Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 1 (1932)

Artikel: Beitrag zur allgemeinen Lösung des Knickproblems

Autor: Broszko, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-702

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BEITRAG ZUR ALLGEMEINEN LÖSUNG DES KNICKPROBLEMS

CONTRIBUTION À LA THÉORIE GÉNÉRALE DU FLAMBAGE CONTRIBUTION TO THE GENERAL THEORY OF BUCKLING

> M. BROSZKO, Professor an der Technischen Hochschule Warschau.

1. Die Richtigkeit der Engesser-v. Karman'schen Theorie, welche seit ihrer Aufstellung (1909) als einwandfreie allgemeine Lösung des grundlegenden Knickproblems gegolten hat, wurde erst vor einigen Jahren vom Verfasser dieser Arbeit erstmals in Zweifel gezogen. Zur Darlegung des die Irrtümlichkeit dieser Theorie beweisenden Widerspruches zwischen ihren Ergebnissen und den Erfahrungstatsachen stand zu jener Zeit nur eine einzige hinreichend genaue Versuchsreihe zur Verfügung, und zwar diejenige Reihe von Knickversuchen, die von v. Karman an Modellstäben aus Chrom-Nickel-

Stahl im Jahre 1908 durchgeführt wurde.

Das Ergebnis der in Abb. 1 zur Darstellung gebrachten 1) Überprüfung der Engesser-v. Kármán'schen Theorie anhand der v. Kármán'schen Knickversuche fand anfänglich nur wenig Beachtung, obwohl bereits aus dieser Darstellung die Unvereinbarkeit der zur Überprüfung benutzten Versuchsresultate mit dem Verlauf der v. Kármán'schen theoretischen Knickspannungslinie ganz klar ersehen werden konnte 2). Die Zurückhaltung in der Beurteilung des Ergebnisses der vom Verfasser durchgeführten Überprüfung war aber verständlich. Wurde doch die gleiche Versuchsreihe in den Vorjahren von v. Kármán zu dem entgegengesetzten Zwecke, d. i. zur Darlegung der angeblichen Richtigkeit seiner Theorie mit scheinbarem Erfolg benutzt, nachdem zuvor die in Abb. 1 so klar zum Vorschein gelangende Unstimmigkeit in der analogen Figur 23 des v. Kármán'schen Berichtes 3) durch Anwendung einer unzulässigen Maßnahme, und zwar durch Fortlassung des störenden Kurvenstücks BCD, Abb. 1, dem Augenmerk des Lesers entzogen wurde 4).

kleiner sind als die Fließspannung.

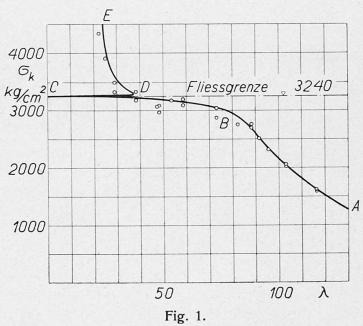
3) Th. v. Karman: Untersuchungen über Knickfestigkeit. Dissert. Göttingen 1909; Mitt. über Forschungsarb. a. d. Geb. d. Ingenieurwesens, Heft 81. Berlin 1910.

¹⁾ In der Abb. 1 bezeichnet σ_k die Knickspannung und λ den Schlankheitsgrad.
2) Beim Anblick der Abb. 1 erkennt man nämlich sofort, daß die experimentell festgestellten Knickspannungswerte σ_k mit abnehmendem Schlankheitsgrad λ systematisch, und zwar weit über die Fließgrenze hinaus anwachsen, wogegen die Ordinatenwerte des untersten, also maßgebenden Zweiges der theoretischen Knickspannungslinie durchgängig kleiner sind als die Fließspannung

⁴⁾ Sonderbarerweise scheint diese unzulässige Maßnahme selbst bei solchen Forschern Billigung gefunden zu haben, die sonst kaum geneigt wären, die Meinung zu verfechten, daß es bei der Überprüfung einer physikalischen Theorie an Hand von Versuchsergebnissen zulässig sei, einen beliebig herausgegriffenen Teil des aus den Grundannahmen dieser Theorie sich zwangläufig ergebenden funktionalen Zusammenhanges einfach über Bord zu werfen, und die entstandene Lücke mit einem ganz willkürlich gewählten, zahlenmäßig nicht begründeten Zusammenhange auszufüllen.

