

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 2 (1933-1934)

**Artikel:** Tables pour le calcul des arcs hyperstatiques en béton armé à fibre moyenne parabolique  
**Autor:** Chalos, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3391>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **TABLES POUR LE CALCUL DES ARCS HYPERSTATIQUES EN BÉTON ARMÉ À FIBRE MOYENNE PARABOLIQUE.**

**TAFELN ZUR BERECHNUNG STATISCH UNBESTIMMTER EISEN-  
BETONBOGEN MIT PARABELFÖRMIGER MITTELLINIE.**

**TABLES FOR THE ANALYSIS OF STATICALLY OVERRDETERMINED  
REINFORCED CONCRETE ARCHES WITH MEDIAN PARABOLIC FIBRE.**

M. CHALOS, Paris.

Divers auteurs ont, depuis longtemps, cherché à simplifier le calcul des arcs à deux articulations et celui des arcs encastrés en établissant soit des tables, soit des abaques.

En France, la circulaire ministérielle de 1906 sur l'emploi du Béton armé a recommandé l'emploi des tables de Bresse pour le calcul des poussées des arcs homogènes à 2 articulations et celles de Mr. PIGEAUD pour le calcul des poussées des arcs encastrés. Plus récemment, Mr. MESNAGER a construit des abaques pour le calcul des arcs paraboliques encastrés de surbaissement  $\frac{1}{10}$  dont la section réduite croît de 1 à 1,5 de la clé aux naissances.

Malheureusement, les hypothèses relatives à la variation des sections ne s'appliquent pas toujours très bien aux voûtes en béton armé et conduisent souvent à des sections surabondantes sur la majeure partie du développement de l'arc, alourdissant inutilement l'ouvrage.

Pour une bonne utilisation des matériaux, il y a, semble-t-il, intérêt à faire travailler le béton à un taux voisin du taux limite, dans le plus grand nombre possible de sections, ce qui implique certaines lois de variation des moments d'inertie réduits et des sections réduites.

Ces lois ne sont d'ailleurs pas indépendantes. Pour le cas le plus courant de profils rectangulaires de largeur constante, elles devront être telles que si le moment d'inertie réduit d'un profil est  $k$  fois le moment d'inertie de clef, sa section sera sensiblement  $\sqrt[3]{k}$  fois la section de clé, puisque abstraction faite des aciers longitudinaux dont il y a généralement intérêt à diminuer le pourcentage, le moment d'inertie varie comme le cube de la section.

D'autre part, en ce qui concerne les arcs à tablier supérieur et à tympans évidés, dans lesquels les efforts maxima se produisent vers les reins, les lois de variation devront être déterminées, de manière que la section diminue aussi peu que possible entre la clé et les reins, puis décroisse rapidement vers les articulations, jusqu'à une valeur égale au  $\frac{2}{3}$  environ de celle de la section de clé, les articulations ne supportant qu'un effort normal.

On a été ainsi amené à étudier les arcs à 2 articulations à moment d'inertie réduit et à section réduite décroissant respectivement de la clé aux naissances suivant les lois

$$I = \frac{I \text{ clé}}{(1 \pm 2m^5) \cos \alpha} \quad S = \frac{S \text{ clé}}{[1 \mp (1 - \sqrt[3]{3})m^5] \cos \alpha}^1)$$

( $m$  désignant le paramètre  $\frac{x}{a}$  de la figure ci-contre et le premier système de signe correspondant aux valeurs  $> 0$  de  $m$ , le second aux valeurs  $< 0$ ).

Pour les arcs encastrés, il est au contraire indiqué de prendre une loi de variation du moment d'inertie réduit de progression plus régulière et, pour des arcs à tablier supérieur et à tympans évidés, de fixer à 5 environ le rapport  $k$  des moments d'inertie réduits des naissances et de clé<sup>2</sup>.

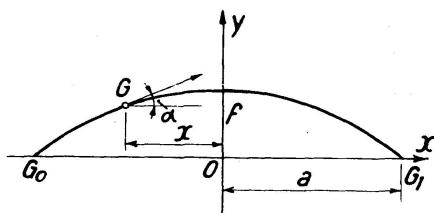


Fig. 1.

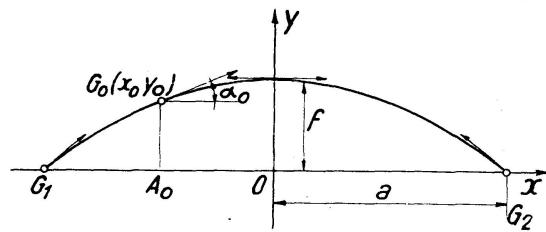


Fig. 2.

On vérifie en effet que:

1<sup>o</sup> Les moments fléchissants aux naissances et à la clé dûs à une charge permanente uniforme et aux variations linéaires de l'arc sont dans le rapport  $\frac{8k+2}{2k+3}$  soit pour  $k > 2$  une valeur absolue de l'ordre de 3.

2<sup>o</sup> Les moments fléchissants maxima aux naissances et à la clé dûs à une surcharge uniforme répartie sur une longueur variable de la corde de l'arc sont dans un rapport du même ordre de grandeur.

3<sup>o</sup> Les efforts normaux varient peu.

Par suite, et en raison de l'importance prépondérante de l'effet des moments dans les taux de fatigue, il faut, pour obtenir des taux de travail sensiblement équivalents à la clé et aux naissances, réaliser l'égalité des  $\frac{Mh}{I}$  ou ce qui revient au même des  $\frac{M^3}{I^2}$ , c'est-à-dire que le rapport des moments d'inertie de naissance et de clé devra être voisin de  $\sqrt[3]{3}$  soit environ 5.

Ces considérations nous ont conduit à étudier les arcs encastrés à moment

1) On vérifie que l'on a bien pour les différentes valeurs de  $m$ :

$m$	$I$	$S$
0	$I \text{ clé}$	$S \text{ clé}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{I \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{1024}{1026}$	$\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{1024}{1024,4} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 0,9996$ peu différent de $\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \sqrt[3]{\frac{1024}{1026}} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 0,9994$
$\frac{1}{2}$	$\frac{I \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{32}{34}$	$\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{32}{32,44} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 0,986$ " " " $\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \sqrt[3]{\frac{32}{34}} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 0,98$
$\frac{3}{4}$	$\frac{I \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{1024}{1510}$	$\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{1024}{1131,4} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 0,905$ " " " $\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \sqrt[3]{\frac{1024}{1510}} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 0,88$
1	$\frac{I \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 0,695$

2) Pour des arcs à tympans pleins et chargés aux reins il faudrait augmenter  $k$  jusqu'à 10 environ.

d'inertie réduit et à section réduite croissant respectivement de la clé aux naissances suivant les lois

$$I = \frac{I \text{ clé}}{\left(1 - \frac{4}{5} m^2\right) \cos \alpha} \quad S = \frac{S \text{ clé}}{\left(1 - \frac{\sqrt[3]{5} - 1}{\sqrt[3]{5}} m^2\right) \cos \alpha} \quad ^3)$$

( $m$  et  $\alpha$  ayant la même signification que précédemment).

Dans les deux cas envisagés, la forme algébrique des lois de variation rend possible le calcul littéral complet et on a pu ainsi déterminer tous les éléments permettant le tracé immédiat des lignes d'influence de la poussée et du moment fléchissant ainsi que les effets d'une variation linéaire de l'arc et d'une surcharge uniformément répartie sur tout ou partie de la corde <sup>4)</sup>.

### I. Arc parabolique à deux articulations, à moment d'inertie réduit et à section réduite décroissant respectivement de la clé aux naissances suivant les lois:

$$I = \frac{I \text{ clé}}{(1 \pm 2 m^5) \cos \alpha} \quad S = \frac{S \text{ clé}}{[1 \mp (1 - \sqrt[3]{3}) m^5] \cos \alpha}$$

Soit  $a$  la demi-portée,  $f$  la flèche,  $m$  le paramètre  $\frac{x}{a}$ ,  $\mu$  le moment fléchissant que produirait le système de charges dans la section de même abscisse  $G$  d'une poutre droite de portée  $2a$  posée sur appuis simples; on a:

Equation de la fibre moyenne  $y = f(1 - m^2)$ .

Moment fléchissant dans la section  $G_0(x_0, y_0)$ .

$M_0 = \mu_0 - Q_{y_0}$  ( $Q$  étant la poussée).

Effort normal dans la section  $G_0(x_0, y_0)$ : En valeur approchée

$$N_0 = \frac{Q}{\cos \alpha_0} \quad \text{avec} \quad \cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4f^2}{a^2} m_0^2}}$$

<sup>3)</sup> On vérifie que l'on a bien pour les différentes valeurs de  $m$ :

$m$	$I$	$S$
0	$I \text{ clé}$	$S \text{ clé}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{I \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{20}{19}$	$\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{1,709}{1,665} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 1,025$ peu différent de $\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \sqrt[3]{\frac{20}{19}} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 1,018$
$\frac{1}{2}$	$\frac{I \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{5}{4}$	$\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{1,709}{1,532} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 1,113$ " " " $\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 1,08$
$\frac{3}{4}$	$\frac{I \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{20}{11}$	$\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \frac{1,709}{1,31} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 1,304$ " " " $\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \sqrt[3]{\frac{20}{11}} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 1,22$
1	$\frac{I \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 5$	$\frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot \sqrt[3]{5} = \frac{S \text{ clé}}{\cos \alpha} \cdot 1,709$

<sup>4)</sup> Un certain nombre de ces éléments ont été calculés par notre collaborateur M. BILLION, Ingénieur des Travaux Publics de l'Etat, qui a également établi des formules générales pour les arcs paraboliques encastrés à section réduite constante et à moment d'inertie réduit variable applicables aux arcs à section évidée.

