

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 1 (1932)

Artikel: Stabilität leicht gekrümmter Rechteckplatten

Autor: Schleicher, Ferd.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-734>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

STABILITÄT LEICHT GEKRÜMMTER RECHTECKPLATTEN

STABILITÉ DES PLAQUES RECTANGULAIRES LÉGÈREMENT BOMBÉES

STABILITY OF SLIGHTLY BENT RECTANGULAR PLATES

Dr. Ing. FERD. SCHLEICHER,
in Mainz-Gustavsburg, Privatdozent an der Technischen Hochschule, Karlsruhe.

Ebene Platten aus homogenem isotropen Material, die nur durch in ihrer Mittelebene wirkende Kräfte beansprucht sind, erleiden einen ebenen Spannungszustand und ihre Mittelfläche $z = 0$ bleibt eben. Hat dagegen die Mittelfläche von vorneherein gewisse Abweichungen von der theoretischen Ebene, so treten bei Reckung der Platte auch Biegungs- und Drillungsspannungen auf und die Gestalt der Mittelfläche ändert sich stetig mit der Intensität φ des Belastungszustandes.

Im Folgenden werden Rechteckplatten untersucht, die an allen Seiten gelenkig gelagert und an zwei gegenüberliegenden Seiten gleichmäßig durch Druckspannungen σ_x belastet sind. Für eine Platte, die längs der einen Mittellinie in bekannter Weise zur Ausbiegung gezwungen ist, wird der Biegungszustand abhängig von der Größe der Längsspannungen σ_x bestimmt, sodaß es auch möglich ist, den Einfluß der Störung auf Spannungen und Stabilität der Platte zu übersehen. Die Rechnungen setzen unbegrenzte Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes voraus und werden in Verhältniszahlen durchgeführt¹⁾. Die zugrundegelegte Differentialgleichung fordert im Verhältnis zur Plattendicke kleine Durchbiegungen w .

1. Grundlagen.

Eine im spannungslosen Zustand ebene Platte wird durch Längsspannungen (Druck $\varphi > 0$)

$$\sigma_x = -\varphi \sigma_E, \quad \text{mit} \quad \sigma_E = \frac{\pi^2 D}{b^2 h}, \quad (1)$$

gemäß der Plattenbiegungsgleichung²⁾

$$\nabla_{\xi, \eta}^4 w + \pi^2 \varphi w''_{\xi} = 0 \quad (2)$$

gebogen. Es ist D = Plattensteifigkeit, $w(\xi, \eta)$ = Durchbiegung, die Verhältniszahlen ξ, η, α sind durch Abb. 1 erklärt.

¹⁾ FERD. SCHLEICHER, Die Knickspannungen von eingespannten rechteckigen Platten. Mitt. Forschungsanstalten des G. H. H.-Konzerns, Nürnberg, 1931, Bd. 1, Heft 8.

²⁾ H. REISSNER, Energiekriterium der Knicksicherheit. Z. A. M. M. (5), 1925, S. 475.

Die Bedingungen $w = 0$ und $b_y = 0$ für die Längsränder $\eta = 0$ und $\eta = 1$ werden durch

$$w(\xi, \eta) = \sin \pi \eta \cdot X(\xi) \quad (3)$$

erfüllt, wenn ist

$$X^{IV} + \pi^2 (\varphi - 2) X'' + \pi^4 X = 0. \quad (4)$$

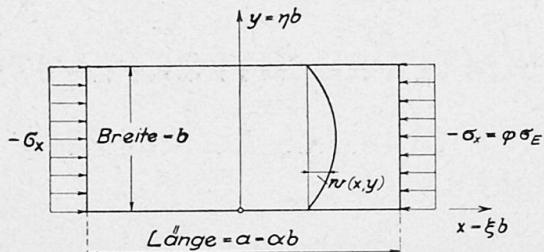


Fig. 1.

Bezeichnungen — Signes — Signs
Länge — Longueur — Length.
Breite — Largeur — Height.

Die Beschränkung auf den Fall einer Halbwelle $\nu' = 1$ nach der η -Richtung ist ohne Bedeutung. Die nachstehenden Entwicklungen können sinngemäß auch angewendet werden, wenn

$$w(\xi, \eta) = \sin \nu' \pi \eta \cdot X(\xi), \quad \text{mit } \nu' = 2, 3, 4 \dots,$$

ist. Es ist dann b durch b/ν' zu ersetzen, sodaß σ_E u. s. w. auf die Halbwellenbreite bezogen wird.

Die Exponenten r der Lösungen

$$X(\xi) = C e^{r\xi} \quad (5)$$

von Differentialgleichung (4) genügen der Hauptgleichung

$$r^4 + \pi^2 (\varphi - 2) r^2 + \pi^4 = 0. \quad (6)$$

Für die Untersuchung sind, je nach der Größe von φ , fünf Fälle zu unterscheiden. Die Gleichung der Biegungsfläche $w(\xi, \eta)$ ist im folgenden, so weit nichts anderes vermerkt ist, jeweils nur für den Lösungsbereich

$$0 \leq \xi \leq +0,5 a$$

angeschrieben.

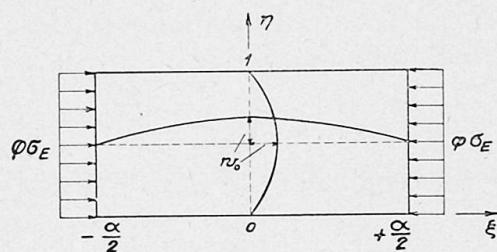


Fig. 2.

Anfängliche Ausbiegung —
Flexion préexistante —
Original Deflection.

