

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 2 (1933-1934)

**Artikel:** Plastizitättheroretische Methoden bei der Untersuchung statisch unbestimmter Tragwerke aus Eisenbeton  
**Autor:** Freudenthal, Alfred  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3399>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **PLASTIZITÄTSTHEORETISCHE METHODEN BEI DER UNTERSUCHUNG STATISCH UNBESTIMMTER TRAG- WERKE AUS EISENBETON.**

**MÉTHODES BASÉES SUR LA THÉORIE DE LA PLASTICITÉ POUR  
L'ÉTUDE DES CONSTRUCTIONS HYPERSTATIQUES EN BÉTON ARMÉ.**

**METHODS OF THE THEORY OF PLASTICITY IN THE INVESTIGATION  
OF STATICALLY INDETERMINATE SUPPORTING STRUCTURES OF  
REINFORCED CONCRETE.**

Dr.-Ing. ALFRED FREUDENTHAL, Prag.

Seit nicht allzulanger Zeit häufen sich in der Fachliteratur Untersuchungen hinsichtlich der plastischen Verformbarkeit von Stahltragwerken, wobei es sich vor allem um Berücksichtigung und zahlenmäßige Ausnutzung dieser, dem erfahrenen Konstrukteur schon seit langem als „Selbsthilfe“ oder „Schlauheit“ des Materials bekannten Eigenschaft bei der Bemessung statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl handelt. Diese Arbeiten und die sich darauf stützenden Vorschläge neuer, wirtschaftlicherer Berechnungs- und Bemessungsverfahren von Stahlkonstruktionen sind in der Eisenbetonliteratur nicht ohne Widerhall geblieben. Es ist daher nicht weiter verwunderlich, wenn in letzter Zeit Stimmen laut wurden (vgl. KAZINCZY, Die Plastizität des Eisenbetons, B. u. E. 1933, S. 74), welche auch die statisch unbestimmten Eisenbetonkonstruktionen des angeblichen Vorteils einer Bemessung mit Berücksichtigung plastischer Verformbarkeit teilhaftig werden lassen wollen. Zweifellos ist eine derartige Forderung nicht ganz unbegründet, wenn auch der Begriff der „Plastizität“ des Eisenbetons auf den ersten Blick etwas problematisch erscheint. Immerhin ist es sowohl aus Versuchen (vgl. MÖRSCH, Der Eisenbetonbau, I. Bd. 2. Hälfte, S. 291 ff., Stuttgart 1922) als auch aus praktischer Baustellenerfahrung bekannt, daß eine örtliche Überlastung, z. B. ein Überschreiten der Streckgrenze in der Bewehrung eines durch Biegemomente beanspruchten Querschnittes, also eine plastische Verformung auftreten kann, ohne unmittelbar eine Zerstörung der Konstruktion zu verursachen. Selbstverständliche Voraussetzung ist hierbei allerdings, daß der Beton der Druckzone noch unzerstört ist. Die Erfüllung dieser Voraussetzung wird sich bei der Ableitung eines plastizitätstheoretischen Bemessungs- resp. Überprüfungsverfahrens für biegsbeanspruchte Eisenbetontragwerke erheblich auswirken, und bedingt auch den grundsätzlichen Unterschied in den Methoden der plastizitätstheoretischer Untersuchung von Tragwerken aus Stahl und Eisenbeton. Denn während bei den ersten als einziges, für die Tragfähigkeit maßgebendes Kriterium das Fließen des Baustoffes, d. h. der Verlauf des Fließvorganges im Tragwerk in Betracht zu ziehen ist, ergibt sich bei den letzteren aus der angeführten Voraussetzung eine weitere Bedingung, welche die Tragfähigkeit der Konstruktion entscheidend beeinflussen kann.

Analog dem Zustand in jenem Querschnitt eines Stahlträgers, in welchem sich infolge der Belastung ein bereits über die ganze Querschnittshöhe reichendes Fließgebiet ausgebildet hat, entsteht auch durch Überschreiten der Streckgrenze in der Bewehrung eines Eisenbetonbalkens an dieser Stelle ein „Fließgelenk“, derart, daß das Tragmoment  $\sigma_s \cdot f_e \left( h - \frac{x}{3} \right)$  nur noch einer ganz unbedeutenden Steigerung, hervorgerufen durch die Vergrößerung des Hebelarmes der inneren Kräfte mit fortschreitender Verformung fähig ist, jedoch kann von einem „Fließgelenk“ nur solange die Rede sein, als an dieser Stelle der Beton der Druckzone noch nicht zerstört ist. Daher werden plastizitätstheoretische Untersuchungen von Eisenbetonkonstruktionen nur innerhalb gewisser Grenzen eine Berechtigung haben. Diese Grenzen, welche vor allem von der Größe der Bewehrung, jedoch auch von der Art der Belastung und der Lage des untersuchten Querschnittes abhängig sein werden, zu bestimmen, muß daher die nächste und wichtigste Aufgabe sein.

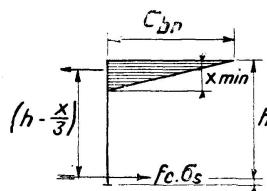


Fig. 1.

Fassen wir bei einem durch ein Biegungsmoment beanspruchten, einfach bewehrten rechteckigen Eisenbetonquerschnitt mit den Abmessungen  $b/h$  die beiden folgenden Zustände ins Auge:

- die Spannung in der Bewehrung hat gerade die Streckgrenze  $\sigma_s$  erreicht,
- die Betonspannung hat die Bruchgrenze  $\sigma_{br}$  erreicht, wobei in diesem letzteren Falle bei einer Spannungsverteilung nach Abb. 1 das Verhältnis von Biegungsdruckfestigkeit  $\sigma_{br}$ : Würfeldruckfestigkeit  $W$  mit dem Erfahrungswerte 1,5 eingeführt werden soll (vgl. MÖRSCH, I. Bd., 1. Hälfte, S. 325 ff.).

