Théorie des equivalences: application à la thermoélasticité

Autor(en): **Absi, Elie / Borensztein, Marc**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **10 (1976)**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10428

Théorie des Equivalences. Application à la thermoélasticité

Äquivalents-Lehre.
Anwendung an der Thermo-Elastizität

Theory of Equivalences.
Application to the Thermoelasticity

ELIE ABSI
Délégué Général Scientifique

MARC BORENSZTEIN
Docteur-Ingénieur, Ingénieur ENPC

C.E.B.T.P.
Paris, France

1 - INTRODUCTION

Pour résoudre les problèmes dérivant d'un champ, la Théorie des Equivalences propose une approche générale qui consiste à substituer à l'étude du corps réel, celle d'un corps fictif plus accessible au calcul. Les caractéristiques de ce corps, appelé solide équivalent, sont déterminées en écrivant l'égalité des fonctionnelles définissant l'état physique des deux solides. Cette condition d'équivalence permet d'affirmer qu'ils auront le même comportement.

La Théorie des Equivalences a déjà permis de résoudre avec succès des problèmes d'élasticité (Réf. 1 et 5) et d'infiltration d'eau dans le sol (Réf. 3) en utilisant comme solide équivalent, respectivement des structures de poutres et treillis, et des réseaux orthogonaux de canaux. Ainsi nous nous proposons de résoudre les problèmes de thermoélasticité en attribuant tour à tour au solide équivalent des caractéristiques thermiques et mécaniques. La conduction de chaleur est alors ramenée à un problème d'écoulement et la recherche des contraintes à un simple problème de contraintes thermiques dans une structure. Pour résoudre ce dernier problème, une méthode systématique est utilisée.

2 - DIFFUSION DE LA CHALEUR

Il est identique de résoudre l'équation de la chaleur (1) ou de trouver le champ thermique T qui minimise la fonctionnelle (2).

(1) $$k \nabla^2 T + Q = \rho c \dot{T}$$

(2) $$I(T) = \int \left[k_i \, (T_{,i})^2 - (2Q - \rho c \dot{T}) \, T \right] dV$$

Le solide étudié est remplacé par un grillage orthogonal de barres dont les caractéristiques thermiques et les sections sont calculées en écrivant l'égalité de leur fonctionnelle respective.

Si les deux solides occupent le même volume et s'ils sont soumis aux mêmes conditions sur le contour, il reste seulement à identifier les termes de la forme :

$$\int k_i \, (T_{,i})^2 \, . \, dV \tag{3}$$

Il est nécessaire de supposer que le découpage du corps réel est suffisamment fin pour admettre que les gradients thermiques sont constants dans chaque maille du grillage. On peut alors déterminer (Réf. 4) les caractéristiques du solide équivalent.

Nous découpons la durée du phénomène en une suite d'intervalles telle que l'approximation suivante soit admissible :

$$\dot{T} = \frac{T\,(t_k) - T\,(t_{k-i})}{\Delta t_k} \tag{4}$$

On écrit pour chaque noeud i que la quantité de chaleur amenée par toutes les barres (i,j) aboutissant en i est égale à la quantité de chaleur $Q_i(t)$ reçue par l'extérieur, augmentée de la quantité de chaleur nécessaire à l'échauffement de l'élément de volume ΔV_i pendant le temps Δt_k.

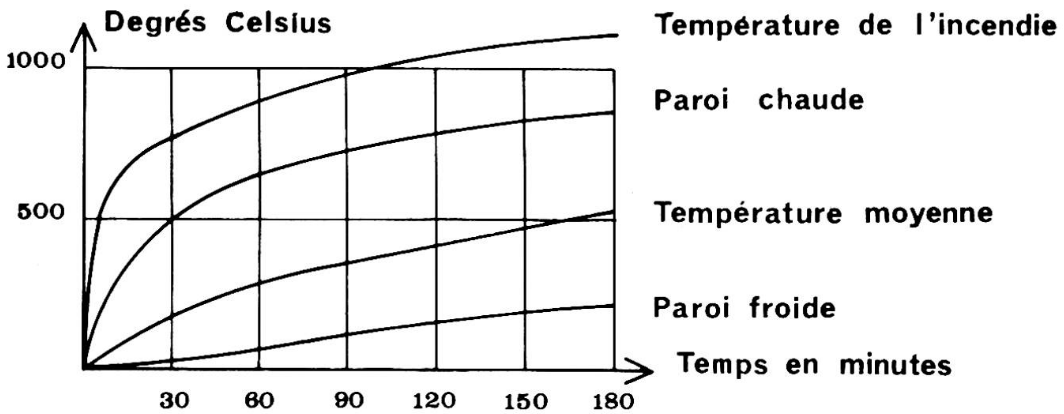
$$\sum_{j \to i} \left(\frac{kS}{L}\right)_{ij} \left[T_j(t_k) - T_i(t_k)\right] = Q_i(t_k) + \rho c \, \frac{\Delta V_i}{\Delta t_k} \left[T_i(t_k) - T_i(t_{k-1})\right] \tag{5}$$

