Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 1 (1932)

Artikel: Die Theorie der zylindrischen Schalengewölbe System Zeiss-Dywidag und ihre Anwendung auf die Grossmarkthalle in Budapest

Autor: Finsterwalder, Ulrich

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-712

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DIE THEORIE DER ZYLINDRISCHEN SCHALENGEWÖLBE SYSTEM ZEISS-DYWIDAG UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE GROSSMARKTHALLE IN BUDAPEST

THÉORIE DES VOÛTES MINCES CYLINDRIQUES (SYSTÈME ZEISS-DYWIDAG). APPLICATION A LA CONSTRUCTION DE LA HALLE DU MARCHÉ DE BUDAPEST

THE THEORY OF CYLINDRICAL SHELL ARCHES, ZEISS-DYWIDAG SYSTEM. APPLICATION TO THE LARGE MARKET HALL IN BUDAPEST

Dr. Ing. ULRICH FINSTERWALDER,
Oberingenieur der Dyckerhoff & Widmann A.-G., Wiesbaden-Biebrich.

In den letzten Jahren sind eine ganze Reihe von Schalenbauten nach dem System „Zeiß-Dywidag" ausgeführt worden, welche grosses Interesse in der Öffentlichkeit gefunden haben. Das wissenschaftliche Rüstzeug, das zu diesen Erfolgen geführt hat, ist der Fachwelt nur z. T. bekanntgegeben worden [1]). Die vorliegende Veröffentlichung soll diese Lücke ausfüllen durch eine gedrängte Besprechung der Theorie der querversteiften Zylinderschale und ihrer Anwendung auf das z. Zt. kühnste Bauwerk dieser Art, die Großmarkthalle in Budapest.

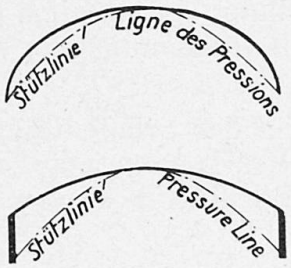


Fig. 1.

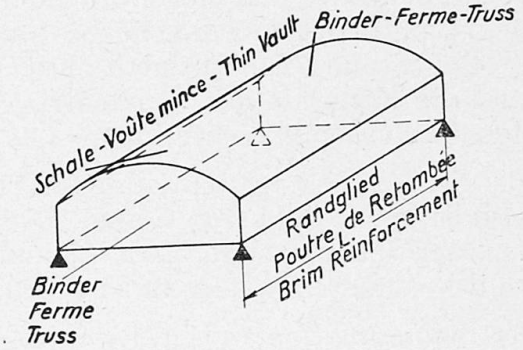


Fig. 2.

Die Entwickelung [2]) nahm ihren Ausgang von halbelliptischen Tonnendächern, deren spezifisches Merkmal in der Überhöhung der Querschnitte gegenüber der Stützlinie für ständige Lasten besteht (Fig. 1). Die Überhöhung, gemeinsam mit der Querversteifung durch die Binder, zwingt die

---

[1]) Handbuch für Eisenbetonbau XII. Bd., 3. Auflage.

[2]) Fr. Dischinger und U. Finsterwalder „Schalenbauweise", Zeitschrift „Der Bauingenieur" 9. Jahrg., 1928, Heft 44—46; U. Finsterwalder: „Die Schalendächer des Eltwerkes in Ffm.", Zeitschr. „Beton und Eisen", 1928, Heft 11.

Schale, ihre Lasten in tangentialer Richtung auf die Binder abzutragen. Im Gegensatz zu den früher bekannten Tonnengewölben werden die Lasten also nicht durch Gewölbewirkung auf die Kämpfer, sondern durch Trägerwirkung auf die Binder getragen, und zwar ausschließlich durch Dehnungsspannungen in den Flächen unter weitgehender Vermeidung von Biegungswirkungen. Die Folge davon ist eine Verringerung der notwendigen Schalenstärke bis auf ein durch die Knickgefahr und durch konstruktive Gesichtspunkte gegebenes Minimum und die Möglichkeit einer Vergrößerung der Spannweiten, die man vor ganz kurzer Zeit noch für unmöglich gehalten hätte. Die Entwickelung ging über zu den Formen, die aus einer flachen Kreiszylinderschale und beiderseitigen Randträgern zusammengesetzt sind (Fig. 2). In statischer Hinsicht wurde dabei durch Vergrößerung der Überhöhung ein besseres wirksames Trägheitsmoment des Schalenträgers, in praktischer Hinsicht eine

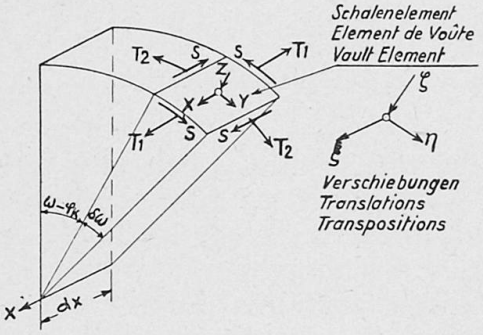


Fig. 3.

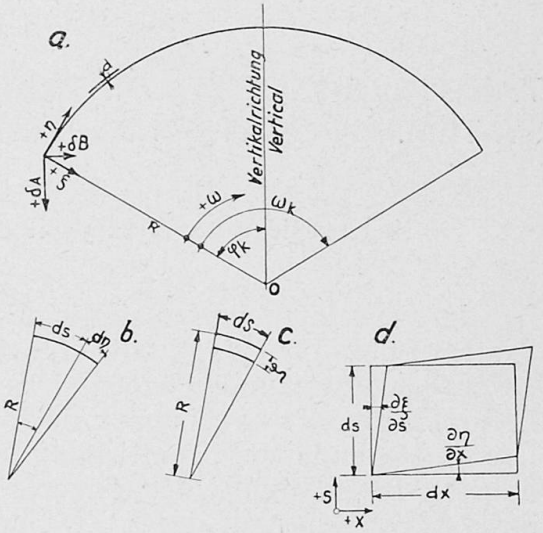


Fig. 4.

größere Mannigfaltigkeit der Formen und zugleich eine Vereinfachung des einzelnen Baugliedes, Schale, bezw. Randträger erreicht. Die genaue rechnerische Behandlung wurde durch diese Vereinfachung erst möglich gemacht. Heute ist die Kenntnis des Schalenträgers ebenso vollständig wie die eines normalen Balkens mit rechteckigem Querschnitt.

Für die Berechnung wird die einfachste Form des Schalenträgers, eine kreiszylindrische Schale vom Öffnungswinkel ω_k, Krümmungsradius R, Länge zwischen den Querversteifungen L, konstante Wandstärke d, sowie Randträger mit konstantem Querschnitt zugrunde gelegt.

Der Spannungszustand in der Schale setzt sich zusammen aus den Spannungen, die zu dem biegungsfreien Gleichgewicht in den Flächen gehören (Membranspannungen) und aus den Störungen, welche von den Schalenrändern ausgehen. Die Störung an den Bindern rührt von ungleichen Dehnungen von Schale und Binder her und ist auf eine schmale Randzone beschränkt. Ungleich wichtiger ist die Störung, welche von den Randträgern ausgeht, da diese weit in die Schale hineingreift und in den meisten Fällen für die Trägerwirkung des Tonnengewölbes maßgebend ist.

Der Membranspannungszustand wurde im Handbuch für Eisenbeton, Bd. VI, 4. Aufl., S. 269 u. ff., bereits behandelt. Die Spannungskomponenten lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen nach Fig. 3, die Verschie-

bungskomponenten nach Fig. 4 b, c und d in einfacher Weise ableiten. Wie später gezeigt wird, ist es nötig, die Lastverteilung in der X-Richtung durch eine Fourier'sche Reihe auszudrücken (vgl. Gl. 4). Bei praktischen Rechnungen herrscht in der X-Richtung meist gleichmäßige Lastverteilung, bei welcher die Last $p = 1$ t/m, das zugehörige Moment M, bezw. die $E \cdot J$ fache Durchbiegung ausgedrückt werden durch die Reihen

$$\left.\begin{aligned}
p &= \frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi x}{L} - \frac{4}{3\pi}\cos\frac{3\pi x}{L} + \frac{4}{5\pi}\cos\frac{5\pi x}{L} - \cdots\cdots && = 1 \\
M &= \frac{4}{\pi}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\cos\frac{\pi x}{L} - \frac{4}{3\pi}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\cos\frac{3\pi x}{L} + \frac{4}{5\pi}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\cos\frac{5\pi x}{L} - \cdots\cdots && = \frac{L^2}{8} \\
\delta &= \frac{4}{\pi}\left(\frac{L}{\pi}\right)^4\cos\frac{\pi x}{L} - \frac{4}{3\pi}\left(\frac{L}{\pi}\right)^4\cos\frac{3\pi x}{L} + \frac{4}{5\pi}\left(\frac{L}{\pi}\right)^4\cos\frac{5\pi x}{L} - \cdots\cdots && = \frac{5}{384}L^4
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Mit diesen Bezeichnungen ist

$$\left.\begin{aligned}
T_2 &= -gR[\cos(\omega-\varphi_k)]\cdot p \\
\frac{\partial S}{\partial x} &= -2g[\sin(\omega-\varphi_k)]\cdot p \\
T_1 &= -2gR[\cos(\omega-\varphi_k)]\cdot M \\
E\,d\eta &= 2gM\sin(\omega-\varphi_k) + \frac{2g\delta}{R^2}\sin(\omega-\varphi_k) \\
E\,d\zeta &= gR^2p\cos(\omega-\varphi_k) + 2gM\cos(\omega-\varphi_k) + \frac{2g\delta}{R^2}\cos(\omega-\varphi_k)
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Für den Kämpfer $\omega = 0$

$$\left.\begin{aligned}
E\,d\,\delta_{mA} &= gR^2p\cos^2\varphi_k + 2gM + \frac{2g\partial}{R^2} \\
E\,d\,\delta_{mB} &= gR^2p\sin\varphi_k\cos\varphi_k
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Man denkt sich nun Schale und Randträger durch einen Schnitt voneinander getrennt, in welchem jedoch die Membranspannungen übertragen werden, nämlich ein Gewölbeschub T_2 und eine Schubkraft S, sodaß sich die Schale im biegungsfreien Zustande befindet. Wenn diese Randkräfte vom Randträger aufgenommen werden können, ohne daß eine Klaffung des Schnittes entsteht, ist der biegungsfreie Zustand der Schale auch wirklich vorhanden. In allen praktischen Fällen jedoch wird man den Randträger nicht zur Aufnahme dieser großen Randkräfte konstruieren wollen und können. Vielmehr wird man bestrebt sein, ihn so schwach wie nur irgend möglich zu dimensionieren und die Schale selbst zur Übertragung ihres Endschubes auf die Binder heranziehen. Es entsteht so ein aus Schale und Randbalken zusammengesetzter Träger, bei welchem letzterer mehr die Rolle eines Zug-, bezw. Aussteifungsgliedes übernimmt, welches meist nicht einmal in der Lage ist, ohne Hilfe sein eigenes Gewicht zu übertragen. Es ist klar, daß es dabei zu einer völligen Umwälzung des Membranspannungszustandes kommen muß. Das Gleichgewicht ist nicht mehr ohne Biegungsspannungen möglich. Es hat sich jedoch gezeigt, daß die Biegungsmomente fast ausschließlich in der Querschnittsrichtung auftreten und durch entsprechende Anordnung der

Randversteifung niedrig gehalten werden können. Selbst bei den größten Spannweiten reichen die Mindestwandstärken der Schale aus.