Außerdem bestand damals immerhin noch die schwache Hoffnung, daß bei späteren Knickversuchen sich vielleicht doch die Unhaltbarkeit der aus den Ergebnissen nur einer einzigen Versuchsreihe abgeleiteten Einwände herausstellen werde.

Diese Hoffnung ist aber nicht in Erfüllung gegangen, als vor Jahresfrist das Ergebnis von weiteren drei Knickversuchsreihen bekannt geworden ist ⁵), die auf Veranlassung des Deutschen Stahlbau-Verbandes unter Leitung von W. Rein im Staatlichen Materialprüfungsamt zu Berlin-Dahlem durchgeführt wurden. Denn die Unstimmigkeit der Ergebnisse dieser Knickversuche mit den zugehörigen, nach der Engesser-v. Kármán'schen Theorie berechneten Knickspannungswerten erwies sich als so übermäßig groß, daß der Versuchs-



Fließgrenze — Limite d'écoulement — Yield point.

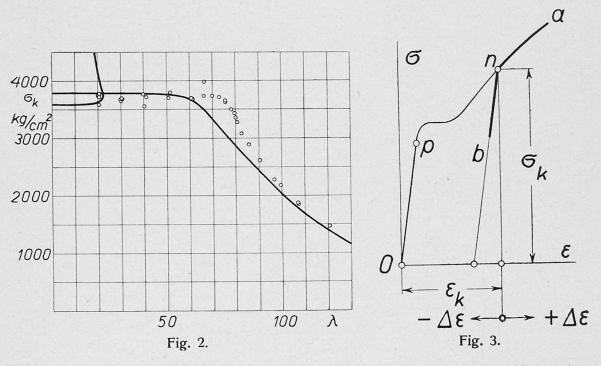
leiter bei der endgültigen Auswertung der Dahlemer Meßergebnisse von der Anwendung der Engesser-v. Kármán'schen Theorie Abstand nehmen mußte, obwohl der ursprüngliche Versuchsplan sich genau auf den von Engesser und v. Kármán gegebenen Grundlagen aufbaute. Der Grad der Unstimmigkeiten, die dabei zu Tage getreten sind, möge aus der Abb. 2 ersehen werden. In der letzteren sind die Ergebnisse der Knickversuche an Stäben aus Silicium-Stahl demjenigen von Rein auf Grund der Engesser-v. Kármán'schen Theorie abgeleiteten Knickspannungsschaubild gegenübergestellt worden, welches im plastischen Bereich noch die kleinsten Abweichungen der theoretischen Knickspannungswerte von den durch Knickversuche gewonnenen ergibt.

2. Die Unvereinbarkeit der Ergebnisse der Engesser-v. Kármán'schen Knickungstheorie mit den Erfahrungstatsachen könnte entweder die Unrichtigkeit der dieser Theorie zugrunde gelegten physikalischen Annahmen, oder einen in der Rechnung begangenen Fehler zur Ursache haben. Da nun aber die einschlägige Rechnung nachgewiesermaßen fehlerfrei ist, so kommt als Ursache der Unstimmigkeiten nur die Irrtümlichkeit der physikalischen Grundannahmen in Frage.

⁵) W. Rein: Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle. Berlin, J. Springer, 1930.

Die physikalischen Ansätze der Engesser-v. Kármán'schen Theorie haben bekanntlich die Bestimmung der Verteilung derjenigen Normalspannungen σ zum Zweck, die in einem beliebigen Querschnitt eines durch die Knicklast P_k achsial zusammengedrückten Stabes nach dessen unendlich schwacher Ausbiegung wirken. Der Inhalt dieser Ansätze läßt sich zu folgenden drei Annahmen zusammenfassen:

- I. Die ebenen Querschnitte des ungebogenen Druckstabes bleiben auch nach dessen unendlich schwacher Ausbiegung eben.
- II. Zwischen den einem beliebig herausgegriffenen Querschnittspunkte zugeordneten Werten der spezifischen Verkürzung ε und der Spannung σ besteht bei Ausbiegung des Druckstabes ein funktionaler Zusammenhang $\sigma = f(\varepsilon)$, welcher mit demjenigen Zusammenhange identisch ist, der an dem gleichen, aber nicht ausgebogenen Druckstabe festgestellt werden könnte,



wenn die spezifische Verkürzung des letzteren vor Erreichung des gleichen Endwertes in der gleichen Weise die gleiche Reihe von Zwischenwerten durchgelaufen hätte wie die dem vorerwähnten Querschnittspunkte zugeordnete spezifische Verkürzung.

