

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 1 (1932)

Artikel: Berechnung von Platten mittels Differenzen-Gleichungen
Autor: Frandsen, P.M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-714>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BERECHNUNG VON PLATTEN MITTELS DIFFERENZEN- GLEICHUNGEN ¹⁾|

CALCUL DES DALLES AU MOYEN D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

THE CALCULATION
OF SLABS BY MEANS OF DIFFERENCE EQUATIONS

P. M. FRANDBSEN,
Professor an der Technischen Hochschule, Kopenhagen.

Die fundamentale Differentialgleichung für mittelstarke ebene Platten, die überall die gleiche Dicke haben, ist schon längst erst von LAGRANGE (hinterlassene Papiere 1813, jedoch ohne Beweis) und später (mit vollständiger Begründung) von POISSON 1829 angegeben worden. Die Untersuchungen betreffs Feststellung der Randbedingungen sind gleichfalls beendet, was namentlich den Arbeiten POISSONS 1829, KIRCHHOFFS 1850, sowie betreffend die Wirkung der Torsionsmomente am Plattenrande KELVIN und TAIT 1867 zu verdanken ist.

Die LAGRANGE'sche Gleichung ist 4. Ordnung und ihre ersten Lösungen wurden von NAVIER 1820 und POISSON 1829 angegeben; seitdem ist die Literatur über dieses Thema sehr stark angewachsen. Obwohl die Plattengleichungen in mehreren Beziehungen analog den entsprechenden Gleichungen für die Momente und Durchbiegungen gerader Balken sind, vermißt man immer noch befriedigende Berechnungsmethoden für Platten, die mit den für Balken bekannten Methoden gleichgestellt werden könnten, welche man durch Anwendung indirekter Belastung aus den Differenzgleichungen ableiten kann. Die Anwendung der Differenzgleichungen für Platten ist auch, besonders von N. J. NIELSEN ²⁾ und H. MARCUS ³⁾ versucht worden, ohne daß jedoch gesagt werden kann, daß diese Sache völlig aufgeklärt ist. Vorliegende Abhandlung möge daher als Versuch betrachtet werden, das Differenzenproblem der Platten etwas näher klarzulegen.

A. Die Differentialgleichungen der Platten.

Die Schnittkräfte für eine ebene horizontale Platte gleicher Dicke h , auf die vertikale Kräfte (Belastungen und Reaktionen) einwirken, sind im Normalschnitt der Platte nur Biegungs- und Torsionsmomente sowie senkrechte Schubkräfte.

¹⁾ Vorliegende Arbeit wurde am 16. April 1929 in der Dänischen Gesellschaft für Baustatik vorgelesen und nachher in „Bygningsstatiske Meddelelser“, Köbenhavn (Maj) 1929, aufgenommen.

²⁾ N. J. NIELSEN: Bestemmelse af Spændinger i Plader ved Anvendelse af Differensligninger (Dissert. 1918). Kopenhagen 1920.

³⁾ H. MARCUS: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung elastischer Platten. Armierter Beton 1919.

Abb. 1 zeigt ein infinitesimales Element einer Platte, das einem rechtwinkligen Koordinatensystem zugeordnet ist mit den X - und Y -Achsen in der Mittelebene der Platte und der Z -Achse senkrecht dazu. Das Plattenelement ist durch vier Normalschnitte, paarweise parallel zu der XZ - und YZ -Ebene, abgeschnitten. Die Schnittkräfte sind mit ihren Werten pro Längeneinheit der Schnitte angegeben, wobei angenommen ist, daß die Variation von Schnitt zu Schnitt stetig ist.

Aus der Definition der Schnittkräfte folgt für die Torsionsmomente, daß $M_{xy} = M_{yx}$.

Wenn die gegebene senkrechte Belastung pro Flächeneinheit p ist, erhält man mit den in Abb. 1 angegebenen Bezeichnungen und positiven Richtungen für die Schnittkräfte folgende Gleichgewichtsgleichungen:

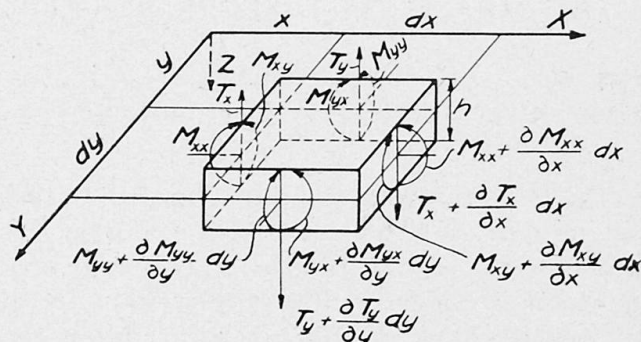


Fig. 1.

Durch Projektion auf die Z -Achse

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy dx + p dy dx = 0.$$

Durch die Momentengleichungen in bezug auf die Kanten des Elements

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy dx - T_x dy dx &= 0, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} dy dx - T_y dx dy &= 0, \end{aligned}$$

hieraus nach Reduktion

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -p \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \\ T_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}. \end{aligned} \right\} (2)$$

Die Änderungen der Schnittkräfte verschiedener Normalschnitte durch denselben Punkt einer Platte erhält man mittels des schiefen Schnitts des in Abb. 2 gezeigten Plattenelements.

Indem nun die Schnittkräfte im schiefen Normalschnitt s (Länge ds) mit der Normalen n ($\angle xn = \Theta$) als M_{nn} , M_{ns} und T_n bezeichnet werden, erhält man die Gleichgewichtsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 T_n ds &= T_x dy + T_y dx, \\
 M_{nn} ds &= (M_{xx} dy + M_{yx} dx) \cos \Theta + (M_{yy} dx + M_{xy} dy) \sin \Theta, \\
 M_{ns} ds &= -(M_{xx} dy + M_{yx} dx) \sin \Theta + (M_{yy} dx + M_{xy} dy) \cos \Theta
 \end{aligned}$$

woraus man nach Reduktion findet:

$$\begin{aligned}
 T_n &= T_x \cos \Theta + T_y \sin \Theta, & (3) \\
 M_{nn} &= M_{xx} \cos^2 \Theta + M_{yy} \sin^2 \Theta + 2 M_{xy} \sin \Theta \cos \Theta, \\
 M_{ns} &= (M_{yy} - M_{xx}) \sin \Theta \cos \Theta + M_{xy} (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta). & (4)
 \end{aligned}$$

Aus der Gleichung für M_{nn} und der entsprechenden für das Biegemoment M_{ss} in einem dazu senkrechten Schnitt ($\sphericalangle xs = 90 + \Theta$) ergibt sich durch Addition, daß

$$M_{nn} + M_{ss} = M_{xx} + M_{yy}, \quad (5)$$

wodurch angegeben wird, daß die Summe der Biegemomente in zwei zueinander senkrechten Normalschnitten konstant ist.

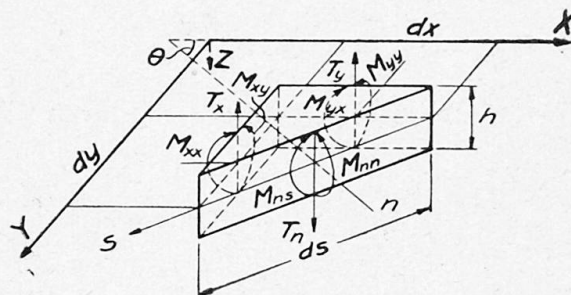


Fig. 2.

Die Deformation der Mittelfläche der Platte besteht darin, daß sie die Form einer stetigen schwachgekrümmten Fläche, der Durchbiegungsfläche annimmt, deren Ordinaten u (positiv mit Z) von der XY -Ebene aus gemessen als (unendlich) klein im Verhältnis zur Ausdehnung der Platte behandelt werden können.

Für das in Abb. 1 gezeigte Plattenelement werden die Krümmungen der Durchbiegungsfläche $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sowie die Torsion $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ direkt aus den Schnittkräften abgeleitet durch Superposition der Wirkung der beiden Biegemomente M_{xx} und M_{yy} für sich, und der Wirkung der beiden Torsionsmomente M_{xy} und M_{yx} für sich, deren Einzelwirkung mit derjenigen von gebogenen Balken bzw. verdrehten Prismen übereinstimmt.