Die Klaffung des statisch bestimmt gemachten Zustandes wird beschrieben durch die Klaffung in vertikaler und horizontaler Richtung, durch die Verdrehung der Endtangente der Schale gegenüber dem Randträger und durch den Unterschied der Längsspannungen. Die Klaffung wird rückgängig gemacht durch ein an beiden Schnitträndern angebrachtes Gleichgewichtssystem von Vertikalkräften V, Horizontalkräften H, Schubkräften S und Momenten M_2 (Fig. 4 a und 5). Der Einfluß dieser Kräfte auf den Randträger läßt sich mit bekannten Hilfsmitteln untersuchen; dagegen ist deren Einfluß auf die Schale Gegenstand dieser Arbeit. Der Schlüssel zur Lösung dieses außerordentlich komplizierten Problems liegt in der Erkenntnis, daß bei zwängungsfreier Abnahme der Kräfte am Binderrand die Lasten fast ausschließlich durch tangential an den Binder gerichtete Schubabgaben S und nicht durch normal hierzu gerichtete Querkräfte N_1 abgegeben werden. Bei

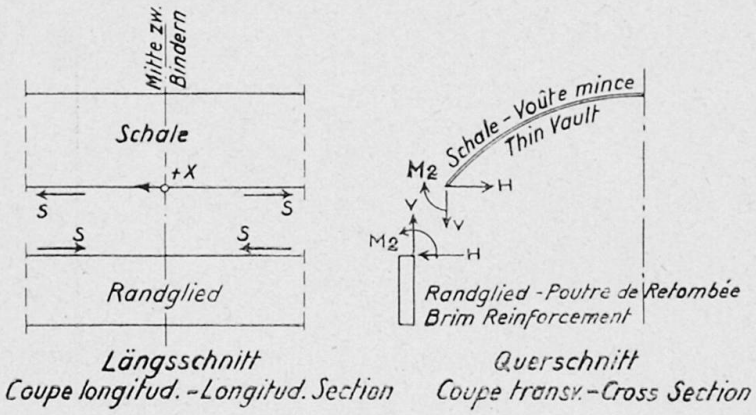


Fig. 5.
(Mitte zwischen Bindern — Milieu entre deux fermes — Middle between two Trusses)

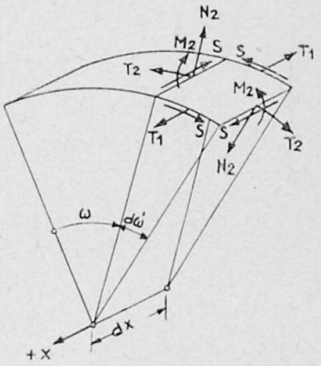


Fig. 6.

dünnen Schalen mit großem Binderabstand ist das unmittelbar einzusehen, da eine Lastübertragung durch Biegungsmomente zu viel größeren Deformationen führen würde, als man tatsächlich beobachten kann (man kann sich davon in einfacher Weise überzeugen, indem man versucht, eine geschlossene zylindrische Blechdose einzudrücken und zum Vergleich einen ebenen Blechstreifen gleicher Dicke auf Biegung beansprucht). Eine Bestätigung dieser Erscheinung bildet das Resultat der Rechnung, da man rückwärts aus den Deformationen die vernachlässigten Biegungsmomente M_1 errechnen und ihren verschwindend kleinen Anteil an der Lastübertragung nachweisen kann. Dies trifft auch auf ganz dicke Schalen zu. Die Vernachlässigung der Biegungsmomente ist ungefähr auf eine Stufe zu stellen, mit der gleichen Maßnahme bei Berechnung des Membranspannungszustandes einer Kugelschale.

Nach Vernachlässigung der M_1, N_1 und der Torsionsmomente H gelingt es, die übrigen fünf Spannungskomponenten T_1, T_2, S, M_2 und N_2 von einer Spannungsfunktion F abzuleiten, in ähnlicher Weise, wie dies für die Scheibenaufgabe von Airy durchgeführt wurde. Zur Berechnung der fünf Spannungskomponenten sind vier Gleichgewichtsbedingungen vorhanden; der 5. Zusammenhang muß durch Betrachtung der Formänderung gefunden werden. Aus der Abb. 6 ergibt sich durch Anschreiben der Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
M_2 &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} && = -\cos\frac{cx}{L}\cdot f \\
N_2 &= \frac{\partial M_2}{R\,\partial\omega} = \frac{1}{R}\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial\omega} && = -\frac{1}{R}\cos\frac{cx}{L}\frac{df}{d\omega} \\
T_2 &= -\frac{\partial N_2}{\partial\omega} = -\frac{1}{R}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial\omega^2} && = +\frac{1}{R}\cos\frac{cx}{L}\frac{d^2 f}{d\omega^2} \\
\frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{N_2}{R} - \frac{1}{R}\frac{\partial T_2}{\partial\omega} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial\omega} + \frac{\partial^5 F}{\partial x^2\,\partial\omega^3}\right) && = -\frac{1}{R^2}\cos\frac{cx}{L}\left(\frac{df}{d\omega} + \frac{d^3 f}{d\omega^3}\right) \\
S &= \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial\omega} + \frac{\partial^4 F}{\partial x\,\partial\omega^3}\right) && = -\frac{L}{cR^2}\sin\frac{cx}{L}\left(\frac{df}{d\omega} + \frac{d^3 f}{d\omega^3}\right) \\
\frac{\partial T_1}{\partial x} &= -\frac{1}{R}\frac{\partial S}{R\,\partial\omega} \\
T_1 &= -\frac{1}{R^3}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\omega^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial\omega^4}\right) && = -\frac{L^2}{c^2R^3}\cos\frac{cx}{L}\left(\frac{d^2 f}{d\omega^2} + \frac{d^4 f}{d\omega^4}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Der Aufbau der Gleichungen legt einen Ansatz der Spannungsfunktion nach Art einer Fourier'schen Reihe nahe, deren allgemeines Glied durch $\cos\frac{cx}{L}$ dargestellt wird.

Durch Betrachtung der Formänderungen erhält man den Zusammenhang zwischen Dehnungen und Verschiebungen

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial\xi}{\partial x}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{\partial\eta}{\partial s} + \frac{\zeta}{R}$$

Winkeldrehung in der Fläche

$$\gamma = \frac{\partial\xi}{\partial s} + \frac{\partial\eta}{\partial x}$$

Unter Vernachlässigung der Querkontraktion ist

$$\varepsilon_1 = \frac{T_1}{Ed}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{T_2}{Ed}; \qquad \gamma = \frac{2S}{Ed}.$$

Durch Elimination der Dehnungen und Einsetzen der Spannungsfunktion erhält man die Ausdrücke für die Verschiebungen.

$$\left.\begin{aligned}
Ed\,\xi &= -\frac{1}{R^2}\int\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\omega^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial\omega^4}\right)dx \\
&= -\frac{L^3}{c^3R^3}\sin\frac{cx}{L}\left(\frac{d^2 f}{d\omega^2} + \frac{d^4 f}{d\omega^4}\right) \\
Ed\,\eta &= \frac{2}{R^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\omega} + \frac{\partial^3 F}{\partial\omega^3}\right) + \frac{1}{R^4}\int\!\!\int\left(\frac{\partial^3 F}{\partial\omega^3} + \frac{\partial^5 F}{\partial\omega^5}\right)dx \\
&= \cos\frac{cx}{L}\left[2\frac{L^2}{c^2R^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\omega} + \frac{\partial^3 f}{\partial\omega^3}\right) + \frac{L^4}{c^4R^4}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial\omega^3} + \frac{\partial^5 f}{\partial\omega^5}\right)\right] \\
Ed\,\zeta &= \frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial\omega^2} + \frac{2}{R^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\omega^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial\omega^4}\right) + \frac{1}{R^4}\int\!\!\int\left(\frac{\partial^4 F}{\partial\omega^4} + \frac{\partial^6 F}{\partial\omega^6}\right)dx \\
&= \cos\frac{cx}{L}\left[\frac{d^2 f}{d\omega^2} + 2\frac{L^2}{c^2R^2}\left(\frac{d^2 f}{d\omega^2} + \frac{d^4 f}{d\omega^4}\right) + \frac{L^4}{c^4R^4}\left(\frac{d^4 f}{d\omega^4} + \frac{d^6 f}{d\omega^6}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ferner benötigt man noch die Winkeldrehung der Querschnittstangente:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= \frac{\eta}{R} + \frac{\partial \zeta}{R\,\partial \omega} = \frac{1}{R}\frac{\partial^5 F}{\partial x^2\,\partial \omega^3} + \frac{2}{R^3}\left(\frac{\partial F}{\partial \omega} + 2\frac{\partial^3 F}{\partial \omega^3} + \frac{\partial^5 F}{\partial \omega^5}\right) + \frac{1}{R^5}\iint\left(\frac{\partial^3 F}{\partial \omega^3} + 2\frac{\partial^5 F}{\partial \omega^5} + \frac{\partial^7 F}{\partial \omega^7}\right)dx \\ &= \cos\frac{cx}{L}\left[\frac{1}{R}\frac{d^3 f}{d\omega^3} + 2\frac{L^2}{c^2R^3}\left(\frac{df}{d\omega} + 2\frac{d^3 f}{d\omega^3} + \frac{d^5 f}{d\omega^5}\right) + \frac{L^4}{c^4R^5}\left(\frac{d^3 f}{d\omega^3} + 2\frac{d^5 f}{d\omega^5} + \frac{d^7 f}{d\omega^7}\right)\right]\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Um die Differentialgleichung des Systems zu erhalten, leitet man die zu den Verschiebungen η und ζ gehörige Krümmungsänderung $\varkappa$ ab.

$$\varkappa = \frac{1}{R^2}\left(\zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \omega^2}\right) = -\frac{12\,M_2}{E\,d^3}$$

und setzt die Spannungsfunktion ein

$$\frac{d^8 f}{d\omega^8} + \frac{d^6 f}{d\omega^6}(1+2a) + \frac{d^4 f}{d\omega^4}(1+2a+a^2) + \frac{d^2 f}{d\omega^2}(2a+a^2) + 4a^2b^2 f = 0 \quad (7)$$

Abkürzungen $\qquad \dfrac{c^2R^2}{L^2} = a; \qquad \sqrt{3}\,\dfrac{R}{d} = b. \qquad (8)$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$f = A\,e^{J_1\omega}\sin K_1\,\omega + B\,e^{J_1\omega}\cos K_1\,\omega + A'e^{J_1'\omega}\sin K_1'\omega + B\,e^{J_1'\omega}\cos K_1'\omega \quad (9)$$

$f(\omega)$ ist die Summe zweier gedämpfter Schwingungen, welche vom belasteten Rand weg abklingen. J_1 und J'_1 bestimmen die Dämpfung, K_1 und K'_1 die Wellenlänge der Schwingungen. Durch die Konstanten A, B, A' und B' wird die Anpassung an die Randbedingungen bei $\omega = 0$ für M_2, N_2, T_2 und $\dfrac{\partial S}{\partial x}$ erreicht. Die Werte J und K sind Formgrößen der Schale, welche zu einem bestimmten Lastglied der Reihe Gl. (1) gehören; sie sind also eine Funktion von R, L, d und c. Setzt man die Spannungsfunktion Gl. (9) in die Ausdrücke für die Spannungs- und Verschiebungskomponenten Gl. (4), (5), (6) ein, so lassen sich diese sämtlich auf die Form bringen

$$\begin{aligned}&A(\alpha\,e^{J_1\omega}\sin K_1\omega + \beta\,e^{J_1\omega}\cos K_1\omega) + B(\alpha\,e^{J_1\omega}\sin K_1\omega - \beta\,e^{J_1\omega}\cos K_1\omega) + \\ &+ A'(\alpha'e^{J_1'\omega}\sin K_1'\omega + \beta'e^{J_1'\omega}\cos K_1'\omega) + B'(\alpha'e^{J_1'\omega}\sin K_1'\omega - \beta\,e^{J_1'\omega}\cos K_1'\omega)\end{aligned} \quad (10)$$

Die Werte α, β, α', β' werden als Faktoren der Grundschwingungen bezeichnet.

(Gl. 11 siehe Seite 133.)

