

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 1 (1932)

**Artikel:** Einfluss fallender Lasten auf durchlaufende Träger

**Autor:** Hawranek, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-720>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# EINFLUSS FALLENDER LASTEN AUF DURCHLAUFENDE TRÄGER

## INFLUENCE DE CHARGES DYNAMIQUES SUR LES POUTRES CONTINUES

## INFLUENCE OF FALLING LOADS ON CONTINUOUS BEAMS

Dr. Ing. A. HAWRANEK,  
o. ö. Professor der Deutschen Technischen Hochschule, Brünn.

Veranlassung zur Untersuchung der Stoßbeiwerte gab ein Fall der Praxis, bei welchem die fallende Last auf einen durchlaufenden Träger mit zwei ungleichen Öffnungen wirkte; außerdem war die Wirkung an verschiedenen Laststellen zu untersuchen. Der Stoßbeiwert  $n$  ist weder der Lastgröße  $P$ , noch der Fallhöhe  $h$  proportional; es lassen sich also für  $n$  keine Einflußlinien für eine wandernde fallende Last  $P$  entwickeln.

Immerhin lassen sich für verschiedene Lastlagen einige Hilfswerte ermitteln, die die Bestimmung des  $n$  für verschiedene  $P$  und  $h$  erleichtern.

Außerdem ist es möglich, aus den für den durchlaufenden Träger ermittelten Formeln einige Sonderfälle und zwar jene für den einerseits eingespannten, anderseits freiaufliegend gestützten Balken, sowie für den beiderseits freiaufliegenden Träger zu entwickeln.

Die allgemeine Gleichung für den Stoßbeiwert  $n$  wurde von A. ZSCHETZSCHE<sup>1)</sup> gegeben. Darnach ist:

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{L_f}{L_s}} \quad (1)$$

$L_f$  ist die im ganzen Systeme aufgespeicherte lebendige Kraft nach dem Auftreffen der fallenden Last  $P$ .

$L_s$  ist die Arbeit der Spannungen für die Wirkung der ruhenden Last  $P$ .

Unter der Voraussetzung, daß sich die Stoßwirkung sofort und gleichzeitig über das ganze Tragwerk verbreite, daß also jede Trägerstelle zur selben Zeit seine endgültige Durchbiegung erfährt, und solange die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten wird, ist

$$L_f = \frac{1 + \sum \frac{g \Delta x}{P} \left( \frac{\delta_x}{\delta} \right)^2}{\left[ 1 + \sum \frac{g \Delta x}{P} \frac{\delta_x}{\delta} \right]^2} \cdot Ph = \varphi Ph \quad (2)$$

$$L_s = \frac{1}{2} \int \frac{M_x^2 dx}{EJ} \quad (3)$$

<sup>1)</sup> A. ZSCHETZSCHE: Berechnung dynamisch beanspruchter Tragkonstruktionen. Z. d. Ver. deutscher Ing., 1894, S. 134.

darin bedeuten:

- $P$  Die fallende Last in den Abständen  $a$  bzw.  $b$  von der linken bzw. rechten Stütze.
- $h$  Die Fallhöhe.
- $g$  Das Gewicht des Trägers für die Längeneinheit.
- $M_x$  Das Biegunsmoment an der Stelle mit der Abszisse  $x$  für die statische Belastung durch  $P$  (Abszisse  $a$ ).
- $\delta_x$  Die Durchbiegung bei  $x$  für die statische Wirkung von  $P$  in  $a$ .
- $\delta$  Die Durchbiegung an der Laststelle für die statische Wirkung von  $P$  in  $a$ .
- $J$  Das Trägheitsmoment des Trägers.
- $E$  Die Elastizitätsziffer.

Das Eigengewicht sei über die ganze Stützweite konstant angenommen. Es unterliegt keiner Schwierigkeit, ein stufenförmig veränderliches Eigengewicht des Trägers zu berücksichtigen. Die bezüglichen Teilintegrationen sind dann absatzweise durchzuführen.

Es handelt sich nun darum, die einzelnen Ausdrücke der Formeln (2) und (3) für den vorliegenden Fall auszuwerten. Dabei wird noch vorausgesetzt, daß sich die dritte Stütze des durchlaufenden Trägers beim Auffallen der Last in der ersten Öffnung nicht abhebt.