Für den Zustand a) ist bekanntlich

$$x = \frac{n \cdot f_e}{b} \cdot \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2b \cdot h}{n \cdot f_e}} \right)$$

bezw. mit  $f_e = \mu \cdot b \cdot h$

$$x = 15 \cdot \mu \cdot h \cdot \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{15\mu}} \right) \quad 1)$$

Für den Zustand b) ist

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot x \cdot \sigma_{br} = f_e \cdot \sigma_s$$

und

$$x_{min} = 2\mu \cdot h \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_{br}} \quad 2)$$

Damit werden die Momente der inneren Kräfte

$$\text{im Zustand a)} \quad M_F = \sigma_s \cdot f_e \cdot h \cdot \left[ 1 - 5\mu \cdot h \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{15\mu}} \right) \right] \quad 3)$$

$$\text{im Zustand b)} \quad M_{Br} = \sigma_s \cdot f_e \cdot h \cdot \left[ 1 - \frac{2}{3}\mu \frac{\sigma_s}{\sigma_{br}} \right] \quad 4)$$

und das Verhältnis beider

$$\alpha = \frac{M_{Br}}{M_F} = \frac{1 - \frac{2}{3} \mu \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_{br}}}{1 - 5\mu \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{15\mu}} \right)} = \frac{1 - \frac{4}{9} \mu \cdot \frac{\sigma_s}{W}}{1 - 5\mu \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{15\mu}} \right)} \quad 5)$$

In der Tabelle 1 sind die Werte dieses Verhältnisses in Abhängigkeit von der Bewehrungsgröße  $\mu$  und der für die Baustoffeigenschaften charakteristischen Größe  $\frac{\sigma_s}{W}$  angegeben. Ist  $\alpha < 1$ , so erfolgt der Bruch im Querschnitt durch Überschreiten der Betonfestigkeit vor Erreichen der Streckgrenze in der Bewehrung. Für plastizitätstheoretische Untersuchungen

Tabelle 1.

$\mu =$	0,5%	1%	2%	3%	5%
$\frac{\sigma_s}{W} = 5$	1,11	1,14	1,17	1,17	1,15
10	1,10	1,11	1,11	1,09	1,02
15	1,09	1,08	1,06	1,01	0,87
20	1,07	1,06	1,01	0,93	0,73
25	1,06	1,04	0,95	0,85	0,58

schalten daher diese Querschnitte a priori aus. Wird  $\alpha > 1$ , so tritt im Querschnitt tatsächlich eine plastische Verformung auf: die Streckgrenze in der Bewehrung wird überschritten, bevor der Beton zerstört ist, eine Steigerung der Belastung ist ohne sofortige Brucherscheinungen möglich und hat (wie ebenfalls aus Tab. 1 zu ersehen ist) nur eine geringe Steigerung des Querschnittsmomentes zur Folge. Für die weitere Belastung wirkt der Querschnitt so lange als Gelenk (Fließgelenk), bis infolge der fortschreitenden Verformung die Zerstörung des Betons eintritt. Das Fließmoment  $M_F$  kann der Einfachheit halber, mit Vernachlässigung des geringen Zuwachses bis zum Bruch mit dem konstanten Mittelwert

$$M_F = 0,9 \cdot \sigma_s \cdot f_e \cdot h \quad 6)$$

eingeführt werden.

Die bisherigen Überlegungen sowie deren numerische Auswertung in Tabelle 1 zeigen zwar, daß bei gewissen, sehr stark bewehrten Querschnitten (rechts von der stark gezogenen Treppenlinie) die Voraussetzung der Plastizitätstheorie nicht vorhanden, daher solche Querschnittsformen von diesbezüglichen Untersuchungen grundsätzlich auszuschließen sind, beweisen jedoch noch nichts hinsichtlich der Zulässigkeit einer unbeschränkten Anwendung dieser Theorie für die übrigen Querschnittsformen, welche gerade als die praktisch wichtigen erscheinen (links von der Treppenlinie). Aus der Bedingung  $\alpha > 1$  folgt für einen Eisenbetonquerschnitt nur, daß bei einem bestimmten, etwa dem durch Gl. 6) gegebenen inneren Moment  $M_F$  gleichen äußeren Moment  $M_a$  die Streckgrenze in der Bewehrung überschritten wird, bevor der Bruch des Betons zu erwarten ist.

Bei einem statisch bestimmten Eisenbetontragwerk legt die Gleichung

$$M_a = M_F \quad 7)$$

die Tragfähigkeit der Konstruktion eindeutig fest: das Fließgelenk macht das System beweglich, die Tragfähigkeit ist erschöpft. Bei einer geforderten  $\nu$ -fachen Sicherheit ist der höchstbeanspruchte Querschnitt auf das Moment  $\nu \cdot M$  mit der Eisenspannung  $\sigma_s$  zu bemessen.

Bei statisch unbestimmten Systemen sind 2 Fälle zu unterscheiden:

- die Bemessung sämtlicher maßgebender Querschnitte erfolgt genau nach den aus der Elastizitätstheorie berechneten Momenten;
- die Bemessung erfolgt auf Grund möglicher, jedoch innerhalb gewisser Grenzen willkürlich gewählter Werte der statisch unbestimmten Größen (vgl. Abb. 2a und 2b).