Bei der Differentiation von f entstehen Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}J_n &= J_1 J_{n-1} - K_1 K_{n-1}; \qquad K_n = J_1 K_{n-1} + K_1 J_{n-1}; \\ J_n' &= J_1' J_{n-1}' - K_1' K_{n-1}'; \qquad K_n' = J_1' K_{n-1}' + K_1' J_{n-1}'.\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Wie man aus diesen Gleichungen sieht, lassen sich die Ausdrücke einer aus dem anderen entwickeln. Für J_2 und K_2 erhält man die Bestimmungsgleichungen aus der Differentialgleichung Gl. (7) durch Einsetzen der Lösung Gl. (9)

$$\left.\begin{aligned}&J_2^4 - 6J_2^2K_2^2 + K_2^4 + (1+2a)(J_2^3 - 3J_2K_2^2) + (1+2a+a^2)(J_2^2 - K_2^2) + (2a+a^2)J_2 + 4a^2b^2 = 0; \\ &4J_2^3 - 4J_2K_2^2 + (1+2a)(3J_2^2 - K_2^2) + (1+2a+a^2)\,2J_2 + (2a+a^2) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

	Faktoren der Schwingungen $e^{J_1\omega}\sin K_1\omega$ und $e^{J_1\omega}\cos K_1\omega$		Faktoren der Schwingungen $e^{J_1'\omega}\sin K_1'\omega$ und $e^{J_1'\omega}\cos K_1'\omega$	
	α	β	α'	β'
M_2	-1	0	-1	0
N_2	$-\frac{1}{R}J_1$	$-\frac{1}{R}K_1$	$-\frac{1}{R}J_1'$	$-\frac{1}{R}K_1'$
T_2	$+\frac{1}{R}J_2$	$+\frac{1}{R}K_2$	$+\frac{1}{R}J_2'$	$+\frac{1}{R}K_2'$
$\frac{\partial S}{\partial x}$	$-\frac{1}{R}(J_1+J_3)$	$-\frac{1}{R}(K_1+K_3)$	$-\frac{1}{R}(J_1'+J_3)$	$-\frac{1}{R}(K_1'+K_3')$
T_1	$-\frac{1}{aR}(J_2+J_4)$	$-\frac{1}{aR}(K_2+K_4)$	$-\frac{1}{aR}(J_2'+J_4')$	$-\frac{1}{aR}(K_2'+K_4')$
$E\,d\eta$	$\frac{2}{a}(J_1+J_3)-\frac{1}{a^2}(J_3+J_5)$	$\frac{2}{a}(K_1+K_3)-\frac{1}{a^2}(K_3+K_5)$	$\frac{2}{a}(J_1'+J_3')-\frac{1}{a^2}(J_3'+J_5')$	$\frac{2}{a}(K_1'+K_3')-\frac{1}{a^2}(K_3'+K_5')$
$E\,d\zeta$	$-J_2+\frac{2}{a}(J_2+J_4)$ $-\frac{1}{a^2}(J_4+J_6)$	$-K_2+\frac{2}{a}(K_2+K_4)$ $-\frac{1}{a^2}(K_4+K_6)$	$-J_2'+\frac{2}{a}(J_2'+J_4')$ $-\frac{1}{a^2}(J_4'+J_6')$	$-K_2'+\frac{2}{a}(K_2'+K_4')$ $-\frac{1}{a^2}(K_4'-K_6')$
$E\,d\,R\,\vartheta$	$-J_3+\frac{2}{a}(J_1+2J_3+J_5)$ $-\frac{1}{a^2}(J_3+2J_5+J_7)$	$-K_3+\frac{2}{a}(K_1+2K_3+K_5)$ $-\frac{1}{a^2}(K_3+2K_5+K_7)$	$-J_3+\frac{2}{a}(J_1+2J_3+J_5)$ $-\frac{1}{a^2}(J_3+2J_5+J_7)$	$-K_3+\frac{2}{a}(K_1+2K_3+K_5)$ $-\frac{1}{a^2}(K_3+2K_5+K_7)$

(11)

Eine explizite Lösung dieses Gleichungspaares gibt es nicht; doch war es möglich, eine Näherungslösung zu finden, welche bei einigermaßen starker Dämpfung der Schwingungen sehr genau ist. Sie lautet:

$$\left.\begin{aligned} &J_2=\frac{a}{2}+Z;\quad J_2'=\frac{a}{2}+Z';\\ &K_2=-K_2'=+\sqrt{-\frac{a^2}{8}+\sqrt{\frac{a^4}{64}+a^2b^2}}\ \text{wobei}\ Z=-Z'=+\sqrt{\frac{a^2}{8}+\sqrt{\frac{a^4}{64}+a^2b^2}}\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Zur Bestimmung der Korrekturen ΔJ_2 und ΔK_2 setzt man die Näherungswerte in die Bestimmungsgleichung Gl. (13) ein und findet die Fehler Δ_1 und Δ_2. Da die ΔJ_2 und ΔK_2 im Vergleich zu J_2 und K_2 klein sind, erhält man durch partielle Differentiation mit kleinen Vereinfachungen die Bestimmungsgleichungen für ΔJ_2 und ΔK_2

$$\left.\begin{aligned} &\Delta J_2(4J_2^3-12J_2K_2^2-6aJ_2^2+6aK_2^2+2a^2J_2)+\Delta K_2(-12J_2^2K_2+4K_2^3+12aJ_2K_2-2a^2K_2)=-\Delta_1\\ &\Delta J_2(12J_2^2-12aJ_2+2a^2-4K_2^2)+\Delta K_2(-8J_2K_2+4aK_2)=-\Delta_2\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Sind J_2 und K_2 vorhanden, dann ergibt sich J_1 und K_1 aus:

$$\left.\begin{aligned} &J_1=-\sqrt{\sqrt{\frac{J_2Z}{2}}+\frac{J_2}{2}};\qquad J_1'=-\sqrt{\sqrt{\frac{J_2'Z'}{2}}+\frac{J_2'}{2}}\\ &K_1=\sqrt{\sqrt{\frac{J_2Z}{2}}-\frac{J_2}{2}};\qquad K_1'=\sqrt{\sqrt{\frac{J_2'Z'}{2}}-\frac{J_2'}{2}}\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Für J_1 wird das negative Vorzeichen gewählt mit Rücksicht darauf, daß nur ein vom Rand weg abklingender Spannungszustand ins Auge gefaßt werden sollte. Das positive Vorzeichen von J_1 entspricht einem von der anderen Richtung, d. h. von einem zweiten Rand herrührenden Spannungszustand, der auf die Richtung $(-\omega)$ bezogen genau die gleiche Dämpfung und Wellenlänge besitzt.

Es sind nunmehr alle Vorbereitungen getroffen, um für einzelne Lastfälle die Berechnung der Verschiebungsgrößen in Angriff nehmen zu können. Wie anfangs ausgeführt wurde, handelt es sich bei dem Zusammenhang der Schale mit einem Randträger um ein vierfach, mit zwei Randträgern um ein achtfach statisch unbestimmtes System. Eine Vereinfachung auf drei, bezw. sechs Unbekannte läßt sich erreichen durch Vernachlässigung der Torsionsdrehung der Randträger gegenüber der Winkeldrehung der Schale. Die dadurch hervorgerufene Ungenauigkeit ist meistens ganz geringfügig. In dem anschließend behandelten Beispiel ist für das gleiche angreifende Moment die Winkeldrehung der Schale hundertmal größer als die Torsionsdrehung des recht schmalen Randträgers. Die statisch unbestimmten Größen T_2, N_2, bezw. V, H, sowie $\frac{\partial S}{\partial x}$ greifen dann nicht mehr zentrisch am Rand, sondern derart mit einem Moment M_2 kombiniert an, daß die Winkeldrehung ϑ zu Null wird.

Die Klaffung zwischen Schale und Randträger im statisch bestimmten Zustande muß zunächst in eine Reihe von cos-Schwingungen zerlegt werden, bei gleichmäßiger Last nach Gl. (1). Für jedes Reihenglied ist die gesamte

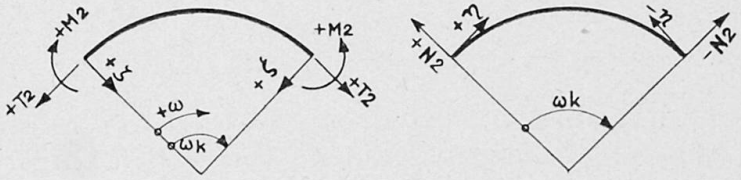


Fig. 7.

statisch unbestimmte Rechnung gesondert durchzuführen. Aus den Ausdrücken für die Spannungs- und Verschiebungsgrößen Gl. (4), (5) und (6) ist ersichtlich, daß diese sämtlich cos-förmigen Verlauf von gleicher Wellenlänge haben. Das Gleiche ist für einen Randträger mit konstantem Trägheitsmoment der Fall. Es läßt sich deshalb für jedes Lastglied die Klaffung auf ihrer ganzen Länge schließen und der Zusammenhang von Schale und Randträger mit voller Genauigkeit herstellen. Die Ausdrücke Gl. (10) lauten in vereinfachter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{l} A\,a + B\,b + A'a' + B'b', \text{ wobei} \\ a = \alpha\, e^{J_1\omega} \sin K_1\,\omega + \beta\, e^{J_1\omega} \cos K_1\,\omega; \quad b = \alpha\, e^{J_1\omega} \cos K_1\,\omega - \beta\, e^{J_1\omega} \sin K_1\,\omega \\ a' = \alpha'\, e^{J_1'\omega} \sin K_1'\,\omega + \beta'\, e^{J_1'\omega} \cos K_1'\,\omega; \quad b' = \alpha'\, e^{J_1'\omega} \cos K_1'\,\omega - \beta'\, e^{J_1'\omega} \sin K_1'\,\omega \end{array}\right\} \quad (17)$$

In den Werten a, b, a', b' können die vom zweiten Rand herrührenden Schwingungen berücksichtigt werden. Es ist zweckmäßig, die statisch unbestimmten Lastfälle in symmetrische und antisymmetrische zu zerlegen. Hierbei ist in Bezug auf die Vorzeichen Vorsicht geboten, insofern, als symmetrisch liegende T_1, M_2, T_2 und ζ gleiche, dagegen symmetrisch liegende N_2, $\frac{\partial S}{\partial x}$, η und

ϑ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen (Fig. 7). Dementsprechend sind die beiden Randwerte der Grundschwingungen $e^{J_1 w} \sin K_1 \omega$ u. s. w. für den symmetrischen Lastfall das erste Mal zu addieren, das andere Mal zu subtrahieren, im antisymmetrischen Lastfalle umgekehrt.

Die a- und b-Werte werden für den Rand und für die zu betrachtenden Zwischenpunkte aufgestellt. Sie können auch für die Werte V, H, δ_A und δ_B zusammengesetzt werden, und zwar für den Kämpferpunkt $\omega = 0$ nach der Form

$$\left.\begin{aligned} V &= +T_2 \sin \varphi_k - N_2 \cos \varphi_k \\ H &= -T_2 \cos \varphi_k - N_2 \sin \varphi_k \\ \delta_A &= -\eta \sin \varphi_k + \zeta \cos \varphi_k \\ \delta_B &= +\eta \cos \varphi_k + \zeta \sin \varphi_k \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Im nächsten Rechnungsgang werden für die sechs Lastfälle (drei symmetrische, drei antisymmetrische) die Bestimmungsgleichungen für A, B, A', B' aufgelöst.

$$\left.\begin{array}{lll} V: & Aa+Bb+A'a'+B'b' = \frac{4}{\pi}; & 0;\ 0; \\ H: & Aa+Bb+A'a'+B'b' = 0; & \frac{4}{\pi};\ 0; \\ \frac{\partial S}{\partial x}: & Aa+Bb+A'a'+B'b' = 0; & 0;\ \frac{4}{\pi}; \\ \vartheta: & Aa+Bb+A'a'+B'b' = 0; & 0;\ 0; \\ & & \\ V: & Aa+Bb+A'a'+B'b' = \frac{4}{\pi}; & 0;\ 0; \\ H: & Aa+Bb+A'a'+B'b' = 0; & \frac{4}{\pi};\ 0; \\ \frac{\partial S}{\partial x}: & Aa+Bb+A'a'+B'b' = 0; & 0;\ \frac{4}{\pi}; \\ \vartheta: & Aa+Bb+A'a'+B'b' = 0; & 0;\ 0; \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{symmetrische} \\ \text{Lastfälle} \\ \\ \\ \\ \text{antisymmetrische} \\ \text{Lastfälle.} \end{array} \quad (19)$$

Zur Erläuterung wird der erste Gleichungssatz besprochen. Auf der linken Seite stehen als Funktion der unbekannten Konstanten A, B, A', B' die Ausdrücke für Vertikalkraft V, Horizontalkraft H, Änderung der Schubkraft $\frac{\partial S}{\partial x}$ und Winkeldrehung ϑ. Da alle Ausdrücke die gleiche Abhängigkeit von x, nämlich $\cos \frac{cx}{L}$ besitzen (s. Gl. (4), (5) und (6)), genügt es, die Werte für $x = 0$ anzuschreiben. Auf der rechten Seite steht im ersten Gleichungssatz für V der Wert der angreifenden Vertikalkraft $\frac{4}{c}$, während die übrigen rechten Seiten zu Null werden müssen, da weder eine Horizontalkraft noch eine Schubkraft angreifen und auch keine Winkeldrehung eintreten soll. Die Auflösung dieser sechs Sätze von vier Gleichungen gibt sämtliche Konstanten A, B, aus welchen sich alle Verschiebungsgrößen, nämlich die symmetrischen Größen, Vertikalverschiebung δ_A, Horizontalverschiebung δ_B, Längsspannung σ_D und die entsprechenden antisymmetrischen Größen δ_E, δ_F, σ_H bestimmen

nach der Form $Aa + Bb + A'a' + B'b'$. Es ist zu beachten, daß die antisymmetrischen Größen für den Punkt $\omega = 0$ angeschrieben werden.

