a large number of pyramid-like slab structures may be calculated with sufficient accuracy as hinged structures. In Section B, therefore, the problem of the "pyramid-like jointed structure" is solved in general, whereby the shearing stresses τ occurring along the edges are chosen as statically indeterminate functions. The elasticity equations for determining the shearing stresses τ take the form of simultaneous, linear, non-homogeneous differential equations of the 2nd order with variable coefficients. For this system of equations, with the help of a difference equation, the exact general integral as well as an approximate solution simpler for numerical calculations are given. Section C deals with "hinged pyramid-like jointed structures strengthened with slabs resistant to bending", making use of the above-mentioned results, taking as an example a cooling tower, the upper edge of which is held together by a ring resistant to bending. — Finally, in Section D, an octagonal cooling tower with upper stiffening is calculated numerically for horizontal wind pressure. It results that the additional stresses caused by the rigidity of the joints are quite insignificant, if the four fundamental principles mentioned at the beginning are observed when the structure is being designed.