Im ersten Falle erreicht bei der  $\nu$ -fachen Belastung in sämtlichen elastizitätstheoretisch richtig bemessenen Querschnitten die Spannung in der Bewehrung gleichzeitig die Streckgrenze. Die Anzahl der Fließgelenke wird größer als die Anzahl der statisch Unbestimmten: das System ist beweglich,

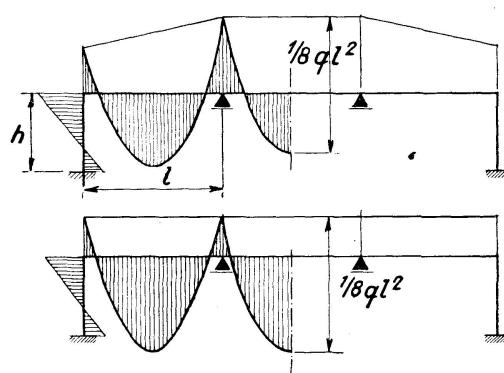


Fig. 2.

seine Tragfähigkeit erschöpft; die rechnungsmäßig vorausgesetzte  $\nu$ -fache Sicherheit ist tatsächlich genau vorhanden, die Sicherheit des Einzelquerschnittes stimmt mit der Sicherheit des Gesamttragwerkes vollkommen überein. Eine plastizitätstheoretische Untersuchung erübrigt sich, die Elastizitätstheorie ist zur Bemessung solcher Konstruktionen ausreichend.

Anders im Falle b). Da die Bemessung der maßgebenden Querschnitte auf Grund unrichtiger, da beliebig gewählter, statisch unbestimmter Größen erfolgt, stimmen die bei elastischer Verformung auftretenden Momente mit den der Bemessung zu Grunde gelegten nicht überein, so daß daher bei  $\nu$ -facher Belastung die Bewehrungsspannung in einzelnen Querschnitten die Streckgrenze erreichen, bzw. überschreiten, in anderen noch darunter bleiben wird. Die Sicherheit des Einzelquerschnittes stimmt mit der Sicherheit des Gesamttragwerkes nicht überein. Um hinsichtlich dieser letzteren Aufschluß zu erlangen, ist die Elastizitätstheorie nicht mehr ausreichend, und es muß der Verlauf der Formänderung und Zerstörung des Tragwerkes bei Berücksichtigung der plastischen Verformung untersucht werden.

Unter der vorläufigen Voraussetzung einer unbegrenzten plastischen Verformbarkeit sämtlicher Querschnitte eines mit Berücksichtigung der Tabelle 1, jedoch elastizitätstheoretisch unrichtig bemessenen, statisch unbestimmten, biegsungsbeanspruchten Eisenbetontragwerkes, z. B. eines durchlaufenden Trägers, würde sich, wenn die Bemessung mit  $\nu$ -facher Sicherheit erfolgt wäre, bereits bei einer kleineren als der  $\nu$ -fachen Belastung das erste Fließgelenk ausbilden, und zwar zuerst in jenem Querschnitt, für welchen das

Verhältnis von Fließmoment  $M_F$  zum äußeren Moment  $M_a = X$  einen Kleinstwert erreicht. Bei einer Steigerung der Belastung ist der Querschnitt zur Aufnahme einer weiteren Vergrößerung des einwirkenden Momentes nicht mehr imstande und wirkt statisch wie ein durch das plastische Tragmoment  $M_F$ , welches als äußeres Moment aufgefaßt werden kann, verspanntes Gelenk. Für die Belastungssteigerung ist daher die statische Unbestimmtheit des Tragwerks herabgesetzt; ein weiteres Anwachsen der Belastung hat die Ausbildung weiterer Fließgelenke in den der jeweiligen Bedingung  $\frac{M_F}{X} \rightarrow \min.$

entsprechenden Querschnitten zur Folge, und zwar in solcher Anzahl, bis das System beweglich geworden ist und zusammenbricht. Die Berechnung der Bruchlast erfordert daher die Ermittlung von Ort und Zahl der Fließgelenke, welche das ursprüngliche statisch unbestimmte System beweglich machen.

Hätte die vorläufig getroffene Voraussetzung der unbegrenzten Verformungsfähigkeit der plastisch gewordenen Querschnitte Berechtigung, wie dies z. B. beim Stahl unter der Annahme einer idealisierten Spannungs-Dehnungslinie zutrifft, so wäre die zeitliche Reihenfolge des Auftretens der Fließgelenke gleichgültig. Dies ist jedoch nicht der Fall, denn die plastische Verformung des Eisenbetonquerschnittes kann, wie schon erwähnt, nicht unbegrenzt wachsen, sondern wird durch die Bruchgefahr des Betons begrenzt. Es ist daher, im Gegensatz zu den Verhältnissen bei Stahltragwerken, nicht nur Ort und Zahl, sondern auch die zeitliche Reihenfolge der Fließgelenksbildung für die Bruchlast und Sicherheit der Konstruktion von großem Einfluß. Denn es ist leicht möglich, daß bei einem z. B. zweifach unbestimmten System sich zwar das erste Fließgelenk voraussetzungsgemäß ausbildet, bei einer weiteren Belastungssteigerung jedoch der Beton im „plastischen“ Querschnitt infolge der Formänderung zerstört wird, bevor es überhaupt zum Auftreten eines weiteren Fließgelenkes kommen kann. Die anfänglich maßgebende „Fließsicherheit“  $\nu_s$  wird daher abgelöst von der Betonbruchsicherheit  $\nu_b$ . Bei Verbundkonstruktionen muß selbstverständlich eine ausreichende Sicherheit für beide Baustoffe nachgewiesen werden, und zwar ist es im Eisenbetonbau üblich  $\nu_s = 2$  und  $\nu_b = 3$  vorzuschreiben.

Zwecks Feststellung der Bruchsicherheit  $\nu_b$  ist für einen beliebig gelegenen Querschnitt eines biegsbeanspruchten Tragwerkes die Ermittlung des Verhältnisses  $\gamma$  der den Betonbruch hervorruhenden Last zur Last, unter der im Querschnitt ein Fließgelenk entsteht, erforderlich.