Die Klaffungen Δ werden als Differenz der Verschiebungen von Schale und Randglied gefunden. Nunmehr können die Gleichungen für die Bestimmung der statisch unbestimmten Größen angeschrieben werden.

$$\left.\begin{aligned}
X_A \Delta_{AA} + X_B \Delta_{BA} + X_D \Delta_{DA} + X_E \Delta_{EA} + X_F \Delta_{FA} + X_H \Delta_{HA} + \Delta_{mA} &= 0 \\
X_A \Delta_{AB} + X_B \Delta_{BB} + X_D \Delta_{DB} + X_E \Delta_{EB} + X_F \Delta_{FB} + X_H \Delta_{HB} + \Delta_{mB} &= 0 \\
X_A \Delta_{AD} + X_B \Delta_{BD} + X_D \Delta_{DD} + X_E \Delta_{ED} + X_F \Delta_{FD} + X_H \Delta_{HD} + \Delta_{mD} &= 0 \\
X_A \Delta_{AE} + X_B \Delta_{BE} + X_D \Delta_{DE} + X_E \Delta_{EE} + X_F \Delta_{FE} + X_H \Delta_{HE} + \Delta_{mE} &= 0 \\
X_A \Delta_{AF} + X_B \Delta_{BF} + X_D \Delta_{DF} + X_E \Delta_{EF} + X_F \Delta_{FF} + X_H \Delta_{HF} + \Delta_{mF} &= 0 \\
X_A \Delta_{AH} + X_B \Delta_{BH} + X_D \Delta_{DH} + X_E \Delta_{EH} + X_F \Delta_{FH} + X_H \Delta_{HH} + \Delta_{mH} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Die endgültigen Spannungs- und Verschiebungsgrößen setzen sich zusammen aus dem statisch bestimmten, dem symmetrischen und dem antisymmetrischen Anteil. Die beiden letzteren werden abgekürzt geschrieben:

$$a\, Y_A + b\, Y_B + a'\, Y_{A'} + b'\, Y_{B'} \qquad (21)$$

Die Werte a, b, a', b' gehören dem symmetrischen, bezw. dem antisymmetrischen Lastfall und einer bestimmten Spannungs- oder Verschiebungsgröße, sowie einem bestimmten Punkt des Gewölbes an. Die Y-Werte lauten

im symmetrischen Fall

$$\left.\begin{aligned}
Y_A &= A_A X_A + A_B X_B + A_D X_D \\
Y_B &= B_A X_A + B_B X_B + B_D X_D \\
Y_{A'} &= A'_A X_A + A'_B X_B + A'_D X_D \\
Y_{B'} &= B'_A X_A + B'_B X_B + B'_D X_D
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

im antisymmetrischen Fall

$$\left.\begin{aligned}
Y_A &= A_E X_E + A_F X_F + A_H X_H \\
Y_B &= B_E X_E + B_F X_F + B_H X_H \\
Y_{A'} &= A'_E X_E + A'_F X_F + A'_H X_H \\
Y_{B'} &= B'_E X_E + B'_F X_F + B'_H X_H
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

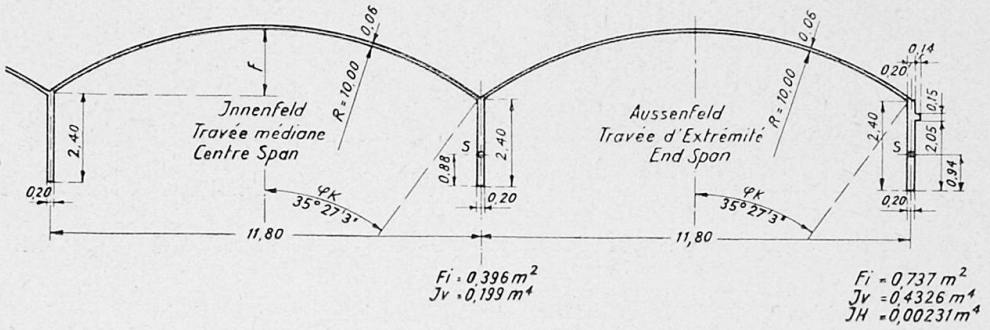


Fig. 8.

Die Berechnung eines Gewölbes mit zwei ungleichen Randgliedern ist hiermit erledigt. Es soll jetzt noch untersucht werden, wie der Einfluß der Kontinuität aneinandergereihter Bogen verfolgt werden kann. Vorausgeschickt sei, daß dieser Einfluß meistens sehr klein ist. Das zwischen dem Außen-

und Innenfeld gelegene erste Randglied wird für den ersten Rechnungsgang halbiert und in wagerechter Richtung als unverschieblich angesehen. Daß dies nicht genau richtig ist, ergibt der Vergleich der für dieses Randglied am Innen- und Außenfeld errechneten Kräfte und Verschiebungen. Es wird ein kleiner Unterschied der H, V, δ_A, σ_D, M_2, $\frac{\partial S}{\partial x}$ festzustellen sein. V, M_2 und $\frac{\partial S}{\partial x}$ können ohne weiteres verschieden sein; dagegen bringen H, δ_A und σ_D eine Klaffung mit sich. Es muß deshalb ein Spannungszustand der beiden aneinanderstoßenden Schalen gefunden werden, bei welchem diese Klaffung aufgehoben wird. Da jeder Spannungszustand der Schale durch vier Rand-

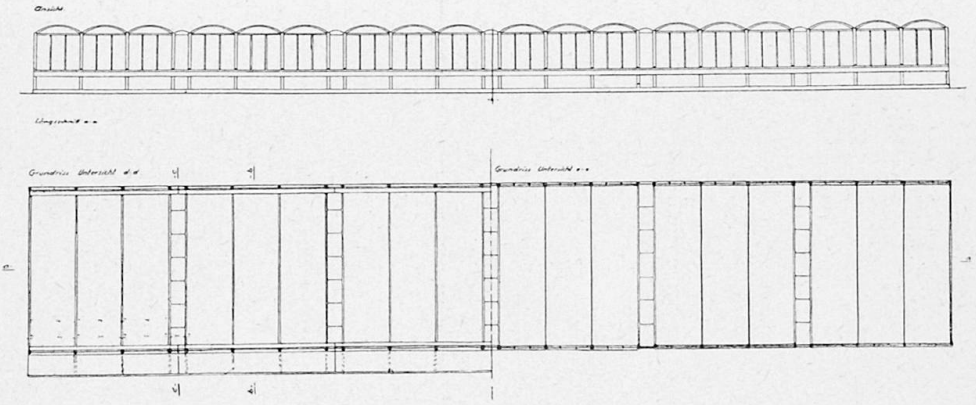


Fig. 9.

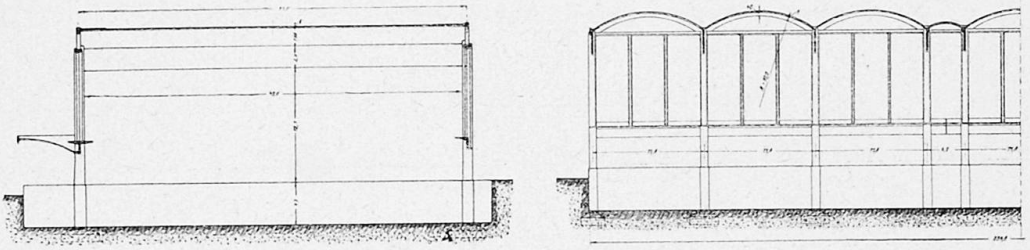


Fig. 10.
Großmarkthalle in Budapest — La halle du Grand Marché de Budapest — Large Market Hall in Budapest.

werte bestimmt ist, benötigt man noch eine vierte Bedingung, welche durch $\vartheta = 0$ gegeben ist. Die beiden Randwerte der Schalen mitteln sich aus, und da dies an den Randträgerhälften auch der Fall ist, kann der Randträger für die Korrekturrechnung außer Ansatz bleiben.

Anwendungsbeispiel: Großmarkthalle Budapest.

Eine Anwendung dieser Theorie wird im Folgenden für die Dachkonstruktion der Großmarkthalle in Budapest gezeigt (Baujahr 1930/31, Bauherr Stadt Budapest, Architekt Aladar v. MÜNNICH, Konstruktion Dyckerhoff & Widmann A.-G., Wiesbaden, Ausführung in Licenz durch die Fa. Katona Szekely & Molnar).

Die Halle ist 234,1 m lang und 48,1 m breit und wird überdeckt durch 18 Tonnengewölbe mit je 41 m Trägerspannweite und 11,80 m Ge-

wölbebreite. Auf der einen Seite der Halle ist eine Laderampe angeordnet, welche von einem Schalenkragdach überdeckt wird. Die Anordnung geht aus den Konstruktionszeichnungen Fig. 9 und 10 hervor. Je drei Tonnen sind zu einem Bauteil zusammengefaßt und gegen die Nachbarabschnitte durch Dehnungsfugen abgetrennt. In der Dachfläche werden diese Dehnungsfugen durch ein schmales Schalengewölbe gebildet, das als Einhangträger sich auf die beiden Randträger der großen Tonnen mit einer Rutschfläche auflegt.

Erstes Lastglied $c = +\pi$.

$R = 10{,}00$ m $\qquad \varphi_K = 35^0\,27'\,3'' = 0{,}618734$

$a = 0{,}06$ m $\qquad \sin\varphi_K = 0{,}58000$

$L = 41{,}00$ m $\qquad \cos\varphi_K = 0{,}81463$

$$\text{Gl. 8:}\quad a = \frac{c^2 \cdot R^2}{L^2} = +\,0{,}58713$$

$$b = \sqrt{3} \cdot \frac{R}{d} = +\,288{,}683$$

$$\text{Gl. 14:}\quad Z = \sqrt{\frac{a^2}{8} + \sqrt{\frac{a^4}{64} + a^2 \cdot b^2}} = +\,13{,}02066$$

$$Z' = -\,13{,}02066$$

$$J_2 = \frac{a}{2} + Z = +\,13{,}31422$$

$$J_2' = \frac{a}{2} + Z' = -\,12{,}72710$$

Die J_2-Werte wurden nach Gleichung 15 korrigiert

Allgemein ist $J_n = J_1 \cdot J_{n-1} - K_1 \cdot K_{n-1}$

nach Gl. 12: $K_n = J_1 \cdot K_{n-1} + K_1 \cdot J_{n-1}$

	Index						
	1	2	3	4	5	6	7
J	− 3,94189	+ 12,8112	− 28,9983	− 5,3886	+ 572,163	− 4412,37	+ 24334,86
K	+ 1,65145	− 13,0198	+ 72,4791	− 333,5989	+ 1306,094	− 4203,58	+ 9283,03
J'	− 1,63215	− 13,2307	+ 73,4791	+ 5,6843	− 1382,217	+ 4406,47	+ 11267,86
K'	+ 3,98680	− 13,0141	− 31,5072	+ 344,3712	− 539,403	− 4630,25	+ 25124,97

Tabelle der Werte α, β und α', β' der Gleichung 11.

	Faktoren der beiden Schwingungen $e^{J_1\omega} \cdot \sin K_1\omega$ und $e^{J_1\omega} \cdot \cos K_1\omega$		Faktoren der beiden Schwingungen $e^{J_1'\omega} \cdot \sin K_1'\omega$ und $e^{J_1'\omega} \cdot \cos K_1'\omega$	
	α	β	α'	β'
M_2	− 1,000	0,000	− 1,000	0,000
N_2	+ 0,394189	− 0,165145	+ 0,163215	− 0,398680
T_2	+ 1,28112	− 1,30198	− 1,32307	− 1,30141
$\frac{\partial S}{\partial x}$	+ 0,329402	− 0,741306	− 0,718469	+ 0,275204
T_1	− 1,264217	+ 59,036148	+ 1,285303	− 56,436724
$E\,d \cdot \eta$	− 1687,8694	− 3746,5614	+ 4041,2501	+ 1562,4016
$E\,d \cdot \zeta$	+ 12828,0249	+ 11994,2149	− 12811,6372	+ 13574,6731
$E \cdot d \cdot R \cdot \vartheta$	− 72061,1	− 29841,0	− 29167,5	− 71670,9

Grundschwingungen.