Bezeichnet man die Elastizitätskoeffizienten mit E und G und das Poisson'sche Verhältnis mit ν , erhält man, da $I = \frac{1}{12} h^3$, folgende Einzelkrümmungen:

$$\begin{aligned}
 \text{von } M_{xx} \text{ für sich} & \quad - \frac{M_{xx}}{EI} \text{ in der } XZ\text{-Ebene und } + \nu \frac{M_{xx}}{EI} \text{ in der } YZ\text{-Ebene,} \\
 \text{von } M_{yy} \text{ für sich} & \quad + \nu \frac{M_{yy}}{EI} \text{ in der } XZ\text{-Ebene und } - \frac{M_{yy}}{EI} \text{ in der } YZ\text{-Ebene.}
 \end{aligned}$$

Die resultierenden Krümmungen sind dann:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{EI} (M_{xx} - \nu M_{yy}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{EI} (M_{yy} - \nu M_{xx}). \quad (6)$$

Von M_{xy} und M_{yx} erhält man den Torsionswinkel

$$\vartheta = \frac{2 M_{xy}}{\frac{1}{3} G h^3} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{2 M_{xy}}{\frac{1}{3} h^3} = (1+\nu) \frac{M_{xy}}{EI} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

oder
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -(1+\nu) \frac{M_{xy}}{EI}. \quad (7)$$

Für die Schnittmomente finden wir danach, indem $D = \frac{EI}{1-\nu^2}$:

$$\left. \begin{aligned} M_{xx} &= -D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ M_{yy} &= -D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D (1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Für die Schubkräfte erhält man schließlich durch Gl. (8) eingesetzt in Gl. (2)

$$T_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad T_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (9)$$

Durch Einsetzen von T_x und T_y aus (9) in (1) ergibt sich eine partielle Differentialgleichung für die Durchbiegungen der Platte:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{p}{D}, \quad (10)$$

also die LAGRANGE'sche Gleichung.

Für Platten kann ebenso wie für Balken eine andere Form der Differentialgleichung (10) angegeben werden, wodurch sie in zwei partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung gespalten wird; dies geschieht durch die Einführung des Skalar-Momentes

$$U = \frac{M_{xx} + M_{yy}}{1+\nu}, \quad (11)$$

das so bezeichnet wird, weil es infolge (5) dasselbe für alle orthogonalen Normalschnittpaare im selben Punkt ist. Durch Addition der beiden ersten Gleichungen (8) erhält man nun als Differentialgleichung für die Durchbiegungsfläche u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{U}{D}. \quad (12)$$

Die Differentialgleichung für die Skalar-Momentenfläche U erhält man aus den Gleichungen (1), (12) und (9).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -p. \quad (13)$$

Die Gleichungen (12) und (13) nennt man die POISSON'schen Gleichungen. So-

wohl u wie U sind hiernach als Skalar-Potentiale aufzufassen und ihre Gradienten, die Tangentenwinkel $t = \text{grad } u$ und die Schubkräfte $T = \text{grad } U$, als Vektoren mit Achsenkomponenten.

$$t_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad t_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{und} \quad T_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad T_y = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Für eine beliebige Richtung n erhält man

$$\left. \begin{aligned} t_n &= \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(xn) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(yn), \\ T_n &= \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(xn) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(yn). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Der Ausdruck für T_n ist auch weiter oben in Gleichung (3) gefunden worden.

Die Randbedingungen für Platten, die auf ebenen polygonalen Randkurven einfach unterstützt sind, werden

$$U = 0 \quad \text{und} \quad u = 0. \quad (15)$$

Solche Platten sind dann im selben Sinne statisch bestimmt wie einfach gestützte Balken. In diesem Falle können nämlich die beiden Poisson'schen Differentialgleichungen (12) und (13) einzeln für sich dadurch gelöst werden, daß man zuerst die Skalarmomentenfläche U und danach die Biegungsfläche u bestimmt. Bei anderen Randkurven⁴⁾ als Polygonen sind einfach unterstützte Platten statisch unbestimmt ebenso wie eingespannte und durchlaufende Platten sowie Platten mit freien Rändern.

Ein anschauliches Bild von den U - und u -Flächen für statisch bestimmte Platten erhält man durch die Biegungsflächen für eine über die Randkurve der Platte mit konstanter Spannung ausgespannte elastische Haut (Membran), wenn sie mit p bzw. $\frac{U}{D}$ pro Flächeneinheit belastet wird. Für solche Biegungsflächen⁵⁾ sind die Biegungsordinaten am Rande nämlich null, ebenso wie die Randwerte von U und u für statisch bestimmte Platten, und man sieht leicht, daß die Differentialgleichungen dieselbe Form wie die Gleichungen (12) und (13) haben. Die hier erwähnten Biegungsflächen sind im folgenden als **Z u g f l ä c h e n** bezeichnet.

Hilfssätze.

\bar{A} bezeichne eine stetige Vektorfunktion (Achsenkomponenten A_x, A_y, A_z in einem rechtwinkligen Koordinatensystem X, Y, Z).

U bezeichne eine stetige Skalarfunktion.

Die Divergenz eines Vektors \bar{A} ist ein Skalar und dessen Definition:

$$\text{div } \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

⁴⁾ Bei solchen ist die Randbedingung für U , wenn die Kurve mit s , ihre Normale mit n und der Krümmungsradius mit ρ bezeichnet wird:

$$U = M_{nn} - D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} \right).$$

⁵⁾ Vergl. PRANDTL'S Torsionsspannungsfläche. Phys. Zeitschrift 1903, Bd. 4, und H. MARCUS, a. a. O.

Der Gradient eines Skalars U ist ein Vektor, den man bezeichnet $\text{grad } U$, und der die Achsenkomponenten $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ hat.

Die Divergenz eines Gradienten $\text{grad } U$ ist ein Skalar, der bezeichnet wird

$$\text{div grad } U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U.$$

Das Zeichen Δ nennt man den LAPLACE'schen Operator.

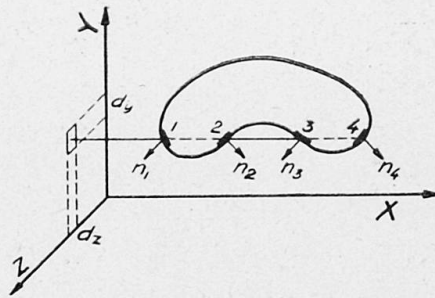


Fig. 3.

Für einen geschlossenen Raum R mit der Oberfläche O (Normale n), wie in Abb. 3 gezeigt, kann das Raumintegral von $\text{div } \bar{A}$

$$\int_R \text{div } \bar{A} \cdot dR = \int_R \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

durch gliedweise Integration in das Oberflächenintegral

$$\int_O (A_x \cos(xn) + A_y \cos(yn) + A_z \cos(zn)) dO,$$

verwandelt werden,

wo $A_n = A_x \cos(xn) + A_y \cos(yn) + A_z \cos(zn)$

die Projektion der Oberflächenwerte von \bar{A} auf die Oberflächennormale n bedeutet.

Also

$$\int_R \text{div } \bar{A} \cdot dR = \int_O A_n \cdot dO. \quad (16)$$

Diese Integralformel nennt man die Gleichung von GAUSS.

Ist in der Gleichung von GAUSS der Vektor \bar{A} speziell ein Gradient $\text{grad } U$, so wird

$$\text{div } \bar{A} = \text{div grad } U = \Delta U$$

und $A_n = \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(xn) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(yn) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(zn),$

sodaß sich für die Gleichung von GAUSS ergibt:

$$\int_R \Delta U \cdot dR = \int_O \frac{\partial U}{\partial n} \cdot dO. \quad (17)$$

Ist der Vektor \bar{A} speziell ein Produkt eines Skalars U und eines Gradienten $\text{grad } U_1$, ist die Gleichung von GAUSS:

$$\int_R (U \Delta U_1 + (\text{grad } U_1, \text{grad } U)) \cdot dR = \int_O U \frac{\partial U_1}{\partial n} \cdot dO.$$

Nach Vertauschung der hierin enthaltenen U und U_1 erhält man auf dieselbe Weise

$$\int_R (U_1 \Delta U + (\text{grad } U, \text{grad } U_1)) \cdot dR = \int_O U_1 \frac{\partial U}{\partial n} \cdot dO.$$

Da das Skalarprodukt

$$(\text{grad } U_1, \text{grad } U) = \frac{\partial U_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} = (\text{grad } U, \text{grad } U_1) \text{ ist,}$$

erhält man durch Subtraktion der beiden letzten Integralformeln:

$$\int_R (U \Delta U_1 - U_1 \Delta U) dR = \int_O \left(U \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial U}{\partial n} \right) dO. \quad (18)$$

Diese Integralform nennt man die GREEN'sche Gleichung⁶⁾.