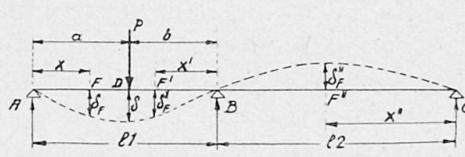


Fig. 1.

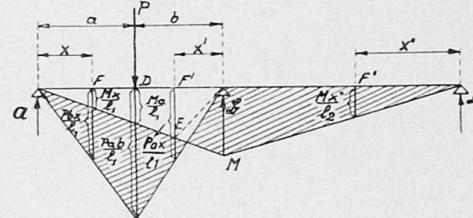


Fig. 2.

Um die dynamische Wirkung zu untersuchen, benötigt man die statischen Durchbiegungen des gegebenen Trägers für die ruhende Last am Fallorte, was unter I. berechnet werden soll.

### I. Statische Durchbiegungen des Trägers.

Die Durchbiegung unter der Last in  $D$  sei  $\delta$ , in  $FF'F''$ ,  $\delta_f \delta'_f \delta''_f$  (Abb. 1).

Die Clapeyron'sche Gleichung ergibt, wenn  $M$  das Stützmoment an der Stütze  $B$  bedeutet

$$2M(l_1 + l_2) = -\frac{Pa}{l_1}(l_1^2 - a^2)$$

woraus nach Umformung

$$M = -\frac{Pa b (l_1 + a)}{2 l_1 (l_1 + l_2)} \quad (4)$$

Bezeichnet man mit  $\mathfrak{A}_0$  den linken Stützdruck für den freiaufliegenden Träger  $AB$ , so sind die Stützdrücke des durchgehenden Trägers

$$A = \mathfrak{A}_0 + \frac{M}{l_1} = \frac{Pb}{l_1} - \frac{Pa b (l_1 + a)}{2 l_1^2 (l_1 + l_2)} \quad (5)$$

$$C = \frac{M}{l_2} = -\frac{Pa b (l_1 + a)}{2 l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \quad (6)$$

Um die Durchbiegung zu bestimmen, ist der Träger nach Mohr mit der einfachen Momentenfläche zu belasten (Abb. 2).

Diese Momentenbelastung ruft in den Punkten  $A$   $C$  die Stützendrücke  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{C}$  hervor, sie ergeben sich mit:

$$\mathfrak{A} = \frac{Pab}{6l_1}(l_1 + b) + \frac{Ml_1}{6} \quad (7)$$

$$\mathfrak{C} = \frac{Ml_2}{6} \quad (8)$$

### 1. Durchbiegung $\delta$ an der Laststelle.

Die  $EJ$ -fache Durchbiegung unter der Last ist gleich dem zweiten Moment an dieser Stelle.

$$EJ\delta = \frac{P a^2 b^2}{3l_1} \left[ 1 - \frac{(l_1 + a)^2}{4l_1(l_1 + l_2)} \right] \quad (9)$$

Um auch die Durchbiegungen  $\delta_f \delta'_f \delta''_f$  an anderen Stellen  $FF'F''$  zu erhalten, wird der gleiche Weg eingeschlagen (Abb. 1). Dabei soll  $x$  von  $A$  nach rechts,  $x'$  von  $B$  nach links und  $x''$  von  $C$  nach links gezählt werden.

### 2. Durchbiegung in $f$ .

$$EJ\delta_f = \mathfrak{A}x - \left( \frac{Pxb}{l_1} + \frac{Mx}{l_1} \right) \frac{x^2}{6} = x \left[ \frac{Pab}{6l_1}(l_1 + b) + \frac{Ml_1}{6} - \frac{x^2 Pb}{6l_1} - \frac{Mx^2}{6l_1} \right]$$

Nach Reduktion ist

$$EJ\delta_f = \frac{x}{6l_1} \{ Pb [a(l_1 + b) - x^2] + M(l_1 + x)(l_1 - x) \} \quad (10)$$

### 3. Durchbiegung in $f'$ .

Bezeichnet man den rechten Stützendruck der Momentenbelastung des linken Trägerfeldes  $l_1$  mit  $\mathfrak{B}$ , so wird

$$\mathfrak{B} = \frac{Pab}{6l_1}(l_1 + a) + \frac{Ml_1}{3} \quad (11)$$

und die  $EJ$ -fache Durchbiegung  $\delta'_f$  mit Rücksicht auf die punktierte Hilfslinie  $BE$  (Abb. 2)

$$EJ\delta'_f = x' \left[ \mathfrak{B} - \frac{x'^2}{6l_1} Pa - \frac{Mx'}{6l_1}(2l_1 + x') \right]$$