La méthode de calcul employée est empruntée au Cours de Résistance des Matériaux de M. l'Inspecteur Général PIGEAUD.

Effort tranchant dans la section  $G_0(x_0y_0)$ :  $T_0 = \frac{d\mu_0}{dx} \cos \alpha_0 - Q \sin \alpha$ .

D'autre part, si on considère les formules générales de déformation ( $\zeta \eta$  désignant les variables courantes, et  $d\sigma$  l'élément d'arc) et si on admet que l'on a: ( $I_c$  et  $S_c$  désignant respectivement le moment d'inertie et la section de clé)

$$\text{pour } m < 0 \quad I = \frac{I_c}{(1 - 2m^5) \cos \alpha} \quad S = \frac{S_c}{[1 + (1 - \sqrt[3]{3})m^5] \cos \alpha}$$

$$\text{et pour } m > 0 \quad I = \frac{I_c}{(1 + 2m^5) \cos \alpha} \quad S = \frac{S_c}{[1 - (1 - \sqrt[3]{3})m^5] \cos \alpha}$$

On a:  $Q = \frac{\int \mu \eta \frac{d\sigma}{EI}}{\int \frac{\eta^2 d\sigma}{EI} + \int \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 \frac{d\sigma}{ES}}$  qui peut s'écrire

$$Q = \frac{\int \frac{\mu \eta d\sigma}{EI}}{\int \frac{\eta^2 d\sigma}{EI}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\int \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 \frac{d\sigma}{ES}}{\int \frac{\eta^2 d\sigma}{EI}}}$$

Le second facteur est le terme de Bresse que nous désignerons par  $\gamma$ , et il vient tous calculs faits dans le cas de  $m < 0$  pour une charge unité:

$$Q = \gamma \cdot \frac{a}{f} \cdot \frac{5}{84} \cdot \frac{-7m^9 + 12m^7 + 21m^4 - 126m^2 + 110}{17}$$

le terme de Bresse  $\gamma$  ayant pour valeur:

$$\gamma = \frac{1}{r_c^2 \left[ \frac{a}{f} \operatorname{arctg} \frac{2f}{a} + \frac{1 - \sqrt[3]{3}}{4} \left( -\frac{1}{2} + \frac{a^2}{4f^2} - \frac{a^4}{16f^4} L \left( 1 + \frac{4f^2}{a^2} \right) \right) \right] + \frac{34}{30} \cdot f^2} \quad (r_c \text{ rayon de giration de la section de clé})$$

Dans le cas de  $m > 0$  on trouverait des formules symétriques donnant la même valeur de  $Q$  pour des valeurs opposées de  $m$ .

Pour une variation linéaire de l'arc provoquant par exemple un allongement  $\tau$  par unité de longueur on a:

$$\begin{aligned} M &= -Qy_0 \\ N &= +Q \cos \alpha_0 \\ Q &= EI_c \tau \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{30}{17} \cdot \gamma \end{aligned}$$

*Lignes d'influence.*

Une charge isolée  $P = 1$  agissant suivant la verticale x d'abscisse  $m$  a donnera pour la poussée ( $m < 0$ ) la valeur précédemment trouvée

$$Q = \gamma \cdot \frac{a}{f} \cdot \frac{5}{84} \cdot \frac{-7m^9 + 12m^7 + 21m^4 - 126m^2 + 110}{17} \quad 5)$$

et la ligne d'influence de  $Q$  aura par suite, la forme suivante:

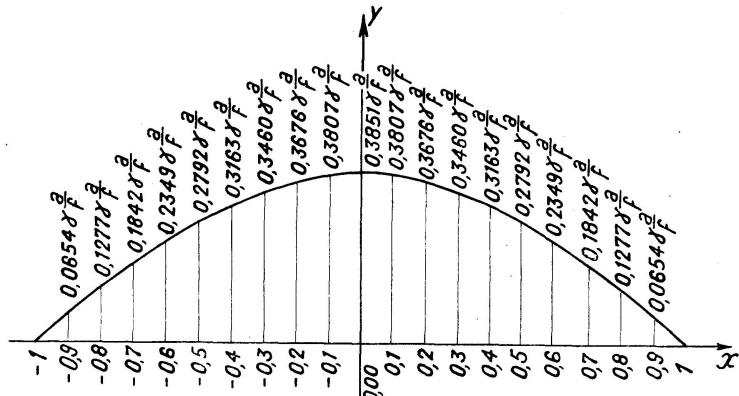


Fig. 3.

Cette même charge unité produira dans la section située sur la verticale  $x_0$  d'abscisse  $m_0$  le moment:

$$M = \mu_0 - Qy_0$$

Or, on a, dans le cas étudié de  $m < 0$

$$\text{pour } -1 < m < m_0 \quad \mu_0 = \frac{a}{2}(1+m)(1-m_0)$$

$$\text{et pour } m_0 < m < 0 \quad \mu_0 = \frac{a}{2}(1-m)(1+m_0)$$

En remplaçant  $Q$  et  $y_0$  par les valeurs données plus haut on obtient les équations suivantes:

pour  $-1 < m < m_0$

$$M = \frac{a}{2}(1+m)(1-m_0) - \gamma a \cdot \frac{5}{84} \frac{(110 - 126m^2 + 21m^4 + 12m^7 - 7m^9)(1-m_0^2)}{17}$$

5) D'une manière plus générale, si on avait

$$\begin{aligned} I &= \frac{I_c}{\left(1 \mp \frac{K-1}{K}m^5\right) \cos \alpha} & S &= \frac{S_c}{\left(1 \mp \frac{\sqrt[3]{K-1}}{\sqrt[3]{K}}m^5\right) \cos \alpha} \\ \gamma &= \frac{1}{r_c^2 \left[ \frac{a}{f} \operatorname{arctg} \frac{2f}{a} + \frac{\sqrt[3]{K-1}}{\sqrt[3]{K} \cdot 4} \frac{f^2}{a^2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{a^2}{4f^2} - \frac{a^4}{16f^4} L \left( 1 + 4 \frac{f^2}{a^2} \right) \right) \right]} \end{aligned}$$

$$Q = \gamma \frac{a}{f} \cdot \frac{30}{504} \cdot \frac{\mp (K-1)(7m^9 - 12m^7) + 42Km^4 - 252Km^2 + 205K + 5}{31K + 1} \quad (+ \text{ pour } m < 0) \quad (- \text{ pour } m > 0)$$

et pour un allongement  $\tau$  par unité de longueur:  $Q = \gamma \tau E I_c \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{60K}{31K + 1}$

On retrouve bien pour  $K = 1$  le cas du moment d'inertie et de la section réduite constante et pour  $K = \frac{1}{3}$  les résultats ci-dessus.

Valeurs de  $\frac{M}{a}$ 

m	m <sub>0</sub> =				
	- 0,9	- 0,8	- 0,7	- 0,6	- 0,5
- 1	0	0	0	0	0
- 0,9	0,095 - 0,0124 γ	0,09 - 0,0235 γ	0,085 - 0,0334 γ	0,08 - 0,0419 γ	0,075 - 0,0491 γ
- 0,8	0,09 - 0,0243 γ	0,18 - 0,0460 γ	0,17 - 0,0651 γ	0,16 - 0,0817 γ	0,15 - 0,0958 γ
- 0,7	0,085 - 0,0350 γ	0,17 - 0,0663 γ	0,255 - 0,0939 γ	0,24 - 0,1179 γ	0,225 - 0,1382 γ
- 0,6	0,08 - 0,0446 γ	0,16 - 0,0846 γ	0,24 - 0,1198 γ	0,32 - 0,1503 γ	0,30 - 0,1762 γ
- 0,5	0,075 - 0,0530 γ	0,15 - 0,1005 γ	0,225 - 0,1424 γ	0,30 - 0,1787 γ	0,375 - 0,2094 γ
- 0,4	0,07 - 0,0601 γ	0,14 - 0,1139 γ	0,21 - 0,1613 γ	0,28 - 0,2024 γ	0,35 - 0,2372 γ
- 0,3	0,065 - 0,0657 γ	0,13 - 0,1246 γ	0,195 - 0,1764 γ	0,26 - 0,2214 γ	0,325 - 0,2595 γ
- 0,2	0,06 - 0,0698 γ	0,12 - 0,1323 γ	0,18 - 0,1875 γ	0,24 - 0,2353 γ	0,30 - 0,2757 γ
- 0,1	0,055 - 0,0723 γ	0,11 - 0,1370 γ	0,165 - 0,1942 γ	0,22 - 0,2436 γ	0,275 - 0,2855 γ
0,00	0,05 - 0,0732 γ	0,10 - 0,1386 γ	0,15 - 0,964 γ	0,20 - 0,2465 γ	0,25 - 0,2888 γ
+ 0,1	0,045 - 0,0723 γ	0,09 - 0,1370 γ	0,135 - 0,1942 γ	0,18 - 0,2436 γ	0,225 - 0,2855 γ
+ 0,2	0,04 - 0,0698 γ	0,08 - 0,1323 γ	0,12 - 0,1875 γ	0,16 - 0,2353 γ	0,20 - 0,2757 γ
+ 0,3	0,035 - 0,0657 γ	0,07 - 0,1246 γ	0,105 - 0,1764 γ	0,14 - 0,2214 γ	0,175 - 0,2595 γ
+ 0,4	0,03 - 0,0601 γ	0,06 - 0,1139 γ	0,09 - 0,1613 γ	0,12 - 0,2024 γ	0,15 - 0,2372 γ
+ 0,5	0,025 - 0,0530 γ	0,05 - 0,1005 γ	0,075 - 0,1424 γ	0,10 - 0,1787 γ	0,125 - 0,2094 γ
+ 0,6	0,02 - 0,0446 γ	0,04 - 0,0846 γ	0,06 - 0,1198 γ	0,08 - 0,1503 γ	0,10 - 0,1762 γ
+ 0,7	0,015 - 0,0350 γ	0,03 - 0,0663 γ	0,045 - 0,0939 γ	0,06 - 0,1179 γ	0,075 - 0,1382 γ
+ 0,8	0,01 - 0,0243 γ	0,02 - 0,0460 γ	0,03 - 0,0651 γ	0,04 - 0,0817 γ	0,05 - 0,0958 γ
+ 0,9	0,005 - 0,0124 γ	0,01 - 0,0235 γ	0,015 - 0,0334 γ	0,02 - 0,0419 γ	0,025 - 0,0491 γ
+ 1	0	0	0	0	0