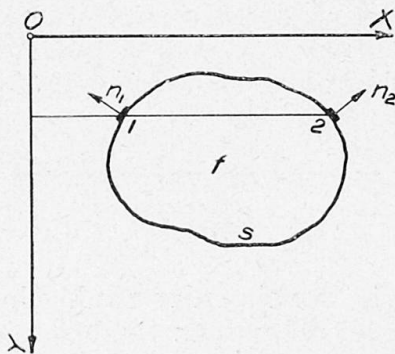


Fig. 4.

Sind U und U_1 Funktionen von zwei unabhängigen veränderlichen x und y (wie bei Platten) innerhalb einer ebenen Fläche f , begrenzt von der Randkurve s (Normale n), wie in Abb. 4 gezeigt, so wird die GREEN'sche Gleichung

$$\int_f (U \Delta U_1 - U_1 \Delta U) df = \int_s \left(U \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds, \quad (19)$$

wo die linke Seite nun ein Flächenintegral ist, das sich auf alle Areal-elemente der Fläche f bezieht, während die rechte Seite ein Linienintegral ist, das sich auf alle Elemente der Randkurve s erstreckt.

Die Richtungsderivierte für die Randkurvennormale $\frac{\partial}{\partial n}$ und der LAPLACE'sche Operator Δ bezeichnen hier

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(xn) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(yn),$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

⁶⁾ Dieser Beweis ist im wesentlichen GANS: „Einführung in die Vektoranalysis“ entnommen. — Die GREEN'sche Gleichung kann für Platten auch mittels der Arbeitsgleichung auf gewöhnliche Weise erwiesen werden.

Wenn U und U_1 Funktionen sind von einer Veränderlichen x (wie bei geraden Balken) innerhalb einer Strecke AB der X -Achse (vergl. Abb. 5), so erhält die GREEN'sche Gleichung die Form

$$\int_A^B (U \Delta U_1 - U_1 \Delta U) dx = \left| U \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial U}{\partial n} \right|_A^B, \quad (20)$$

wo die linke Seite ein Linienintegral für die Strecke AB ist und die rechte Seite der Unterschied zwischen den Grenzwerten für die eingehenden Größen bei B und A , da

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{d}{dx} \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{d^2}{dx^2}.$$

Green'sche Funktionen für Platten.

Die GREEN'sche Gleichung (19) kann unmittelbar zur Auflösung der beiden POISSON'schen Differentialgleichungen (12) und (13) dienen, die mittels des LAPLACE'schen Operator geschrieben lauten:

$$\Delta U = -p \quad \text{und} \quad \Delta u = -\frac{U}{D}. \quad (21)$$

Von den beiden Funktionen U und U_1 , die in der GREEN'schen Gleichung auftreten, wird verlangt, daß sie stetig innerhalb der Platte sein müssen,

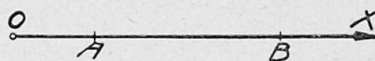


Fig. 5.

und sonst ganz unabhängig voneinander sind. Um explizite für den Funktionswert U_a von U in einem beliebigen Punkt a einen Ausdruck zu erhalten, wird U_1 als dazu geeignetes partikuläres Integral der Gleichung $\Delta U_1 = 0$ gewählt. Funktionen dieser Art sind GREEN'sche Funktionen.

Die GREEN'sche Funktion G befriedigt die Gleichung $\Delta G = 0$ in allen Punkten der Platte (ausgenommen Punkt a , wo $\Delta G = -\frac{1}{df}$) und hat den Wert null längs der Randkurve s (Normale n) der Platte.

Aus der GREEN'schen Gleichung (19) erhält man dann:

$$U_a \left(-\frac{1}{df} \right) df - \int_f G \Delta U df = \int_s U \frac{\partial G}{\partial n} ds.$$

Für eine beliebig unterstützte Platte erhält man hieraus, wenn U z. B. das Skalarmoment für eine Belastung p bedeutet, und also $\Delta U = -p$

$$U_a = \int_f G \cdot p df + \int_s U \left(-\frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (22)$$

Durch Einsetzen von

$$U_{a,0} = \int_f G \cdot p df, \quad (23)$$

erhält man

$$U_a = U_{a,0} + \int_s U \left(-\frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (24)$$

Speziell für eine einfach unterstützte polygonale Platte, wo $U = 0$ längs des Randes, wird

$$U_a = U_{a,0} = \int_f G \cdot p \, df.$$

Analog den entsprechenden Bezeichnungen in der Balkentheorie nennt man $U_{a,0}$ das einfache Skalar-Moment im Punkte a , und G ist dann die Einflußfunktion (= fläche) für das Skalarmoment⁷⁾.

Dieselben Betrachtungen können beim Bestimmen der Durchbiegung u_a gemacht werden, nur daß man dann mit $\frac{\dot{U}}{D}$ belastet und u_a als Skalar-Momente für diese Belastung bestimmt. Es lohnt sich, in diesem Zusammenhang zu beachten, daß, weil G eine POISSON'sche (LAPLACE'sche) Gleichung $\Delta G = -k$ ($k = 0$, ausgenommen im Punkte a , wo $k = \frac{1}{df}$) befriedigt und längs der Stützkurve s gleich null ist, ihre Funktionswerte (ebenso wie U und u für statisch bestimmte Platten) als Zugflächenordinaten für die Belastung k aufgefaßt werden können. Die Kraft $k \cdot df = 1$ nennt man die gedachte Belastung.

Bei Platten werden die Funktionswerte von G bekanntlich unendlich groß rings um den betrachteten Punkt a , und, da die Bestimmung von G oft umständlich ist und außerdem nur für spezielle Randkurvenformen durchgeführt werden kann, so ist die Funktion G für Platten nicht unmittelbar in dieser Form praktisch anwendbar.

Bei Balken erhält man dagegen überall endliche Ordinaten, da die GREEN'sche Funktion hier das bekannte Einflußdreieck (für das einfache Biegemoment) ist mit dem Scheitelpunkt in dem betrachteten Punkt a .

Die Ursache dieses Unterschiedes ist darin zu suchen, daß die beiden Fälle nur scheinbar analog sind. Eine nähere Betrachtung ergibt, daß der gedachten Belastung bei Balken (als Plattenstreifen mit zylindrischer Deformation betrachtet) eine Linienbelastung (und keine Punktbelastung) bei Platten entspricht. Bei Bestrebungen, die darauf ausgehen, der Berechnung von Platten dieselbe Form wie bei Balken zu geben, liegt es dann nahe, es mit solchen GREEN'schen Funktionen zu versuchen, die durch Zugflächen für Linienbelastungen dargestellt werden können.

⁷⁾ Benutzt man Gl. (24) bei einem geraden wagerechten und einfach unterstützten Balken AB mit der Länge l , auf den eine senkrechte Belastung p sowie die Momente M_A und M_B an den Enden wirken, so erhält man mit Hilfe der Gl. (20), da U_a hier im Punkte a gleich dem Biegemoment M_a ist mit den Abständen x und x' von A bzw. B , die bekannte Formel:

$$M_a = M_{a,0} + M_A \frac{x'}{l} + M_B \frac{x}{l},$$

wo

$$M_{a,0} = \int G \cdot p \, dx,$$

und G die Einflußfunktion (= linie) für das einfache Biegemoment $M_{a,0}$.