Für  $\mathfrak{B}$  obiger Wert der Gleichung (11) eingesetzt, gibt nach Umformung

$$EJ\delta'_f = \frac{x'}{6l_1} \{ Pa [b(l_1 + a) - x'^2] + M(l_1 - x')(2l_1 - x') \} \quad (12)$$

### 4. Durchbiegung in $f''$ .

$$EJ\delta''_f = \frac{Mx''}{6l_2} (l_2^2 - x''^2) \quad (13)$$

oder mit  $M$  aus Gleichung (4)

$$EJ\delta''_f = - \frac{Pab(l_1 + a)x''(l_2^2 - x''^2)}{12l_1l_2(l_1 + l_2)} \quad (13a)$$

## II. Berechnung der Stoßziffer $n$ .

Es handelt sich also vorerst darum, die Größen  $L_f$  und  $L_s$  zu berechnen; wir wollen nun die  $\Sigma$  Ausdrücke ermitteln.

Vor allem formen wir Gleichung (9) um und setzen, weil  $\delta$  für eine Laststelle eine Konstante ist,

$$\delta = \frac{Pa^2 b^2}{3El_1} \left[ 1 - \frac{(l_1 + a)^2}{4l_1(l_1 + l_2)} \right] = \frac{K}{6El_1} \quad (9a)$$

wobei die Hilfsgröße

$$K = 2Pa^2 b^2 \left[ 1 - \frac{(l_1 + a)^2}{4l_1(l_1 + l_2)} \right] \quad (14)$$

Weiter setzen wir in Gleichung (2)

$$\left. \begin{aligned} z &= \sum \frac{g \Delta x}{P} \left( \frac{\delta_x}{\delta} \right) \\ \lambda &= \sum \frac{g \Delta x}{P} \left( \frac{\delta_x}{\delta} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

sodaß

$$L_f = \frac{1 + \lambda}{(1 + x)^2} \cdot Ph \quad (16)$$

### 1. Berechnung des $z$ .

$$Pz = \sum g \Delta x \left( \frac{\delta_x}{\delta} \right) = \int_0^a g \frac{\delta_f}{\delta} dx + \int_0^b g \frac{\delta_f'}{\delta} dx' + \int_0^{l_2} g \frac{\delta_f''}{\delta} dx''$$

Werden für  $\delta \delta_f \delta_f' \delta_f''$  die Werte der Gleichungen (9), (10), (12), (13) eingesetzt und Gleichung (14) berücksichtigt, so wird, nachdem noch mit  $K$  multipliziert wird

$$\begin{aligned} KPz &= g \int_0^a x \{ P b [a(l_1 + b) - x^2] + M(l_1^2 - x^2) \} dx + \\ &+ g \int_0^b x' \{ Pa [b(l_1 + a) - x'^2] + M(l_1 - x')(2l_1 - x') \} dx' + \\ &+ g \int_0^{l_2} \frac{M l_1}{l_2} x'' (l_2^2 - x''^2) dx'' \end{aligned}$$

Nach Integration, Vereinfachung und Zusammenziehung der Ausdrücke entsteht

$$KPz = \frac{gl_1}{4} [Pa b (l_1^2 + ab) + M(l_1^3 + l_2^3)] \quad (17)$$

Würde das Gewicht des Trägers in der Stützweite  $l_1$ ,  $g_1$  sein, in der rechten Öffnung  $l_2$ ,  $g_2$ , das Trägheitsmoment  $J$  aber in beiden Öffnungen des Trägers konstant, so wäre

$$KPz = \frac{l_1}{4} \{ g_1 [Pa b (l_1^2 + ab) + M_1 l_1^3] + g_2 M_2 l_2^3 \} \quad (17a)$$

2. Berechnung des  $\lambda$ .

Dieser Ausdruck bedeutet bis auf einen Faktor die auf den Stoßpunkt reduzierte Masse des Trägers.