Erreicht in einem einfach bewehrten Rechtecksquerschnitt die Spannung in der Bewehrung die Streckgrenze, das Tragmoment also den Wert

$$M_F = \sigma_s \cdot f_e \cdot \left( h - \frac{x}{3} \right)$$

so wird die zugehörige Betonrandspannung bekanntlich

$$\sigma_b = \frac{2 M_F}{b \cdot x \cdot \left( h - \frac{x}{3} \right)} = \frac{2 \cdot \sigma_s \cdot f_e}{b \cdot x} \quad 8)$$

wobei für  $x$  die Gl. 1) gilt. Der zugehörige Biegewinkel (Stabkrümmung) folgt daraus

$$\frac{1}{\varrho} = A d\varphi = \frac{\sigma_b}{E_b \cdot x} = \frac{2 \sigma_s \cdot f_e}{E_b \cdot b \cdot x^2} \quad 9)$$

Steigt im nun „plastisch“ gewordenen Querschnitt die Betonspannung auf

die Bruchspannung  $\sigma_{br} = 1,5 \text{ W}$  (vgl. Abb. 1), so erreicht der zugehörige Biegewinkel seinen Größtwert (unmittelbar vor dem Bruch)

$$\frac{1}{\varrho_1} = \Delta d\varphi_1 = \frac{\sigma_{br}}{E_{br} \cdot x_{min}} \quad 10)$$

wobei  $x_{min}$  aus Gl. 2) zu berechnen ist. Nach Einsetzen der Ausdrücke für  $x$  und  $x_{min}$  ergibt sich das Verhältnis

$$\beta = \frac{\Delta d\varphi_1}{\Delta d\varphi} = \frac{n^2}{4} \cdot \left( \frac{\sigma_{br}}{\sigma_s} \right)^2 \cdot \frac{E_b}{E_{br}} \cdot \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{15\mu}} \right)^2 \quad 11)$$

Das Verhältnis der Elastizitätsmoduli bei Beginn des Fließens in der Bewehrung ( $E_b$ ) und beim Betonbruch ( $E_{br}$ ) kann näherungsweise als konstant und mit dem Wert 1,5 angenommen werden. Mit  $n = 15$  und  $\sigma_{br} = 1,5 \text{ W}$  erhält man nun

$$\beta \doteq 190 \left( \frac{W}{\sigma_s} \right)^2 \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{15\mu}} \right)^2 \quad 11a)$$

Auf dieselbe Weise ergeben sich für den Plattenbalken mit Berücksichtigung der elementaren Beziehungen

$$\sigma_b = \sigma_e \cdot \frac{x}{n \cdot (h-x)} \quad 12)$$

wobei

$$x = \frac{\frac{1}{2} \cdot b \cdot d^2 + n \cdot f_e \cdot h}{b \cdot d + n \cdot f_e} \quad 13)$$

sowie durch Heranziehung der Gl. 10) das Verhältnis

$$\beta_1 = \frac{\Delta d\varphi_1}{\Delta d\varphi} = \frac{n}{2} \left( \frac{\sigma_{br}}{\sigma_s} \right)^2 \cdot \frac{E_b}{E_{br}} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d}{h} \cdot \frac{1 - 0,5 \frac{d}{h}}{n \cdot \mu + \frac{d}{h}}, \quad 14)$$

bezw. mit den früheren Annahmen bezgl. der Materialkonstanten

$$\beta_1 \doteq 25 \left( \frac{W}{\sigma_s} \right)^2 \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d}{h} \cdot \frac{1 - 0,5 \frac{d}{h}}{15\mu + \frac{d}{h}} \quad 14a)$$

wobei wieder  $f_e = \mu \cdot b \cdot h$ .

In Abb. 3 sind die Gl. 11a) und 14a) für gewisse Verhältnisse  $\mu$  und  $\frac{d}{h}$  ausgewertet worden. Auf Grund der eingangs getroffenen Voraussetzung kommen nur Werte  $\beta > 1$  in Betracht (vgl. Tab. 1).

Wie aus Abb. 3 entnommen werden kann, ist bei den praktisch häufigsten kleinen und mittleren Bewehrungsgrößen die Verformungsfähigkeit der bereits plastisch gewordenen Querschnitte noch ziemlich groß: der Biegewinkel kann auf ein Mehrfaches des unter dem Fließmoment auftretenden Wertes steigen, ehe der Beton durch die Formänderung zerstört wird. — Um nun den auftretenden Biegewinkel mit der Belastung in Beziehung zu bringen, gehen wir folgendermaßen vor: Das Fließgelenk wird als ein ideales, durch ein äußeres Moment verspanntes Gelenk aufgefaßt. Der aus den inneren Kräften errechnete Biegewinkel kann näherungsweise dem aus der äußeren Belastung ermittelten Verdrehungswinkel der Querschnitte beiderseits des

Fließgelenkes gleichgesetzt werden, was, geometrisch ausgedrückt, bedeutet, daß in der nächsten Nähe des Fließgelenkes die Biegelinie des Stabes durch deren Tangenten in den Querschnitten beiderseits des Gelenkes ersetzt wird.

Fassen wir jenen Querschnitt eines statisch unbestimmten Stabwerkes ins Auge, in welchem sich soeben ein Fließgelenk ausgebildet hat, so erhalten wir bekanntlich für den Verdrehungswinkel  $\varphi$  infolge der äußeren Belastung

$$E \cdot J \cdot \varphi = \int M \cdot \bar{M} ds - M_F \cdot \int \bar{M}^2 ds \quad (15)$$

wobei die Integrale über das gesamte Tragwerk zu erstrecken sind. Für den Zustand unmittelbar vor der Zerstörung des Betons im Querschnitt des Fließ-

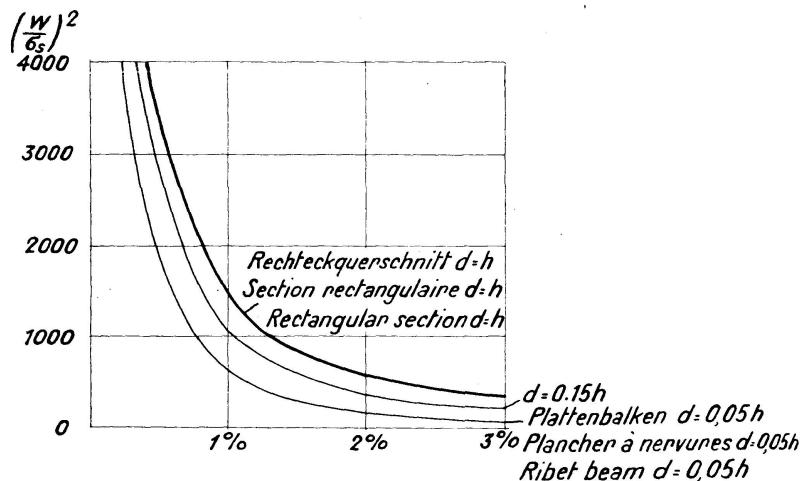


Fig. 3.