Pkt.	$e^{J_1\omega} \cdot \sin K_1\omega$				$e^{J_1\omega} \cdot \cos K_1\omega$			
	Hauptschwg. vom 1. Kämpfer	Gegenschwg. vom 2. Kämpfer	Lastfall Symmetrisch	Lastfall Antisymmetr.	Haupt-schwingung	Gegen-schwingung	Lastfall Symmetrisch	Lastfall Antisymmetr.
0	0,000	+0,00689	+0,00689	−0,00689	+1,000	−0,00347	+0,99653	+1,00347
1	+0,14456	+0,026015	+0,170575	+0,118545	+0,25874	+0,001103	+0,259843	+0,257637
2	+0,074807	+0,074807	+0,149614	0,000	+0,046057	+0,046057	+0,092114	0,000
3	+0,026015	+0,14456	+0,170575	−0,118545	+0,001103	+0,25874	−0,259843	−0,257637
4	+0,00689	0,000	+0,00689	+0,00689	−0,00347	+1,000	+0,99653	−1,00347

Pkt.	$e^{J_1'\omega} \cdot \sin K_1'\omega$				$e^{J_1'\omega} \cdot \cos K_1'\omega$			
	Hauptschwg. vom 1. Kämpfer	Gegenschwg. vom 2. Kämpfer	Lastfall Symmetrisch	Lastfall Antisymmetr.	Haupt-schwingung	Gegen-schwingung	Lastfall Symmetrisch	Lastfall Antisymmetr.
0	0,000	−0,1306	−0,1306	+0,1306	+1,000	+0,02747	+1,02747	+0,97253
1	+0,56964	−0,11506	+0,45458	+0,68470	+0,20205	−0,18844	+0,01361	+0,39049
2	+0,23019	+0,23019	+0,46038	0,000	−0,28365	−0,28365	−0,56730	0,000
3	−0,11506	+0,56964	+0,45458	−0,68470	−0,18844	+0,20205	+0,01361	−0,39049
4	−0,1306	0,000	−0,1306	−0,1306	+0,02747	+1,000	+1,02747	−0,97253

Symmetrischer Belastungszustand

für $\omega = 0^0$ (Kämpfer).

	a	b	a'	b'
	$\alpha \cdot e^{J_1\omega} \cdot \sin K_1\omega + \beta \cdot e^{J_1\omega} \cdot \cos K_1\omega$	$\alpha \cdot e^{J_1\omega} \cdot \cos K_1\omega - \beta \cdot e^{J_1\omega} \cdot \sin K_1\omega$	$\alpha' \cdot e^{J_1'\omega} \cdot \sin K_1'\omega + \beta' \cdot e^{J_1'\omega} \cdot \cos K_1'\omega$	$\alpha' \cdot e^{J_1'\omega} \cdot \cos K_1'\omega - \beta' \cdot e^{J_1'\omega} \cdot \sin K_1'\omega$
M_2	− 0,006891	− 0,996525	+ 0,13059	− 1,02747
N_2	− 0,168435	+ 0,394421	− 0,366414	+ 0,210795
T_2	− 1,28863	+ 1,28564	− 1,16438	− 1,52936
$\frac{\partial S}{\partial x}$	− 0,74615	+ 0,32544	+ 0,17382	− 0,73467
T_1	+ 58,8226	− 1,66659	− 58,1540	− 6,0500
$E\,d \cdot \eta$	− 3747,93	− 1719,54	+ 2047,27	+ 3726,19
$E\,d \cdot \zeta$	+ 12040,98	+ 12700,87	+ 15620,77	− 11390,72
$E \cdot d \cdot R \cdot \vartheta$	− 29448,1	− 72520,1	− 73511,1	− 19006,7

Durch Umwandlung nach Gleichung 18:

V	− 0,60816	+ 0,42202	− 0,37472	− 1,05690
H	+ 1,14898	− 1,27729	+ 1,16214	+ 1,12599
$E \cdot d \cdot \delta_A$	+ 11993,99	+ 11358,84	+ 11562,00	− 11450,80
$E \cdot d \cdot \delta_B$	+ 3908,60	+ 5945,58	+ 10708,75	− 3550,10

Gleichungen der A, B-Werte für die 3 Lastfälle.

A	B	A'	B'	$V = +\frac{4}{\pi}$	$H = +\frac{4}{\pi}$	$\frac{\partial S}{\partial x} = +\frac{4}{\pi}$
− 0,60816	+ 0,42202	− 0,37472	− 1,05690	+ 1,27324	0	0
+ 1,14898	− 1,27729	+ 1,16214	+ 1,12599	0	+ 1,27324	0
− 0,74615	+ 0,32544	+ 0,17382	− 0,73467	0	0	+ 1,27324
− 29448,1	− 72520,1	− 73511,1	− 19006,7	0	0	0

Damit errechnen sich:

	für Fall $V = +\frac{4}{\pi}$	$H = +\frac{4}{\pi}$	$\frac{\partial S}{\partial x} = +\frac{4}{\pi}$
A	+ 2,55428	+ 0,68028	— 2,42505
B	— 0,20382	— 0,61748	— 0,40287
A'	— 0,12070	+ 0,55221	+ 1,15564
B'	— 2,71307	— 0,83379	+ 0,82483

Antisymmetrischer Belastungszustand

für $\omega = 0^\circ$ (Kämpfer).

	a	b	a'	b'
	$\alpha \cdot e^{J_1\omega} \cdot \sin K_1\omega + \beta \cdot e^{J_1\omega} \cdot \cos K_1\omega$	$\alpha \cdot e^{J_1\omega} \cdot \cos K_1\omega - \beta \cdot e^{J_1\omega} \cdot \sin K_1\omega$	$\alpha' \cdot e^{J_1'\omega} \cdot \sin K_1'\omega + \beta' \cdot e^{J_1'\omega} \cdot \cos K_1'\omega$	$\alpha' \cdot e^{J_1'\omega} \cdot \cos K_1'\omega - \beta' \cdot e^{J_1'\omega} \cdot \sin K_1'\omega$
M_2	+ 0,006891	— 1,003475	— 0,13059	— 0,97253
N_2	— 0,161855	+ 0,393957	— 0,430946	+ 0,115635
T_2	— 1,31533	+ 1,27660	— 1,43844	— 1,11678
$\frac{\partial S}{\partial x}$	— 0,736460	+ 0,333366	+ 0,376588	— 0,702268
T_1	— 59,2497	— 0,8618	— 54,7185	+ 8,6206
$E \cdot d \cdot \eta$	— 3745,19	— 1656,20	+ 1077,53	+ 4356,31
$E \cdot d \cdot \zeta$	+ 11947,45	+ 12955,18	+ 11528,58	— 14232,55
$E \cdot d \cdot R \cdot \vartheta$	— 30233,9	— 71608,1	— 69830,7	— 39328,1

Durch Umwandlung nach Gleichung 18:

V	— 0,62898	+ 0,41717	— 0,48063	— 0,74053
H	+ 1,16696	— 1,26965	+ 1,42311	+ 0,84438
$E \cdot d \cdot \delta_A$	+ 11916,09	+ 11530,20	+ 8783,86	— 14134,32
$E \cdot d \cdot \delta_B$	+ 3856,71	+ 6144,41	+ 7549,70	— 4680,20

Gleichungen der A, B-Werte für die 3 Lastfälle.

A	B	A'	B'	$V = +\frac{4}{\pi}$	$H = +\frac{4}{\pi}$	$\frac{\partial S}{\partial x} = +\frac{4}{\pi}$
— 0,62898	+ 0,41717	— 0,48063	— 0,74053	+ 1,27324	0	0
+ 1,16696	— 1,26965	+ 1,42311	+ 0,84438	0	+ 1,27324	0
— 0,73646	+ 0,333366	+ 0,376588	— 0,702268	0	0	+ 1,27324
— 30233,9	— 71608,1	— 69830,7	— 39328,1	0	0	0

Daraus errechnen sich:

	für Fall V	H	$\frac{\partial S}{\partial x}$
A	+ 5,89925	+ 2,02405	— 2,93637
B	+ 1,09843	— 0,089253	— 0,56862
A'	— 0,37640	+ 0,33370	+ 0,99331
B'	— 5,86689	— 1,98602	+ 1,52904

Spannungen und Verschiebungen am Tonnenrand ($\omega = 0^0$)
allgemein aus $A \cdot a + B \cdot b + A' \cdot a' + B' \cdot b'$.

	Symmetrischer Belastungszustand			Antisymmetrischer Belastungszustand		
	$V = +\frac{4}{\pi}$	$H = +\frac{4}{\pi}$	$\frac{\partial S}{\partial x} = +\frac{4}{\pi}$	$V = +\frac{4}{\pi}$	$H = +\frac{4}{\pi}$	$\frac{\partial S}{\partial x} = +\frac{4}{\pi}$
T_1	+ 174,02	+ 13,97	— 214,17	+ 318,61	+ 84,62	— 214,16
δ_A	+ 0,4598	+ 0,1355	— 0,2361	+ 1,2905	+ 0,4295	— 0,4320
δ_B	+ 0,1355	+ 0,0624	— 0,0191	+ 0,4295	+ 0,1510	— 0,1149

Innenfeld.

Formgrößen:

Schale. $R = 10{,}00$ m
$d = 0{,}06$ m
$L = 41{,}00$ m
$\sin \varphi_K = 0{,}58000$
$\cos \varphi_K = 0{,}81463$

Randträger.
$F = 0{,}396$ m²
$J_v = 0{,}199$ m⁴
$a = 1{,}54$ m

Belastungen:

Schale. 0,065 m³ Beton · 2,4 t/m³ = 0,156 t/m²
Eindeckung u. Isolierung = 0,025 „
Schnee auf Bogen verteilt = 0,072 „
g = 0,253 t/m²

Randträger.
Beton 2,45 · 0,10 · 2,40 t/m³ = 0,588 t/m
Gefällbeton = 0,078 „
q = 0,666 t/m

Für das 1. Lastglied ist in Feldmitte ($x = 0$) bei

$$p = \frac{4}{\pi} \text{ t/m}$$

$$M_m = \frac{4 L^2}{\pi^3} = 216{,}86$$

$$E \cdot J \cdot \delta = \frac{4 L^4}{\pi^5} = 36935{,}7 = \delta_m$$

Verschiebungsgrößen der Schale im statisch bestimmten Zustande. Gl. 3:

$$\delta_{ma} = \left(g \cdot R^2 \cdot p \cdot \cos^2 \varphi_K + 2 g \cdot M + \frac{2 g}{R^2} \cdot \delta\right) \cdot \frac{1}{E \cdot d} = +\ 0{,}00253 \text{ m}$$

$$\delta_{mB} = g \cdot R^2 \cdot p \cdot \sin \varphi_K \cos \varphi_K \cdot \frac{1}{E \cdot d} = +\ 0{,}0001208 \text{ m}$$

$$\sigma_{mD} = \frac{2}{R \cdot d} \cdot g \cdot \cos \varphi_K \cdot M_m = -\ 149{,}3 \text{ t/m}^2.$$

Die Verschiebungsgrößen des Randträgers im statisch bestimmten Zustande werden nach bekannten Regeln berechnet.

Zusammenstellung der Klaffungen.