Wir multiplizieren mit  $K^2 P$  und erhalten

$$\begin{aligned} K^2 P \lambda &= g \int_0^a x^2 \{Pb[a(l_1 + b) - x^2] + M(l_1^2 - x^2)\}^2 dx + \\ &+ g \int_0^b x'^2 \{Pa[b(l_1 + a) - x'^2] + M(l_1 - x')(2l_1 - x')\}^2 dx' + \\ &+ g \int_0^{l_2} M^2 \frac{l_1^2}{l_2^2} x''^2 (l_2^2 - x''^2)^2 dx'' \end{aligned}$$

Nach Zusammenfassung der Glieder mit  $P^2$ ,  $PM$  und  $M^2$  und mehrfachen Umformungen ergibt sich

$$\begin{aligned} K^2 P \lambda &= g \frac{4 P^2 a^2 b^2 l_1}{105} [2l_1^4 + ab(4l_1^2 + 3ab)] + \\ &+ g \frac{PMab l_1}{210} \{l_1[32l_1^2(l_1^2 + ab) + 2(2a - b)^2 b^2] - 3b^5\} + \\ &+ g \frac{8}{105} M^2 l_1^2 (l_1^5 + l_2^5) \end{aligned} \quad (18)$$

Wäre das Gewicht pro laufenden Meter  $g_2$  (in der Öffnung  $l_2$ ), so hätten in dieser Gleichung die ersten beiden Glieder statt  $g$  den Faktor  $g_1$  zu erhalten und das dritte Glied würde lauten

$$+ \frac{8}{105} M^2 l_1^2 (g_1 l_1^5 + g_2 l_2^5)$$

Bezeichnet man in Gleichung (17) und (18) die rechten Seiten der Gleichungen, nachdem man sie vorher durch  $g$  dividiert hat, mit

$$\frac{KP\lambda}{g} = N \quad \frac{K^2 P \lambda}{g} = Z \quad (19)$$

so ist nach Gleichung (2)

$$L_f = \frac{1 + \frac{Zg}{K^2 P}}{\left(1 + \frac{Ng}{KP}\right)^2} \cdot Ph = \varphi Ph \quad (2a)$$

3. Berechnung der Arbeit  $L_s$ .

$$L_s = \frac{1}{2EJ} \left[ \int_0^a M_f^2 dx + \int_0^b M_{f'}^2 dx' + \int_0^{l_2} M_{f''}^2 dx'' \right]$$

worin  $M_f$ ,  $M_{f'}$ ,  $M_{f''}$  die Momente für den durchgehenden Träger bedeuten, der durch die Last  $P$  in  $D$  statisch belastet ist.

Mit  $A = \frac{Pb + M}{l_1}$  und  $C = \frac{M}{l_2}$  wird

$$M_f = Ax = \frac{Pb + M}{l_1} x \quad (\text{von } x = 0 \text{ bis } x = a)$$

$$M_{F'} = Ax - P(x-a) = A(l_1 - x') - P(b - x') \quad (\text{von } x' = 0 \text{ bis } x' = b)$$

$$M_{F''} = \frac{M}{l_2} x'' \quad (\text{von } x'' = 0 \text{ bis } x'' = l_2)$$

$$L_s = \frac{1}{2EJ} \left[ \int_0^a \left( \frac{Pb + M}{l_1} \right)^2 x^2 dx + \int_0^b \left( \frac{Pb + M}{l_1} \right)^2 (l_1 - x')^2 dx' - \right. \\ \left. - 2P \frac{(Pb + M)}{l_1} \int_0^b (l_1 - x')(b - x') dx' + \int_0^b P^2 (b - x')^2 dx' + \int_0^{l_2} \frac{M^2}{l_2^2} x''^2 dx'' \right]$$

Die Integration ergibt

$$L_s = \frac{1}{6EJl_1} [P^2 a^2 b^2 + P M a b (l_1 + a) + M^2 l_1 (l_1 + l_2)] \quad (20)$$

Setzt man darin  $M = -\frac{P a b (l_1 + a)}{2 l_1 (l_1 + l_2)}$

und reduziert, so erhält man

$$L_s = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EJl_1} \left[ 1 - \frac{(l_1 + a)^2}{4l_1(l_1 + l_2)} \right] \quad (20a)$$

und unter Beachtung der Gleichung (9)

$$L_s = \frac{1}{2} P \delta,$$

was aus der Gleichheit der Arbeit der inneren und äußeren Kräfte einzusehen ist. Dieser Ausdruck ist aber auch nach der Gleichung (14) gleich

$$L_s = \frac{KP}{12EJl_1} \quad (20)$$

#### 4. Beispiel:

$P = 8,662 \text{ t}$  in der Öffnung  $l_1 = 4,925 \text{ m}$ ,  $l_2 = 5,0 \text{ m}$ ,