m	m <sub>0</sub> =				
	- 0,4	- 0,3	- 0,2	- 0,1	0,00
- 1	0	0	0	0	0
- 0,9	0,07 - 0,0549 γ	0,065 - 0,0595 γ	0,06 - 0,0628 γ	0,055 - 0,0647 γ	0,05 - 0,0654 γ
- 0,8	0,14 - 0,1073 γ	0,13 - 0,1162 γ	0,12 - 0,1226 γ	0,11 - 0,1264 γ	0,10 - 0,1277 γ
- 0,7	0,21 - 0,1547 γ	0,195 - 0,1676 γ	0,18 - 0,1768 γ	0,165 - 0,1824 γ	0,15 - 0,1842 γ
- 0,6	0,28 - 0,1973 γ	0,26 - 0,2138 γ	0,24 - 0,2255 γ	0,22 - 0,2326 γ	0,20 - 0,2349 γ
- 0,5	0,35 - 0,2345 γ	0,325 - 0,2541 γ	0,30 - 0,2680 γ	0,275 - 0,2764 γ	0,25 - 0,2792 γ
- 0,4	0,42 - 0,2657 γ	0,39 - 0,2878 γ	0,36 - 0,3036 γ	0,33 - 0,3131 γ	0,30 - 0,3163 γ
- 0,3	0,39 - 0,2906 γ	0,455 - 0,3149 γ	0,42 - 0,3322 γ	0,385 - 0,3425 γ	0,35 - 0,3460 γ
- 0,2	0,36 - 0,3088 γ	0,42 - 0,3345 γ	0,48 - 0,3529 γ	0,44 - 0,3639 γ	0,40 - 0,3676 γ
- 0,1	0,33 - 0,3198 γ	0,385 - 0,3464 γ	0,44 - 0,3655 γ	0,495 - 0,3769 γ	0,45 - 0,3807 γ
0,00	0,30 - 0,3235 γ	0,35 - 0,3504 γ	0,40 - 0,3697 γ	0,45 - 0,3812 γ	0,50 - 0,3851 γ
+ 0,1	0,27 - 0,3198 γ	0,315 - 0,3464 γ	0,36 - 0,3655 γ	0,405 - 0,3769 γ	0,45 - 0,3807 γ
+ 0,2	0,24 - 0,3088 γ	0,28 - 0,3345 γ	0,32 - 0,3529 γ	0,36 - 0,3639 γ	0,40 - 0,3676 γ
+ 0,3	0,21 - 0,2906 γ	0,245 - 0,3149 γ	0,28 - 0,3322 γ	0,315 - 0,3425 γ	0,35 - 0,3460 γ
+ 0,4	0,18 - 0,2657 γ	0,21 - 0,2878 γ	0,24 - 0,3036 γ	0,27 - 0,3131 γ	0,30 - 0,3163 γ
+ 0,5	0,15 - 0,2345 γ	0,175 - 0,2541 γ	0,20 - 0,2680 γ	0,225 - 0,2764 γ	0,25 - 0,2792 γ
+ 0,6	0,12 - 0,1973 γ	0,14 - 0,2138 γ	0,16 - 0,2255 γ	0,18 - 0,2326 γ	0,20 - 0,2349 γ
+ 0,7	0,09 - 0,1547 γ	0,105 - 0,1676 γ	0,12 - 0,1768 γ	0,135 - 0,1824 γ	0,15 - 0,1842 γ
+ 0,8	0,06 - 0,1073 γ	0,07 - 0,1162 γ	0,08 - 0,1226 γ	0,09 - 0,1264 γ	0,10 - 0,1277 γ
+ 0,9	0,03 - 0,0549 γ	0,035 - 0,0595 γ	0,04 - 0,0628 γ	0,045 - 0,0647 γ	0,05 - 0,0654 γ
+ 1	0	0	0	0	0

pour  $m_0 < m < 0$

$$M = \frac{a}{2} (1-m)(1+m_0) - \gamma a \cdot \frac{5}{84} \frac{(110 - 126m^2 + 21m^4 + 12m^7 - 7m^9)(1-m_0^2)}{17}$$

Ces équations permettent de calculer les ordonnées des lignes d'influence de  $\frac{M}{a}$  en fonction de  $\gamma$ . Les valeurs de ces ordonnées sont portées au tableau ci-après :

Pour les valeurs de  $\gamma$  voisines de 1, les lignes d'influence présenteront une ou deux zones négatives suivant la section envisagée. Leur forme générale est celle des figures suivantes :

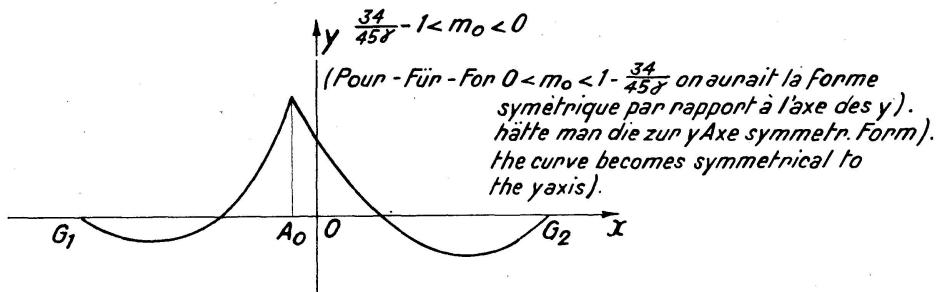


Fig. 4.

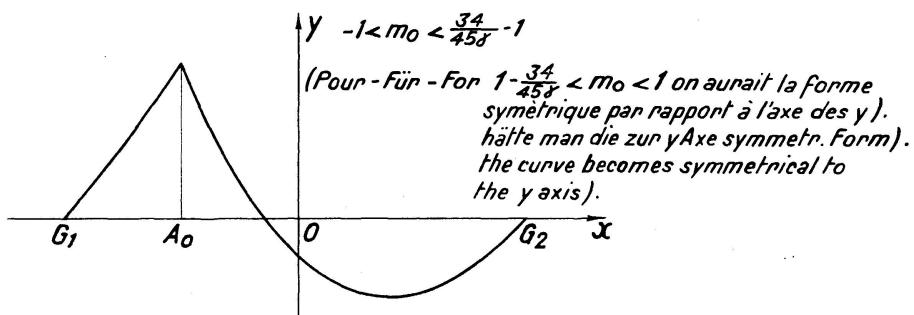


Fig. 5.

Pour  $m_0 > 0$  on trouverait pour les lignes d'influence des courbes symétriques par rapport à l'axe des  $y$ .

*Effet d'une surcharge uniforme  $\bar{\omega}$  par unité de longueur répartie sur la corde de l'arc.*

On trouve encore  $M = \frac{\bar{\omega}a^2}{2} (1 - m_0^2) (1 - \gamma)$  maximum à la clé et nul pour  $\gamma = 1$

$$Q = \gamma \bar{\omega} \frac{a^2}{2f}$$

*Effet d'une surcharge  $p$  par unité de longueur répartie sur une partie de la corde de l'arc.*

Le moment  $> 0$  maximum s'obtiendra en chargeant l'arc sur le tronçon qui correspond aux ordonnées  $> 0$  de la ligne d'influence de la section. On trouve ainsi pour les différentes valeurs de  $\gamma$ , en intégrant l'expression de  $M$  entre les limites de charge qui correspondent aux valeurs nulles de cette expression, les moments et poussées correspondantes ci-après :