		Lastfall V	Lastfall H	Lastfall $\frac{\partial S}{\partial x}$	Lastfall m
Vertikal-verschiebung δ_a	Schale	+ 0,4598	+ 0,1355	— 0,2361	+ 0,00253
	Randglied	— 0,0885	0	— 0,1362	+ 0,12520
	Klaffung	$\Delta_{AA} = +0{,}5483$	$\Delta_{AB} = +0{,}1355$	Δ_{AD} — 0,0999	Δ_{Am} — 0,12267
Horizontal-verschiebung δ_b	Schale	+ 0,1355	+ 0,0624	— 0,0191	+ 0,0001208
	Randglied	0	0	0	0
	Klaffung	Δ_{BA} + 0,1355	Δ_{BB} + 0,0624	Δ_{BD} — 0,0191	Δ_{Bm} + 0,0001208
Längs-spannungen σ	Schale	+ 2900,3	+ 232,8	— 3569,5	— 149,3
	Randglied	+ 1679,9	0	+ 3156,4	— 2216,9
	Klaffung	$\Delta\sigma_A$ + 1220,4	$\Delta\sigma_B$ + 232,8	$\Delta\sigma_D$ — 6725,9	$\Delta\sigma_m$ + 2067,6

Gleichungsansatz,

$\Delta_A \cdot X_A$	$\Delta_B \cdot X_B$	$\Delta_D \cdot X_D$	$-\Delta_m$
+ 0,5483	+ 0,1355	— 0,0999	+ 0,12267
+ 0,1355	+ 0,0624	— 0,0191	— 0,0001208
+ 1220,4	+ 232,8	— 6725,9	— 2067,6

Ergebnis: $X_A = +0{,}57255$ t/m; $X_B = -1{,}12940$ t/m; $X_D = +0{,}37220$ t/m².

Berechnung der Y-Werte aus Gleichung 22:

$$Y_a = X_A \cdot A_A + X_B \cdot A_B + X_D \cdot A_D$$

$$Y_a = -0{,}2084588; \quad Y_b = +0{,}4307366$$

$$Y_a' = -0{,}262634; \quad Y_b' = -0{,}304684$$

Die Spannungen lassen sich in der einfachen Form anschreiben. Gl. 21:

$$Y_a \cdot a + Y_b \cdot b + Y_a' \cdot a' + Y_b' \cdot b'.$$

Faktoren $a\,b$ für die Zwischenpunkte.

1. Symmetrischer Lastzustand.

Viertelspunkt $\left(\omega = \frac{\omega_K}{4} \text{ bezw. } = \frac{3\,\omega_K}{4}\right)$

	a	b	a'	b'
M_2	— 0,170575	— 0,259843	— 0,454580	— 0,013610
N_2	+ 0,004182	+ 0,121135	— 0,043928	+ 0,336710
T_2	— 0,119783	+ 0,554975	— 0,619153	+ 0,573588
$\frac{\partial S}{\partial x}$	— 0,151939	+ 0,172744	— 0,384472	— 0,468987
T_1	+ 15,124486	— 10,398589	— 0,183831	+ 25,672499
$E\,d \cdot \eta$	— 1165,341	+ 9,278	+ 3377,146	+ 508,292
$E\,d \cdot \zeta$	+ 5304,753	+ 1287,359	— 5639,163	— 6345,141
$E\,d \cdot R \cdot \vartheta$	— 16230,629	— 15028,105	— 47957,757	+ 37683,448

Scheitel $\left(\omega = \frac{\omega_K}{2}\right)$

	a	b	a'	b'
M_2	— 0,149614	— 0,092114	— 0,460380	+ 0,567300
T_2	+ 0,071742	+ 0,312803	+ 0,129175	+ 1,349721
T_1	+ 5,248911	— 8,949086	+ 32,608282	+ 25,253187
$Ed \cdot \zeta$	+ 3024,087	— 612,861	— 13599,134	+ 1018,534

N_2; $\frac{\partial S}{\partial x}$; $Ed \cdot \eta$ und $Ed \cdot R \cdot \vartheta = 0$.

2. Antisymmetischer Lastzustand.

Viertelspunkt $\left(\omega = \frac{\omega_K}{4}\right)$

	a	b	a'	b'
M_2	— 0,118545	— 0,257637	— 0,684700	— 0,390490
N_2	+ 0,024327	+ 0,130597	— 0,068947	+ 0,183380
T_2	— 0,183568	+ 0,484407	— 1,414094	+ 0,374429
$\frac{\partial S}{\partial x}$	— 0,136435	+ 0,212041	— 0,322980	— 0,134558
T_1	+ 15,060029	— 7,324149	— 21,157929	+ 39,144123
$Ed \cdot \eta$	— 1261,426	+ 201,511	+ 1857,634	— 657,050
$Ed \cdot \zeta$	+ 3610,852	+ 1883,120	— 3471,354	— 14297,395
$Ed \cdot R \cdot \vartheta$	— 20045,797	— 13634,443	— 14202,223	+ 32196,285

bei $\omega = \frac{3\,\omega_K}{4}$ drehen sich die Vorzeichen um.

Scheitel $\left(\omega = \frac{\omega_K}{2}\right)$

	a	b	a'	b'
N_2	+ 0,043764	+ 0,061018	+ 0,301312	+ 0,096625
$\frac{\partial S}{\partial x}$	— 0,019002	+ 0,141253	— 0,486892	+ 0,280889
$Ed \cdot \eta$	— 597,640	+ 405,062	+ 974,161	— 3011,899
$Ed \cdot R \cdot \vartheta$	— 13530,123	— 2173,205	+ 27230,768	+ 49542,572

M_2; T_2; T_1 und $Ed \cdot \zeta = 0$.

Somit die endgültigen Spannungs- und Verschiebungsgrößen.

	M_2 mt/m	N_2 t/m	T_2 t/m	$\frac{\partial S}{\partial x}$ t/m²	T_1 t/m	η m	ζ m	ϑ
Kämpfer	−0,1490	+0,2371	−1,0302	−0,8476	— 4,82	−0,01441	+0,02056	0
Viertelspunkt	+0,0472	−0,0173	−2,8174	−0,5461	−25,858	−0,00707	+0,02511	0,001568
Scheitel	−0,0604	0,00	−3,547	0,00	−32,18	0	+0,02132	0

Außenfeld, siehe Systemskizze Fig. 8.

Verschiebungsgrößen der Schale
wie im Innenfeld.

Die Verschiebungsgrößen des Außenrandgliedes δ_a und die des Innenrandgliedes δ_2 werden zu symmetrischen $\left(\frac{\delta_i + \delta_a}{2}\right)$ und zu antisymmetrischen $\left(\frac{\delta_i - \delta_a}{2}\right)$ zusammengesetzt, die dann mit den entsprechenden Schalenrandverschiebungen verglichen werden.

Verschiebungsgrößen der Randglieder (Innen und Außen).

		Lastfall						
		A	B	D	E	F	H	m
Vertikal-verschiebung	δ_i	−0,088473	0	−0,13625	−0,088473	0	−0,13625	+ 0,12520
	δ_a	−0,040566	0	−0,06022	+0,040566	0	+0,06022	+ 0,10622
	$\delta_i + \delta_a$	−0,129039	0	−0,19647	−0,047907	0	−0,07603	+ 0,23142
	$\delta_i - \delta_a$	−0,047907	0	−0,07603	−0,129039	0	−0,19647	+ 0,01898
	δ_A	−0,064520	0	−0,09824	−0,023954	0	−0,03802	+ 0,11571
	δ_E	−0,023954	0	−0,03802	0,064520	0	−0,09824	+ 0,00949
Horizontal-verschiebung	δ_i	0	0	0	0	0	0	0
	δ_a	0	−7,613961	+0,67749	0	+7,613961	−0,67749	−12,69261
	$\delta_i + \delta_a$	0	−7,613961	+0,67749	0	+7,613961	−0,67749	−12,69261
	$\delta_i - \delta_a$	0	+7,613961	−0,67749	0	- 7,613961	+0,67749	+12,69261
	δ_B	0	−3,806981	+0,33875	0	+3,806981	−0,33875	− 6,34631
	δ_F	0	+3,806981	−0,33875	0	−3,806981	+0,33875	+ 6,34631
Längsspannung	δ_i	+1679,90	0	+3156,40	+1679,90	0	+3156,40	− 2216,87
	δ_a	+ 741,46	−8355,33	+2135,87	− 741,46	+8355,33	−2135,87	−15781,26
	$\delta_i + \delta_a$	+2421,36	−8355,33	+5292,27	+ 938,44	+8355,33	+1020,53	−17998,13
	$\delta_i - \delta_a$	+ 938,44	+8355,33	+1020,53	+2421,36	−8355,33	+5292,27	+13564,39
	δ_D	+1210,68	−4177,67	+2646,14	+ 469,22	+4177,67	+ 510,27	− 8999,07
	δ_H	+ 469,22	+4177,67	+ 510,27	+1210,68	−4177,67	+2646,14	+ 6782,40

Zusammenstellung der Klaffungen.

			Lastfall						
			A	B	D	E	F	H	m
Symmetrischer Lastzustand	Vertikal-verschiebung	Tonne	+0,45980	+0,13550	−0,23610	0	0	0	+0,00253
		Randgld.	−0,06452	0	−0,09824	-0,023954	0	−0,03802	+0,11571
		Klaffung	+0,52432	+0,13550	−0,13786	+0,02395	0	+0,03802	−0,11318
	Horizontal-verschiebung	Tonne	+0,13550	+0,06240	−0,01910	0	0	0	0
		Randgld.	0	−3,80698	+0,33875	0	+3,80698	−0,33875	−6,34631
		Klaffung	+0,13550	+3,86938	−0,35785	0	−3,80698	+0,33875	+6,34631
	Längs-spannung	Tonne	+2900,30	+ 232,80	−3569,50	0	0	0	− 149,30
		Randgld.	+1210,68	−4177,67	+2646,14	+ 469,22	+4177,67	+ 510,27	−8999,07
		Klaffung	+1689,62	+4410,47	−6215,64	− 469,22	−4177,67	− 510,27	+8849,77
Antisymmetrischer Lastzustand	Vertikal-verschiebung	Tonne	0	0	0	+1,29050	+0,4295	− 0,43200	0
		Randgld.	−0,02395	0	−0,03802	−0,06452	0	−0,09824	+0,00949
		Klaffung	+0,02395	0	+0,03802	+1,35502	+0,42950	−0,33376	−0,00949
	Horizontal-verschiebung	Tonne	0	0	0	+0,4295	+0,15100	−0,11490	0
		Randgld.	0	+3,80698	−0,33875	0	−3,80698	+0,33875	+6,34631
		Klaffung	0	−3,80698	+0,33875	+0,42950	+3,95798	−0,45365	−6,34631
	Längs-spannung	Tonne	0	0	0	+5310,17	+1410,33	−3577,67	0
		Randgld.	+ 469,22	+4177,67	+ 510,27	+1210,68	−4177,67	+2646,14	+6782,40
		Klaffung	− 469,22	−4177,67	− 510,27	+4099,49	+5588,00	−6223,81	−6782,40

Gleichungsansatz.

$\Delta_A \cdot X_A$	$\Delta_B \cdot X_B$	$\Delta_D \cdot X_D$	$\Delta_E \cdot X_E$	$\Delta_F \cdot X_F$	$\Delta_H \cdot X_H$	$-\Delta_m$
+ 0,52432	+ 0,13550	− 0,13786	+ 0,02395	0	+ 0,03802	+ 0,11318
+ 0,13550	+ 3,86938	− 0,35785	0	− 3,80698	+ 0,33875	− 6,34631
+ 1689,62	− 4410,47	− 6215,64	− 469,22	− 4177,67	− 510,27	− 8849,77
+ 0,02395	0	+ 0,03802	+ 1,35502	+ 0,42950	− 0,33376	+ 0,00949
0	− 3,80698	+ 0,33875	+ 0,42950	+ 3.95798	− 0,45365	+ 6,34631
− 469,22	− 4177,67	− 510,27	+ 4099,49	+ 5588,00	− 6223,81	+ 6782,40

Ergebnis: $X_A = +\,0{,}713938$ t/m $\quad X_E = -\,0{,}137855$ t/m

$X_B = -\,1{,}342449$ t/m $\quad X_F = +\,0{,}268489$ t/m

$X_D = +\,0{,}506321$ t/m² $\quad X_H = -\,0{,}133708$ t/m²

Y-Werte

für die symmetrischen Lastfälle:

$Y_A = -\,0{,}317490$; $Y_B = +\,0{,}47944$;
$Y_A' = -\,0{,}24236$: $Y_B' = -\,0{,}40001$.

für die antisymmetrischen Lastfälle:

$Y_A = +\,0{,}12282$; $Y_B = -\,0{,}09935$;
$Y_A' = +\,0{,}00867$; $Y_B' = +\,0{,}07111$.

Endgültige Spannungen

nach der Gleichung $f = Y_a \cdot a + Y_b \cdot b + Y_a' \cdot a' + Y_b' \cdot b'$.