2. Freiaufliegende Rechteckplatte mit Störung.

Die Platte sei längs der Mittellinie $\xi = 0$ (Abb. 2) zu einer sinusförmigen Ausbiegung gezwungen,

$$w(0, \eta) = w_0 \sin \pi \eta, \quad (7)$$

deren Betrag bekannt ist. Die dafür notwendige Linienebelastung ergibt sich (Abb. 3) aus der Gleichgewichtsbedingung zu

$$q = n_x(o - \delta \xi) - n_x(o + \delta \xi).$$

Nun gilt für den Ansatz (3) allgemein

$$n_x = -\frac{D}{b^3} \sin \pi \eta \cdot (X''' - \pi^2 X').$$

Der Gesamtbetrag Q der Querbelastung in der Mittellinie $\xi = 0$ folgt somit durch Integration über die Plattenbreite b und unter Beachtung von

$$X'_{o+\delta\xi} = X'_{o-\delta\xi} \quad \text{zu} \\ Q = +\frac{2D}{\pi b^2} (X'''_{o+\delta\xi} - X'''_{o-\delta\xi}), \quad (8)$$

die Verteilung erfolgt gemäß

$$q = \frac{\pi Q}{2b} \sin \pi \eta. \quad (9)$$

Die Randbedingungen $w = 0$ und $b_x = 0$ für die Querseiten der Platte liefern

$$X = 0, \quad X'' = 0 \quad \text{für} \quad \xi = \pm 0,5 \alpha. \quad (10)$$

Die Lastgerade $\xi = 0$ ist Grenze der Lösungsbereiche. Es müssen somit die folgenden drei Übergangsbedingungen erfüllt sein:

$$X, X', X''(o - \delta\xi) = X, X', X''(o + \delta\xi). \quad (11)$$

Diese Gleichungen sind, außer der Forderung eines stetigen Übergangs in Durchbiegung w und Neigung w' , auch noch der Bedingung gleichwertig,

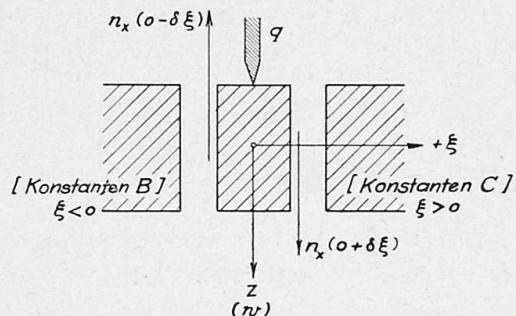


Fig. 3.
Gleichgewichtsbedingungen —
Conditions de stabilité —
Conditions of Stability.

daß die Biegunsmomente b_x und die Drillungsmomente d_x beiderseits der Mittellinie gleich groß sind.

Man kann, wie unter Nr. 6 und 7 angedeutet ist, allgemein zeigen, daß für obige Störung alle stabilen Gleichgewichtslagen symmetrisch bezüglich $\xi = 0$ sind. Diese Tatsache wird in Nr. 3 bis 5 (ohne Beweis) zur Vereinfachung der Rechnung benutzt.

3. Zugspannungen $\varphi < 0$.

Es gilt der Ansatz

$$X(\xi) = C_1 \operatorname{Cos} \zeta_1 \xi + C_2 \operatorname{Cos} \zeta_2 \xi + C_3 \operatorname{Sin} \zeta_1 \xi + C_4 \operatorname{Sin} \zeta_2 \xi, \quad (12)$$

mit

$$\zeta_{1,2} = \frac{\pi}{2} (\sqrt{4 - \varphi} \pm \sqrt{-\varphi}). \quad (13)$$

Für die vorgeschriebene Ausbiegung w_0 erhält man unter Beachtung der Symmetrie die folgenden Integrationskonstanten:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{w_0}{N_1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\zeta_1 \alpha}{2}}{\frac{\zeta_1 \alpha}{2}}, & C_2 &= +\frac{w_0}{N_1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\zeta_2 \alpha}{2}}{\frac{\zeta_2 \alpha}{2}} \\ C_3 &= +\frac{w_0}{N_1} \frac{1}{\frac{\zeta_1 \alpha}{2}}, & C_4 &= -\frac{w_0}{N_1} \frac{1}{\frac{\zeta_2 \alpha}{2}}, \quad \text{mit} \quad N_1 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\zeta_2 \alpha}{2}}{\frac{\zeta_2 \alpha}{2}} - \frac{\operatorname{tg} \frac{\zeta_1 \alpha}{2}}{\frac{\zeta_1 \alpha}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die zur Erzeugung der Ausbiegung w_0 erforderliche Querbelastung beträgt

$$Q = +\frac{8}{\pi \alpha N_1} \sqrt{-\varphi(4-\varphi)} w_0 h \sigma_E, \quad (15)$$

für sehr lange Platten ist in der Grenze $\alpha \rightarrow \infty$

$$Q_\infty = 8 \sqrt{1 - \frac{\varphi}{4}} w_0 h \sigma_E. \quad (16)$$

Ist nicht w_0 , sondern Q bekannt, so kann die zugehörige Ausbiegung nach (15) berechnet werden.