$m_0$	1	Valeurs de $\gamma$			
		0,98	0,95	0,90	
- 0,9	Limites de charge	- 1 à - 0,305	- 1 à - 0,292	- 1 à - 0,273	- 1 à - 0,236
	$Mm > 0$	0,0264 $p \frac{a^2}{f}$	0,0270 $p \frac{a^2}{f}$	0,02781 $p \frac{a^2}{f}$	0,02927 $p \frac{a^2}{f}$
	$Q$	0,1369 $p \frac{a^2}{f}$	0,1385 $p \frac{a^2}{f}$	0,1404 $p \frac{a^2}{f}$	0,1449 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,8	Limites de charge	- 1 à - 0,271	- 1 à - 0,256	- 1 à - 0,235	- 1 à - 0,194
	$Mm > 0$	0,0458 $p \frac{a^2}{f}$	0,0469 $p \frac{a^2}{f}$	0,04854 $p \frac{a^2}{f}$	0,05158 $p \frac{a^2}{f}$
	$Q$	0,1484 $p \frac{a^2}{f}$	0,1507 $p \frac{a^2}{f}$	0,1533 $p \frac{a^2}{f}$	0,1587 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,7	Limites de charge	- 1 à - 0,231	- 1 à - 0,217	- 1 à - 0,193	- 1 à - 0,149
	$Mm > 0$	0,0583 $p \frac{a^2}{f}$	0,0601 $p \frac{a^2}{f}$	0,06264 $p \frac{a^2}{f}$	0,06736 $p \frac{a^2}{f}$
	$Q$	0,1628 $p \frac{a^2}{f}$	0,1644 $p \frac{a^2}{f}$	0,1679 $p \frac{a^2}{f}$	0,1738 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,6	Limites de charge	- 1 à - 0,185	- 1 à - 0,168	- 1 à - 0,144	- 1 à - 0,098
	$Mm > 0$	0,0646 $p \frac{a^2}{f}$	0,0672 $p \frac{a^2}{f}$	0,07058 $p \frac{a^2}{f}$	0,07710 $p \frac{a^2}{f}$
	$Q$	0,1797 $p \frac{a^2}{f}$	0,1819 $p \frac{a^2}{f}$	0,1852 $p \frac{a^2}{f}$	0,1912 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,5	Limites de charge	- 1 à - 0,132	- 1 à - 0,116	- 1 à - 0,088	- 1 à - 0,038
	$Mm > 0$	0,0654 $p \frac{a^2}{f}$	0,0684 $p \frac{a^2}{f}$	0,073 $p \frac{a^2}{f}$	0,0816 $p \frac{a^2}{f}$
	$Q$	0,1992 $p \frac{a^2}{f}$	0,2012 $p \frac{a^2}{f}$	0,2054 $p \frac{a^2}{f}$	0,2119 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,4	Limites de charge	- 1 à - 0,072	- 1 à - 0,053	- 1 à - 0,023	- 1 à + 0,03
	$Mm > 0$	0,0611 $p \frac{a^2}{f}$	0,0650 $p \frac{a^2}{f}$	0,07009 $p \frac{a^2}{f}$	0,08123 $p \frac{a^2}{f}$
	$Q$	0,2220 $p \frac{a^2}{f}$	0,2247 $p \frac{a^2}{f}$	0,2297 $p \frac{a^2}{f}$	0,2353 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,3	Limites de charge	- 1 à - 0,002	- 1 à + 0,018	- 1 à + 0,051	- 1 à + 0,112
	$Mm > 0$	0,0526 $p \frac{a^2}{f}$	0,0576 $p \frac{a^2}{f}$	0,06463 $p \frac{a^2}{f}$	0,07676 $p \frac{a^2}{f}$
	$Q$	0,2491 $p \frac{a^2}{f}$	0,2512 $p \frac{a^2}{f}$	0,2558 $p \frac{a^2}{f}$	0,2640 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,2	Limites de charge	- 0,743 à + 0,082	- 0,795 à + 0,105	- 1 + $\varepsilon$ à + 0,144	- 1 à + 0,21
	$Mm > 0$	0,0421 $p \frac{a^2}{f}$	0,0474 $p \frac{a^2}{f}$	0,05527 $p \frac{a^2}{f}$	0,07047 $p \frac{a^2}{f}$
	$Q$	0,2600 $p \frac{a^2}{f}$	0,2706 $p \frac{a^2}{f}$	0,2898 $p \frac{a^2}{f}$	0,2966 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,1	Limites de charge	- 0,490 à + 0,186	- 0,529 à + 0,21	- 0,593 à + 0,254	- 0,71 à + 0,331
	$Mm > 0$	0,0346 $p \frac{a^2}{f}$	0,0391 $p \frac{a^2}{f}$	0,060 $p \frac{a^2}{f}$	0,08054 $p \frac{a^2}{f}$
	$Q$	0,2422 $p \frac{a^2}{f}$	0,2570 $p \frac{a^2}{f}$	0,2795 $p \frac{a^2}{f}$	0,3109 $p \frac{a^2}{f}$
0,00	Limites de charge	- 0,315 à + 0,315	- 0,346 à + 0,346	- 0,397 à + 0,397	- 0,49 à + 0,49
	$Mm > 0$	0,0318 $p \frac{a^2}{f}$	0,0371 $p \frac{a^2}{f}$	0,0449 $p \frac{a^2}{f}$	0,06066 $p \frac{a^2}{f}$
	$Q$	0,2336 $p \frac{a^2}{f}$	0,2490 $p \frac{a^2}{f}$	0,2733 $p \frac{a^2}{f}$	0,3093 $p \frac{a^2}{f}$

En retranchant pour chaque section, et chaque valeur de  $\gamma$ , les chiffres précédents, respectivement du moment et de la poussée dûs à la surcharge totale, on obtient de même le tableau ci-après des moments  $< 0$  maxima et des poussées correspondantes.

Dans ce tableau comme dans le précédent, les valeurs de  $M_m$  et de  $Q$  qui correspondent aux valeurs intermédiaires de  $\gamma$  s'obtiendront par interpolation linéaire.

$m_0$	Valeurs de $\gamma$			
	1	0,98	0,95	0,90
- 0,9 { $Mm < 0$ $Q$	- 0,0264 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,0251 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,02306 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,01977 $p \frac{a^2}{f}$
	0,3631 $p \frac{a^2}{f}$	0,3515 $p \frac{a^2}{f}$	0,3346 $p \frac{a^2}{f}$	0,3051 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,8 { $Mm < 0$ $Q$	- 0,0458 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,0433 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,03954 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,03358 $p \frac{a^2}{f}$
	0,3516 $p \frac{a^2}{f}$	0,3393 $p \frac{a^2}{f}$	0,3217 $p \frac{a^2}{f}$	0,2913 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,7 { $Mm < 0$ $Q$	- 0,0583 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,0550 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,04989 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,04186 $p \frac{a^2}{f}$
	0,3372 $p \frac{a^2}{f}$	0,3255 $p \frac{a^2}{f}$	0,3071 $p \frac{a^2}{f}$	0,2762 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,6 { $Mm < 0$ $Q$	- 0,0646 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,0608 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,05458 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,0451 $p \frac{a^2}{f}$
	0,3203 $p \frac{a^2}{f}$	0,3081 $p \frac{a^2}{f}$	0,2898 $p \frac{a^2}{f}$	0,2588 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,5 { $Mm < 0$ $Q$	- 0,0654 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,0609 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,05425 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,0441 $p \frac{a^2}{f}$
	0,3008 $p \frac{a^2}{f}$	0,2888 $p \frac{a^2}{f}$	0,2696 $p \frac{a^2}{f}$	0,2381 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,4 { $Mm < 0$ $Q$	- 0,0611 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,0566 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,04909 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,03923 $p \frac{a^2}{f}$
	0,2780 $p \frac{a^2}{f}$	0,2653 $p \frac{a^2}{f}$	0,2453 $p \frac{a^2}{f}$	0,2147 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,3 { $Mm < 0$ $Q$	- 0,0526 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,0485 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,04188 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,03126 $p \frac{a^2}{f}$
	0,2509 $p \frac{a^2}{f}$	0,2388 $p \frac{a^2}{f}$	0,2192 $p \frac{a^2}{f}$	0,1860 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,2 { $Mm < 0$ $Q$	- 0,0421 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,0378 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,03127 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,02247 $p \frac{a^2}{f}$
	0,2400 $p \frac{a^2}{f}$	0,2194 $p \frac{a^2}{f}$	0,1852 $p \frac{a^2}{f}$	0,1534 $p \frac{a^2}{f}$
- 0,1 { $Mm < 0$ $Q$	- 0,0346 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,0292 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,03525 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,03104 $p \frac{a^2}{f}$
	0,2578 $p \frac{a^2}{f}$	0,2330 $p \frac{a^2}{f}$	0,1955 $p \frac{a^2}{f}$	0,1391 $p \frac{a^2}{f}$
0,00 { $Mm < 0$ $Q$	- 0,0318 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,0271 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,0199 $p \frac{a^2}{f}$	- 0,01066 $p \frac{a^2}{f}$
	0,2664 $p \frac{a^2}{f}$	0,2410 $p \frac{a^2}{f}$	0,2017 $p \frac{a^2}{f}$	0,1407 $p \frac{a^2}{f}$

Pour  $m_0 > 0$  on trouverait les mêmes moments maxima positifs et négatifs et les mêmes poussées correspondantes en prenant des limites de charge symétriques par rapport à l'axe des  $y$ .

#### Effet d'une variation linéaire de l'arc.

Pour un raccourcissement  $\tau$  par unité de longueur dû au retrait et à la température on aura :

$$Q = - EI_c \tau \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{30}{17} \cdot \gamma$$

$$M = - Q y_0 = EI_c \tau \cdot \frac{y_0}{f^2} \cdot \frac{30}{17} \cdot \gamma$$

Pour un allongement  $\tau$  par unité de longueur on aurait:

$$Q = EI_c \tau \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{30}{17} \cdot \gamma$$

$$M = -Qy_0 = -EI_c \tau \cdot \frac{y_0}{f^2} \cdot \frac{30}{17} \cdot \gamma$$

### Efforts résultants.

La considération des formules précédentes et des lignes d'influence permettra de déterminer pour chaque section, le moment maximum dû à la charge permanente, aux surcharges réparties, au convoi type<sup>6)</sup> à la température et au retrait. On pourra donc évaluer pour chaque section le moment fléchissant maximum maximorum et l'effort normal correspondant d'où on déduira par les formules de flexion composée une valeur approchée des taux de fatigue maxima à craindre<sup>7)</sup>.

Si l'arc était très surbaissé, on déterminerait de même l'effort tranchant dont il conviendrait de tenir compte, celui-ci prenant une importance relative appréciable.