Pkt.	M_2 mt/m	N_2 t/m	T_2 t/m	$\frac{\partial S}{\partial x}$ t/m²	T_1 t/m	η m	ζ m	ϑ
Kämpfer (i) $\omega = 0$	−0,065986	+0,192529	−1,084956	+0,848097	− 4,398112	−0,01415	+0,02036	0
Viertelpunkt $\omega = \frac{\omega_K}{4}$	+0,022525	−0,064837	−2,899952	+0,557796	−25,286833	−0,00754	+0,01866	−0,00716
Scheitel $\omega = \frac{\omega_K}{2}$	−0,112010	+0,008796	−3,765312	−0,000614	−34,934613	−0,00253	+0,01550	+0,001834
$\omega = \frac{3\,w_K}{4}$	+0,067861	+0,070747	−2,787340	−0,658178	−35,641687	+0,00273	+0,03121	−0,001575
Kämpfer (a) $\omega = \omega_K$	−0,126490	−0,301593	−0,324428	−1,188587	−19,400652	+0,01452	+0,03196	0

Zur Schließung der Klaffung infolge der ungleichen Horizontalkraft am Innenrandglied wird das beschriebene Korrekturverfahren angewendet.

Im Innenfeld $-\,T_2 \cdot \cos\varphi_K - N_2 \cdot \sin\varphi_K = H = +\,0{,}772171$
Im Außenfeld $= +\,0{,}701714$

Differenz der H-Kräfte $\Delta H = +\,0{,}070457$.

Im Innenfeld $= T_1 = -\,4{,}8200$
Im Außenfeld $= -\,4{,}3981$

Differenz der T_1-Kräfte $\Delta T_1 = -\,0{,}4219$

Im Innenfeld $= \delta_A = +\,0{,}025107$
Im Außenfeld $= +\,0{,}024793$

Differenz der δ_A-Werte $\Delta\delta_A = +\,0{,}000314$.

Betrachtet wird die vom Kämpfer ausgehende Hauptschwingung.

	A	B	A'	B'	Δ
$H = -\frac{\Delta H}{2}$	+ 1,156416	− 1,272269	+ 1,291402	+ 0,983148	− 0,035228
$T_1 = \frac{\Delta T_1}{2}$	+59,036148	− 1,264217	−56,436724	+ 1,285303	− 0,210950
$\delta_A = \frac{\Delta \delta_A}{2}$	+11943,8529	+11429,0582	+10152,1430	−12780,6691	+ 19,782
$\vartheta = 0$	−29841,0	−72061,1	−71670,9	−29167,5	0

Ergebnis: $A = -0{,}008595906$
$B = +0{,}010868115$
$A' = -0{,}0055955495$
$B' = -0{,}00430685954.$

Die endgültigen Werte, nun mit der Korrektur versehen, werden:

Innenfeld:

	M_2 mt/m	N_2 t/m	T_2 t/m	$\frac{\partial S}{\partial x}$ t/m²	T_1 t/m	η m	ζ m	ϑ
K	−0,14244	+0,19976	−1,046836	+0,8591	− 4,60905	−0,014471	+0,020325	0
$^1/_4$	+0,04595	−0,01738	−2,8232	+0,5535	−25,505	−0,00697	+0,02490	+0,001506
Sch	−0,06000	0	−2,5434	0	−31,746	0	+0,02101	0

Außenfeld.

	M_2 mt/m	N_2 t/m	T_2 t/m	$\frac{\partial S}{\partial x}$ t/m²	T_1 t/m	η m	ζ m	ϑ
Ki	−0,072547	+0,22987	−1,06832	+0,859597	− 4,60905	−0,014476	+0,020325	0
$^1/_4$	+0,025017	−0,064395	−2,88935	+0,564406	−25,593033	−0,00756	+0,01906	−0,00714
Sch	−0,111799	+0,007889	−3,767088	+0,000992	−35,151613	−0,00246	+0,015655	+0,001726
$^3/_4$	+0,066619	+0,071112	−2,792116	−0,658924	−35,688264	+0,00280	+0,03102	−0,001622
Ka	−0,126490	−0,301593	−0,324428	−1,188587	−19,400652	+0,01452	+0,03196	0

	Innenrandglied		Außenrandglied
	Innenfeldseite	Außenfeldseite	
V	− 0,7698954	− 0,8068846	− 0,433855
H	+ 0,7369232	+ 0,7369609	+ 0,089365
δ_A	+ 0,02495053	+ 0,02495053	+ 0,034458
δ_B	0,000	0,000	+ 0,006709

Zweites Lastglied $c = -3\pi$.

Zusammenstellung der endgültigen Spannungen.

Innenfeld.

	M_2	N_2	T_2	$\frac{\partial S}{\partial x}$	T_1	η	ζ	ϑ
K	+0,023589	−0,044092	+0,515265	−0,284834	+0,759427	+0,000092	−0,000129	0
$^1/_4$	−0,005408	+0,00590	+1,00411	−0,11422	+0,6599	−0,000014	−0,000314	+0,000208
Sch	+0,007131	0	+1,104024	0	+0,4616	0	+0,000280	0

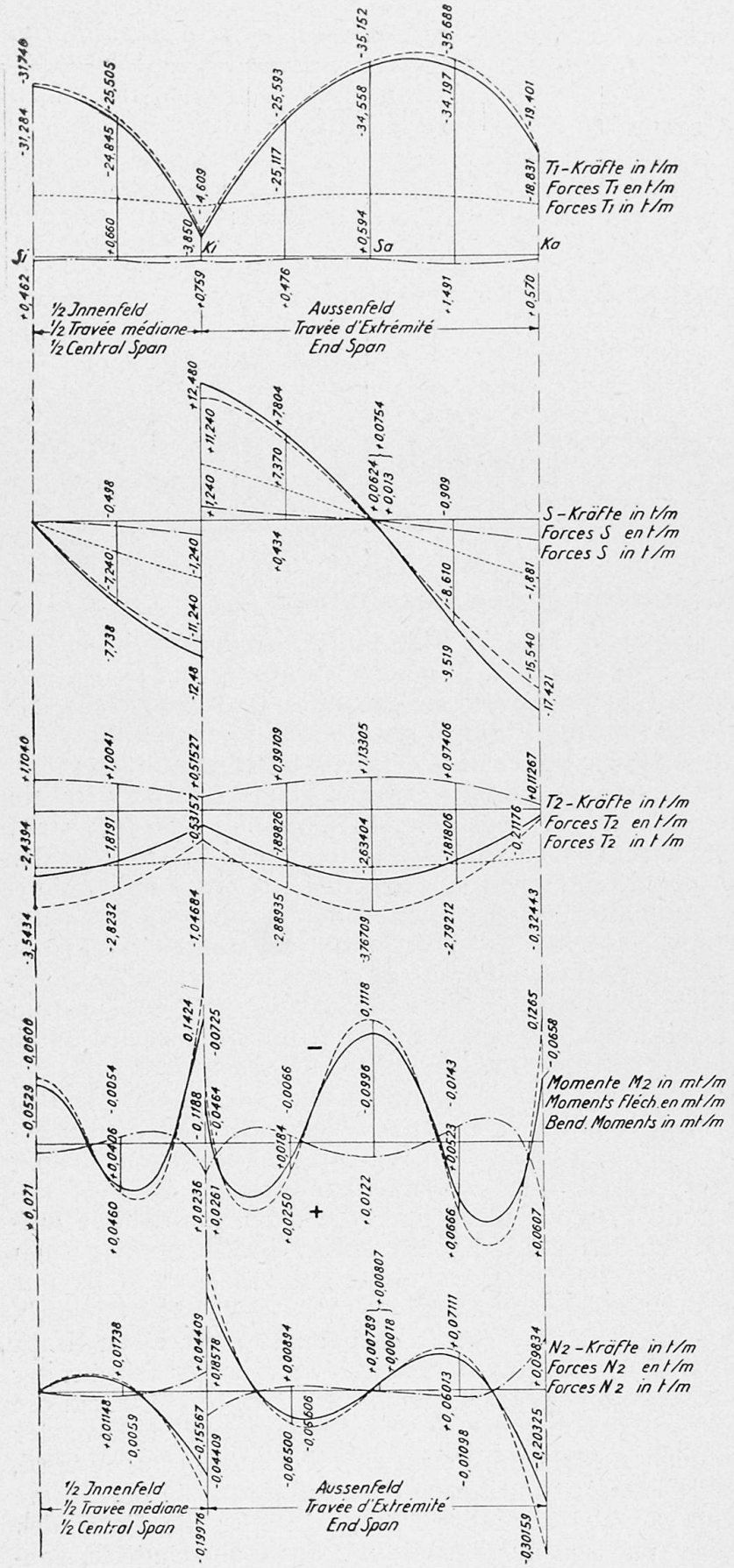
Außenfeld.

	M_2	N_2	T_2	$\frac{\partial S}{\partial x}$	T_1	η	ζ	ϑ
Ki	+0,026125	-0,044092	+0,515265	-0,284837	+0,759427	+0,000092	-0,000129	0
$^1/_4$	-0,00664	+0,008942	+0,99109	-0,099547	+0,4758	-0,000016	-0,000272	+0,000284
Sch	+0,012180	+0,000175	+1,133045	-0,014326	+0,5936	+0,000038	+0,000411	-0,000102
$^3/_4$	-0,01432	+0,010980	+0,974064	+0,208773	+1,4912	-0,000005	-0,000845	-0,000330
Ka	+0,060727	+0,098338	+0,112665	+0,432174	+0,5703	-0,000209	0,00	0

	Innenrandglied		Außenrandglied
	Innenfeldseite	Außenfeldseite	
V	+ 0,3307	+ 0,3307	+ 0,145455
H	— 0,3848	— 0,3848	— 0,034744
δ_A	— 0,000159	— 0,000159	— 0,0001214
δ_B	0	0	— 0,0001704

Besprechung des Resultates.

Die errechneten Spannungen sind in Fig. 11 für ein halbes Innenfeld und ein Außenfeld auf der abgewickelten Bogenaxe aufgetragen. Der statisch bestimmt gemachte Zustand ist punktiert, die Lastfälle sind gestrichelt, die resultierenden Werte voll ausgezogen. Beim Gewölbeschub erkennt man, daß im Scheitel der endgültige Wert größer als der statisch bestimmte Wert ist. Hieraus geht hervor, daß dort eine erhöhte Tragwirkung vorliegt, dem ein Defizit in der Nähe der Randträger gegenübersteht, da hier der Schub auf einen geringen Wert abnimmt. Dementsprechend bildet sich, wie man an der Momentenlinie sieht, in der Scheitelpartie und an den Randträgern ein Auflager für die gewölbte Platte aus. Die geringe Größe der Biegungsmomente von max. 0,10 mt/m erklärt sich daraus, daß für die Biegungswirkung nur mehr verhältnismäßig kleine Spannweiten zu überbrücken sind, wobei auch nur ein Teil der Schalenlast übertragen werden muß, da der andere Teil vom Gewölbeschub getragen wird. Die Abnahme des Gewölbeschubs wird durch die Schubabgaben S hervorgerufen, welche die aussteifenden Binder belasten. Am stärksten ist die Umwälzung des Membranspannungszustandes in den für die Trägerwirkung maßgebenden T_1-Kräften ersichtlich. Die große Belastung des Außenträgers drückt sich in einer entsprechenden Verschiebung des Schwerpunktes der T_1-Kräfte aus. Besonders interessant ist die Darstellung der Längsspannungen, wenn diese über die Querschnittshöhe aufgetragen sind (Fig. 12). Im Innenfeld ist das ebene Spannungsdiagramm mit großer Genauigkeit vorhanden; die Abweichung im Außenfeld ist nur durch die Unsymmetrie der Belastung bedingt. Charakteristisch ist jedoch, daß das ebene Spannungsdiagramm am Ansatz des Randträgers einen Knick aufweist. Dieser Knick ist umso ausgesprochener, je stärker der Randträger belastet ist. Es bildet sich ein gekoppeltes Tragsystem aus, bei welchem die Schalenlast und ein Teil des Randträgers mit sehr günstigem Hebelarm der inneren Kräfte, jede Überlast dagegen mit geringem Hebelarm getragen wird, da im letzteren Falle der Druckgurt nur durch die Kämpferpartie der Tonne gebildet wird. Man kann hieraus auch ermessen, wie sehr die Form des Spannungsdiagramms nicht nur von der Ausbildung des Querschnittes, sondern auch vom Verhältnis von Schalenlast zur Randträgerlast abhängt.