4. Keine Längsspannungen, $\varphi = 0$.

Für diesen Fall ist:

$$X(\xi) = (C_1 + C_2 \operatorname{cof} \pi \xi) \operatorname{cof} \pi \xi + (C_3 + C_4 \operatorname{cof} \pi \xi) \operatorname{sin} \pi \xi; \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= +w_0, & C_2 &= +w_0 \frac{\operatorname{cof} \pi \alpha + 1}{\operatorname{sin} \pi \alpha - \pi \alpha}, \\ C_3 &= -C_2, & C_4 &= -w_0 \frac{\operatorname{sin} \pi \alpha}{\operatorname{sin} \pi \alpha - \pi \alpha}; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$Q = \frac{\operatorname{cof} \pi \alpha + 1}{\operatorname{sin} \pi \alpha - \pi \alpha} 8 w_0 h \sigma_E. \quad (19)$$

Q nähert sich mit wachsendem α dem Grenzwert $Q_\infty = 8 w_0 h \sigma_E$. Den Einfluß der Plattenlänge erkennt man aus den folgenden Zahlen. Für

$$\alpha = 1, 2, 3 \quad \text{ist} \quad Q_\alpha : Q_\infty = 1,498; 1,028; 1,002.$$

5. Druckspannungen $0 < \varphi < 4$.

Mit

$$\zeta = \pi \sqrt{1 - \frac{\varphi}{4}}, \quad \lambda = \pi \sqrt{\frac{\varphi}{4}} \quad (20)$$

gilt der Ansatz

$$X(\xi) = C_1 \operatorname{cof} \zeta \xi \cos \lambda \xi + C_2 \operatorname{cof} \zeta \xi \sin \lambda \xi + C_3 \operatorname{sin} \zeta \xi \cos \lambda \xi + C_4 \operatorname{sin} \zeta \xi \sin \lambda \xi. \quad (21)$$

Damit erhält man die Integrationskonstanten

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= +w_0, & C_2 &= +\frac{w_0}{\lambda \alpha N_2} (\operatorname{cof} \zeta \alpha + \cos \lambda \alpha), \\ C_3 &= -\frac{\lambda}{\zeta} C_2, & C_4 &= -\frac{w_0}{\zeta \alpha \cdot \lambda \alpha \cdot N_2} (\zeta \alpha \operatorname{sin} \zeta \alpha + \lambda \alpha \sin \lambda \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

und die Querbelastung ($\zeta^2 + \lambda^2 = \pi^2$)

$$Q = \frac{8}{\alpha \pi N_2} (\cos \alpha + \cos \lambda \alpha) w_0 h \sigma_E, \quad \text{mit} \quad N_2 = \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{\sin \lambda \alpha}{\lambda \alpha}. \quad (23)$$

Für lange Platten ist in der Grenze $\alpha \rightarrow \infty$

$$Q_\infty = 8 \sqrt{1 - \frac{q}{4}} w_0 h \sigma_E. \quad (24)$$

6. Druckspannungen $\varphi = 4$.

Für diesen Fall ist es nicht zulässig, eine zur Mittellinie $\xi = 0$ symmetrische Verbiegung vorauszusetzen. Es ist

$$\left. \begin{aligned} X(\xi) &= (C_1 + C_2 \pi \xi) \cos \pi \xi + (C_3 + C_4 \pi \xi) \sin \pi \xi, \quad \text{für } 0 \leq \xi \leq +0,5 \alpha, \\ X(\xi) &= (B_1 + B_2 \pi \xi) \cos \pi \xi + (B_3 + B_4 \pi \xi) \sin \pi \xi, \quad \text{für } -0,5 \alpha \leq \xi \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Die Übergangsbedingungen für $\xi = 0$ liefern mit der Abkürzung

$$p_2 = \frac{b^2 Q}{4 \pi^2 D} = \frac{Q}{4 h \sigma_E} \quad (26)$$

die folgenden Beziehungen

$$B_1 = C_1, \quad B_2 = C_2 + p_2, \quad B_3 = C_3 - p_2, \quad B_4 = C_4 \quad (27)$$

und diese in die Randbedingungen Gl. (10) eingesetzt

$$\left. \begin{aligned} \left(C_1 + C_2 \frac{\pi \alpha}{2} \right) \cos \frac{\pi \alpha}{2} + \left(C_3 + C_4 \frac{\pi \alpha}{2} \right) \sin \frac{\pi \alpha}{2} &= 0 \\ \left(C_1 - C_2 \frac{\pi \alpha}{2} \right) \cos \frac{\pi \alpha}{2} - \left(C_3 - C_4 \frac{\pi \alpha}{2} \right) \sin \frac{\pi \alpha}{2} &= p_2 \left(\frac{\pi \alpha}{2} \cos \frac{\pi \alpha}{2} - \sin \frac{\pi \alpha}{2} \right) \\ C_2 \sin \frac{\pi \alpha}{2} - C_4 \cos \frac{\pi \alpha}{2} &= 0 \\ C_2 \sin \frac{\pi \alpha}{2} + C_4 \cos \frac{\pi \alpha}{2} &= -p_2 \sin \frac{\pi \alpha}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Für die Auflösung des Systems (28) sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

a) $\sin \pi \alpha \neq 0$, d. h. das Seitenverhältnis sei nicht ganzzahlig, $\alpha \neq 1, 2, 3 \dots$
Sodann folgt

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= +w_0 = +B_1, \quad C_2 = -w_0 \frac{1 + \cos \pi \alpha}{\pi \alpha - \sin \pi \alpha} = -B_2, \\ C_3 &= -C_2 = -B_3, \quad C_4 = -w_0 \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha - \sin \pi \alpha} = +B_4, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

d. h. die Verbiegung ist symmetrisch bezüglich $\xi = 0$ und die den endlichen Werten $C_1 \dots C_4$ entsprechende Gleichgewichtslage stabil.

$$Q = +\frac{1 + \cos \pi \alpha}{\pi \alpha - \sin \pi \alpha} 8 w_0 h \sigma_E. \quad (30)$$