$a = 3,163 \text{ m}$ ,  $b = 1,762 \text{ m}$ ,  $h = 0,01 \text{ m}$

Für einen I-Träger Nr. 35  $g = 0,08 \text{ t/m}$ ,  $J = 19.456 \text{ cm}^4$ ,  
 $E = 2.100.100 \text{ kg/cm}^2$

$$\frac{1}{EJ} = 0,00024475.$$

Alle Maße werden in die folgenden Gleichungen in  $t$  und  $m$  eingesetzt. Dann ist nach Gleichung (14)

$$K = 358.046 \text{ tm}^4$$

$$K^2 = 128197.22 \text{ t}^2 \text{ m}^8$$

Nach Gleichung (4)

$$M = -3.994 \text{ tm}$$

Nach Gleichung (9)

$$\delta = 0.00296 \text{ m}$$

Nach Gleichung (19), (17)

$$N = 570.862 \text{ tm}^5$$

Nach Gleichung (19), (18)

$$Z = +450951.2961 \text{ t}^2 \text{ m}^9$$

Die in Gleichung (2 a) notwendigen Größen sind

$$\frac{Zg}{K^2 P} = 0.03249 \quad 1 + \frac{Zg}{K^2 P} = 1.0325$$

$$\frac{Ng}{KP} = 0.01473 \quad \left(1 + \frac{Ng}{KP}\right)^2 = 1.0297$$

und

$$\varphi = \frac{1.0325}{1.0297} = 1.00274$$

$$L_s = 0.012843 \text{ tm}$$

und nach Gleichung (1) die Stoßziffer

$$n = 3.78.$$

### III. Umbau der Formeln.

Setzt man in die bisherigen Formeln bei ziffernmäßiger Ausrechnung die erforderlichen Werte ein, so muß man mit vielstelligen Zahlen rechnen, was unbequem ist. Deshalb sollen die Formeln umgebaut werden und zwar für den Sonderfall gleicher Stützweiten  $l$ .

Wir setzen:

$$a = \xi l \quad b = \eta l \quad (21)$$

Dann lassen sich alle Hilfsgrößen auf nachstehende Form bringen

$$\left. \begin{array}{l} M = M_1 l \\ K = K_1 l^4 \\ N = N_1 l^5 \\ Z = Z_1 l^9 \end{array} \right\} \quad (22)$$

Diese Werte  $M_1, K_1, N_1, Z_1$  sind für eine bestimmte Laststelle Konstante.

Werden diese Werte in die Gleichung (2 a) eingesetzt, so wird

$$L_f = \frac{1 + \frac{Z_1 g l}{K_1^2 P}}{\left(1 + \frac{N_1 g l}{K_1 P}\right)^2} \cdot P h$$

und kann weiter mit

$$\nu = \frac{P}{g l} \quad (23)$$

obige Formel umformen, damit man die einmal gerechneten und gleichbleibenden Zahlenwerte der Hilfsgrößen für verschiedene Laststellungen benutzen kann und erhält

$$L_f = \frac{\left(\nu + \frac{Z_1}{K_1^2}\right)}{\left(\nu + \frac{N_1}{K_1}\right)^2} \nu Ph \quad (24)$$

Nun wollen wir einige Sonderfälle behandeln.

#### IV. Sonderfälle.

1. Sonderfall. Der durchlaufende Träger mit zwei gleichen Stützweiten.

Mit den Werten der Gleichung (21) und für  $l_1 = l_2 = l$  erhält man aus aus Gl.(14) 
$$K = 2P\xi^2\eta^2 \left[1 - \frac{(1+\xi)^2}{8}\right] l^4 = K_1 l^4$$
 „ Gl.(4) 
$$M = -\frac{P\xi\eta(1+\xi)}{4} l = M_1 l$$
 „ Gl.(17),(19) 
$$N = \frac{P\xi\eta}{8} [2\xi\eta - \xi + 1] \cdot l^5 = N_1 l^5$$
 „ 
$$Z = \frac{4P^2\xi^2\eta^2}{105} [2 + \xi\eta(4 + 3\xi\eta)] l^9 + \frac{PM\xi\eta}{210} [32(1 + \xi\eta) + 2(2\xi - \eta)^2\eta^2 - 3\eta^5] l^8 + \frac{16}{105} M^2 l^7 = Z_1 l^9$$
 } (25)

Aus Gleichung (20) wird:

$$L_s = \frac{K_1 P l^3}{12 E J} \quad (26)$$

und hat diese Werte in Gleichung (1) einzusetzen, um den Stoßbeiwert  $n$  zu erhalten.