gelenkes, welche unter der  $\gamma$ -fachen Fließbelastung erfolgt, wird der Verdrehungswinkel der Querschnitte beiderseits des Gelenkes

$$E \cdot J \cdot \varphi_1 = \gamma \int M \cdot \bar{M} ds - M_F \int \bar{M}^2 ds \quad (16)$$

Dividiert man die beiden letzten Gleichungen durcheinander, so ergibt sich das gesuchte Verhältnis

$$\gamma = \left( 1 - \frac{M_F \int \bar{M}^2 ds}{\int M \cdot \bar{M} ds} \right) \frac{\varphi_1}{\varphi} + \frac{M_F \int \bar{M}^2 \cdot ds}{\int M \cdot \bar{M} ds} \quad (17)$$

Die Bedeutung der Integrale wird sofort klar, wenn man das elastische Moment im Querschnitt des Fließgelenkes als einzige statisch noch Unbestimmte  $X$  des untersuchten,  $n$ -fach statisch unbestimmten Tragwerks auffaßt. Die zur Ermittlung dieser Überzähligen dienenden Verformungsgrößen  $\delta_{ao}$  und  $\delta_{aa}$  am  $(n-1)$ -fach unbestimmten Grundsystem sind durch die Ausdrücke

$$\delta_{ao} = \int M \cdot \bar{M} ds; \quad \delta_{aa} = \int \bar{M}^2 ds \quad (18)$$

gegeben. Die Überzählige selbst folgt aus

$$X = \frac{\delta_{ao}}{\delta_{aa}}. \quad (19)$$

Durch Einsetzen von 18) und 19) in 17) wird

$$\gamma = \left( 1 - \frac{M_F}{X} \right) \frac{\varphi_1}{\varphi} + \frac{M_F}{X}$$

Wir setzen nun auf Grund des weiter oben Gesagten  $\frac{\varphi_1}{\varphi} = \beta$ , bzw.  $\frac{\varphi_1}{\varphi} = \beta_1$  und erhalten

$$\gamma = \left(1 - \frac{M_F}{X}\right) \cdot \beta + \frac{M_F}{X} \quad 17a)$$

Durch den Verhältniswert  $\gamma$  ist die plastische Verformungsfähigkeit des Tragwerks begrenzt, derart, daß die das Fließgelenk hervorruhende Belastung nur auf ihren  $\gamma$ -fachen Wert gesteigert werden kann. Hierbei ist jedoch vorausgesetzt, daß das statische System sich von der Ausbildung des Fließgelenkes an bis zur Zerstörung des Betons im Querschnitt desselben nicht ändert, d. h. daß in diesem Lastintervall kein weiteres Fließgelenk auftreten darf. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, und entsteht in einem Tragwerk, z. B. nach Abb. 4, unter einer Belastung  $p_F(x)$  das erste Fließgelenk über der Stütze 1, unter der Belastung  $\nu \cdot p_F(x)$  das zweite Fließgelenk im Feld noch bevor es zur Zerstörung des Betons im Querschnitt 1 kommt, so daß also

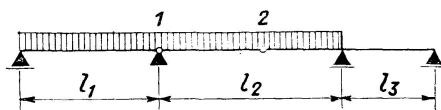


Fig. 4.

für diesen Querschnitt  $\gamma > \nu$ , so verliert Gl. 16 ihre Gültigkeit und nimmt die Form an

$$EJ \cdot \varphi_1 = \nu \cdot \int M \cdot \bar{M} ds - M_F \int \bar{M}^2 ds + (\gamma - \nu) E \cdot J \cdot \delta_{ao}' \quad 16a)$$

wobei  $\delta_{ao}'$  die Verdrehung der Querschnitte beiderseits des Fließgelenkes 1 unter der Belastung  $p_F(x)$  für das System mit bereits ausgebildetem Gelenk 2 bedeutet. Aus der Bildung des Verhältnisses  $\frac{\varphi_1}{\varphi} = \beta$  folgt nach kurzer Zwischenrechnung die den Betonbruch im Querschnitt bei vorheriger Ausbildung des Fließgelenkes 2 kennzeichnende Verhältniszahl

$$\gamma_1 = \nu + \frac{\delta_{ao}}{\delta_{ao}'} \left[ (\beta - \nu) - \frac{M_F}{X} (\beta - 1) \right] \quad 20)$$

Die Zahlen  $\gamma$  resp.  $\gamma_1$  sind außer von den mit Querschnittsform und Materialeigenschaften veränderlichen Werten  $\beta$  abhängig vom Quotienten  $\frac{M_F}{X}$ , welcher als Verhältnis des im Querschnitt vorhandenen Tragmomentes nach Gl. 6 zum elastizitätstheoretischen Moment, sich auch darstellen läßt als das Verhältnis der tatsächlich vorhandenen Bewehrung zur elastizitätstheoretisch erforderlichen, — vom Verhältnis der Querschnittsverdrehung am  $(n-1)$ -fach statisch unbestimmten System, zu jener am  $(n-2)$ -fach statisch unbestimmten, und endlich vom Verhältnis der Lasten, welche die aufeinanderfolgenden Fließgelenke hervorrufen. Soll die plastizitätstheoretische Untersuchung einen Sinn haben, so muß  $\gamma > 1$ , daher  $\frac{M_F}{X} < 1$  sein. Ist  $\frac{M_F}{X} = 1$ , so entspricht die Bewehrung den Momenten der Elastizitätstheorie und es gilt das auf S. 183 für den Fall a) Gesagte.