Die Größt- bzw. Kleinstwerte von Q nach Gl. (30) ergeben sich für ganzzählige Seitenverhältnisse, übereinstimmend mit den Werten von Gl. (32) bzw. (34).

b) Für $\cos \frac{\pi \alpha}{2} = 0$, d. h. wenn $\alpha = 1, 3, 5 \dots$ ist, ergibt sich

$$w = w_0 \sin \pi \eta \cos \pi \xi \quad (31)$$

als Gleichung der bezüglich $\xi = 0$ symmetrischen Biegungsfläche.
Die Ausbiegung erfolgt ohne Widerstand

$$\min Q = 0. \quad (32)$$

Das Gleichgewicht ist bei gegebenem w_0 stabil, dagegen labil, wenn eine Querbelastung $Q \neq 0$ wirkt.

c) Für $\sin \frac{\pi \alpha}{2} = 0$, d. h. wenn $\alpha = 2, 4, 6 \dots$ ist, folgt die Biegungsfläche

$$w = w_0 \sin \pi \eta \left\{ \left(1 - \frac{2\xi}{\alpha} \right) \cos \pi \xi + \frac{2}{\pi \alpha} \sin \pi \xi \right\} + C_3^* \sin \pi \eta \sin \pi \xi, \quad (33)$$

worin C_3^* jeden beliebigen Wert annehmen kann; das Gleichgewicht ist labil. Die Querbelastung

$$\max Q = \frac{16}{\pi \alpha} w_0 h \sigma_E \quad (34)$$

verschwindet für $\alpha \rightarrow \infty$. Die Durchbiegung (33) setzt sich zusammen aus einem die Rand- und Zwangsbedingungen erfüllenden symmetrischen Teil (Faktor w_0) und der unabhängig davon überlagerten spiegelsymmetrischen Beulung der ungestörten Platte (Faktor C_3^*).

7. Druckspannungen $\varphi > 4$.

Es gilt der Ansatz

$$\left. \begin{aligned} X(\xi) &= C_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 \cos \lambda_2 \xi + C_3 \sin \lambda_1 \xi + C_4 \sin \lambda_2 \xi, \quad \text{für } 0 \leq \xi \leq +0,5 \alpha, \\ X(\xi) &= B_1 \cos \lambda_1 \xi + B_2 \cos \lambda_2 \xi + B_3 \sin \lambda_1 \xi + B_4 \sin \lambda_2 \xi, \quad \text{für } -0,5 \alpha \leq \xi \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

mit

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pi}{2} (\sqrt{\varphi} \pm \sqrt{\varphi - 4}). \quad (36)$$

Mit der Abkürzung

$$p_3 = \frac{b^2 Q}{2 \pi D \sqrt{\varphi(\varphi - 4)}} \quad (37)$$

erhält man aus den Übergangsbedingungen Gl. (11)

$$B_1 = C_1, \quad B_2 = C_2, \quad B_3 = C_3 + \frac{p_3}{\lambda_1}, \quad B_4 = C_4 - \frac{p_3}{\lambda_2}. \quad (38)$$

Aus den Randbedingungen Gl. (10) ergibt sich nach Elimination von $B_1 \dots B_4$, durch Addition und Subtraktion,

$$\left. \begin{aligned} C_1 \cos \frac{\lambda_1 \alpha}{2} &= + \frac{p_3}{2 \lambda_1} \sin \frac{\lambda_1 \alpha}{2}, \\ C_2 \cos \frac{\lambda_2 \alpha}{2} &= - \frac{p_3}{2 \lambda_2} \sin \frac{\lambda_2 \alpha}{2}, \\ \left(C_3 + \frac{p_3}{2 \lambda_1} \right) \sin \frac{\lambda_1 \alpha}{2} &= 0, \\ \left(C_4 - \frac{p_3}{2 \lambda_2} \right) \sin \frac{\lambda_2 \alpha}{2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Die Ausbiegung in Plattenmitte ist

$$w_0 = C_1 + C_2. \quad (40)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann Q bzw. p_3 eliminiert werden. Es sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

a) Für $\sin \lambda_1 a \cdot \sin \lambda_2 a \neq 0$ sind alle Konstanten von endlicher Größe, $N_3 \neq 0$ und die Biegung symmetrisch bezüglich $\xi = 0$.

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= +w_0 \frac{\lambda_2}{N_3} \operatorname{tg} \frac{\lambda_1 a}{2} = +B_1, \quad C_2 = -w_0 \frac{\lambda_1}{N_3} \operatorname{tg} \frac{\lambda_2 a}{2} = +B_2, \\ C_3 &= -w_0 \frac{\lambda_2}{N_3} = -B_3, \quad C_4 = +w_0 \frac{\lambda_1}{N_3} = -B_4, \quad \text{mit } N_3 = \lambda_2 \operatorname{tg} \frac{\lambda_1 a}{2} - \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\lambda_2 a}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Die erforderliche Querbelastung ist

$$Q = \frac{4 \pi}{N_3} \sqrt{\varphi(\varphi-4)} w_0 h \sigma_E. \quad (42)$$

Die Voraussetzungen für diesen Fall treffen zu, wenn die Druckspannung φ von den Knickspannungen φ_K der ungestörten Platte verschieden ist. Aus $\sin \lambda_1 a = 0$ folgt nämlich

$$\varphi_K = \left(\frac{\mu}{\alpha} + \frac{\alpha}{\mu} \right)^2, \quad \mu = 1, 2, 3 \dots, \quad (43)$$

das sind die Knickspannungen der Platte mit dem Seitenverhältnis α und $\mu' = 1$. $\sin \lambda_2 a = 0$ liefert ebenfalls die Bedingung (43). Für alle Knickspannungen gilt $\varphi_K \geq 4$. $\varphi_K = 4$ tritt für ganzzahlige Seitenverhältnisse $\alpha = 1, 2, 3 \dots$ und $\mu = \alpha$ ein. Es gelten dann die Gleichungen von Nr. 6.