## II. Arc parabolique encastré à moment d'inertie réduit et à section réduite croissant respectivement de la clé aux naissances suivant les lois:

$$I = \frac{I \text{ clé}}{\left(1 - \frac{4}{5}m^2\right) \cos \alpha} \quad S = \frac{S \text{ clé}}{\left(1 - \frac{\sqrt[3]{5}-1}{\sqrt[3]{5}}m^2\right) \cos \alpha}$$

On rapportera l'arc à son axe de symétrie et à l'horizontale passant par le centre de gravité 0 de la fibre moyenne.

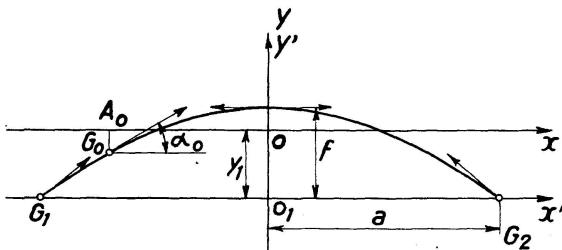


Fig. 6.

Pour déterminer l'équation de la fibre moyenne dans ce système on considérera les axes provisoires  $0_1 x' y'$  constitués par la verticale de la clé et la ligne des appuis.  $a$  désignant la  $\frac{1}{2}$  portée,  $f$  la flèche,  $m$  le paramètre

<sup>6)</sup> En raison de la forme de la ligne d'influence, le convoi type pourra donner des moments maxima supérieurs à ceux résultant de la surcharge répartie. On obtiendra généralement le moment maximum en plaçant l'essieu le plus lourd dans la section.

<sup>7)</sup> Théoriquement, les fatigues maxima ne correspondent pas rigoureusement au moment maximum, mais dans l'impossibilité où l'on se trouve généralement de tracer la ligne d'influence des fatigues du fait de l'hétérogénéité de la section, on pourra se contenter de ce calcul approché. Pour une meilleure approximation, il suffirait d'augmenter progressivement la longueur de charge et de calculer la fatigue correspondante jusqu'à détermination du maximum.

$\frac{x'}{a} = \frac{x}{a}$  on a pour équation de la fibre moyenne dans le système provisoire,  $y' = f(1 - m^2)$ . Le moment d'inertie au point  $G$  sera par hypothèse  $I = \frac{I_c}{\left(1 - \frac{4}{5}m^2\right) \cos \alpha}$  et l'ordonnée  $y_1$  du centre de gravité de la fibre moyenne sera donnée par l'équation

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(y' - y_1) a dm}{EI \cos \alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad y_1 = \frac{42}{55}f$$

L'équation cherchée de la fibre moyenne rapportée à son axe de symétrie et à l'horizontale passant par 0 sera

$$y = f\left(\frac{13}{55} - m^2\right)$$

Le moment fléchissant  $M_0$  dans une section  $G_0(x_0 y_0)$  aura pour valeur:

$$M_0 = \mu_0 + A + Bx_0 - Qy_0$$

( $\mu$  désignant le moment fléchissant dans la poutre droite de portée  $2a$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  désignant les réactions complémentaires d'appui).

L'effort normal aura pour valeur approchée:

$$N_0 = \frac{Q}{\cos \alpha_0} \quad \text{avec} \quad \cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4f^2}{a^2}m_0^2}}$$

L'effort tranchant  $T$  sera égal à

$$T_0 = \left( \frac{d\mu_0}{dx} + B \right) \cos \alpha_0 - Q \sin \alpha_0$$

D'autre part, si on considère les formules générales de déformation, on a dans le système d'axes envisagé ( $\xi, \eta$  désignant les variables courantes,  $d\sigma$  l'élément d'arc):

$$A \int \frac{d\sigma}{EI} = - \int \frac{\mu d\sigma}{EI}$$

$$B \int \frac{\xi^2 d\sigma}{EI} = - \int \frac{\mu \xi d\sigma}{EI}$$

$$Q \left[ \int \frac{\eta^2 d\sigma}{EI} + \int \left( \frac{d\xi}{d\sigma} \right)^2 \frac{d\sigma}{ES} \right] = \int \frac{\mu \eta d\sigma}{EI} \quad \text{ou} \quad Q = \frac{\int \frac{\mu \eta d\sigma}{EI}}{\int \frac{\eta^2 d\sigma}{EI}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\int \left( \frac{d\xi}{d\sigma} \right)^2 \frac{d\sigma}{ES}}{\int \frac{\eta^2 d\sigma}{EI}}}$$

(le second facteur étant le terme de Bresse que nous désignerons par  $\gamma$ ).

Si on tient compte alors, de ce que:

$$\frac{d\sigma}{I} = \frac{a \left(1 - \frac{4}{5}m^2\right) dm}{I_c}$$

$$S = \frac{S_c}{\left(1 - \frac{\sqrt[3]{5} - 1}{\sqrt[3]{5}}m^2\right) \cos \alpha} = \frac{I_c}{r_c^2(1 - 0,415m^2) \cos \alpha} \quad (r_c \text{ étant le rayon de giration de clé})$$

$$\text{soit: } \frac{d\sigma}{S} = \frac{a r_c^2 (1 - 0,415 m^2) dm}{I_c}$$

il vient tous calculs faits:

$$A = - \frac{\int \mu \left(1 - \frac{4}{5} m^2\right) dm}{22/15}$$

$$B = - \frac{\int \mu m \left(1 - \frac{4}{5} m^2\right) dm}{26/75}$$

$$Q = \gamma \cdot \frac{\int \mu \left(\frac{13}{55} - m^2\right) \left(1 - \frac{4}{5} m^2\right) dm}{f \cdot \frac{2584}{28875}}$$

$$\text{avec } \gamma = \frac{1}{r_c^2 \left[ \left(1 + \frac{0,415}{4f^2}\right) \frac{\arctg \frac{2f}{a}}{\frac{f}{a}} - \frac{0,415}{2f^2} \right] + \frac{2584}{f^2 \cdot 28875}}$$

$$\text{soit pour } \frac{f}{a} = \frac{1}{2} \quad \gamma = \frac{1}{1 + 15,56 \frac{r_c^2}{f^2}}$$

$$\frac{f}{a} = \frac{1}{3} \quad \gamma = \frac{1}{1 + 17,24 \frac{r_c^2}{f^2}}$$

$$\frac{f}{a} = \frac{1}{4} \quad \gamma = \frac{1}{1 + 18 \frac{r_c^2}{f^2}}$$

$$\frac{f}{a} = \frac{1}{5} \quad \gamma = \frac{1}{1 + 18,79 \frac{r_c^2}{f^2}}$$

Pour une variation linéaire de l'arc provoquant par exemple un allongement  $\tau$  par unité de longueur, on aurait:

$$M = -Q y_0$$

$$N = +Q \cos \alpha_0$$

$$Q = \gamma \tau \cdot EI_c \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{28875}{1292}$$

*Lignes d'influence.*

Une charge isolée  $P = 1$  agissant suivant la verticale  $x$  d'abscisse  $m a$  donnera pour

$$A = -\frac{a}{4}(1-m^2)\left(\frac{13-2m^2}{11}\right)$$

$$B = -\frac{m(1-m^2)}{4} \cdot \frac{19-6m^2}{13}$$

$$Q = \gamma \cdot \frac{a}{f} \cdot \frac{35}{32} \cdot (1-m^2)^2 \cdot \frac{151-88m^2}{323}$$

La ligne d'influence de  $Q$  aura par suite la forme suivante:

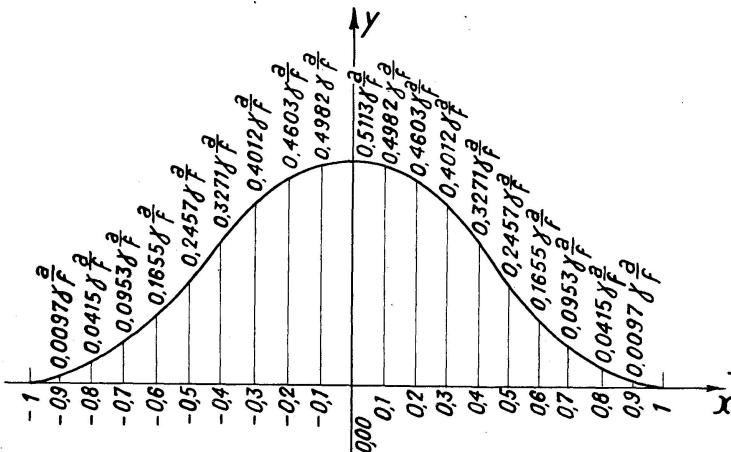


Fig. 7.

s) D'une manière plus générale, si on avait

$$I = \frac{I_c}{\left(1 - \frac{K-1}{K}m^2\right) \cos \alpha} \quad S = \frac{I_c}{r_c^2 \left(1 - \frac{\sqrt[3]{K-1}}{\sqrt[3]{K}}m^2\right) \cos \alpha}$$

$K$  étant le rapport  $\frac{I_n \cos \alpha_n}{I_c}$  il viendrait:  $y_1 = \frac{2f}{3} \cdot \frac{3(4K+1)}{5(2K+1)}$

et l'équation de la fibre moyenne rapportée à l'horizontale du centre de gravité de la fibre moyenne serait

$$y = f \left( \frac{2K+3}{5(2K+1)} - m^2 \right)$$

et on aurait  $A = -\frac{a}{4}(1-m^2) \cdot \frac{6K-(K-1)(1+m^2)}{2(2K+1)}$

$$B = -\frac{m(1-m^2)}{4} \cdot \frac{10K-3(K-1)(1+m^2)}{2(2K+3)}$$

$$Q = \gamma \cdot \frac{a}{f} \cdot \frac{35}{32} (1-m^2)^2 \frac{(8K^2+8K-1)-2(K-1)(2K+1)(1+m^2)}{8K^2+24K+3}$$

avec  $\gamma = \frac{1}{r_c^2 \left[ \left( 1 + \frac{\sqrt[3]{K-1}}{4\sqrt[3]{K}f^2} \right) \arctg \frac{2f}{a} - \frac{\sqrt[3]{K-1}}{2\sqrt[3]{K}f^2} \right] + \frac{f^2 \cdot \frac{8}{5K} \cdot \frac{8K^2+24K+3}{105(2K+1)}}{f^2 \cdot \frac{8}{5K} \cdot \frac{8K^2+24K+3}{105(2K+1)}}$

Et la poussée, résultant d'un allongement  $\tau$  par unité de longueur,

$$Q = \gamma \cdot \tau \cdot E \cdot I_c \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{525K(2K+1)}{4(8K^2+24K+3)}$$

On retrouve bien pour  $K = 1$  le cas du moment d'inertie et de la section réduits constants et pour  $K = 5$  les résultats ci-dessus.