Exemple 1

Cherchons l'évolution des températures dans la section d'une poutre en Té soumise à un incendie en sousface. La poutre est initialement à 0°C. La température de l'incendie est donnée par la formule normalisée :

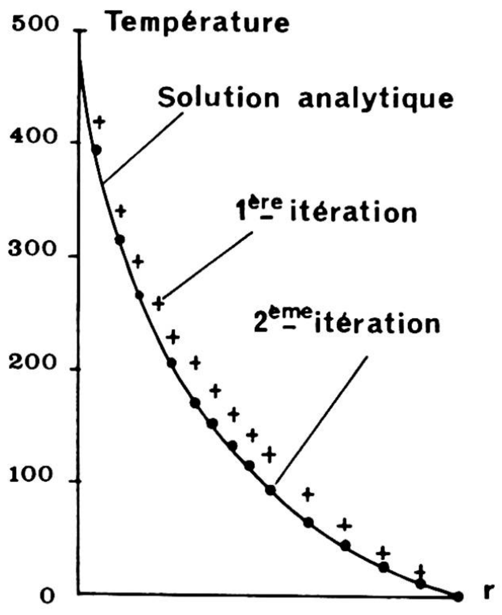
$$T = 345.\ \log\,(8t + 1)$$

H_1 et H_2 les coefficients de convection rayonnement des faces froide et chaude ont pour valeurs respectives 13 et 46 kcal/h.m^2.°C. Les caractéristiques du béton ont pour valeurs : ρ = 2400 kg/m^3, k = 1,4 kcal/h.m.°C et C = 0,22 kcal/kg.°C.



Exemple 2

On peut étudier facilement les solides à caractéristiques variables, il suffit de faire évoluer la structure équivalente sans avoir à modifier les programmes de résolution.



Considérons une enceinte cylindrique circulaire en béton dans laquelle nous imposons la température des deux faces $T_i = 500°C$, $T_e = 0°C$. Nous supposons que la conductivité thermique du béton varie avec la température suivant la formule suivante :

$$k(T) = 1,4 - 0,0012.T$$

3 - CALCUL DES STRUCTURES EN THERMOELASTICITE

Pour déterminer les contraintes d'origine thermique, nous proposons une méthode systématique de calcul fondée sur la notion d'équation intrinsèque. L'effet du champ thermique T peut être remplacé par l'action en chaque noeud i de sollicitations thermiques équivalentes T_i (Réf. 2 et 4).

4 - CONTRAINTES THERMIQUES DANS LES SOLIDES CONTINUS

Problèmes tridimensionnels

En thermoélasticité la densité d'énergie de déformation est :

$$(6) \quad U = \frac{1}{2}(e_{ij} - \alpha T\delta_{ij})\sigma_{ij} = \frac{\lambda}{2}(e_{ii})^2 + \mu(e_{ij}\ e_{ij}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha T(e_{ii}) + \frac{3}{2}(3\lambda + 2\mu)(\alpha T)^2$$

Considérons le modèle équivalent parallélépipèdique (Réf. 1 et 3), une barre (i,j), de direction Ox, a pour énergie de déformation :

$$(7) \quad W_{ij} = \frac{1}{2}\ \rho_x(e_{xx} - \alpha T_{ij})^2 + 6\ \eta_x(e_{xy}^2 + e_{xz}^2) \quad \text{avec} \quad \rho_x = (ESL)_{ij} \quad \text{et} \quad \eta_x = (EI/L)_{ij}$$