b) Die symmetrische Biegungsfläche für $\cos \frac{\lambda_1 a}{2} = 0, \sin \cos \lambda_2 a \neq 0$, ist

$$w = w_0 \sin \pi \eta \cos \frac{\mu \pi \xi}{\alpha}, \quad \mu = 1, 3, 5 \dots \quad (44)$$

Die Ausbiegung der Platte erfolgt ohne Widerstand in quadratischen Beulen,

$$Q = 0. \quad (45)$$

Der zugehörige Wert $\lambda_1 = \frac{\mu \pi}{\alpha}$ kann nur eintreten, wenn $\varphi = \varphi_K$ nach Gl. (43)

ist. Die Gl. (44) und (45) gelten auch, wenn $\cos \frac{\lambda_2 a}{2} = 0, \sin \lambda_1 a \neq 0$ ist.

c) Für $\sin \frac{\lambda_1 a}{2} = 0, \sin \lambda_2 a \neq 0$, ergibt sich unter Beachtung von $\lambda_1 \lambda_2 = \pi^2$ die labile Gleichgewichtslage gemäß

$$w = w_0 \sin \pi \eta \left(\cos \frac{\pi \alpha \xi}{\mu} + \frac{\alpha^2 \sin \frac{\mu \pi \xi}{\alpha} - \mu^2 \sin \frac{\pi \alpha \xi}{\mu}}{\mu^2 \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha^2}{2 \mu}} \right) + C_3^* \sin \pi \eta \sin \frac{\mu \pi \xi}{\alpha} \quad (46)$$

und die Querbelastung

$$Q = +\frac{4 \alpha}{\mu} \left(\frac{\alpha^2}{\mu^2} - \frac{\mu^2}{\alpha^2} \right) \frac{w_0 h \sigma_E}{\operatorname{tg} \frac{\pi \alpha^2}{2 \mu}}. \quad (47)$$

Darin ist $\mu = 2, 4, 6, \dots, C_3^*$ kann jeden beliebigen Wert annehmen. Der zugehörige Wert λ_1 ist nur für $\varphi = \varphi_K$ möglich.

Für $\sin \frac{\lambda_2 \alpha}{2} = 0$, $\sin \lambda_1 \alpha \neq 0$, erhält man ebenfalls die Gl. (46) und (47), nur ist C_3^* durch C_4^* zu ersetzen. Der von w_0 abhängende Teil der Durchbiegung ist symmetrisch, der labile Teil (Faktor C_3^*) spiegelsymmetrisch bezüglich $\xi = 0$.

d) Für die Seitenverhältnisse $\alpha = \sqrt{\mu \nu}$, mit $\mu, \nu = 1, 2, 3 \dots$, können $\sin \lambda_1 \alpha$ und $\sin \lambda_2 \alpha$ verschwinden. Es gilt dann $\varphi_K(\mu) = \varphi_K(\nu)$, d. h. es sind gleichzeitig Beulungsformen mit μ und ν Halbwellen möglich. Unter diesen interessieren jene am meisten, bei denen für $\min \varphi_K$ der Übergang von μ Halbwellen zu $\nu = \mu + 1$ oder $\nu = \mu - 1$ stattfindet. Es sind dies die Seitenverhältnisse $\alpha = \sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12} \dots$, mit der Beulungsform

$$w = \sin \pi \eta \left\{ w_0 \cos \frac{\mu \pi \xi}{\alpha} + C_3^* \sin \frac{(\mu \pm 1) \pi \xi}{\alpha} \right\}, \quad \mu = 1, 3, 5 \dots \quad (48)$$

Die zugehörige Querbelastung ist $Q = 0$.

Den Seitenverhältnissen $\alpha = \sqrt{\mu \nu}$, mit $(\mu - \nu)^2 > 1$, entsprechen die höheren Knickspannungen; für $\mu = \nu$, $\alpha = \mu$ wird $\varphi_K = 4$. Näheres über diese Beulungsformen ist leicht herzuleiten.

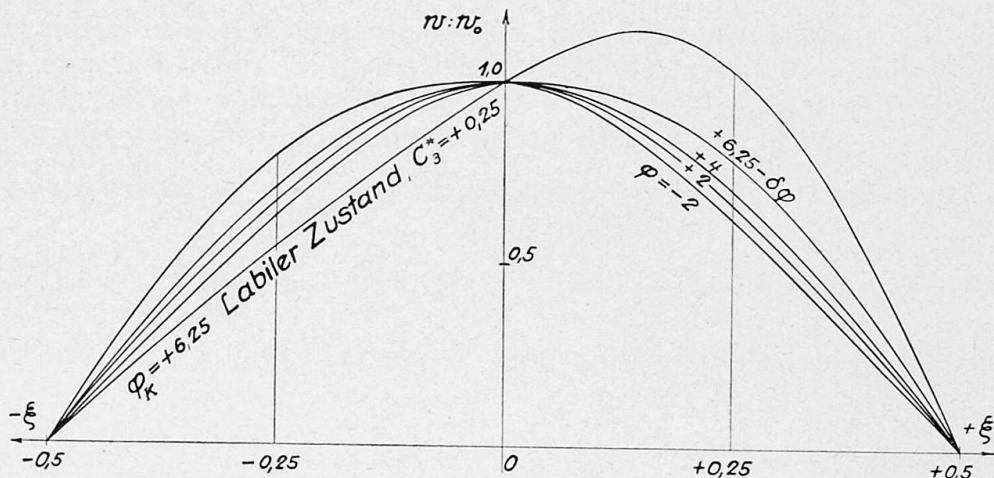


Fig. 4.