Cette même charge unité produira dans la section située sur la verticale  $x_0$  d'abscisse  $m_0 a$  le moment:

$$M = \mu_0 + A + Bx_0 - Qy_0$$

Soit, pour  $-1 < m < m_0$

$$M = \frac{a}{2}(1+m)(1-m_0) - \frac{a(1-m^2)(13-2m^2)}{44} - \frac{am_0 m(1-m^2)(19-6m^2)}{52} \\ - \gamma a \frac{35}{32} (1-m^2)^2 \frac{(151-88m^2)}{323} \left( \frac{13}{55} - m_0^2 \right)$$

et pour  $m_0 < m < 1$

$$M = \frac{a}{2}(1-m)(1+m_0) - \frac{a(1-m^2)(13-2m^2)}{44} - \frac{am_0 m(1-m^2)(19-6m^2)}{52} \\ - \gamma a \frac{35}{32} (1-m^2)^2 \frac{(151-88m^2)}{323} \left( \frac{13}{55} - m_0^2 \right)$$

Ces équations permettent de calculer les ordonnées des lignes d'influence de  $\frac{M}{a}$  en fonction de  $\gamma$ . Les valeurs de ces ordonnées sont portées au tableau ci-après.

Pour les valeurs de  $\gamma$  voisines de 1, les lignes d'influence présenteront une ou deux zones négatives suivant la section envisagée.

Leur forme générale est celle des figures suivantes :

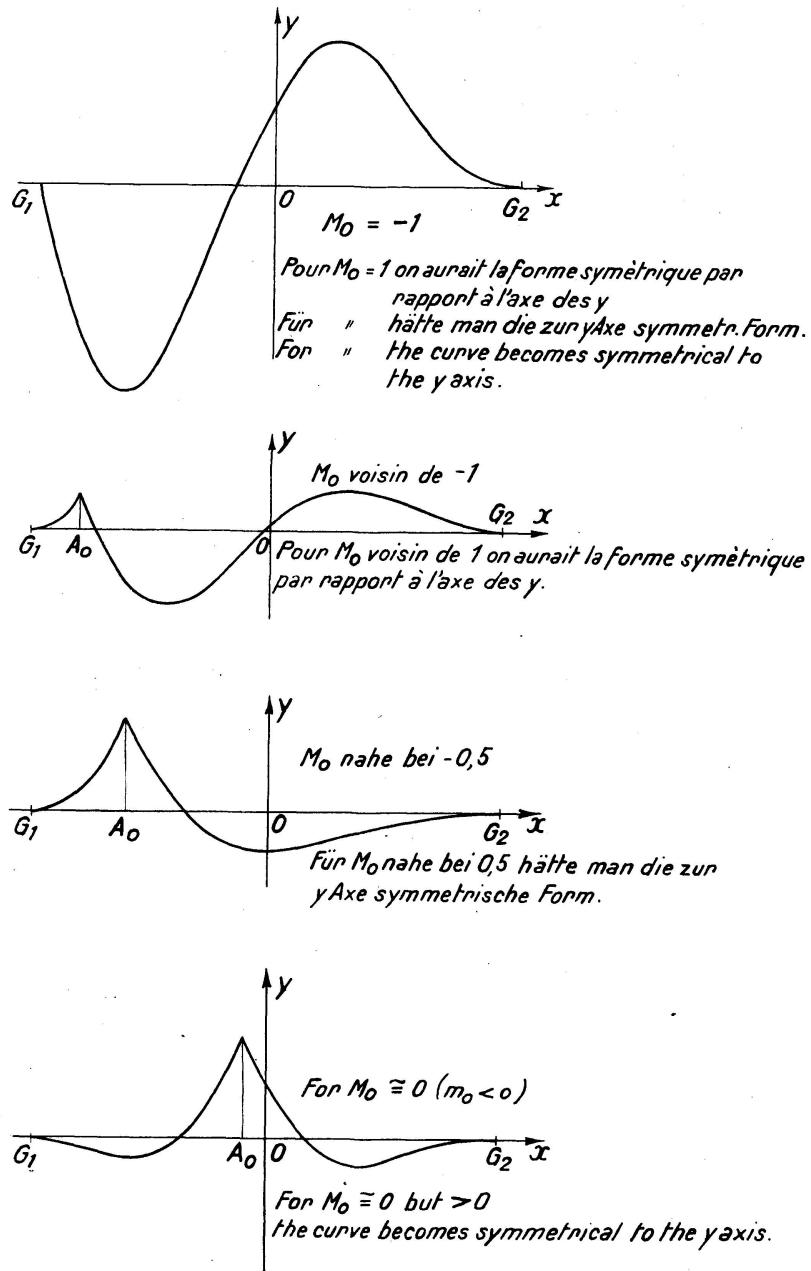


Fig. 8.

Valeurs de  $\frac{M}{a}$ 

m	$m_0$ <sup>9)</sup> =		
	0,00	- 0,2	- 0,4
- 1	0	0	0
- 0,9	+0,00086 - 0,00229 γ	+0,00156 - 0,00191 γ	+0,00226 - 0,00074 γ
- 0,8	+0,00410 - 0,00981 γ	+0,00731 - 0,00815 γ	+0,01052 - 0,00317 γ
- 0,7	+0,01068 - 0,02252 γ	+0,01863 - 0,01871 γ	+0,02658 - 0,00728 γ
- 0,6	+0,02138 - 0,03912 γ	+0,03651 - 0,03250 γ	+0,05164 - 0,01264 γ
- 0,5	+0,03692 - 0,05807 γ	+0,06168 - 0,04825 γ	+0,08644 - 0,01876 γ
- 0,4	+0,05794 - 0,07731 γ	+0,09463 - 0,06423 γ	+0,13131 - 0,02498 γ
- 0,3	+0,08486 - 0,09483 γ	+0,13548 - 0,07878 γ	+0,08610 - 0,03064 γ
- 0,2	+0,11812 - 0,10880 γ	+0,18427 - 0,09068 γ	+0,05041 - 0,03515 γ
- 0,1	+0,15796 - 0,11775 γ	+0,14075 - 0,09783 γ	+0,02354 - 0,03804 γ
0,00	+0,20456 - 0,12085 γ	+0,10456 - 0,10040 γ	+0,00456 - 0,03904 γ
+ 0,1	+0,15796 - 0,11775 γ	+0,07517 - 0,09783 γ	- 0,00762 - 0,03804 γ
+ 0,2	+0,11812 - 0,10880 γ	+0,05197 - 0,09068 γ	- 0,01417 - 0,03515 γ
+ 0,3	+0,08486 - 0,09483 γ	+0,03424 - 0,07878 γ	- 0,01638 - 0,03064 γ
+ 0,4	+0,05794 - 0,07731 γ	+0,02125 - 0,06423 γ	- 0,01543 - 0,02498 γ
+ 0,5	+0,03692 - 0,05807 γ	+0,01216 - 0,04825 γ	- 0,01260 - 0,01876 γ
+ 0,6	+0,02138 - 0,03912 γ	+0,00625 - 0,03250 γ	- 0,00888 - 0,01264 γ
+ 0,7	+0,01068 - 0,02252 γ	+0,00273 - 0,01871 γ	- 0,00522 - 0,00728 γ
+ 0,8	+0,00410 - 0,00981 γ	+0,00089 - 0,00815 γ	- 0,00232 - 0,00317 γ
+ 0,9	+0,00086 - 0,00229 γ	+0,00016 - 0,00191 γ	- 0,00054 - 0,00074 γ
+ 1	0	0	0