Durch die Werte  $\gamma$  resp.  $\gamma_1$  ist die Möglichkeit gegeben, die Zulässigkeit von plastizitätstheoretischen Untersuchungen statisch unbestimmter, bie-

gungsbeanspruchter Eisenbetontragwerke zu überprüfen, bezw. die Sicherheit elastizitätstheoretisch unrichtig bewehrter Konstruktionen zu bestimmen. Die Durchführung der praktischen Rechnung hat in 2 Abschnitten zu erfolgen, und zwar:

1. Nach Untersuchung des Tragwerkes unter der Voraussetzung unbegrenzter plastischer Verformbarkeit werden für sämtliche plastisch gewordenen Querschnitte die Verhältnisse  $\frac{\text{Bruchlast des ges. Tragwerkes}}{\text{Fließlast im untersuchten Querschnitt}} = u$  bestimmt.
2. Hierauf berechnet man für diese Querschnitte die Verhältnisse  $\beta$  und  $\gamma$ .

Ist für sämtliche Querschnitte  $\gamma$  resp.  $\gamma_1 > n$ , so wird dadurch die Zulässigkeit der Berechnung der Bruchlast des Systems auf Grund der Plastizitätstheorie erwiesen, d. h. die Zerstörung des  $m$ -fach statisch unbestimmten Tragwerks erfolgt durch die Bildung von  $(m+1)$  Fließgelenken. Wird in einem Querschnitt  $\gamma$  resp.  $\gamma_1 \leq n$ , so ist die Bruchlast auf diesen Querschnitt zu beziehen. Und zwar muß die zulässige Traglast aus dieser Bruchlast (Betonbruch) unter Einhaltung einer 3-fachen Sicherheit ermittelt werden, während im ersten Falle die auf das letzte Fließgelenk zu beziehende Traglast mit einer 2-fachen Sicherheit zu bestimmen ist. —

Es sei noch darauf hingewiesen, daß neben der Bruchsicherheit der Tragwerke auch eine gewisse Sicherheit gegenüber dem Auftreten unerwünscht großer Formänderungen und Risse unter der Gebrauchslast gefordert werden muß. Das Erreichen der Streckgrenze in der Bewehrung hat nun solche Formänderungen zur Folge, welche, für die Bruchsicherheit ohne Bedeutung, unter der Gebrauchslast als unzulässig anzusehen sind. Daher muß noch neben der Bruchsicherheit eine „Fließsicherheit“, und zwar etwa  $\nu_F \leq 1,2$  vorgeschrieben werden, derart, daß erst bei der 1,2-fachen Gebrauchslast das Auftreten des ersten Fließgelenkes möglich ist. Durch diese Einschränkung wird für das in Gl. 17a) resp. 20) erscheinende Verhältnis  $\frac{M_F}{X}$  ein Mindestwert festgelegt. Und zwar muß

$$1 > \frac{M_F}{X} > \frac{1,2}{2,0} \quad \text{und} \quad M_F > 0,60 X \quad \text{sein.}$$

Die elastizitätstheoretisch notwendige Bewehrung in einem Querschnitt darf daher keinesfalls um mehr als 40 % vermindert werden.

Die vorliegenden Untersuchungen beziehen sich auf biegungsbeanspruchte Eisenbetonkonstruktionen, d. h. auf durchlaufende Träger und Rahmenriegel. Doch läßt sich auf Grund der plastizitätstheoretischen Überlegungen auch eine sehr wichtige, auf die Bemessung der Rahmenstützen bezugnehmende Aussage machen.

Stützen in steifer Verbindung mit Trägern werden vorschriftsgemäß für eine Beanspruchung durch außermittigen Druck mit einer auf die Betonfestigkeit bezogenen 3-fachen Sicherheit bemessen. (Eine vollkommene Ausnützung der Bewehrung kommt nur bei großen Exzentrizitäten in Frage.) Die Rahmenstütze soll also bei einer 3-fachen Erhöhung der Gebrauchslast die Grenze ihrer Tragfähigkeit erreichen. Es ist nun zu beachten, daß die Bemessung des Riegels im Anschlußquerschnitt an die Stütze mit einer hinsichtlich der Bewehrung 2-fachen Sicherheit erfolgt. Bei der doppelten Gebrauchslast erreicht daher die Bewehrungsspannung die Streckgrenze; eine weitere Steigerung der Last hat nur eine vergrößerte Verformung im plastisch ge-

wordenen Querschnitt zur Folge, ohne daß das Moment noch einer Steigerung fähig wäre. Bezeichnet  $M$  und  $N$  Moment und Normalkraft unter der Gebrauchslast, so ist, bei geforderter 3-facher Sicherheit, im Bruchzustand  $M_B = 2M$  und  $N_B = 3N$ . Die Bemessung hat daher für diese Werte mit der Bruchspannung, oder für die Werte  $N$  und  $\frac{2}{3}M$  mit der zulässigen Spannung zu erfolgen. Die heute übliche Bemessung für  $N$  und  $M$  erhöht unwirtschaftlicherweise die Sicherheit der Rahmenstütze gegenüber der des Riegels. — Bewehrt man den Rahmenriegel nicht auf Grund der aus der Elastizitätstheorie errechneten Momente, so ist die Stütze für die Werte  $N$  und  $\frac{2}{3}\frac{M_F}{v_s}$ ,

wobei  $M_F$  das Tragmoment des Anschlußquerschnittes nach Gl. 6) bedeutet, zu bemessen. — Selbstverständlich werden bei einer Bemessung der Stützen nach den hier angegebenen Richtlinien die Spannungen unter der Gebrauchslast höher sein als die zulässigen. Für die Sicherheit des Tragwerks ist diese Tatsache ohne Bedeutung. Zu beachten ist jedoch, daß es sich keinesfalls empfiehlt, den Anschlußquerschnitt des Riegels an die Stütze stärker zu bewehren, als es dem elastischen Moment entspricht, sondern daß, im Gegen teil, die Sicherheit der Stütze dadurch herabgemindert wird.