III. Die Form des funktionalen Zusammenhanges $\sigma=f(\varepsilon)$ hängt nur davon ab, ob die dem betreffenden Querschnittspunkte zugeordnete spezifische Verkürzung (deren durch die Knicklast hervorgerufener Wert mit ε_k bezeichnet werden möge) infolge der Ausbiegung eine positive oder eine negative Änderung $\Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_k$ erfahren hat. Und zwar ist der Zusammenhang $\sigma=f(\varepsilon)$ für diejenigen Querschnittspunkte, denen positive Werte von $\Delta \varepsilon$ zugeordnet sind, durch den Ast na des Druckstauchungsdiagramms, Abb. 3, bestimmt. Für diejenigen Querschnittspunkte dagegen, denen negative Werte von $\Delta \varepsilon$ zugeordnet sind, ist dieser Zusammenhang durch die Gerade nb gegeben, die zu dem geradlinigen Teil Op des Druckstauchungsdiagramms parallel verläuft.

Das Zutreffen der ersten Grundannahme der Engesser-v. Kármán'schen Theorie steht außer jedem Zweifel 6). Die zweite Grundannahme ist — wie v. Kármán ganz richtig in seinem Bericht³) bemerkt — an und für sich einleuchtend. Trifft nun aber die zweite Grundannahme zu, so kann die dritte unmöglich zutreffend sein. Denn einem jeden in der Biegungsebene liegenden Querschnittspunkte ist, gemäß der ersten Annahme, ein anderer Wert der spezifischen Verformungsgeschwindigkeit $\frac{J \varepsilon}{J t}$ zugeordnet. Infolgedessen muß in jedem dieser Querschnittspunkte ein anderes Formänderungsgesetz gelten, da ja der Verlauf des zufolge der zweiten Grundannahme bestimmten funktionalen Zusammenhanges $\sigma = f(\varepsilon)$ in hohem Grade von der Geschwindigkeit abhängt, mit der die Formänderung vorgenommen wurde. Mit dieser aus den beiden ersten Annahmen gezogenen Folgerung steht aber der Inhalt der dritten Grundannahme in offenkundigem Widerspruch. Denn der letzterwähnten Annahme zufolge gäbe es nur zwei verschiedene Formänderungsgesetze, und zwar ein auf der Biegedruckseite und ein auf der Biegezugseite geltendes. Infolgedessen muß die mit den richtigen Annahmen I und II in Widerspruch stehende Annahme III unbedingt unrichtig sein. Die Unrichtigkeit der letzteren hat aber eben die Unrichtigkeit der aus den Grundannahmen abgeleiteten Spannungsverteilung, und damit auch die Unrichtigkeit der auf Grund der Engesser-v. Kármán'schen Theorie bestimmten Knicklast zur Folge.

3. Die Verteilung der Spannungen σ über den Querschnitt eines achsial zusammengedrückten und unendlich schwach ausgebogenen Stabes kann derzeit weder auf theoretischem Wege noch auf dem Versuchswege bestimmt werden. Trotz Unkenntnis dieser Verteilung ist aber das Knickproblem doch vollständig lösbar, wenn man der Berechnung der Knicklast die beiden ersten v. Kármán'schen Annahmen zugrunde legt, und außerdem die beiden nachstehend angeführten Erfahrungstatsachen beachtet, auf Grund deren gewisse allgemeine Eigenschaften der unbekannten Spannungsverteilung ermittelt werden können.