Mit einer gedachten indirekten Belastung und Knotenpunkten nur in A , a und B , erhält man (wenn P_a der Knotenpunktdruck in a ist und also $M_{a,0} = P_a \frac{xx'}{l}$) die Differenzform der Momentenformel

$$-P_a = \frac{M_A - M_a}{x} - \frac{M_a - M_B}{x'}.$$

GREEN'sche Funktionen, die den Linienbelastungen entsprechen, bezeichnen wir im folgenden mit F . Abb. 6 zeigt eine Linienbelastung π_σ pro Längeneinheit der Kurve (Normale ν) für eine Zugfläche mit Stützkurve s (Normale n) gleich der Stützkurve der Platte.

Die Funktion F hat dann $\Delta F = 0$ (mit Ausnahme auf σ) zu befriedigen, und sie muß längs s den Wert null haben. Aus Gl. (19) folgt, indem σ an dem in Abb. 6 gezeigten gestrichelten Schnitt ausgeschnitten wird⁸⁾, der dann zum Randintegral mitgerechnet wird,

$$0 - \int_f F \cdot \Delta U \cdot df = \int_\sigma U_\sigma \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \nu} \right)_- - \left(\frac{\partial F}{\partial \nu} \right)_+ \right] d\sigma + \int_s U_s \frac{\partial F}{\partial n} ds - \int_\sigma F_\sigma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \nu} \right)_- - \left(\frac{\partial U}{\partial \nu} \right)_+ \right] d\sigma.$$

Da $\Delta U = -p$, $\left(\frac{\partial U}{\partial \nu} \right)_- - \left(\frac{\partial U}{\partial \nu} \right)_+ = 0$ und $\left(\frac{\partial F}{\partial \nu} \right)_- - \left(\frac{\partial F}{\partial \nu} \right)_+ = \pi_\sigma$,

erhält man
$$\int_f F \cdot p \, df = \int_\sigma U_\sigma \pi_\sigma \, d\sigma + \int_s U_s \frac{\partial F}{\partial n} \, ds$$

oder
$$\int_\sigma U_\sigma \pi_\sigma \, d\sigma = \int_f F \cdot p \, df + \int_s U_s \left(-\frac{\partial F}{\partial n} \right) \, ds. \quad (25)$$

Die Gleichung (25) ist ganz analog (22), aber die linke Seite drückt U_σ nicht explizite aus.

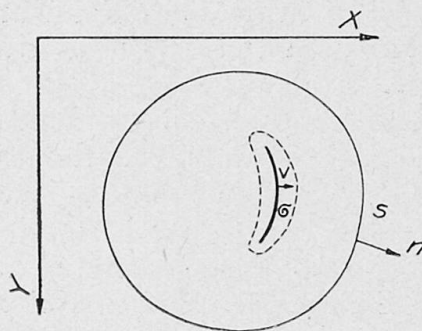


Fig. 6.

Als Stütze für die Zugfläche der gedachten Belastung ist man nicht ausschließlich an die Benutzung der Randkurve der Platte gebunden, sondern man kann zur Aufnahme des senkrechten Stützdrucks der Zugfläche eine beliebige andere geschlossene Kurve s (Normale n), also die Reaktionskurve benutzen, die in der XY -Ebene und innerhalb der Randkurve liegt, während letztere wie zuvor den Horizontalzug der Zugfläche aufnimmt.

Da die gedachte Belastung hiermit innerhalb der Reaktionskurve s angebracht werden muß, erhält man für die Punktbelastung (für G) bzw. für die Linienbelastung (für F) Formeln ganz wie (22) und (25), deren Integrale sich jetzt jedoch nur über das Gebiet innerhalb der Reaktionskurve s und längs derselben zu erstrecken haben.

Da die Funktionen G und F nun unabhängig von der Form der Randkurve der Platte gewählt werden können, besteht der Vorteil bei Anwendung solcher inneren Reaktionskurven darin, daß man sie beliebig und so bequem als möglich für die Funktionen G und F wählen kann.

⁸⁾ Vergl. GANS, a. a. O.

B. Die Differenzgleichungen der Platten.

1. Die Reaktionskurve ist ein Kreis.

Ist die Reaktionskurve ein Kreis s mit dem Radius λ (Fig. 7), so erhält man für eine Punktbelastung im Zentrum eine GREEN'sche Funktion, die in polaren Koordinaten (r, Θ) und mit dem Pol im Angriffspunkt der Kraft, a , geschrieben werden kann:

$$G = \frac{1}{2\pi} l \frac{\lambda}{r}. \quad (26)$$

Daß $G = 0$ längs s ($r = \lambda$), sieht man unmittelbar, und daß $\Delta G = 0$, kann man leicht durch Differentiation zeigen. Da ferner $\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r}$, sieht man auch, daß die entsprechende gedachte Belastung eine Einzelkraft im Zentrum ist.

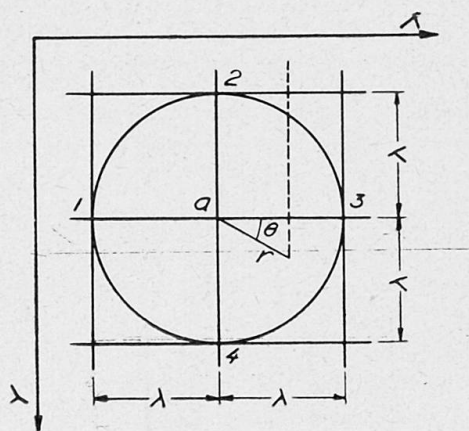


Fig. 7.

Für eine Platte mit der Belastung p erhält man danach mit Hilfe der Gl. (22) für das Skalarmoment

$$U_a = \int_0^{2\pi} \int_0^\lambda \frac{1}{2\pi} l \frac{\lambda}{r} p r dr d\Theta + \int_0^{2\pi\lambda} U_s \left(\frac{1}{2\pi\lambda} \right) ds.$$

Als bekannte Größe, wenn die Belastung p gegeben ist, wird hier eingesetzt:

$$P_a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^\lambda l \frac{\lambda}{r} p r dr, \quad (27)$$

wonach man erhält

$$U_a = P_a + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_s d\Theta$$

oder

$$P_a = U_a - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_s d\Theta. \quad (28)$$

Das Linienintegral in (28) gibt den Mittelwert von U längs der Reaktionskurve s an, und es kann, falls man es wünscht, angenähert in eine Summe von Mittelwerten für beliebige Teile derselben aufgelöst werden. Die Formel (28) kann daher zur Aufstellung von Differenzgleichungen für die Mittelwerte von U angewendet werden.

Für Punkte einer Platte, die durch ein Quadratnetz mit der Maschenweite λ bestimmt sind, kann man hiermit verfahren, wie in Abb. 7 für den Teil um den Punkt a herum gezeigt wurde. Indem U_1, U_2, U_3 und U_4 Mittelwerte von U für jeden der Viertelkreise sind, welche die Quadratnetzpunkte 1, 2, 3 und 4 als Mittelpunkte haben, erhält man mit Hilfe der Gleichung (28)

$$P_a = U_a - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} &+ U_2 \\ -4P_a &= + U_1 - 4U_a + U_3. \\ &+ U_4 \end{aligned} \right\} (29)$$

Für die Biegungsordinaten u erhält man eine ähnliche Formel, nur hat man in der Gleichung (27) $\frac{U}{D}$ anstatt p einzusetzen⁹⁾.

Speziell für eine gleichförmige Belastung p erhält man mit Hilfe der Gl. (27) $4P_a = p\lambda^2$.

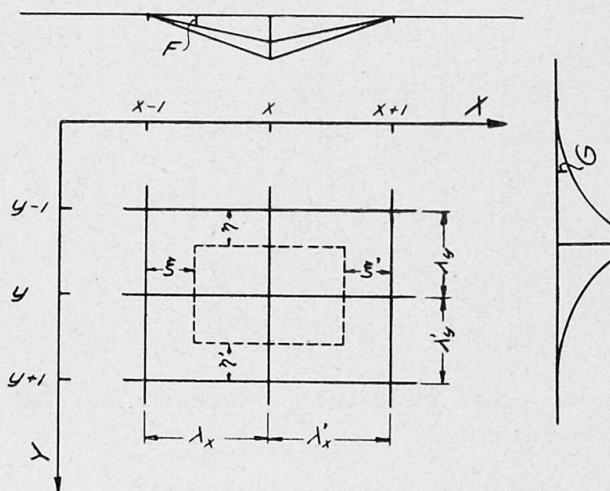


Fig. 8.