Stillschweigende Voraussetzung der Zulässigkeit sämtlicher bisheriger Untersuchungen und Folgerungen ist die Bedingung, daß durch ausreichende Schubbewehrung das Auftreten spröder Gleitungsbrüche (Schubrisse) unbedingt verhindert wird. Wäre dies nicht der Fall, so ist die Gefahr der Zerstörung des Tragwerks durch Gleitungsbruch die maßgebende. — Auch eine ganz einwandfreie Aufnahme der Haftspannungen muß immer gewährleistet sein, um eine Lösung des Verbundes auch bei den höchsten Eisen spannungen zu verhindern. Endhaken bei ungenügender Haftlänge des Eisens beschleunigen durch ihre Sprengwirkung den Bruch des Betons, bei Ver minderung der Möglichkeit plastischer Verformung.

Vorgang und Zweck plastizitätstheoretischer Untersuchungen statisch unbestimmter Eisenbetontragwerke seien nun noch an 2 Zahlenbeispielen erläutert:

1. Mittelfeld einer gleichförmig belasteten, über unendlich viele Felder durchlaufenden Platte. Gefragt ist nach der Zulässigkeit einer Bemessung von Stützen- und Feldquerschnitt auf das Moment  $M = \mp \frac{1}{16}q \cdot l^2$ . — Bezeichnet  $p_B$  die Bruchlast der nach der Elastizitätstheorie bewehrten Platte, so erscheint das erste Fließgelenk in dem für  $-\frac{1}{16}q \cdot l^2$  bemessenen Stützen querschnitt unter der Belastung  $p_F = \frac{12}{16} \cdot p_B = 0,75 p_B$ . Das Verhältnis von Bruch- und Fließlast ist daher  $n = \frac{1,0}{0,75} = 1,33$ . Zwecks Begrenzung der Ver formungsfähigkeit bilden wir

$$\gamma = \left(1 - \frac{12}{16}\right)\beta + \frac{12}{16} = 0,25\beta + 0,75$$

Die Bemessung der durchlaufenden Platte für die Momente  $M_{max} = -M_e = \frac{1}{16}q \cdot l^2$  ist zulässig, wenn  $\gamma > n$ , d. h. in unserem Falle wenn  $(0,25\beta + 0,75) \geq 1,33$ , bzw. wenn  $\beta > 2,32$ . Für die praktisch häufigsten Verhältnisse  $\frac{W}{\sigma_s} = \frac{1}{15}$  bis  $\frac{1}{20}$  folgt aus Abb. 3 die Bedingung  $\mu < 1,6\%$  bis  $2,3\%$ . Da

diese Bedingung bei Platten immer erfüllt sein wird, ist die Zulässigkeit der Bemessung auf die oben angegebene Weise erwiesen. — Die heute übliche Bemessung nach den Bestimmungen mit  $M_e = -\frac{1}{12} \cdot q \cdot l^2$  und  $M_{max} = +\frac{1}{16} q \cdot l^2$  enthält gegenüber der geforderten eine  $\frac{\frac{1}{12} + \frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = 1,17$ -fache überschüssige Sicherheit.

2. Über 2 gleiche Felder durchlaufender, gleichförmig belasteter Träger nach Abb. 5. (Entnommen den „Untersuchungen an durchlaufenden Eisenbetonkonstruktionen“ von H. SCHEIT und E. PROBST, Berlin 1912, S. 5, 28 ff.) Die Streckgrenze der verwendeten Bewehrung ergab sich mit dem Mittelwert  $\sigma_s = 3050 \text{ kg/cm}^2$ , die Würffelfestigkeit des Betons  $W = 300 \text{ kg/cm}^2$ . — Es ist über der Mittelstütze  $f_e = 5 \varnothing 18 = 12,72 \text{ cm}^2$ , daher  $M_F = 0,9 \cdot 47 \cdot$

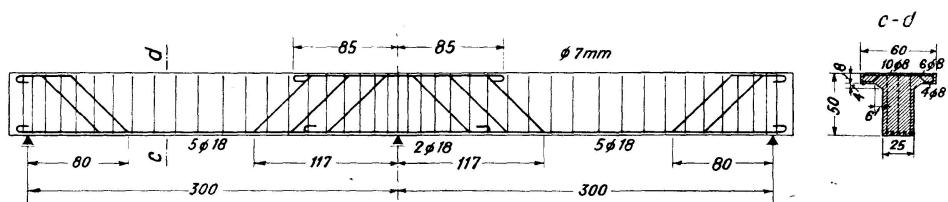


Fig. 5.

$3050 \cdot 12,72 = 1640000 \text{ cmkg}$ . Nach der Elastizitätstheorie beträgt das Moment über der Mittelstütze  $M_s = -\frac{1}{8} q \cdot l^2$ . Die Belastung, unter welcher es zur Ausbildung des ersten Fließgelenkes (über der Mittelstütze) kommt, ist daher  $p_F = \frac{16,40 \cdot 8}{l^2} = 14,50 \text{ t/m}$ . Der Versuch ergab für die eine Belastung  $p = 14,687 \text{ t/m}$  das Auftreten eines so starken Risses über der Mittelstütze, daß die Libellenablesungen infolge der großen Verschiebung des Befestigungspunktes unbrauchbar wurden. Der Bruch erfolgte unter der Belastung  $p_B = 20,95 \text{ t/m}$ . Die Rechnung ergibt für das Auftreten des Fließgelenkes im Mittelfeld die Bedingung  $0,12 p_B \cdot l^2 - 0,4 \cdot 16,40 = 12,72 \cdot 3,05 (0,47 - 0,04) = 16,70 \text{ t/m}$  und daraus  $p_B = 21,4 \text{ t/m}$ , in guter Übereinstimmung mit dem Versuch. Eine Zerstörung des Betons war nicht zu erwarten, da für  $\mu = 1,08 \%$  und  $\frac{W}{\sigma_s} = \frac{1}{10}$ ,  $\beta = 13,4$ , daher  $\gamma = (1 - 0,68) 13,4 + 0,68 = 5,0$ , während  $n = \frac{21,4}{14,5} = 1,48$ . Fragt man noch nach der Bedingung, unter der es zulässig ist, die Mittelstütze anstatt auf  $M_s = -\frac{1}{8} q \cdot l^2$  nur auf  $M_s = -\frac{1}{11,7} q \cdot l^2$  bei gleichzeitiger Bemessung des Feldquerschnittes auf das gleiche Moment zu bemessen, so erhält man aus der Bedingung