m	$m_0$ <sup>9)</sup> =		
	- 0,6	- 0,8	- 1
- 1	0	0	0
- 0,9	+0,00297 + 0,00120 γ	+0,00367 + 0,00392 γ	- 0,09563 + 0,00741 γ
- 0,8	+0,01372 + 0,00513 γ	+0,01693 + 0,01675 γ	- 0,17986 + 0,03169 γ
- 0,7	+0,03452 + 0,01178 γ	- 0,05753 + 0,03847 γ	- 0,24958 + 0,07277 γ
- 0,6	+0,06676 + 0,02046 γ	- 0,11811 + 0,06680 γ	- 0,30298 + 0,12638 γ
- 0,5	+0,01120 + 0,03038 γ	- 0,16404 + 0,09917 γ	- 0,33928 + 0,18762 γ
- 0,4	- 0,03200 + 0,04044 γ	- 0,19532 + 0,13203 γ	- 0,35863 + 0,24978 γ
- 0,3	- 0,06329 + 0,04960 γ	- 0,21267 + 0,16194 γ	- 0,36205 + 0,30637 γ
- 0,2	- 0,08344 + 0,05691 γ	- 0,21730 + 0,18579 γ	- 0,35115 + 0,35150 γ
- 0,1	- 0,09368 + 0,06159 γ	- 0,21089 + 0,20109 γ	- 0,32810 + 0,38044 γ
0,00	- 0,09544 + 0,06342 γ	- 0,19544 + 0,20638 γ	- 0,29544 + 0,39045 γ
+ 0,1	- 0,09040 + 0,06159 γ	- 0,17319 + 0,20109 γ	- 0,25598 + 0,38044 γ
+ 0,2	- 0,08032 + 0,05691 γ	- 0,14646 + 0,18579 γ	- 0,21261 + 0,35150 γ
+ 0,3	- 0,06599 + 0,04960 γ	- 0,11761 + 0,16194 γ	- 0,16823 + 0,30637 γ
+ 0,4	- 0,05212 + 0,04044 γ	- 0,08880 + 0,13203 γ	- 0,12546 + 0,24978 γ
+ 0,5	- 0,03736 + 0,03038 γ	- 0,06212 + 0,09917 γ	- 0,08688 + 0,18762 γ
+ 0,6	- 0,02400 + 0,02046 γ	- 0,03913 + 0,06680 γ	- 0,05426 + 0,12638 γ
+ 0,7	- 0,01316 + 0,01178 γ	- 0,02111 + 0,03847 γ	- 0,02906 + 0,07277 γ
+ 0,8	- 0,00552 + 0,00513 γ	- 0,00873 + 0,01675 γ	- 0,01194 + 0,03169 γ
+ 0,9	- 0,00125 + 0,00120 γ	- 0,00195 + 0,00392 γ	- 0,00265 + 0,00741 γ
+ 1	0	0	0

Pour  $m_0 > 0$  on trouverait pour les lignes d'influences des courbes symétriques par rapport à l'axe des  $y$ .

<sup>9)</sup> Les sections de clé et des naissances étant toujours les plus fatiguées on n'a considéré que les sections intermédiaires: 0,2, 0,4, 0,6 et 0,8.

*Effet d'une surcharge uniforme  $\bar{\omega}$  par unité de longueur répartie sur la corde de l'arc.*

On trouve:  $M = \frac{\bar{\omega} a^2}{2} \left( \frac{13}{55} - m_0^2 \right) (1 - \gamma)$  maximum à la clé et nul pour  $\gamma = 1$

$$Q = \gamma \bar{\omega} \frac{a^2}{2f} \quad ^{10)}$$

*Effet d'une surcharge  $p$  par unité de longueur répartie sur une partie de la corde de l'arc.*

Le moment  $> 0$  maximum s'obtiendra en chargeant l'arc sur le tronçon qui correspond aux ordonnées  $> 0$  de la ligne d'influence de la section.

On trouve ainsi pour les différentes valeurs de  $\gamma$ , en intégrant l'expression de  $M$  entre les limites de charge qui correspondent aux valeurs nulles de cette expression, les moments et poussées correspondantes ci-après <sup>11)</sup>.

Moments  $> 0$ .

$m_0$	$\gamma =$			
	1	0,96	0,94	0,90
$-1 \begin{cases} \text{Limites de charge} \\ Mm > 0 \\ Q \end{cases}$	-0,206 à +1 0,0906 $p a^2$ $0,3496 p \frac{a^2}{f}$	-0,174 à +1 0,0801 $p a^2$ $0,3233 p \frac{a^2}{f}$	-0,156 à +1 0,0751 $p a^2$ $0,3104 p \frac{a^2}{f}$	-0,131 à +1 0,06645 $p a^2$ $0,2844 p \frac{a^2}{f}$
	$-1 \text{ à } -0,742 \text{ et } -0,55 \text{ à } +1$			
	0,0283 $p a^2$ $0,2836 p \frac{a^2}{f}$	0,0238 $p a^2$ $0,2519 p \frac{a^2}{f}$	0,0218 $p a^2$ $0,2371 p \frac{a^2}{f}$	0,0184 $p a^2$ $0,2061 p \frac{a^2}{f}$
$-0,8 \begin{cases} \text{Limites de charge} \\ Mm > 0 \\ Q \end{cases}$	-1 à -0,367 0,0204 $p a^2$ $0,083 p \frac{a^2}{f}$	-1 à -0,374 0,02 $p a^2$ $0,0775 p \frac{a^2}{f}$	-1 à -0,377 0,0198 $p a^2$ $0,0746 p \frac{a^2}{f}$	-1 à -0,384 0,0188 $p a^2$ $0,0691 p \frac{a^2}{f}$
	$-1 \text{ à } -0,152$			
	0,0308 $p a^2$ $0,1738 p \frac{a^2}{f}$	0,0314 $p a^2$ $0,1682 p \frac{a^2}{f}$	0,0316 $p a^2$ $0,1662 p \frac{a^2}{f}$	0,0316 $p a^2$ $0,1608 p \frac{a^2}{f}$
$-0,4 \begin{cases} \text{Limites de charge} \\ Mm > 0 \\ Q \end{cases}$	-0,695 à +0,013 0,0243 $p a^2$ $0,2467 p \frac{a^2}{f}$	-0,72 à +0,026 0,02635 $p a^2$ $0,2455 p \frac{a^2}{f}$	-0,75 à +0,032 0,0273 $p a^2$ $0,2453 p \frac{a^2}{f}$	-0,796 à +0,048 0,0289 $p a^2$ $0,2445 p \frac{a^2}{f}$
	$-0,2 \text{ à } +0,242$			
	0,0177 $p a^2$ $0,2346 p \frac{a^2}{f}$	0,02 $p a^2$ $0,246 p \frac{a^2}{f}$	0,0209 $p a^2$ $0,2471 p \frac{a^2}{f}$	0,0234 $p a^2$ $0,2535 p \frac{a^2}{f}$

<sup>10)</sup> D'une manière plus générale, on trouverait

$$M = \frac{\bar{\omega} a^2}{2} \left( \frac{2K+3}{5(2K+1)} - m_0^2 \right) (1 - \gamma) \text{ et } Q = \bar{\omega} \gamma \frac{a^2}{2f}$$

indépendant de  $K$  et de même forme que pour les arcs articulés.

<sup>11)</sup> Les sections de clé et de naissances étant toujours les plus fatiguées on s'est contenté des sections intermédiaires: -0,8, -0,6, -0,4 et -0,2.

En retranchant pour chaque section et chaque valeur de  $\gamma$ , les chiffres précédents, respectivement du moment et de la poussée dûs à la surcharge totale, on obtient de même le tableau ci-après des moments  $< 0$  maxima et des poussées correspondantes.

Moments  $< 0$ .

$m_0$	1	0,96	$\gamma =$	0,90
			0,94	
-1	$M m < 0$	-0,0906 $p a^2$	-0,0954 $p a^2$	-0,0980 $p a^2$
	$Q$	$0,1504 p \frac{a^2}{f}$	$0,1567 p \frac{a^2}{f}$	$0,1596 p \frac{a^2}{f}$
-0,8	$M m < 0$	-0,0283 $p a^2$	-0,0319 $p a^2$	-0,0339 $p a^2$
	$Q$	$0,2164 p \frac{a^2}{f}$	$0,2281 p \frac{a^2}{f}$	$0,2329 p \frac{a^2}{f}$
-0,6	$M m < 0$	-0,0204 $p a^2$	-0,0225 $p a^2$	-0,0235 $p a^2$
	$Q$	$0,417 p \frac{a^2}{f}$	$0,4025 p \frac{a^2}{f}$	$0,3954 p \frac{a^2}{f}$
-0,4	$M m < 0$	-0,0308 $p a^2$	-0,0229 $p a^2$	-0,0293 $p a^2$
	$Q$	$0,3262 p \frac{a^2}{f}$	$0,3118 p \frac{a^2}{f}$	$0,3038 p \frac{a^2}{f}$
-0,2	$M m < 0$	-0,0243 $p a^2$	-0,0224 $p a^2$	-0,0214 $p a^2$
	$Q$	$0,2533 p \frac{a^2}{f}$	$0,2345 p \frac{a^2}{f}$	$0,2247 p \frac{a^2}{f}$
0,00	$M m < 0$	-0,0177 $p a^2$	-0,0153 $p a^2$	-0,0138 $p a^2$
	$Q$	$0,2654 p \frac{a^2}{f}$	$0,234 p \frac{a^2}{f}$	$0,2229 p \frac{a^2}{f}$

Dans ce tableau, comme dans les précédents, les valeurs de  $M_m$  et de  $Q$  qui correspondent aux valeurs intermédiaires de  $\gamma$  s'obtiendront par interpolation linéaire.

Pour  $m_0 > 0$  on trouverait les mêmes moments maxima  $> 0$  et  $< 0$  et les mêmes poussées correspondantes en prenant des limites de charge symétriques par rapport à l'axe des  $y$ .

*Effet d'une variation linéaire de l'arc.*

Pour un raccourcissement  $\tau$  par unité de longueur dû au retrait et à la température, on aura

$$Q = -\gamma \cdot \tau \cdot E \cdot I_c \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{28875}{1292}$$

$$M = -Qy_0 = \gamma \tau E I_c \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{28875}{1292} \cdot y_0$$

Pour un allongement  $\tau$  par unité de longueur on aurait

$$Q = \gamma \tau E I_c \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{28875}{1292}$$

$$M = -Qy_0 = -\gamma \tau E I_c \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{28875}{1292} \cdot y_0$$

*Efforts résultants:* La considération des formules précédentes et des lignes d'influence permettra de déterminer pour chaque section, le moment maximum dû à la charge permanente, aux surcharges réparties, au convoi-type<sup>12)</sup>, à la température et au retrait. On pourra donc évaluer pour chaque section le moment fléchissant maximum maximorum et l'effort normal correspondant d'où on déduira par les formules de flexion composée une valeur approchée des taux de fatigue maxima à craindre<sup>12)</sup>.