Die Hilfswerte  $K_1 M_1 N_1 Z_1$  wurden in 10 Teilpunkten einer Stützweite  $l$  gerechnet und finden sich in nachstehender Tabelle.

T a b e l l e d e r H i l f s w e r t e .

$\xi$	$M_1$	$K_1$	$N_1$	$Z_1$	$\frac{Z_1}{K_1^2}$	$\frac{N_1}{K_1}$
0,1	-0,02475	0,013750	0,012150	0,000469463	2,483199	0,883652
0,2	-0,04800	0,041984	0,022400	0,001671542	0,948309	0,533536
0,3	-0,06825	0,069568	0,029400	0,003094367	0,639375	0,422609
0,4	-0,08400	0,086976	0,032400	0,004159808	0,549882	0,372517
0,5	-0,09375	0,089843	0,031250	0,004460798	0,552633	0,347826
0,6	-0,09660	0,078336	0,026400	0,003906039	0,636522	0,337010
0,7	-0,08925	0,056338	0,018900	0,002732716	0,860984	0,335476
0,8	-0,07200	0,030464	0,010400	0,001394623	1,502737	0,341387
0,9	-0,04275	0,008890	0,003150	0,000374104	4,733836	0,354340
1,0	0	0	0	0		

B e i s p i e l :

Für  $l = 5,0$  m, Träger I Nr. 35,  $gl = 0,4068$  t, fallende Last  $P = 1$  t, Fallhöhe  $h = 0,01$  m,  $J = 0,000196935$  m<sup>4</sup>,  $E = 21,000.000$  t/m<sup>2</sup> ist

$$L_s = 0,00251876 K_1.$$

Die Stoßbeiwerte  $n$  sind für

$$\begin{array}{cccccccccccc} \xi = & 0,1 \cdot l & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 0,9 & 1,0 \cdot l \\ n = & 18,78 & 10,46 & 8,31 & 7,57 & 7,52 & 8,10 & 9,64 & 13,76 & 32,61 & \infty \end{array}$$

2. Sonderfall. Der einerseits frei gelagerte, am anderen Ende eingespannte Träger.

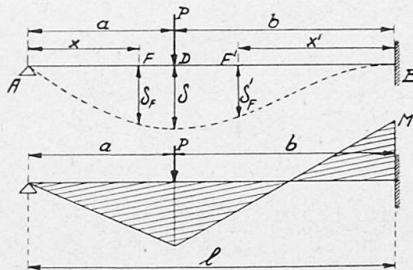


Fig. 3.

Dieser Fall läßt sich aus dem allgemeinen Fall des durchlaufenden Trägers errechnen mit  $l_2 = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{aus Gl. (4)} \quad M = -\frac{P}{2} \xi \eta (1 + \xi) l = M_2 l \\ \text{„ Gl. (14)} \quad K = 2 P \xi^2 \eta^2 \left[ 1 - \frac{(1 + \xi)^2}{4} \right] l^4 = K_2 l^4 \\ \text{„ Gl. (17)} \quad N = \frac{P \xi \eta}{8} [2 \xi \eta - \xi + 1] l^5 = N_2 l^5 \\ \text{„ Gl. (18)} \quad Z = \frac{4 P^2 \xi^2 \eta^2}{105} [2 + \xi \eta (4 + 3 \xi \eta)] l^9 + \\ \quad + \frac{P M \xi \eta}{210} [32(1 + \xi \eta) + 2(2 \xi - \eta)^2 \eta^2 - 3 \eta^5] l^8 + \frac{8 M^2 l^7}{105} = Z_2 l^9 \end{array} \right\} \quad (27)$$

$$L_s = \frac{K_2 P l^3}{12 E J} \quad (28)$$

$L_s$  wird nach Gleichung (24) erhalten, indem man obige Hilfswerte  $M_2, K_2, N_2, Z_2$  an Stelle der gleichen, dort mit dem Index 1 bezeichneten setzt, dabei ist  $N_2 = N_1$ .