$$\frac{q \cdot l^2}{11,7} = \frac{p_F \cdot l^2}{8}$$

die Fließlast  $p_F = 0,69 \cdot q$ , und den Wert  $n = \frac{q}{p_F} = 1,45$ . Bildet man nun

$$\gamma = \left(1 - \frac{8}{11,7}\right) \beta + \frac{8}{11,7} = 0,31 \beta + 0,69$$

so muß, um die Gefahr einer Zerstörung des Betons über der Mittelstütze zu vermeiden  $0,31 \beta + 0,69 > 1,45$ , bzw.  $\beta > 2,45$ . Bei einem Verhältnis  $\frac{W}{\sigma_s} = \frac{1}{20}$ , wie es bei geringerer Betongüte üblich ist, folgt daraus  $\mu < 1,3 \%$ . Bei Benutzung der Bemessungstabellen einfach bewehrter Querschnitte mit  $\sigma_{zul} = 1200 \text{ kg/cm}^2$  ergibt sich damit die höchste zulässige Betonspannung  $\sigma_b \gtrless 68 \text{ kg/cm}^2$ .

### Zusammenfassung.

Bei Einhaltung gewisser Beziehungen bezüglich der Bewehrungsgröße ist es zulässig, durchlaufende Träger und Rahmen in Eisenbeton auf Grund plastizitätstheoretischer Überlegungen zu bemessen, d. h. auf Grund innerhalb gewisser Grenzen willkürlich gewählter Werte für die statisch unbestimmten Stütz- und Einspannmomente. Von dieser Möglichkeit wird man jedoch nur dann Gebrauch machen, wenn aus konstruktiven Gründen ein Abweichen von der elastizitätstheoretisch richtigen Bewehrung notwendig wird, wobei die Einhaltung der in der vorliegenden Untersuchung abgeleiteten Grenzbedingungen jeweils zu überprüfen ist. — Hinsichtlich der außer-mittig gedrückten Rahmenstützen ließ sich nachweisen, daß mit Rücksicht auf die verschiedene, für das Eisen und den Beton geforderte Sicherheit ( $\nu_s = 2$  und  $\nu_b = 3$ ), die für die Bemessung der Stützen maßgebenden, aus der statischen Berechnung zu entnehmenden Momente mit einem auf  $\frac{2}{3}$  des ursprünglichen reduzierten Werte zu verwenden sind, wodurch sich eine nicht unerhebliche Eisenersparnis erzielen läßt. Dies gilt jedoch nur für solche Bewehrungsgrößen, resp. Exzentrizitäten, bei denen die Zerstörung der Stütze durch Überschreiten der Betondruckfestigkeit erfolgt.

### Résumé.

Lorsque l'on envisage l'introduction de relations déterminées dans le calcul des dimensions des armatures des poutres continues et des cadres en béton armé, il est admissible de faire intervenir les considérations théoriques basées sur la plasticité, c'est-à-dire d'adopter, pour les moments aux appuis et les moments d'encastrement statiquement indéterminés, des valeurs choisies arbitrairement entre certaines limites. Il ne sera bon toutefois de faire appel à cette possibilité, que si, pour des raisons de construction, il devient nécessaire de ne pas s'en tenir à une armature répondant aux conditions de la théorie de l'élasticité; il sera alors nécessaire, dans chaque cas, de contrôler si les conditions limites exposées dans la présente étude sont remplies. En ce qui concerne les éléments d'appui des cadres qui se trouvent soumis à des efforts de compression excentrée, il importe de remarquer que pour tenir compte des différents degrés de sécurité qu'impliquent le fer et le béton ( $\nu_s = 2$  et  $\nu_b = 3$ ), les moments déterminés par le calcul statique et qui doivent servir de base à la détermination des appuis doivent être réduits aux  $\frac{2}{3}$  de leurs valeurs initiales, ce qui conduit d'ailleurs à une réduction non négligeable dans la consommation de métal. Ceci n'est toutefois valable que pour les grosseurs d'armatures, et pour les cas d'excentricité, tels que la destruction des appuis doit résulter d'un dépassement de la limite de résistance du béton à la compression.

**Summary.**

By keeping to certain relations with regard to the size of the reinforcement, it is permissible to base the dimensions of continuous girders and frames in reinforced concrete on theoretical plastic considerations, i. e. on arbitrarily chosen values between certain limits for the statically indeterminate moments at the supports and fixed ends. However, use will be made of this possibility only when, for constructional reasons, a departure from the proper reinforcement determined from the theory of elasticity is necessary; for each case, the advisability of keeping to the limiting conditions derived in the present investigation has to be checked. — With regard to frame supports subjected to non-central compression, it could be shown that, considering the different degree of safety required for the iron and for the concrete ( $\nu_s = 2$  and  $\nu_b = 3$ ), the moments determining the dimensions of the supports, and to be taken from the static calculation, are to be used with a value reduced to two-thirds of the original one, thus allowing no inconsiderable saving in iron to be made. This holds, however, only for such sizes of reinforcement, or eccentricities, in which the support is destroyed by overstepping the compression strength of the concrete.