Schnitt durch eine quadratische Platte — Coupe à travers une plaque carrée — Section through a Square Plate. $\alpha = 1$.

Labiler Zustand — Etat d'équilibre labile — State of instability.

8. Beispiele.

In der Abb. 4 ist für eine quadratische Platte ein Schnitt längs der Mittellinie $\eta = 0,5$ dargestellt, und zwar für die Längsspannungen $\varphi = -2; +2; +4$. Wenn die Ausbiegung w_0 durch geeignete Maßnahmen festgehalten wird, ist der Zustand für $\varphi = 4$ stabil. Instabilität tritt dann erst für $\varphi_K = 6,25$ ein, d. h. für spiegelsymmetrische Beulung ($\mu = 2$). Die in Abb. 4 mit $(+6,25 - \delta \varphi)$ bezeichnete Kurve gilt für Druckspannungen, die noch etwas unter σ_K liegen. Die labile Gestalt der Platte ist für $C_3^* = +0,25$ dargestellt.

Abb. 5 zeigt die Biegung einer Platte $\alpha = 2$ für $\varphi = -2; +2; +4 - \delta \varphi$. Der Zustand wird für $\varphi_K = 4$ labil. Es ist bemerkenswert, daß

die Durchbiegungen in diesem Fall mit wachsendem φ abnehmen, erst für φ_K können Werte $w > w_0$ auftreten.

Die für $\varphi < 0$ mehr gestreckte Form nähert sich mit wachsendem φ der Cosinuslinie, deren Halbwellenlänge gleich der Plattenbreite ist; der labile Anteil der Durchbiegungen erfolgt spiegelsymmetrisch nach einer Sinuslinie.

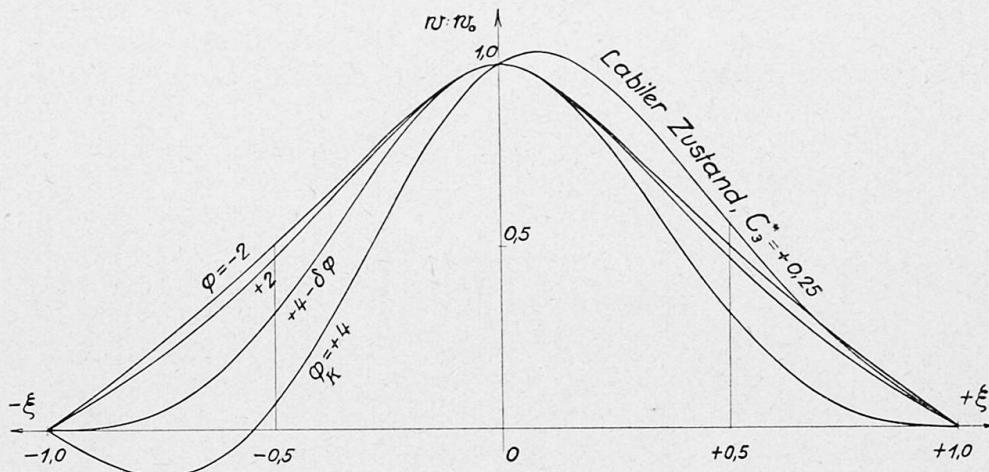


Fig. 5.

Längsschnitt durch eine längliche Platte — Coupe longitudinale à travers une plaque rectangulaire — Section through a Rectangular Plate. $\alpha = 2$.

Die Veränderung der Durchbiegung w ($0,5; 0,25\alpha$) im Viertelpunkt der Längs-Mittellinie ist in Abb. 6 dargestellt. Abb. 7 zeigt die Querbelastung für $\alpha = 1; 2$ und $\alpha \rightarrow \infty$ als Funktion von φ .

Für die quadratische Platte ist $Q = 0$ für $\varphi = 4$, entsprechend der bei der ungestörten Platte ohne Widerstand erfolgenden Ausbiegung. Für $\varphi > 4$

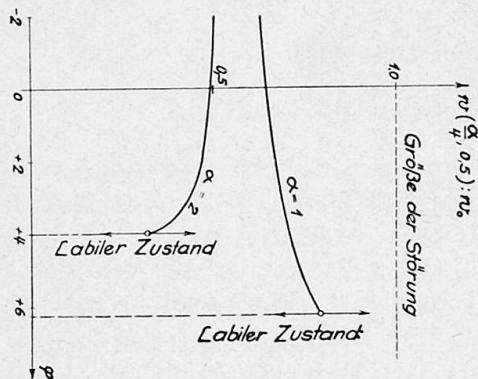


Fig. 6

Größe der Störung —
Importance de la perturbation —
Importance of the disturbance.

Labiler Zustand —
Etat d'équilibre labile —
State of instability.

Die Durchbiegung als Funktion der Längsspannung —
Le fléchissement en fonction des contraintes longitudinales —
Deflection as a Function of the Longitudinal Stresses.

muß eine rückhalte Kraft ausgeübt werden, $Q < 0$, um das Eintreten einer größeren Durchbiegung als w_0 zu verhindern. Deren größter Wert $Q_K = -7,50 w_0 h \sigma_E$ tritt für $\varphi_K = 6,25$ ein. Für $\alpha = 2$ ist $Q_K = +2,546 w_0 h \sigma_E$. Für den Grenzfall $\alpha \rightarrow \infty$ wird $Q = 0$.