Die erste dieser Erfahrungstatsachen beinhaltet eine ganz allgemeine, aus unzähligen Druck- und Zugversuchen abgeleitete Eigenschaft anorganischer Konstruktionsstoffe (Metalle, Steine, Beton). Sie läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Jede Anderung der Achsialbelastung eines zentrisch gedrückten prismatischen Stabes, dessen Spannung und spezifische Verkürzung vor der Belastungsänderung die Werte σ_0 bezw. ε_0 hatten, wird stets von einer Verminderung des Wertes von $\overline{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ begleitet, gleichviel ob die Belastungsänderung eine Entlastung oder Mehrbelastung war. Die im Laufe eines bestimmten Zeitintervalls Δt erfolgte Verminderung der Größe $\overline{E}_0 = \frac{\sigma^0}{\varepsilon_0}$ ist dabei umso größer, je größer die spezifische Verformungsgeschwindigkeit $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t}$ gewesen ist.

⁶⁾ Die beste Rechtfertigung für diese Annahme besteht darin, daß die unzähligen aus ihr gezogenen Folgerungen in bester Übereinstimmung mit der Erfahrung stehen. Außerdem ist aber von Grüning und Krohn auch auf theoretischem Wege bewiesen worden, daß diese Annahme bei unendlich schwacher Ausbiegung zutrifft, gleichviel wie das Gesetz, durch welches die Formänderung mit der Spannung zusammenhängt, beschaffen ist.

Die zweite Erfahrungstatsache wird ausgedrückt durch die Feststellung, daß bei experimentellen Untersuchungen der Spannungsverteilung in gebogenen homogenen Stäben niemals Diskontinuitäten irgendwelcher Art festgestellt werden konnten. Auf unser Problem angewandt, berechtigt diese Erfahrungstatsache zu der Behauptung, daß die wirkliche Spannungsverteilungskurve, deren Verlauf nicht genau angegeben werden kann, allenfalls (und zwar im Gegensatz zu dem v. Kármán'schen Linienzug anb, Abb. 3) an keiner Stelle eine Unstetigkeit ihrer Krümmung aufweisen kann.

Aus den vorstehenden Ausführungen folgt, daß der v. Kármán'sche Linienzug anb, Abb. 3, zur sinnfälligen Darstellung der unbekannten Spannungsverteilung im Querschnitt eines unendlich schwach ausgebogenen Druckstabes benutzt werden darf, sofern nur nicht außer Acht gelassen wird, daß die beiden Äste an und bn dieses Linienzugs, gemäß der zweiten Erfahrungstatsache, als im Punkte n ohne Knick ineinander übergehend betrachtet werden müssen. Denn dieser Linienzug ist ja in seiner ganzen Ausdehnung mit der ersten Erfahrungstatsache verträglich 7), und gegen die zweite Erfahrungstatsache verstößt er nur im Punkte n. Und außerdem kommt es doch bei einer unendlich schwachen Ausbiegung nur auf die dem Punkte n unendlich benachbarten Teile des Linienzugs anb an. Auf Grund eines derart aufgefaßten v. Kármán'schen Schaubildes der Spannungsverteilung wurde vom Verfasser vor einigen Jahren bewiesen 8), daß der niedrigste kritische Lastwert eines prismatischen Stabes, dessen gelenkig gelagerte Enden längs der ursprünglich geraden Stabachse geführt werden, durch die Gleichung

$$P_k = \pi^2 \cdot \frac{(1 - \varepsilon_k) \cdot \overline{E}_k \cdot J}{I^2} \tag{1}$$

gegeben ist, in der J das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche des Knickstabes in Bezug auf die zur Biegungsebene senkrechte Schwerpunktsachse, und l die Stablänge im Moment des Ausknickens bezeichnet. Selbstverständlich kann aber die Gleichung (1) auch ohne Bezugnahme auf die Abb. 3 abgeleitet werden. Es ist dann (wie auch bei der letztbesprochenen Behandlungsart der Aufgabe) nur zu beachten, daß im Geltungsfalle der beiden ersten v. Kármán'schen Grundannahmen, sowie der beiden vorerwähnten Erfahrungstatsachen die den einzelnen Querschnittspunkten zugeordneten Werte

der Größe $\overline{E}=rac{\sigma}{\varepsilon}$ untereinander nur um unendlich kleine Beträge zweiter Kleinheitsordnung differieren, wenn die Durchbiegung der Stabachse eine unendlich kleine Größe erster Kleinheitsordnung ist.