1. Lastglied.
1er « Lastglied ».
1st "Lastglied".

2. Lastglied.
2e « Lastglied ».
2d "Lastglied".

1. und 2. Lastglied im endgültigen Zustand.
1er et 2e « Lastglied » à l'état définitif.
1st and 2d "Lastglied".

1. und 2. Lastglied für den Membranzustand.
1er et 2e « Lastglied » pour une voûte membraneuse.
1st and 2d "Lastglied" of a Membrane Vault.

Fig. 11.

Der Knick im Spannungsdiagramm bildete auch den Ausgangspunkt für die Näherungsberechnung der Schalenträger, welche vom Verfasser schon im Jahre 1927 durchgeführt wurde. Die statisch unbestimmte Rechnung wurde in gleicher Weise, wie hier beschrieben, angesetzt, die Verschiebungsgrößen der Tonne aus dem ebenen Spannungsdiagramm mit einigen Vereinfachungen formelmäßig entwickelt. Das Resultat zeigt für den Fall der Budapester

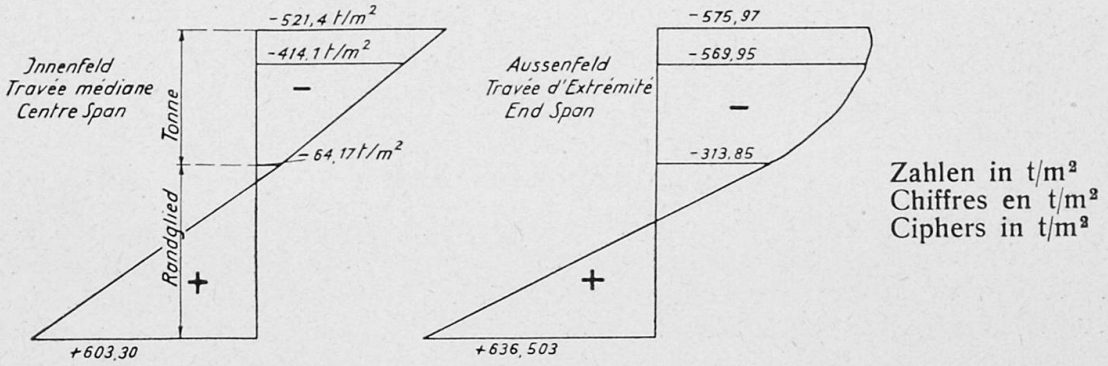


Fig. 12.
Längsspannungen über die Querschnittshöhe aufgetragen.
Efforts longitudinaux pour une coupe verticale (t/m²).
Longitudinal Stresses in a Vertical Section (t/m²).

Gewölbe eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Ergebnissen der strengen Berechnung. Es muß allerdings bemerkt werden, daß diese Übereinstimmung nur in den Fällen zu erwarten ist, in welchem die Träger-

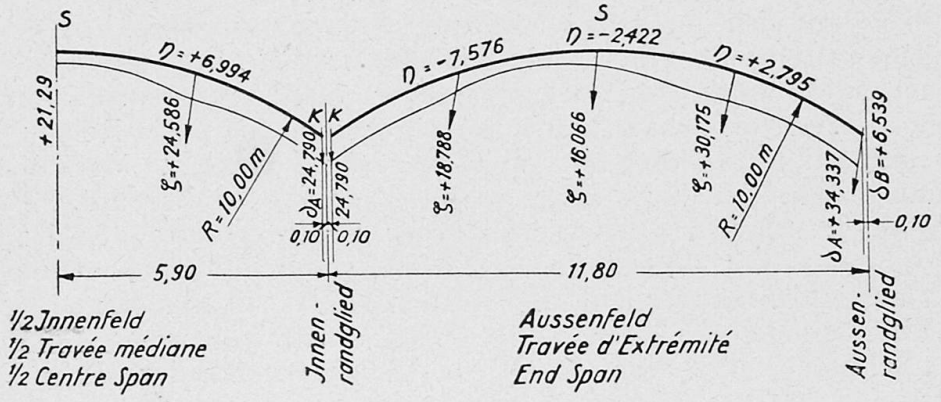


Fig. 13.
Verschiebungen der Schale infolge des ersten und zweiten Lastgliedes, in mm.
Déformation de la voute coquille par suite du 1er et 2e «Lastglied», en mm.
Deformation of the Shell owed to the 1st and 2d "Lastglied", in mm.

wirkung der Schale bis zum Scheitel der Tonne reicht. Würde die Trägerlänge beispielsweise auf $\frac{1}{3}$ verkleinert (vgl. 2. Lastglied T_1-Spannungen), so ist dies nicht mehr vollkommen der Fall.

Die Durchbiegung des Innenrandträgers beträgt 24,79 mm, die des Außenträgers 34,34 mm, bei den Scheiteln 21,29, bezw. 16,07 mm. Der Außenrandträger biegt sich um 6,5 mm nach innen (Fig. 13). Diese Werte stimmen mit den Messungen beim Ausrüsten sehr schön überein unter Berücksichtigung der dort etwas geringeren Schalenlast (Schnee und Eindeckung fehlten). Die im ersten Augenblick verblüffende Einwärtsbewegung des Außenträgers hängt mit dessen stärkerer Durchbiegung zusammen und ist

kinematisch leicht erklärbar; desgleichen die geringere Scheitelsenkung im Außenfeld. Lasten auf der Schale drücken den Außenträger nach außen, Lasten auf dem Randträger nach innen.

Das hier beschriebene Bauwerk, das in seinen Abmessungen vielfach über das Bisherige hinausgeht, war nur ausführbar als Endergebnis einer jahrelangen Beschäftigung mit der Theorie und der praktischen Ausführung von Kreissegmentschalen im Dachbau. Bei den vielen vorher ausgeführten Bauwerken wurden ständig die dem Entwurf zugrunde gelegten Annahmen auf ihre Richtigkeit geprüft. Diese Sorgfalt hat sich gelohnt, insofern, als kein Rückschlag den Weg zum Erfolg gehemmt hat.

Zusammenfassung.

Die Arbeit handelt von der Theorie der querversteiften Zylinderschalen, welche in der Praxis unter dem Namen Schalengewölbe System Zeiß-Dywidag in großem Umfange ausgeführt worden sind. Die typischen Merkmale dieses neuen Baugliedes sind in Fig. 2 dargestellt. Eine kreiszylindrische Schale spannt sich über Binder, welche in großen Entfernungen angeordnet sind. Der Rand längs der Erzeugenden wird durch ein Randglied versteift. Die Schale wirkt mit dem Randglied zusammen als gemeinsamer, zwischen die Binder gespannter räumlicher Träger.

Die Theorie fußt auf den Gleichungen der Elastizitäts-Theorie. Durch geringfügige Vernachlässigungen gelingt es, eine Spannungsfunktion einzuführen, ähnlich der Airy'schen Spannungsfunktion bei der Scheibenaufgabe. Statt eines Systems von drei simultanen partiellen Differentialgleichungen erhält man hierdurch eine einzige partielle Differentialgleichung achter Ordnung. Diese läßt sich durch Entwickelung der Spannungsfunktion nach einer Fourier'schen Reihe in eine totale Differentialgleichung umwandeln. Die Lösung ist eine Summe von zwei gedämpften Schwingungen. Das elastische Zusammenwirken von Schale und Randträger kann für jedes Reihenglied als vierfach statisch unbestimmtes System berechnet werden. Man denkt sich Schale und Randträger durch einen Schnitt voneinander getrennt, in welchem die zum biegungsfreien Gleichgewicht der Schale gehörenden Randkräfte wirken. Die statisch unbestimmten Größen, welche die Klaffung dieses Schnittes schließen müssen, sind ein System von Vertikalkräften, Horizontalkräften und Momenten, sowie von Schubkräften, welche in Richtung des Schnittes wirken (vergl. Abb. 5). Wenn die beiden Ränder der Schale sich beeinflussen, wird das System achtfach statisch unbestimmt. Für die in der Praxis vorkommenden Verhältnisse der Steifigkeit von Schale und Randträger kann man durch Vernachlässigung der Torsionsdrehung der Randträger die statische Unbestimmtheit auf drei, bezw. sechs vermindern.

Die mathematische Lösung ist in eine Form gebracht, mit welcher sich die praktische Berechnung von Bauaufgaben durchführen läßt. Die Methode und ihre Ergebnisse sind an dem Beispiel der Schalendächer der Großmarkthalle Budapest, dem kühnsten bisher bestehenden Schalenbau, erläutert.

Résumé.

Le rapport étudie la théorie des voûtes cylindriques minces à renforcement transversal, qui sont largement employées dans la pratique de la construction, sous le nom de voûtes minces système Zeiss-Dywidag. Les caractéristiques principales de ce nouveau système de construction sont mises

en évidence sur la figure 2. Une voûte mince en demi-cintre repose sur des fermes admettant entre elles un grand écartement. Le bord de la voûte est raîdi par une poutre de retombée. L'ensemble ainsi constitué se comporte comme un système posé, dans l'espace, entre les fermes.

La théorie de ce dispositif repose sur les équations de la théorie de l'élasticité. En admettant quelques simplifications d'importance négligeable, on peut faire intervenir les efforts sous la forme d'une fonction semblable à celle d'Airy pour l'étude des parois minces. Au lieu d'un système de trois équations différentielles partielles simultanées, on obtient ainsi une seule équation différentielle partielle du huitième ordre. Cette équation peut être transformée par développement de la fonction suivant une série de Fourier en une équation différentielle totale. La solution obtenue est la somme de deux oscillations amorties. Les caractéristiques élastiques de la voûte et de la poutre de retombée peuvent être calculées pour chaque terme de la série, comme un système quatre fois indéterminé statiquement. On suppose la voûte et la poutre de retombée séparées l'une de l'autre par une fente fictive dans laquelle interviennent les efforts en bordure qui correspondent à l'équilibre sans flexion. Les efforts statiquement indéterminés dont l'action équivaut à la fermeture de cette fente fictive constituent un système de forces verticales, de forces horizontales et de moments, ainsi que d'efforts tranchants, qui agissent dans la direction de la fente (voir figure 5). Si les deux retombées de la voûte réagissent l'une sur l'autre, le système devient huit fois statiquement indéterminé. Dans les conditions qui se présentent dans la pratique, pour ces voûtes minces avec poutres de retombée, on peut négliger les torsions de la poutre de retombée et réduire ainsi l'indétermination statique aux degrés trois ou six.

La solution mathématique du problème est présentée sous une forme qui permet son emploi dans les calculs pratiques. A titre d'exemple des résultats que permet d'obtenir cette méthode de construction, l'auteur décrit la couverture en voûtes minces de la halle du Grand Marché de Budapest, qui constitue la plus remarquable illustration pratique de l'emploi des voûtes minces.

Summary.

This work deals with the theory of cylindrical shells with cross stiffening, which have been used to a great extent in practice under the name "shell arch, system Zeiss-Dywidag". The typical features of the new constructional member are shown in fig. 2. A cylindrical shell spans the space between the trusses, which are at a great distance apart. The edge along the generating line is stiffened by an edge member. The shell, along with the stiffening member, acts as a stereometrical system held between the trusses.

The theory is based on the equations of the theory of elasticity. Slight simplifications allow a stress function to be introduced, similar to the Airy stress function in the disk problem. Instead of a system of three simultaneous partial differential equations, a single partial differential equation of the eighth order is thereby obtained. By developing the stress function according to a Fourier series, this may be changed into a total differential equation. The solution is the sum of two damped vibrations. The elastic cooperation of shell and edge nember may be calculated for each member of a row as a four times static indeterminate system. The shell and edge member are considered as being separated by a cut, in which the forces at the edge act

that appertain to the equilibrium of the shell without bending. The statically indeterminate values, which must close the aperture of this cut, are a system of vertical forces, horizontal forces and moments, as well as of shearing forces, which act in the direction of the cut (c. f. fig. 5). When the two edges of the shell influence each other, the system is eight times statically indeterminate. For the conditions of the stiffness of shell and edge members occurring in practice, the static indeterminateness may be reduced to three and six times respectively, by neglecting the torsional twist of the edge members.

The mathematical solution is brought into a form which may be applied to the practical calculation of structural problems. The method and its results are illustrated by the example of the shell roofs of the large market hall in Budapest, the most daring structure of this type as yet erected.