Si l'arc était très surbaissé, on déterminerait de même l'effort tranchant, dont il conviendrait de tenir compte, celui-ci prenant une importance relative appréciable.

### Résumé.

Pour obtenir une utilisation rationnelle des matériaux, il y a intérêt, dans les arcs en béton armé, à faire travailler le béton à un taux voisin du taux limite dans le plus grand nombre possible de sections.

Cette condition implique certaines lois de variation des moments d'inertie réduits et des sections réduites de l'arc.

Il y a, d'autre part, intérêt, au point de vue de la rapidité et même de l'exactitude des calculs, à envisager des lois algébriques de variation des sections permettant un calcul littéral complet, et la détermination préalable des éléments nécessaires au tracé immédiat des lignes d'influence de la poussée et du moment fléchissant, ainsi qu'à la détermination des effets d'une variation linéaire de l'arc et d'une surcharge uniformément répartie sur tout ou partie de la corde.

C'est en se basant sur ces principes que l'auteur a étudié:

d'une part,

les arcs paraboliques à 2 articulations à moments d'inertie et à sections réduites décroissant respectivement de la clé aux naissances suivant les lois:

$$I = \frac{I \text{ clé}}{(1 \pm 2 m^5) \cos \alpha} \quad S = \frac{S \text{ clé}}{[1 \mp (1 - \sqrt[3]{3}) m^5] \cos \alpha}$$

d'autre part,

les arcs paraboliques encastrés à moments d'inertie réduits et à sections réduites croissant respectivement de la clé aux naissances suivant les lois

$$I = \frac{I \text{ clé}}{(1 - \frac{4}{5} m^2) \cos \alpha} \quad S = \frac{S \text{ clé}}{\left[ 1 - \frac{\sqrt[3]{5} - 1}{\sqrt[3]{5}} m^2 \right] \cos \alpha}$$

*I* moment d'inertie courant de l'arc,

*S* section courante de l'arc,

*m* désignant le paramètre  $\frac{x}{a}$  des figures du texte,

*α* l'angle de la tangente, à la fibre moyenne avec l'horizontale, et les coefficients numériques de ces formules correspondant particulièrement au cas d'ouvrages à tympans évidés.

Dans chacun de ces cas, l'auteur a donné:

1<sup>o</sup> la valeur du terme correctif *γ* de BRESSE,

<sup>12)</sup> Mêmes observations que pour les arcs à deux articulations.

- 2<sup>o</sup> la ligne d'influence de la poussée et du moment fléchissant en fonction de la portée, de la flèche et de ce terme correctif,
- 3<sup>o</sup> l'effet d'une surcharge uniforme  $\bar{w}$  par unité de longueur, répartie sur la corde de l'arc,
- 4<sup>o</sup> l'effet d'une surcharge  $p$  par unité de longueur, répartie sur une partie de la corde de l'arc,
- 5<sup>o</sup> l'effet d'une variation linéaire de l'arc.

Les tables et formules incluses dans le texte dont les différents éléments littéraux sont définis par les figures, permettent d'obtenir aussi rapidement que pour une poutre simplement posée, les efforts maximums à craindre dans chaque section, des arcs à 2 articulations ou encastrés, dont les sections varient suivant les lois adoptées.

### Zusammenfassung.

Um eine rationelle Ausnützung der Baustoffe zu erreichen, ist es nötig, für Bogen in Eisenbeton den Beton in möglichst vielen Querschnitten bis nahe an die zulässige Grenze zu beanspruchen.

Diese Bedingung verlangt die Einführung gewisser Gesetze über die Veränderlichkeit der reduzierten Trägheitsmomente und Querschnittsflächen des Bogens.

Anderseits liegt ein Interesse vor, mit Rücksicht auf die Kürze und Genauigkeit der Berechnung, für die Veränderlichkeit der Querschnitte ein algebraisches Gesetz vorzusehen, das eine vollständige Buchstabenrechnung, eine vorgängige Bestimmung der für das unmittelbare Aufzeichnen der Einflußlinien für den Horizontalschub und für das Biegemoment erforderlichen Grundlagen, wie auch die Bestimmung der Einflüsse einer linearen Veränderlichkeit des Bogens gestattet, der mit einer gleichmäßig verteilten Last auf die ganze Sehne oder nur auf einen Teil derselben wirkend, belastet ist.

Auf Grund dieser Prinzipien hat der Autor untersucht:  
einerseits

die Zweigelenkbogen mit parabolischer Axe und reduzierten Trägheitsmomenten und Querschnittsflächen, die vom Scheitel gegen die Kämpfer hin nach den Gesetzen zunehmen:

$$I = \frac{I_{\text{Scheitel}}}{(1 \pm 2 m^5) \cos \alpha} \quad S = \frac{S_{\text{Scheitel}}}{[1 \mp (1 - \sqrt{3}) m^5] \cos \alpha}$$

anderseits:

die eingespannten Bogen mit parabolischer Axe und reduzierten Trägheitsmomenten und Querschnittsflächen, die vom Scheitel gegen die Kämpfer hin nach den Gesetzen zunehmen:

$$I = \frac{I_{\text{Scheitel}}}{\left(1 - \frac{4}{5} m^2\right) \cos \alpha} \quad S = \frac{S_{\text{Scheitel}}}{\left[1 - \frac{\sqrt[3]{5} - 1}{\sqrt[3]{5}} m^2\right] \cos \alpha}$$

$I$  Trägheitsmoment des Bogens an beliebiger Stelle,

$S$  Querschnittsfläche des Bogens an beliebiger Stelle,

$m$  bezeichnet den parameter  $\frac{x}{a}$  der Textfiguren,

$\alpha$  den Winkel der Tangente an die Bogenaxe gegenüber der Horizontalen,

und die numerischen Koeffizienten dieser Formeln entsprechen dem Sonderfall einer Brücke mit durchbrochenem Wandaufbau.

Für jeden dieser Fälle hat der Autor gegeben:

1. den Wert des Korrekturgliedes  $\gamma$  von Bresse.
2. die Einflußlinie für den Horizontalschub und für das Biegunsmoment in Funktion der Stützweite, der Pfeilhöhe und dieses Korrekturgliedes.
3. den Einfluß einer gleichmäßig verteilten Auflast  $\omega$  pro Längeneinheit, auf der Sehne des Bogens verteilt.
4. den Einfluß einer Verkehrslast  $p$  pro Längeneinheit, verteilt auf einen Teil der Bogensehne.
5. den Einfluß einer linearen Veränderung des Bogens.

Die im Text eingefügten Tabellen und Formeln, deren verschiedene Buchstabengrößen durch die Figuren erläutert sind, erlauben die Bestimmung der zu befürchtenden maximalen Beanspruchungen in jedem Querschnitt der Zweigelenkbogen oder der eingespannten Bogen, deren Querschnitte nach den angenommenen Gesetzen variieren, ebenso rasch wie für einen einfachen Balken.

### Summary.

In order to obtain rational utilization of the building material, it is necessary in the case of reinforced concrete arches to have the concrete stressed to its permissible limit in as many cross-sections as possible.

This condition demands the introduction of certain laws concerning the variation of the reduced moments of inertia and cross-sectional areas of the arch.

On the other hand, in order to make the calculation short and accurate, it is of interest to obtain an algebraic law for the variation of the cross-sections, which will allow of: (a) making a complete algebraic calculation; (b) determining temporarily the necessary fundamental data for directly drawing the influence lines for the horizontal shear and for the bending moments; and also (c) determining the effects of a linear variation of the arch loaded with a uniformly distributed load acting on the whole chord or only on part of it.

Adopting this principle as basis, the author has investigated:  
on the one hand

two-hinged parabolic arches with reduced moments of inertia and cross-sectional areas, which increase, in accordance with the laws, from the crown towards the imposts:

$$I = \frac{I_{\text{crown}}}{(1 \pm 2 m^5) \cos \alpha} \quad S = \frac{S_{\text{crown}}}{[1 \mp (1 - \sqrt[3]{3}) m^5] \cos \alpha}$$

on the other hand:

fixed parabolic arches with reduced moments of inertia and cross-sectional areas, which increase, in accordance with the laws, from the crown towards the imposts:

$$I = \frac{I_{\text{crown}}}{\left(1 - \frac{4}{5} m^2\right) \cos \alpha} \quad S = \frac{S_{\text{crown}}}{\left[1 - \frac{\sqrt[3]{5} - 1}{\sqrt[3]{5}} m^2\right] \cos \alpha}$$

$I$  = moment of inertia of the arch at any point,

$S$  = cross-sectional area of the arch at any point,

$m$  = the parameter  $\frac{x}{a}$  of the figures in the text,

$a$  = angle of inclination to the horizontal of the tangent to the arch centre line

whilst the numerical coefficients of these formulae correspond to the special case of a bridge with openings in the sides.

For each of these cases the author has given:

1. the value of the correcting factor  $\gamma$  of Bresse.
2. the influence line for the horizontal shear and for the bending moment as a function of the distance between supports, rise of arch, and this correcting factor.
3. the influence of a uniformly distributed dead load  $\bar{\omega}$  per unit of length, distributed on the chord of the arch.
4. the influence of a live load  $p$  per unit of length, distributed on a part of the chord of the arch.
5. the influence of a linear variation of the arch.

The tables and formulae given in the text, — the different sizes of the letters in them are explained by the figures, — allow to determine the maximum stressing to be feared in each cross-section of two-hinged arches or in fixed arches whose cross-sections vary according to the assumed laws as quickly as in the case of a simple beam.