T a b e l l e d e r H i l f s w e r t e.

$\xi$	$M_2$	$K_2$	$N_2$	$Z_2$	$\frac{Z_2}{K_2^2}$	$\frac{N_2}{K_2}$
0,1	- 0,04950	0,0112995	0,012150	0,000203198852	1,591485910	1,075268817
0,2	- 0,096	0,0327680	0,0224	0,000693558084	0,645926300	0,683593750
0,3	- 0,13650	0,0509355	0,0294	0,001195270980	0,460707442	0,577200577
0,4	- 0,168	0,0587520	0,0324	0,001445358488	0,418726326	0,551470588
0,5	- 0,1875	0,0546875	0,03125	0,001332310342	0,445481074	0,571428571
0,6	- 0,192	0,0414720	0,0264	0,000937820202	0,545267514	0,636574074
0,7	- 0,1785	0,0244755	0,01890	0,000471968000	0,787860648	0,772200772
0,8	- 0,144	0,0097280	0,0104	0,000139720370	1,47642912	1,06907895
0,9	- 0,0850	0,0015795	0,00315	0,000012481086	5,00280020	1,994301994
1,0	0	0	0	0		

## 3. Sonderfall. Der freiaufliegende Träger.

Auch dieser einfachste Fall lässt sich aus den Formeln für den durchlaufenden Träger entwickeln, wenn man  $l_2 = 0$  und  $M = 0$  setzt (Abb. 4).

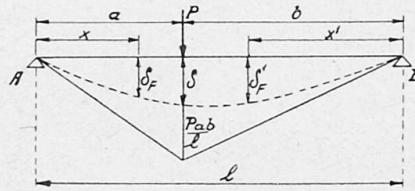


Fig. 4.

Es wird:

$$\left. \begin{aligned} K &= 2P\xi^2\eta^2l^4 = K_3 l^4 \\ N &= \frac{P\xi\eta}{4}(1 + \xi\eta)l^5 = N_3 l^5 \\ Z &= \frac{4P^2\xi^2\eta^2}{105} [2 + \xi\eta(4 + 3\xi\eta)] l^9 = Z_3 l^9 \end{aligned} \right\} (29)$$

Außerdem wird

$$\begin{aligned} \frac{N}{K} &= \frac{l(1 + \xi\eta)}{8\xi\eta}, & \frac{Z}{K^2} &= \frac{l[2 + \xi\eta(4 + 3\xi\eta)]}{105\xi^2\eta^2} \\ L_f &= \frac{\left(\nu + \frac{Z_3}{K_3^2}\right)}{\left(\nu + \frac{N_3}{K_3}\right)^2} \nu Ph & L_s &= \frac{K_3 P}{12 E J l} \end{aligned}$$

Wird das Moment an der Laststelle mit  $\mathfrak{M}$  bezeichnet

$$\mathfrak{M} = P\xi\eta l$$

so lässt sich  $K$  durch  $\mathfrak{M}$  ausdrücken und man erhält

$$K = \frac{2\mathfrak{M}^2 l^2}{P}$$

dann wird

$$\frac{L_F}{L_s} = \varphi \cdot \frac{12 E J l h}{K} = \varphi \frac{6 E J P h}{\mathfrak{M}^2 l}$$

Dieser Ausdruck deckt sich mit jenem von ZSCHETZSCHE gefundenem Werte, während für die Hilfsgrößen einfachere Ausdrücke gefunden wurden, die die Zahlenrechnung erleichtern.

## Hilfsgrößen.

$\xi$	$K_3$	$N_3$	$Z_3$	$\frac{Z_3}{K_3^2}$	$\frac{N_3}{K_3}$
0,1	0,0162	0,024525	0,000735726	2,803406493	1,51388
0,2	0,0512	0,0464	0,002649526	1,010713959	0,90625
0,3	0,0882	0,063525	0,004993464	0,641896124	0,720238095
0,4	0,1152	0,0744	0,006874258	0,5179893965	0,645833
0,5	0,1250	0,078125	0,007589285	0,485714240	0,625

Für das im ersten Sonderfall behandelte Beispiel gelten bei einem freiauf-  
liegenden Träger nachstehende Stoßbeiwerte  $n$

$$\begin{array}{ccccccc} \xi & = & 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \cdot l \\ n & = & 31,55 & 15,2 & 8,71 & 7,02 & 6,21 & 6,02 \end{array}$$

Sie sind also kleiner als im ersten Sonderfall.