Vernachlässigt man nun in üblicher Weise ε_k gegen die Einheit, so kann die Gleichung (1) auf die überraschend einfache Form

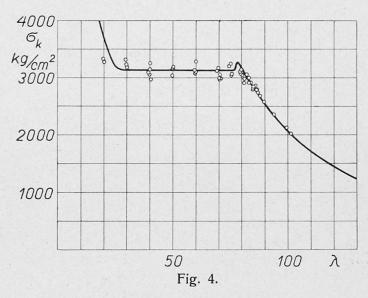
$$\varepsilon_k = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \tag{2}$$

gebracht werden. Die gute Übereinstimmung der auf Grund dieser Gleichung bestimmten theoretischen Knickspannungslinie mit den Versuchsresultaten möge aus der Abb. 4 ersehen werden 9). In der letzteren wurden die Ergeb-

⁷⁾ In diesem Fall ist $\sigma_0 \equiv \sigma_k$, $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_k$ und $\bar{E_0} \equiv \bar{E_k}$.
8) C. R. Acad. Sci. Paris 186 (1928), S. 1041.
9) Die Streuung der Versuchspunkte ist durch die nicht unerheblichen Unterschiede der Prüfstäbe in Bezug auf ihre elastomechanische Eigenschaften bedingt. Sie würde ganz erheblich kleiner ausfallen, wenn man die Überprüfung der Gleichung (2) anhand

6 M. Broszko

nisse der umfangreichsten, an Prüfstäben aus St. 48 durchgeführten Dahlemer Knickversuchsreihe der zugehörigen, auf Grund der Gleichung (2) aus den Druckversuchen abgeleiteten Knickspannungslinie gegenübergestellt. Eine gleich gute Übereinstimmung läßt sich auch bei der Überprüfung der Gl. (2) anhand der übrigen Knickversuchsreihen feststellen.



4. In dem vorerwähnten Bericht 5) hat Rein eine verbesserte Engesserv. Karman'sche Knickungstheorie veröffentlicht. Die Verbesserung besteht in der Angabe eines sehr umständlichen graphischen Berechnungsverfahrens, das aus geänderten, sehr anfechtbaren physikalischen Annahmen abgeleitet wird. Die Ergebnisse dieses verbesserten Berechnungsverfahrens stimmen aber mit den Versuchsresultaten nicht überein. Infolgedessen sah sich Rein genötigt, ganz willkürliche "Abminderungsbeiwerte" zwecks Verbesserung der mangelhaften Übereinstimmung in die Berechnung einzuführen. Allein wegen der Notwendigkeit der Einführung solcher willkürlichen Zutaten würde schon die Brauchbarkeit des Rein'schen Berechnungsverfahrens sehr in Frage gestellt sein müssen. Indessen ist das Rein'sche Verfahren nicht nur unbrauchbar, sondern es ist auch irrig. Denn es wurde von Rein bei der mathematischen Verarbeitung seiner physikalischen Ansätze außer Acht gelassen, daß demjenigen Teile des Druckstauchungsdiagramms, der zwischen der oberen und der unteren Fließgrenze enthalten ist, imaginäre Werte des v. Kármán'schen Knickmoduls entsprechen. Dieses Versehen hat zur Folge, daß die nach dem Rein'schen Verfahren in mathematisch korrekter Weise berechneten Knickspannungen im plastischen Bereich durchgängig imaginäre Werte annehmen.

der gemessenen spezifischen Verkürzungen ε_k der Stabachse im Moment des Ausknickens vornehmen würde. Ob die Werte von ε_k in Berlin-Dahlem gemessen wurden, ist aber aus dem Rein'schen Bericht nicht zu ersehen.

Zusammenfassung.