Differenzgleichungen dieser Art, die einer rechteckigen Einteilung der Platte entsprechen, würde man mit Hilfe einer GREEN'schen Funktion G für eine elliptische Reaktionskurve erhalten.

2. Die Reaktionskurve ein Rechteck.

Ist die Reaktionskurve ein Rechteck und geschieht die Linienbelastung längs eines Kreuzes, dessen Arme λ_x, λ'_x und λ_y, λ'_y parallel zu den Seiten des Rechtecks sind, welches dadurch (wie in Abb. 8 gezeigt) in vier rechteckige Felder geteilt wird, so können als GREEN'sche Funktion F die Gleichungen für vier hyperbolische Paraboloiden mit den Ordinaten Null längs der Reaktionskurve und gemeinschaftlichen Ordinaten (die geradlinig verlaufen) längs des Belastungskreuzes gebraucht werden.

⁹⁾ Die Gleichung (29) für U oder u stimmt mit der Form von Differenzgleichungen für Platten überein, die von N. J. NIELSEN und H. MARCUS (a. a. O.) angegeben sind, bedeutet aber insofern eine Verbesserung, als der Knotenpunktdruck in Gl. (29) genau definiert ist.

Die Achsen des Hauptkoordinatensystems (x, y) sind parallel zu den beiden Seitenpaaren der Reaktionskurve zu legen. Für jedes dieser vier hyperbolischen Parabolöide F wählt man ein dazu paralleles sekundäres Koordinatensystem (ξ, η) mit den Anfangspunkten in den vier Ecken des Reaktionsrechtecks.

In jedem dieser rechteckigen Felder erhält die Gleichung für F dann die Form:

$$F = F_{xy} \frac{\xi \cdot \eta}{\lambda_x \cdot \lambda_y}, \quad (30)$$

wo F_{xy} der Funktionswert in der Mitte des Kreuzes ist.

Man sieht unmittelbar, daß diese Funktionen die Randbedingung $F = 0$ längs der Seiten des Reaktionsrechtecks und $\Delta F = 0$ in allen Punkten der Scheiben befriedigen.

Zur Bezeichnung der beiden Arten von geraden Linien (Systemlinien) in der Belastungs- und Reaktionskurve verwendet man die Nummerierung ihrer Schnittpunkte mit den Achsen des Hauptkoordinatensystems, sodaß (wie in Fig. 8 gezeigt) Größen, die sich auf eine Linie beziehen, die Nummer der Linie als Einzelindex, und Größen, die sich auf einen Punkt beziehen, die Nummern der beiden einander schneidenden Linien als Doppelindex erhalten; λ_x und λ_y nennt man die Fachlängen.

Für eine Platte mit der Belastung p findet man nun mit Hilfe der Gleichung (25) für die Skalar-Momente

$$\int_f F p dx dy = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\lambda_x} U_{y-1} \left(-F_{xy} \frac{\xi}{\lambda_x} \frac{1}{\lambda_y} \right) d\xi + \int_0^{\lambda'_x} U_{y-1} \left(-F_{xy} \frac{\xi'}{\lambda'_x} \frac{1}{\lambda_y} \right) d\xi' \\ + \int_0^{\lambda_x} U_{x-1} \left(-F_{xy} \frac{\eta}{\lambda_y} \frac{1}{\lambda_x} \right) d\eta + \int_0^{\lambda_y} U_x \left(F_{xy} \frac{\eta}{\lambda_y} \frac{1}{\lambda_x} + F_{xy} \frac{\eta}{\lambda_y} \frac{1}{\lambda'_x} \right) d\eta \\ + \int_0^{\lambda_y} U_{x+1} \left(-F_{xy} \frac{\eta}{\lambda_y} \frac{1}{\lambda'_x} \right) d\eta \\ + \int_0^{\lambda_x} U_y \left(F_{xy} \frac{\xi}{\lambda_x} \frac{1}{\lambda_y} + F_{xy} \frac{\xi}{\lambda_x} \frac{1}{\lambda'_y} \right) d\xi \\ + \int_0^{\lambda'_x} U_y \left(F_{xy} \frac{\xi'}{\lambda'_x} \frac{1}{\lambda_y} + F_{xy} \frac{\xi'}{\lambda'_x} \frac{1}{\lambda'_y} \right) d\xi' \\ + \int_0^{\lambda'_y} U_{x-1} \left(-F_{xy} \frac{\eta'}{\lambda'_y} \frac{1}{\lambda_x} \right) d\eta' + \int_0^{\lambda'_y} U_x \left(F_{xy} \frac{\eta'}{\lambda'_y} \frac{1}{\lambda_x} + F_{xy} \frac{\eta'}{\lambda'_y} \frac{1}{\lambda'_x} \right) d\eta' \\ + \int_0^{\lambda'_y} U_{x+1} \left(-F_{xy} \frac{\eta'}{\lambda'_y} \frac{1}{\lambda'_x} \right) d\eta' \\ + \int_0^{\lambda_x} U_{y+1} \left(-F_{xy} \frac{\xi}{\lambda_x} \frac{1}{\lambda'_y} \right) d\xi + \int_0^{\lambda'_x} U_{y+1} \left(-F_{xy} \frac{\xi'}{\lambda'_x} \frac{1}{\lambda'_y} \right) d\xi' \end{array} \right\} \quad (31)$$

Durch Division durch F_{xy} auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens ergibt sich für die linke Seite

$$P_{xy} = \int_f \frac{F}{F_{xy}} p dx dy. \quad (32)$$

Da $F = F_{xy}$ im Punkt (x, y) gleich 1 ist, sieht man, daß P_{xy} den Knotenpunktdruck im Punkt (x, y) bedeutet, wenn man sich denkt, daß die Belastung indirekt auf die Platte durch ein einfach unterstütztes Rostwerk in jeder Scheibe wirkt.

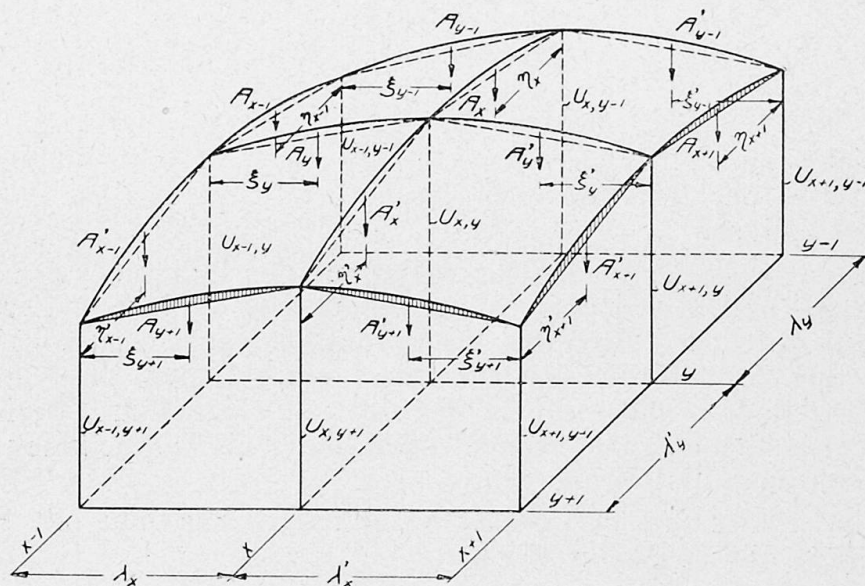


Fig. 9.

Durch Umordnen der Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in Gl. (31) erhält man die Form:

$$-P_{xy} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} \left(\frac{U_{x-1} - U_x}{\lambda_x} - \frac{U_x - U_{x+1}}{\lambda'_x} \right) \eta d\eta \\ & + \frac{1}{\lambda'_y} \int_0^{\lambda'_y} \left(\frac{U_{x-1} - U_x}{\lambda_x} - \frac{U_x - U_{x+1}}{\lambda'_x} \right) \eta' d\eta' \\ & + \frac{1}{\lambda_x} \int_0^{\lambda_x} \left(\frac{U_{y-1} - U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y - U_{y+1}}{\lambda'_y} \right) \xi d\xi \\ & + \frac{1}{\lambda'_x} \int_0^{\lambda'_x} \left(\frac{U_{y-1} - U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y - U_{y+1}}{\lambda'_y} \right) \xi' d\xi' \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Die auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in Gl. (33) auftretenden Werte von U gehören ausschließlich zu den Linien des Reaktionsrechtecks und des Belastungskreuzes (den Systemlinien), und man sieht somit, daß die Glieder auf der rechten Seite die Belastungen der auf den genannten Linien stehenden $\frac{U}{\lambda}$ -Flächen (nach den Regeln für indirekte Belastung wie bei Balken) verteilt auf die Endpunkte des Belastungskreuzes und dessen Mittelpunkt bedeuten.