La condition d'équivalence du modèle s'écrit :

$$(8) \qquad \sum_{i,j} W_{ij} = \int_V U dV$$

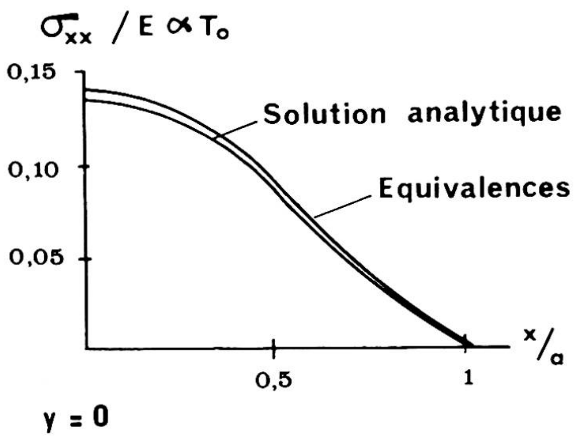
L'égalité des termes purement mécaniques nous permet de retrouver les valeurs des caractéristiques ρ et η (Réf. 1,4 et 5); si on admet que le champ thermique est uniforme dans le petit élément étudié, l'équivalence des termes thermiques est vérifiée. Cette hypothèse étant peu admissible, il est proposé (Réf. 4) des formules de calcul des températures des barres en fonction des températures des noeuds de manière à vérifier avec le plus de précision possible les conditions d'équivalence.

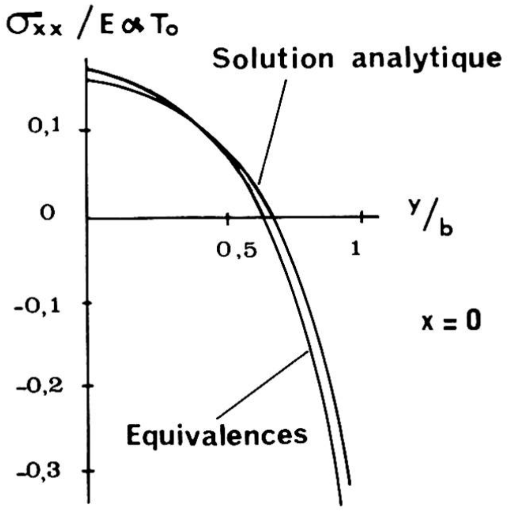
Problèmes plans

Le cas des contraintes planes se traite sans difficulté avec un modèle plan. Au contraire, dans les déformations planes, la troisième dimension a une contribution non nulle dans l'énergie de déformation thermoélastique et la résolution par modèle plan est impossible directement.

Exemple de contrainte plane

Considérons une plaque carrée, soumise au champ thermique $T = T_o\ (Y^2/b^2 - 1/3)$. Sur la structure équivalente sont appliquées les sollicitations thermiques équivalentes.





Etude des dalles

Les hypothèses habituelles sur la flexion des dalles ne sont admissibles que pour les champs thermiques variant seulement avec z ou linéaire en z. Le cas suivant a été principalement développé.

(9) $$T = T_o\ (x,y) + (z/h).\Delta T(x,y) \qquad -\frac{h}{2} \leqslant z \leqslant \frac{h}{2} \qquad \text{h épaisseur}$$

L'énergie de déformation par unité de surface (Réf.4) est :

(10) $$U = U_o + \frac{D}{2}\Big[(w,xx)^2 + (w,yy)^2 + 2\ \nu\ w_{,xx}\ w_{,yy} + 2\ (1-\nu)(w_{,xy})^2 + 2\ (1+\nu)(w_{,xx} + w_{,yy})\ \alpha\ \frac{\Delta T}{h} + 2(1+\nu)\ (\alpha\frac{\Delta T}{h})^2 \Big]$$

où U_o est l'énergie d'une plaque de température $T_o(x,y)$, problème traité au paragraphe précédent.