9. Zusammenfassung.

Der Gleichgewichtszustand ist für alle Längsspannungen φ stabil und eindeutig bestimmt, deren Betrag unter dem kritischen Wert φ_K bleibt. Für

$\varphi < \varphi_K$ sind die Durchbiegungen w symmetrisch bezüglich $\xi = 0$ und nicht größer als die Störung w_0 , mit der sie verschwinden.

Wenn, wie vorausgesetzt, die Größe w_0 unveränderlich festgehalten wird, ist φ_K identisch mit den bekannten Knickspannungen einer ebenen Platte, die spiegelsymmetrisch ($\mu = 2, 4, 6 \dots$) ausbeult. Mit φ_K stimmen übrigens die Knickspannungen einer Platte von der halben Seitenlänge überein, da die Störung ähnlich wie eine gelenkige Zwischenstützung wirkt.

Die unter der Knickspannung φ_K eintretende Beulung überlagert sich der symmetrischen Durchbiegung w ($\varphi \rightarrow \varphi_K$), welche Rand- und Zwangsbedingungen erfüllt. Der labile Anteil der Durchbiegungen ist im vorliegenden Fall spiegelsymmetrisch.

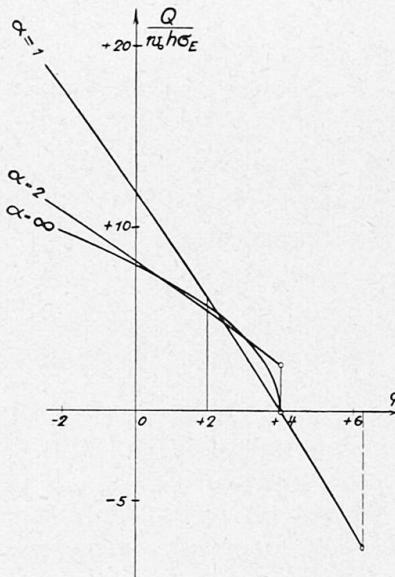


Fig. 7.

Zur Ausbiegung erforderliche Querbelastung --
Le flambage en fonction de la charge transversale --
Buckling as a Function of Transverse Loading.

Die Querbelastung Q ist proportional w_0 , der Proportionalitätsfaktor ändert sich mit φ . $Q = 0$ ist das Kriterium für den labilen Zustand der ungestörten Platte vom Seitenverhältnis a , die symmetrisch mit $\mu = 1, 3, 5 \dots$ Halbwellen ausbeult. Der Gleichgewichtszustand ist stabil, da die Größe der symmetrischen Durchbiegung durch den konstanten Wert w_0 begrenzt wird. Bei den Platten, die mit $\mu = 2, 4, 6 \dots$ Halbwellen beulen, ist auch unter der Knickbelastung ein von Null verschiedener Wert Q notwendig, um die Ausbiegung w_0 zu erzeugen.

Ist nicht w_0 , sondern ein bestimmter Gesamtbetrag Q der Querlast gegeben, dann stimmen die Knickspannungen mit denen der unbelasteten Platte vollkommen überein. Es tritt dann für $Q = 0$ immer ein labiler Zustand ein. Aus der Bedingung der Ausbeulung ohne Widerstand ergeben sich jedoch nur die symmetrischen Beulungsformen.

Für die Seitenverhältnisse $a^2 = \mu \nu = 1, 2, 3 \dots$ kann sich der labile Teil der Durchbiegung aus zwei entsprechenden Komponenten zusammensetzen. Für $\nu = \mu \pm 1$ ist $w(\xi, \eta)$ vom Typus der Gl. (48), die auch für $\min \varphi_K$ eintreten kann. Alle anderen Kombinationen μ, ν entsprechen Knickspannungen höherer Ordnung, die sich aus unseren Gleichungen in Übereinstimmung mit den Werten von Bryan ergeben.

10. Schlußbemerkungen.

Mit den für die verschiedenen Bereiche von φ angegebenen Konstanten kann die Verbiegung der Platte mit den zugehörigen Biegungsspannungen für jede Gruppe (a, φ, w_0) berechnet werden.

Die Stabilitätsgrenze ist für Material mit $\sigma_P = \infty$ unabhängig von einer Störung dieser Art und der Biegungszustand ist für $\varphi < \min \varphi_K$ eindeutig bestimmt. Für andere Störungen ergeben sich, wie Verfasser a. a. O. zeigt, ähnliche Zusammenhänge. Für Baustoffe mit einer endlichen Proportionalitätsgrenze ist die Gültigkeit obiger Entwicklungen durch σ_P begrenzt. Die Größe des Fehlers durch Vernachlässigung der Größen zweiter Ordnung bei größeren Durchbiegungen kann nur von Fall zu Fall bestimmt werden. Maßstab der Durchbiegungen ist die Verhältniszahl $w_0:h$.

Die Darstellung des Zusammenhangs der Größen a, φ, w_0 mit den Biegungsspannungen und der Gesamtbeanspruchung der Platte, sowie die Mitteilung der Bedingungen, unter denen bleibende Verbiegungen eintreten (Plastizitätsbedingung), muß wegen des begrenzten Umfangs dieses Berichts einer besonderen Arbeit vorbehalten bleiben.

Zusammenfassung.