Man kann daher, wie in Abb. 9 gezeigt, die U -Flächen der Systemlinien ebenso wie bei Balken in einen niederen trapezoidalen Teil teilen, der nur

durch die Werte von U in den Systempunkten bestimmt ist, und in einen oberen Teil (A oder A'), der vom Verlauf der U -Fläche zwischen diesen Punkten abhängt.

Als Gleichung für die U -Werte der Systempunkte ergibt sich hiernach folgende Form

$$-P_{xy} = \frac{1}{3} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{x-1,y-1} U_{x-1,y-1} + \alpha_{x,y-1} U_{x,y-1} + \alpha_{x+1,y-1} U_{x+1,y-1} + \\ \alpha_{x-1,y} U_{x-1,y} - 8\alpha_{xy} U_{xy} + \alpha_{x+1,y} U_{x+1,y} + \\ \alpha_{x-1,y+1} U_{x-1,y+1} + \alpha_{x,y+1} U_{x,y+1} + \alpha_{x+1,y+1} U_{x+1,y+1} \end{array} \right\} + [A]_{xy}, \quad (34)$$

worin

$$\alpha_{x-1,y-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_y}{\lambda_x} + \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \right), \quad \alpha_{x,y-1} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\lambda_x}{\lambda_y} - \frac{\lambda_y}{\lambda_x} + 2 \frac{\lambda'_x}{\lambda_y} - \frac{\lambda_y}{\lambda'_x} \right), \quad \alpha_{x+1,y-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} + \frac{\lambda'_x}{\lambda'_y} \right),$$

$$\alpha_{x-1,y} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\lambda'_y}{\lambda_x} - \frac{\lambda_x}{\lambda'_y} + 2 \frac{\lambda_y}{\lambda_x} - \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \right), \quad \alpha_{xy} = \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y} + \frac{\lambda_y}{\lambda_x} + \frac{\lambda_x}{\lambda'_y} + \frac{\lambda'_y}{\lambda_x} + \frac{\lambda'_x}{\lambda'_y} + \frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} + \frac{\lambda_y}{\lambda'_x} + \frac{\lambda'_x}{\lambda_y} \right),$$

$$\alpha_{x+1,y} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\lambda_y}{\lambda'_x} - \frac{\lambda'_x}{\lambda_y} + 2 \frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} - \frac{\lambda'_x}{\lambda'_y} \right), \quad \alpha_{x-1,y+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda'_y}{\lambda_x} + \frac{\lambda_x}{\lambda'_y} \right),$$

$$\alpha_{x,y+1} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\lambda_x}{\lambda'_y} - \frac{\lambda'_y}{\lambda_x} + 2 \frac{\lambda'_x}{\lambda'_y} - \frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} \right), \quad \alpha_{x+1,y+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} + \frac{\lambda'_x}{\lambda'_y} \right);$$

$$\text{und } [A]_{xy} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda_y} \left(\frac{A_{x-1} \eta_{x-1} - A_x \eta_x}{\lambda_x} - \frac{A_x \eta_x - A_{x+1} \eta_{x+1}}{\lambda'_x} \right) \\ + \frac{1}{\lambda'_y} \left(\frac{A'_{x-1} \eta'_{x-1} - A'_x \eta'_x}{\lambda_x} - \frac{A'_x \eta'_x - A'_{x+1} \eta'_{x+1}}{\lambda'_x} \right) \\ + \frac{1}{\lambda_x} \left(\frac{A_{y-1} \xi_{y-1} - A_y \xi_y}{\lambda_y} - \frac{A_y \xi_y - A_{y+1} \xi_{y+1}}{\lambda'_y} \right) \\ + \frac{1}{\lambda'_x} \left(\frac{A'_{y-1} \xi'_{y-1} - A'_y \xi'_y}{\lambda_y} - \frac{A'_y \xi'_y - A'_{y+1} \xi'_{y+1}}{\lambda'_y} \right). \end{array} \right.$$

Teilt man die ganze Platte in rechteckige Scheiben durch zwei aufeinander senkrechte Systeme von parallelen Linien, die (wie in den Abb. 8 und 9 angedeutet ist) mit Nummern versehen sind, so erhält man für jeden Systempunkt eine Gleichung wie (34), die aus dieser durch Änderung der Indices hergeleitet werden kann. Die Gleichung (34) kann dann als Differenzgleichung für die Bestimmung der Skalarmomente in den Systempunkten aufgefaßt werden.

Zur Bestimmung der Durchbiegungen u erhält man eine ähnliche Differenzgleichung, wo P_{xy} für $\frac{U}{D}$ als Belastung bestimmt werden muß.

Wählt man speziell alle Fachweiten λ gleich groß, so sind alle Werte von α in Gl. (34) gleich eins.

Falls die Fachlängen so klein gewählt werden, daß die U -Fläche zwischen den Systempunkten als (annähernd) geradlinig angenommen werden kann, so fällt der Beitrag $[A]_{xy}$ weg.

Bei großen Fachlängen kann der Beitrag $[A]_{xy}$ der A -Flächen nicht weggelassen werden. In solchen Fällen muß man daher die Form der

A -Flächen zwischen drei aufeinanderfolgenden Systempunkten schätzen. Mit Hilfe der Zugfläche, deren Hauptform nicht schwierig zu erfassen ist, kann eine solche Schätzung insofern Genüge leisten, als schon beim ersten Durchrechnen eine befriedigende Annäherung zutage tritt, die gegebenenfalls durch Umrechnen verbessert werden kann. Als brauchbare Kurven zur Begrenzung geschätzter A -Flächen können in den meisten gewöhnlichen Fällen bei stetigen Belastungen und bei Einzelkräften Parabelbogen bzw. Parabelbogen und gerade Linien vorteilhaft benutzt werden.

Bei rechteckigen (nicht allzu länglichen) Platten kann man sich mit einem einzigen Systempunkt auf der Platte begnügen, während die übrigen auf dem Umkreis liegen. Bei einfach unterstützten Platten kommt man hierdurch zu expliziten Ausdrücken für U (und u) in jedem Punkte der Platte.

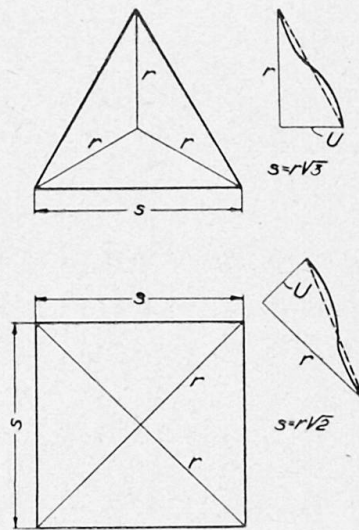


Fig. 10.

Bei sehr länglichen rechteckigen Platten wählt man einen Systempunkt für die kurze Rechteckseite und auf der langen Seite so viele, daß die Fachweiten ungefähr die Hälfte der kurzen Spannweite ausmachen. Bei einfach unterstützten Platten erhält man dann eine Reihe CLAPEYRON'scher Gleichungen für U und auch für u .