Les solides équivalents sont des grillages de poutres. Si la poutre (i,j) est soumise au gradient thermique $\frac{\Delta T}{h}$, elle aura l'énergie de flexion suivante :

(11) $$W_{ij} = \frac{1}{2} EIL \left(w,_{xx} + \frac{\alpha \Delta T}{h}\right)^2$$

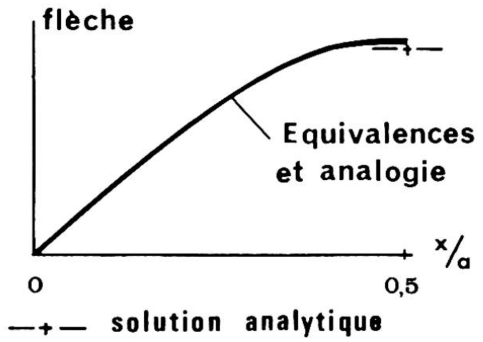
Il est possible de définir une analogie isotherme (Réf. 4) en appliquant à la dalle un chargement transversal réparti p^* et des sollicitations sur les bords dépendant des types d'appui.

(12) $$p^* = - \frac{1}{(1-\nu)} \nabla^2 M_T \quad \text{avec } M_T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha\, ETzdz = \alpha\,(1-\nu^2)\, D \frac{\Delta T}{h}$$

Exemple de dalle

Considérons une dalle carrée avec deux bords opposés encastrés et les deux autres simplement appuyés. Cette dalle est soumise au champ thermique :

$$T(x,y,z) = \frac{\Delta T_o}{h} \frac{4x}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right).z \qquad \text{d'où} \qquad p^* = \alpha\, D(1+\nu)\, \frac{8}{a^2} \frac{\Delta T_o}{h}$$



Il est remarquable d'observer que la Théorie des Equivalences et l'analogie isotherme donnent des résultats très proches bien que la première s'applique sous forme de moments aux noeuds et la seconde sous forme d'un chargement transversal.

5 - CONCLUSION

Nous avons pu remarquer que la Théorie des Equivalences donne des résultats meilleurs ou très proches de ceux obtenus avec une analogie isotherme appliquée à la structure équivalente. Il est possible d'en déduire que la discrétisation nécessaire pour appliquer ce type de théorie introduit une erreur plus importante que les imprécisions sur les sollicitations thermiques équivalentes.

Enfin le formalisme simple de la Théorie des Equivalences permet des extensions fructueuses, en particulier aux solides à caractéristiques variables.

Références Bibliographiques

1 - E. ABSI, "La Théorie des Equivalences et son application à l'étude des ouvrages d'Art"- Annales ITBTP, n°298 (octobre 1972)

2 - E. ABSI, "Equations intrinsèques d'une poutre droite à section constante" - Annales ITBTP, n°229 (janvier 1967)

3 - E. ABSI et C. DHELLO, "La Théorie des Equivalences et l'infiltration de l'eau dans le sol" - Annales ITBTP, n°304 (avril 1973)

4 - M. BORENSZTEIN, "Théorie des Equivalences - Application à la thermoélasticité" - Thèse de Docteur-Ingénieur - Paris VI (1975)

5 - C. DHELLO, "La Théorie des Equivalences et les problèmes d'élasticité tridimensionnelle et extension aux problèmes d'écoulement en milieux poreux" - Thèse de Docteur-Ingénieur - Paris VI (1972)

RESUME

La théorie des Equivalences a pour principe de substituer au solide étudié un corps fictif plus accessible au calcul. En utilisant un solide équivalent constitué de barres possèdant des caractéristiques thermiques et mécaniques, le problème de thermoélasticité est alors remplacé par un problème d'écoulement de chaleur suivi d'une recherche de contraintes thermiques dans une structure.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Theorie der Aequivalenzen oder Gleichwertigkeiten ist ein Versuch das Studium eines festen Körpers durch das Studium eines anderen, fiktiven Körpers, der sich besser berechnen lässt, zu ersetzen. Bei der Anwendung eines gleichwertigen Körperinhaltes, bestehend aus Stäben mit thermischen und mechanischen Eigenschaften wird also das Problem der Thermoelastizität durch das Problem der Wärmeübertragung ersetzt und eine Untersuchung der Temperaturspannungen angeschlossen.

SUMMARY

The principle of the theory of equivalences is to replace the solid body by a fictious body which is easier to calculate. Using an equivalent solid made up of bars with thermal and mechanical properties, the problem of thermoelasticity is then replaced by a problem of heat followed by research on thermal stresses in a structure.