Bei der ziffermäßigen Auswertung der Beispiele und der Berechnung der Hilfsgrößen haben mich meine Assistenten Ing. J. Schier und Ing. E. Haulena unterstützt, wofür ich ihnen hier bestens danke.

### Zusammenfassung.

Gestützt auf einen in der Praxis vorgekommenen Fall wird im ersten Teil der Arbeit der Stoßbeiwert  $n$  für eine fallende Last auf einen durchlaufenden Träger mit zwei Öffnungen berechnet. Es werden allgemeine Formeln gegeben, welche die Stoßziffer für beliebige Laststellen angeben.

Unter dem Stoßbeiwert wird jene Ziffer verstanden, mit der statische Wirkungen multipliziert werden müssen, um die dynamische Wirkung der fallenden Last zu erhalten. Diese Wirkungen beziehen sich auf die Momente, Querkräfte, Spannungen und Durchbiegungen des Trägers.

Um die ziffernmäßige Ausrechnung zweckmäßiger zu gestalten und sie zu erleichtern, werden diese allgemeinen Formeln umgeformt und für den durchlaufenden Träger mit zwei gleichen Stützweiten ermittelt. Dann werden die wichtigsten Sonderfälle des am einen Ende freiaufliegenden, am anderen Ende festeingespannten Trägers, und schließlich des einfachen Balkens auf zwei Stützen behandelt. Diese Umformung wird derart durchgeführt, daß für alle behandelten Trägerarten und für 10 Teilpunkte der Stützweite Festwerte ermittelt werden, die die Rechnung erleichtern.

Die Stoßbeiwerte nehmen für Lasten in der Nähe der Stützen zu. Außerdem sind sie für durchlaufende Träger größer als für einfache Balken. Die Formeln lassen sich auch zur Ermittlung der beim Befahren von Brücken an den Schienenstößen und Fahrbahnunebenheiten entstehenden Stoßwirkungen verwenden.

### Résumé.

Lors la première partie du travail, on calcule, en s'appuyant sur un cas intervenu dans la pratique, le coefficient de choc  $n$  relatif à une charge tombant sur une poutre continue traversant deux ouvertures; l'auteur donne des formules générales, fournissant les valeurs du choc en un point quelconque de la poutre.

Par coefficient de choc on entend le nombre par lequel doit être multipliée la valeur de l'action statique pour obtenir l'action dynamique de la masse tombante. Ces actions se rapportent aux moments, efforts transversaux, tensions et flexions de la poutre.

En vue de leur utilisation correcte aux calculs numériques et pour simplifier ceux-ci, ces formules générales sont transformées et appliquées à une poutre continue avec deux portées égales. On traite ensuite le cas particulier des poutres encastrées à une extrémité et à appui libre de l'autre; enfin, le cas des poutres reposant librement sur deux appuis. Cette transformation des formules est conçue de manière à fournir des valeurs précises pour toutes les systèmes de poutres envisagés, et pour chacune d'elles en dix points de la portée, ce qui facilite les calculs.

Les coefficients de choc augmentent au voisinage des points d'appui. Ils sont, en outre, plus élevés pour les poutres continues que pour les poutres simples. On peut également employer ces formules pour calculer l'action des chocs produits par la charge mobile, soit sur les joints des rails, soit en raison des inégalités du chemin de roulement.

### **Summary.**

Based on a case occurring in practice, the impact coefficient  $n$  for a falling load on a continuous girder with two openings is calculated in the first part of this report. General formulae are given, from which the impact figure for any positions of the load may be obtained.

By impact coefficient is meant the figure by which the static effects must be multiplied in order to obtain the dynamic effect of the falling load. These effects refer to the moments, transverse forces, stresses and bending of the girder.

In order to obtain a more suitable numerical calculation, these general formulae are converted and determined for the continuous girder with two openings of equal span. After that, are considered the special cases of the girder freely supported at one end and rigidly held at the other end, and finally of the simple beam on two supports. This conversion of the formulae is carried out in such a way that fixed values are determined for different types of girders considered and for 10 different points; these facilitate the calculation.

The impact coefficients increase for loads in the neighbourhood of the supports. Besides that, they are greater for continuous girders than for girders on two supports. The formulae may also be used for bridges in which impact on the rails and unevenness in the roadway must be considered.