Speziell für zylindrisch deformierte Platten (Balken) werden mit der Y -Achse als Erzeugerrichtung:

$$A_{x-1} = A_{x-1} = A_x = A'_x = A_{x+1} = A'_{x+1} = 0,$$

$$A_{y-1} \approx A_y \approx A_{y+1} \quad \text{und} \quad A'_{y-1} \approx A'_y \approx A'_{y+1},$$

woraus man sieht, daß $[A]_{xy} = 0$. Ferner ist

$$U_{x-1,y-1} = U_{x-1,y} = U_{x-1,y+1} = M_{x-1}, \quad U_{x,y-1} = U_{xy} = U_{x,y+1} = M_x,$$

$$U_{x+1,y-1} = U_{x+1,y} = U_{x+1,y+1} = M_{x+1}.$$

Mit Hilfe der Gl. (34) erhält man dann für die Plattenbreite 1:

$$-P_{xy} = \frac{M_{x-1} - M_x}{\lambda_x} - \frac{M_x - M_{x+1}}{\lambda'_x},$$

welche als Differenzgleichung des Balkens wohlbekannt ist.

Daß das Glied $[A]_{xy}$ identisch bei Balken und nicht bei Platten verschwindet, ist also der fundamentale Unterschied zwischen den beiden Fällen.

3. Andere Reaktionskurven.

GREEN'sche Funktionen können viele andere Formen als die erwähnten annehmen.

Bei einfach unterstützten polygonalen Platten kann man oft mit Vorteil GREEN'sche Funktionen wählen, deren Zugflächen durch strahlenförmige Linienbelastung von einem Punkt zu den Ecken des Randpolygons entstehen und somit die Form von Pyramidenflächen erhalten. Das Linienintegral auf der linken Seite in Gl. (25) wird für jede Belastungslinie proportional der Summe ihrer Skalarmomente (da π_σ konstant ist), und das Randintegral wird null (da U_s gleich null ist). Abb. 10 zeigt Beispiele für das Zentrum eines gleichseitigen Dreiecks bzw. eines Quadrats. Da in dieser Figur $\sigma = r$ ist, erhält man:

$$\sum \pi_r \int_0^r U_r dr = \int_f F \cdot p df. \quad (35)$$

C. Statisch bestimmte Platten.

Beispiele expliziter Bestimmung von U und u .

1. Auf allen vier Seiten frei aufliegende quadratische Platte (Seitenlänge l) mit gleichförmiger Belastung p .

Abb. 11 und 12; Berechnung der Skalarmomente und Durchbiegungen in verschiedenen Zehntelpunkten.

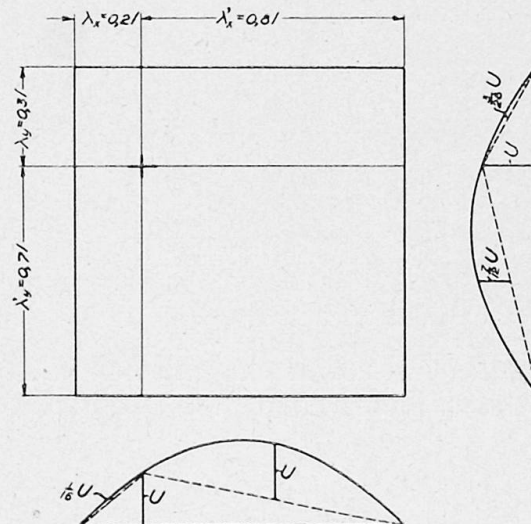


Fig. 11.

Indem man die U -Flächen des Belastungskreuzes als Parabeln mit gemeinschaftlicher Ordinate U (im Punkte (2,3) schätzt (vergl. Abb. 11), und die U -Flächen des Randes gleich null sind, erhält man aus (32):

$$P_{2,3} = \frac{1}{4} pl^2 (0,2 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,7) = \frac{1}{4} pl^2$$

und danach mit Hilfe der Gl. (33):

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4} pl^2 = & -\left(\frac{1}{0,2l} + \frac{1}{0,8l}\right) \left[\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} U \cdot 0,3l + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{28} U \cdot 0,3l\right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} U \cdot 0,7l + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{12} U \cdot 0,7l\right) \right] \\
 & -\left(\frac{1}{0,3l} + \frac{1}{0,7l}\right) \left[\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} U \cdot 0,2l + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} U \cdot 0,2l\right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} U \cdot 0,8l + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot U \cdot 0,8l\right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} pl^2 = & \frac{1}{3} U \left[\frac{30}{16} \left(1 + \frac{3}{28}\right) + \frac{70}{16} \left(1 + \frac{7}{12}\right) + \frac{20}{21} \left(1 + \frac{1}{16}\right) \right. \\
 & \left. + \frac{80}{21} (1 + 1) \right] = \frac{1}{3} U \cdot \frac{5925}{336},
 \end{aligned}$$

$$U = \frac{84}{1975} pl^2 = \frac{1}{23,5} pl^2 = 0,0426 pl^2 \text{ im Punkt (2,3).}$$

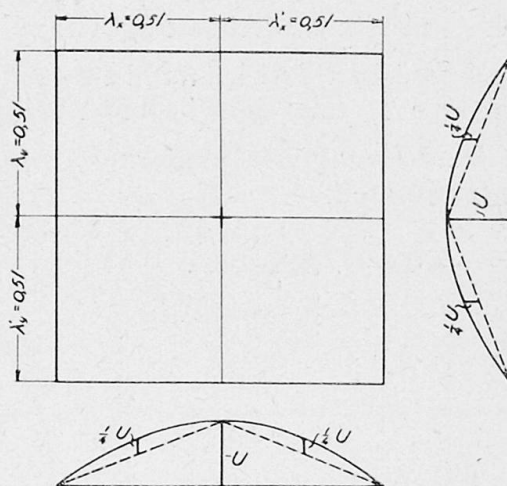


Fig. 12.

Für den Mittelpunkt (5,5) erhält man mit den in Abb. 12 gezeigten parabolischen U -Flächen mit gemeinschaftlicher Ordinate U im Punkt (5,5) und indem $P_{5,5} = \frac{1}{4} pl^2$:

$$-\frac{1}{4} pl^2 = -\left(\frac{1}{0,5l} + \frac{1}{0,5l}\right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} U \cdot 0,5l + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} U \cdot 0,5l\right) \cdot 4.$$

$$\frac{1}{4} pl^2 = \frac{8}{3} U \left(1 + \frac{1}{4}\right),$$

$$U = \frac{3}{40} pl^2 = 0,075 pl^2 \text{ im Mittelpunkt (5,5).}$$

Wenn die Skalarmomente der Platte auf diese Weise Punkt für Punkt berechnet sind, können die Durchbiegungen u auf dieselbe Weise mit Hilfe der Gl. (33) berechnet werden.

Für die Durchbiegung u im Mittelpunkt (5,5) der Platte erhält man (mit den gefundenen Werten für U in den Zehntelpunkten) mit Hilfe der Gl. (32):

$$P_{5,5} = \int \frac{U}{D} \frac{xy}{\lambda_x \lambda_y} dx dy$$

oder durch Auflösen des Integrals in eine Summe:

$$P_{5,5} = \frac{\rho l^2}{D} \cdot 0,1 l \cdot 0,1 l \left(0,0750 + 4 \cdot 0,0723 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot 0,0640 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot 0,0498 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot 0,0288 \cdot \frac{1}{5} \right. \\ + 4 \cdot 0,0697 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + 8 \cdot 0,0617 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + 8 \cdot 0,0480 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} + 8 \cdot 0,0278 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \\ + 4 \cdot 0,0547 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + 8 \cdot 0,0426 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + 8 \cdot 0,0247 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \\ + 4 \cdot 0,0331 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + 8 \cdot 0,0192 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \\ \left. + 4 \cdot 0,0112 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \right)$$

Woraus sich ergibt

$$P_{5,5} = \frac{\rho l^2}{D} \cdot 0,1 l \cdot 0,1 l \cdot 1,35252$$

und mit Hilfe der Gl. (33):

$$-\frac{\rho l^4}{D} \cdot 0,0135252 = -\frac{8}{3} U \left(1 + \frac{1}{4} \right)$$

$$U = \frac{3}{10} \cdot 0,01352 \frac{\rho l^4}{D} = 0,004057 \frac{\rho l^4}{D} \text{ im Mittelpunkt (5,5).}$$

2. Auf allen drei Seiten frei aufliegende Platte, welche die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat (Seitenlänge s) mit gleichförmiger Belastung p , Abb. 10.