Die vom Verfasser bereits vor einigen Jahren ausgesprochene Behauptung, daß die Ergebnisse der Engesser-v. Karman'schen Knicktheorie mit den Erfahrungstatsachen nicht vereinbar seien, hat im Endresultat der auf Veranlassung des Deutschen Stahlbau-Verbandes durchgeführten Knick- und Druckversuche volle Bestätigung gefunden. Die Unrichtigkeit der Ergebnisse der Engesser-v. Kármán'schen Theorie ist durch den Widerspruch verursacht, der zwischen einer physikalischen Grundannahme dieser Theorie und den Ergebnissen einfacher Druck-Zug-Versuche besteht. Nach Beseitigung desjenigen Teiles der v. Kármán'schen physikalischen Ansätze, der mit den Versuchsergebnissen unvereinbar ist, läßt sich aber unter Hinzuziehung gewisser Erfahrungstatsachen eine exakte Theorie der unelastischen Stabknickung aufstellen. Das Endergebnis dieser vom Verfasser aufgestellten Theorie bildet die überraschend einfache Knickformel

$$\varepsilon_K = \frac{\pi^2}{\lambda^2}$$

in der ε_{k} den Wert der spezifischen Verkürzung der Stabachse im Augenblick des Ausknickens, und λ den Schlankheitsgrad des Knickstabes bedeutet. Die aus dieser Knickformel auf Grund der Druckversuche abgeleiteten theoretischen Knickspannungslinien weisen einen Verlauf auf, der mit den Ergebnissen der zuverlässigsten Knickversuche sehr gut übereinstimmt.

Zum Schluß wird gezeigt, daß das von W. Rein angegebene sehr umständliche Berechnungsverfahren nicht nur (wegen willkürlicher Zutaten) unbrauchbar, sondern auch irrig ist.

Résumé.

L'opinion émise, il y a déjà plusieurs années par l'auteur, que les résultats obtenus par l'emploi de la théorie du flambage d'Engesser et v. Karman ne concordent pas avec ceux donnés par la pratique, s'est trouvée entièrement vérifiée par le résultat final des essais de compression et de flambage entrepris sous les auspices de l'Association Allemande pour les Constructions en Acier (Deutscher Stahlbau-Verband). L'inexactitude des résultats donnés par la théorie d'Engesser et v. Karman provient de la contradiction existant entre une hypothèse fondamentale physique de cette théorie et les résultats de simples essais à la traction et à la compression. En laissant de côté, dans la théorie de v. Karman, les considérations de nature physique qui, ne cadrent pas avec les résultats d'expérience, on arrive, en se servant de certains faits déduits de la pratique, à établir une théorie exacte du flambage d'une barre rigide.

Le résultat final de cette théorie établie par l'auteur est représenté par la formule de flambage remarquablement simple:

$$\varepsilon_K = \frac{\pi^2}{\lambda^2}$$

dans laquelle ε_k représente la valeur de la diminution spécifique de longueur de l'axe de la barre, en raison du flambage et λ le degré de finesse. Les courbes de tension de flambage déduites de cette formule concordent parfaitement avec les résultats d'essais très précis.

Il est finalement démontré que le mode de calcul très compliqué, indiqué par W. Rein est non seulement inutilisable en raison de données arbitraires, mais encore inexact.

Summary.

The assertion made by the author some years ago, that the results of the Engesser-v. Karman theory were not in agreement with actual facts, has finally been fully confirmed by the buckling and rupture tests carried out on the instigation of the German Structural Steel Association (Deutscher Stahlbau-Verband). The incorrectness of the results of the Engesser-v. Karman theory is caused through the contradiction which exists between a basic physical assumption of this theory and the results of simple compression and tensile tests. After eliminating that part of the Karman physical assumptions which does not agree with test results, an exact theory of the unelastic buckling of a bar may be established by making use of certain facts made known by experience. The final result of this theory developed by the author gives the surprisingly simple buckling formula

$$\varepsilon_K = \frac{\tau \epsilon^2}{\lambda^2}$$

where ε_k is the specific shortening of the axis of the bar at the moment buckling commences, and λ is the slenderness ratio of the buckled bar. The theoretical buckling stress lines derived from this formula as the result of compression tests run in a way which agrees very well with the results of reliable buckling tests.

Finally, it is shown that the very complicated method of calculation given by W. Rein is not only unuseable because of arbitrary assumptions, but is also erroneous.