Der Aufsatz betrachtet ursprünglich ebene Rechteckplatten, die an allen vier Rändern gelenkig gelagert und an einem parallelen Seitenpaar in der „Längsrichtung“ durch Druckspannungen belastet sind. Bei unbegrenzter Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes ergeben sich die in der Arbeit angegebenen Durchbiegungen, wenn die Platte längs der quergerichteten Mittellinie zu einer sinusförmigen Ausbiegung gezwungen wird. Dabei kann entweder die Größe der Störungsausbiegung oder die der Querbelastung als konstant angenommen werden. Der Charakter der Biegungszustände ändert sich mit der Größe der Längsspannungen; die Durchbiegungen sind eindeutig bestimmt, solange die Druckspannungen einen gewissen kritischen Wert nicht überschreiten.

Trotz der anfänglichen Ausbiegung der Platte existiert ein „Verzweigungspunkt des Gleichgewichts“. Bei bezüglich der Mittellinie symmetrischer Störung sind die stabilen Biegungszustände symmetrisch. Unter der kritischen Druckspannung wird der Zustand labil, der labile Teil der Formänderungen ist spiegelsymmetrisch. Für den betrachteten Sonderfall stimmt die Knickspannung mit der einer sonst gleichen Platte überein, die spiegelsymmetrisch ausbeult, oder was damit gleichbedeutend ist, einer Platte von der halben Länge (Knickbedingung von BRYAN). Die zum Erzwingen der Störung notwendige Querbelastung Q ist proportional der Größe der Störungsausbiegung und mit der Größe der Druckspannung veränderlich. $Q=0$ ist das Kriterium für das symmetrische Ausbeulen der gleichen Platte ohne Störung.

Der betrachtete Fall ist das einfachste Beispiel einer großen Gruppe von ähnlichen Aufgaben. Ganz analoge Zusammenhänge gelten bei beliebiger Form der konstanten Störung, anderen Randbedingungen und beliebig verteilter Querbelastung. Das Eintreten des labilen Gleichgewichtszustandes ist bei unbeschränkter Elastizität unabhängig von anfänglichen Störungen konstanter Größe und Querbelastungen der Platte.

Résumé.

Le mémoire expose d'abord le cas de plaques rectangulaires planes, articulées sur leurs quatre côtés et soumises sur deux côtés parallèles à des efforts de compression dans le sens de la longueur. En employant, sans lui assigner de limites, la loi de Hook, on détermine les flexions correspondantes qui sont indiquées dans le mémoire, au cas où la plaque est contrainte à prendre une déformation sinusoïdale dans le sens de l'axe transversal. Dans ce cas, on peut considérer comme constantes ou bien la valeur de la déformation perturbatrice par flexion, ou bien celle de la charge transversale. La nature des états de flexion se modifie suivant la valeur des contraintes longitudinales; les flexions ne sont déterminées que par une seule valeur aussi longtemps que les efforts de compression ne dépassent pas une certaine valeur critique.

Malgré la flexion initiale de la plaque, il existe un point à partir duquel la ligne des valeurs d'équilibre se dédouble. Pour des influences extérieures, symétriques par rapport à l'axe, les états de flexion stables sont symétriques. Pour la compression critique, les flexions deviennent instables, et la partie instable des déformations est également symétrique. Dans le cas spécial considéré, la tension de flambage est la même que celle d'une plaque analogue qui porterait des gondollements symétriques, ou, ce qui revient au même, d'une plaque ayant une longueur moitié moindre (condition de flambage de BRYAN). La charge transversale Q nécessaire pour produire la perturbation est proportionnelle à la déformation perturbatrice et variable suivant la valeur des efforts de compression. $Q = 0$ est le criterium pour le gondollement symétrique d'une plaque sans perturbation.

Le cas considéré est l'exemple le plus simple de tout un groupe important de problèmes analogues. Des relations du même genre existent également dans le cas de forme quelconque d'une perturbation constante, pour d'autres conditions de bord de la plaque et pour des charges transversales diverses. L'apparition de l'état d'équilibre instable, dans le cas d'élasticité illimitée, est indépendant des déformations initiales de grandeur constante et de la charge transversale de la plaque.

Summary.

The article deals with rectangular plates which were originally flat; they are carried pivotally at all four edges and are loaded by compression in the „longitudinal direction“. Assuming that Hooke's law is everywhere applicable, the bendings given in the article are obtained if the plate is forced to bend in a sine-shaped form along the transverse centre-line. Either the magnitude of the disturbing bending or the magnitude of the transverse loading, may then be assumed to be constant. The character of the bending conditions alters with the magnitude of the longitudinal stresses; the bendings are positively determined, as long as the compression stresses do not exceed a certain critical figure.

In spite of the initial bending of the plate, there exists a “branching point of the equilibrium”. In the case of symmetric disturbance with respect to the centre-line, the stable bending conditions are symmetric. Under the critical compression stress, the condition becomes unstable; the unstable part of the changes of shape is “mirror”-symmetric. For the special case considered, the buckling stress agrees with that of a plate otherwise the same, which bulges out “mirror”-symmetrically, or, what means the same, of a plate

of half the length (BRYAN's condition for buckling). The transverse load Q necessary for compelling disturbance is proportional to the magnitude of the disturbing bending and varies with the magnitude of the compression stress. $Q = 0$ is the criterion for the symmetric bulging of the same plate without disturbance.

The case considered is the simplest example of a large group of similar problems. Quite analogous relations hold for any desired form of the constant disturbance, for other conditions of the edges and for any desired distribution of the transverse loading. In the case of unlimited elasticity, the occurrence of unstable equilibrium is independent of initial disturbances of constant magnitude and transverse loadings of the plate.

Leere Seite
Blank page
Page vide