Mit Hilfe der Gl. (35) erhält man für U im Zentrum des Dreiecks, indem die Scheitelpunktordinate der Zugflächenpyramide F_0 genannt wird:

$$3 \pi_r \int_0^r U_r dr = p \cdot 3 \frac{r^2}{4} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} F_0,$$

$$\pi_r = 2 \frac{F_0}{r} \sqrt{3},$$

$$3 \cdot 2 \frac{F_0}{r} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} U r = p \cdot 3 \frac{r^2}{4} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} F_0,$$

$$U = \frac{1}{12} p r^2 \text{ im Zentrum des Dreiecks.}$$

Zusammenfassung.

Die LAGRANGE'sche Differentialgleichung 4. Ordnung zur Berechnung der Durchbiegungen u ebener Platten läßt sich bekanntlich in zwei sog. POISSON'sche Gleichungen 2. Grades auflösen (Gl. 12 und 13 oder 21). Von den hierdurch bestimmten Flächen der Skalar-Momente U (Gl. 11) und Durchbiegungen u erhält man ein anschauliches Bild durch die Biegefläche einer (über die Randkurve der Platte ausgespannten) entsprechend belasteten Membran, hier Zugfläche genannt.

Zur Auflösung der beiden POISSON'schen Gleichungen (21) kann die GREEN'sche Gleichung (19) dienen. Die GREEN'schen Funktionen sind partikuläre Integrale einer POISSON'schen Gleichung, die einer gedachten Punkt- oder Linienbelastung entspricht und lassen sich somit als Zugflächen für diese Belastungen darstellen. Als Stützkurve (Reaktionskurve) für die Zugfläche ist man nicht ausschließlich auf die Benützung der Randkurve der Platte angewiesen.

Im zweiten Teil wird die Anwendung von geeigneten GREEN'schen Funktionen gezeigt, durch die man entweder explizite Lösungen oder Differenzgleichungen erhält. Beiläufig wird gezeigt, daß man mittels der Zugfläche einer gedachten Punktbelastung im Zentrum einer kreisförmigen Reaktionskurve (Abb. 7) die gewöhnliche 5-gliedrige Differenzgleichung von NIELSEN und MARCUS (Gl. 29) erhält; und zwar mit wohldefiniertem Knotenpunktdruck (Gl. 27). Ferner wird gezeigt, daß man mittels der Zugfläche einer gedachten Linienbelastung längs eines Kreuzes mit einem Rechteck als Reaktionskurve (Abb. 8) erst eine Grundgleichung mit lauter Linienintegralen der U (bezw. u) (Gl. 33) erhält und daraus schließlich eine 9-gliedrige Differenzgleichung (34) mit genau definiertem Knotenpunktdruck P_{xy} (Gl. 32). Die Gl. (33) und (34) eignen sich besonders für rechteckige Platten. Die Fachweiten λ können beliebig gewählt werden. Wählt man sie klein, können die Segmentflächen A (bezw. A'), Abb. 9 und Gl. (34), vernachlässigt werden. Bei rechteckigen (nicht allzu länglichen) Platten kann man sich mit einem einzigen Systempunkt auf der Platte begnügen. Speziell für längs des Randes frei aufliegende Platten erhält man hierdurch für U (bezw. u) explizite Ausdrücke. Hierbei müssen die Segmentflächen A (A') geschätzt werden, was ohne Schwierigkeit mittels der ungefähren Form der Zugfläche der tatsächlichen Belastung geschehen kann.

Weiter wird auch die Anwendung der Zugflächen strahlenförmiger Linienbelastungen erwähnt.

Zum Schlusse wird das Verfahren der expliziten Bestimmung von U (bezw. u) durch Beispiele erläutert.

Résumé.

L'équation différentielle du quatrième ordre de LAGRANGE, pour le calcul des fléchissements u des dalles planes, peut, ainsi qu'on le sait, être décomposée en deux équations, dites de POISSON et du deuxième degré (équations 12 et 13, ou 21). On obtient une représentation claire des aires ainsi déterminées (moments scalaires U (équation 11) et fléchissements u) par l'intermédiaire de la surface fléchie d'une membrane soumise à une charge correspondante, membrane dite „surface tendue“.

Pour la résolution des deux équations de POISSON (équations 21), on peut recourir à l'équation de GREEN (équation 19). Les fonctions de GREEN

constituent des intégrales particulières d'une équation de POISSON qui correspond à une charge ponctuelle ou linéaire supposée et peuvent être considérées comme représentant les surfaces tendues correspondant à ces charges. En ce qui concerne les courbes de réaction supposées, on n'est pas exclusivement limité à l'utilisation des courbes qui en réalité forment les bords de la dalle.

Dans la deuxième partie du rapport, l'auteur montre comment employer les fonctions convenablement choisies de GREEN, grâce auxquelles on peut obtenir soit des solutions explicites, soit des équations aux différences. Incidemment, il montre comment, à partir de la surface tendue correspondant à une charge ponctuelle fictive, appliquée au centre d'une courbe de réaction de forme circulaire (figure 7), on peut obtenir l'équation différentielle ordinaire à 5 termes, de NIELSEN et MARCUS (équation 29), et avec des efforts aux noeuds nettement définies (équation 27). L'auteur montre en outre que, en partant de la surface tendue correspondant à une charge linéaire fictive, répartie suivant une croix et admettant un rectangle comme courbe de réaction (figure 8), on peut tout d'abord obtenir une équation de base, avec intégrales linéaires, puis une équation différentielle (34) à 9 termes, avec efforts nettement définis aux noeuds P_{xy} (équation 32). Les équations 33 et 34 s'appliquent particulièrement aux dalles rectangulaires. Les valeurs des λ peuvent être choisies arbitrairement. Si elles sont faibles, on peut négliger les segments A , ou A' (figure 9 et équation 34). Dans les dalles rectangulaires n'admettant toutefois pas une trop grande longueur, on peut se contenter de prendre, sur la dalle, un seul noeud. Lorsqu'il s'agit de dalles reposant librement sur leurs bords, on obtient ainsi pour U , ou u , des expressions explicites; les segments A (A') doivent alors être estimés, ce qui peut se faire sans difficulté au moyen de la forme approchée de la surface tendue de la charge effective.

L'auteur expose ensuite l'emploi des surfaces tendues pour les charges linéaires rayonnantes.

Enfin, il explique la méthode de détermination explicite de U (ou u) au moyen d'exemples.

Summary.

The LAGRANGE differential equation of the fourth order for calculating the bending u of flat plates can, as is known, be resolved into two so-called POISSON differential equations of the second degree (Eq. 12 and 13 or 21). Of the surfaces of the scalar moments U (eq. 11) and bendings u thereby determined, a clear picture, as is known, is obtained by the bending surface of a correspondingly loaded diaphragm stretched over the edge curve of the plate, here called tension surface.

For solving the two POISSON equations (21) the GREEN equation (19) may be used. The GREEN functions are particular integrals of a POISSON equation, corresponding to a certain ideal loading at a point or line, and can consequently be represented as tension surface for these loads. As supporting curve (reaction curve) for the tension surface it is not absolutely necessary to use the edge curve of the plate.

In the second part the application of suitable GREEN functions is shown, through which either explicit solutions or difference equations are obtained. Incidentally it is shown that the usual 5-term difference equation of NIELSEN and MARCUS (eq. 29) is obtained by means of the tension surface of a certain

loading at a point in the centre of a circular reaction curve (fig. 7), with well defined pressure at the point of intersection (eq. 27). Further it is shown that, by means of the tension surface of a certain line loading along a cross with a square reaction curve (fig. 8), a fundamental equation with line integrals of the U (or u) (eq. 33) is obtained, and finally from this a 9-term difference equation (34) with precisely defined pressure P_{xy} (eq. 32) at the points of intersection. Eq. 33 and 34 are particularly suitable for rectangular plates. The λ may be chosen as desired. If they are chosen small, the segment surfaces A (or A') may be neglected (Fig. 9 and Eq. 34). In rectangular plates (not too long in proportion to their breadth) a single system point on the slab will be found sufficient. Especially for plates supported along the edge, explicit expressions are thereby obtained for U (or u). The segment surfaces A (A') must then be estimated, which can be done without difficulty by means of the approximate form of the tension surface of the actual loading.

Further the application of the tension surfaces to radiating line loading is mentioned.

In conclusion, the method of the explicit determination of U (or u) is explained by examples.