Über das Leistungsvermögen von Tragwerken am Beispiel von Balken, Druckbogen und Zugbogen

Autor(en): **Bomhard, Helmut**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **10 (1976)**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10418

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über das Leistungsvermögen von Tragwerken am Beispiel von Balken, Druckbogen und Zugbogen

Capacity Range of Structures, such as Beams, Compression Arches and Tension Arches

Capacité de résistance de structures telles que poutres, arcs de compression et arcs de tension

HELMUT BOMHARD
Direktor der Dyckerhoff & Widmann AG
München, BRD

1. Einführung

Balken, Druckbogen und Zugbogen sind die Grundformen aller Tragwerke zur Bewältigung von Spannweiten. Die eine Spannweite bestimmenden Größen und ihr Zusammenwirken, die Bandbreite technisch möglicher Spannweiten, lassen sich denn auch an diesen Grundformen am besten studieren. Dies um so mehr als die Gesetzmäßigkeiten verhältnismäßig leicht analytisch faßbar sind.

Ziel des Beitrags sind Spannweitenfunktionen für alle drei Grundformen bei allgemeinen Baustoffgesetzen und ggf. Gleichgewicht am verformten System, wenn nötig mit nichtlinearen Geometriebeziehungen, auf deterministischer Basis und für statische Belastung.

Die Spannweitenfunktionen bilden wichtige Grundlagen für jeden Entwurf und jede Tragwerkentscheidung und sind Hilfen bei der Optimierung.

2. Die Spannweitenfunktion

Die Spannweite ist Ausdruck des Leistungsvermögens. Sie ist bei einem bestimmten Versagenszustand eine Funktion des Systems (S), der Form (F) und der Baustoffe (M) des Tragwerks sowie der Fremdlast (L), die getragen werden muß:

$$l = f\,(\text{System, Form, Baustoff, Fremdlast}) \qquad (1).$$

"Fremdlast" ist für das Tragwerk alles, was nicht Teil seiner tragenden Form (= aktives Gewicht g_a) ist, wie etwa das Gewicht von Pfetten (= passives Gewicht g_p), die quer zu einem Balken gespannt sind und die gesamte Verkehrslast p.

Die Spannweitenfunktion (1) läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen als Produkt dreier Kenngrößen K schreiben:

$$l = K_{S+F_{längs}} \cdot K_{M+F_{quer}} \cdot K_L = l_{Gr} \cdot K_L \qquad (2a),$$

nämlich dann, wenn 1. das System sich statisch bestimmt verhält, 2. das Gleichgewicht am unverformten System angeschrieben werden kann und 3. Fremdlast $g_p + p$ und aktives Gewicht g_a affin sind. Es beschreiben:

$K_{S+F_{längs}}$	das System und die Verteilung der Tragwerkmasse in seiner Längsrichtung,
$K_{M+F_{quer}}$	die Baustoffe und die Verteilung der Tragwerkmasse in Systemquerrichtung,
K_L	die Fremdlast.

So aufgeschlüsselt sind die sehr unterschiedlichen Einflüsse, die l bestimmen, am leichtesten durchschaubar.

Bei Lastaffinität allein ist: $l = K_{S+F+M} \cdot K_L = l_{Gr} \cdot K_L$ (2b).

Die Einflüsse aus System, Form und Baustoff lassen sich dann nicht mehr trennen.

In (2) ist: $K_L = \frac{1}{1 + (g_p+p)/g_a}$, $0 \leq K_L \leq 1$ (3).

Die Grenzspannweite l_{Gr} ist demnach die Spannweite bei verschwindender Fremdlast ($K_L = 1$). Sie kann nicht mehr übertroffen werden: Das Leistungsvermögen des Tragwerks ist erschöpft.

Den Untersuchungen liegen der Einfachheit halber Spannweitenfunktionen nach (2) zugrunde. Die so gewonnenen Aussagen bleiben qualitativ gültig, auch wenn Fremdlast und tragendes aktives Gewicht nicht affin sind.

3. Die Tragwerkformen

3.1 Balken

Grenzfälle von Balkensystemen sind der "einfache Balken" und der "Kragbalken". Mit ihnen ist der gesamte Leistungsspielraum von Balkensystemen faßbar. Der einfache Balken begrenzt das Leistungsvermögen nach unten, der Kragbalken nach oben. Seilverspannte Balken werden nicht betrachtet. Sie besitzen bei engen Seilabständen hohes Leistungsvermögen und sind dann dem Kragbalken mit dem Idealquerschnitt $m_U = 1$ (s. Bild 2) vergleichbar.

Der Einfluß der Baustoffe und der Querschnittform ist bei beiden Systemen gleich:

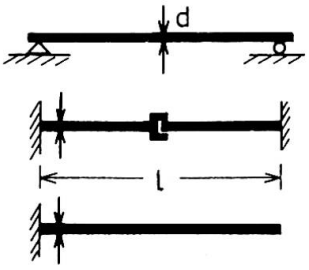
$$K_{M+F_{quer}} = \frac{\beta_R}{\gamma} \frac{m_U}{\nu} \qquad (4).$$

Dabei bedeuten:

β_R	Rechenfestigkeit des Bezugsbaustoffs
$\gamma = a\varrho$	Berechnungsgewicht des Balkenmaterials im Beschleunigungsfeld a (Erde $a = 9{,}81\ m/s^2$)
β_R/γ	Reißlänge bzw. Zerdrückhöhe des Balkenmaterials bei zugfestem bzw. druckfestem Bezugsbaustoff
m_U	bezogenes Bruchmoment $M_U/F\ d\ \beta_R$, als Maß der Beanspruchbarkeit des Querschnitts (Fläche F, Höhe d, Breite b) mit dem Größtmoment
ν	Gesamtsicherheitsbeiwert.

Wenn für das Tragvermögen ausnahmsweise der Gebrauchszustand maßgebend ist, muß in (4) m_U/ν durch m des Gebrauchszustands ersetzt werden.

Die Bandbreite des Faktors $K_{S+F_{längs}}$ ist dagegen sehr verschieden:



$8\frac{d}{l} \leq \qquad \leq 9{,}9\frac{d}{l}$ (5)

$8\frac{d}{l} \leq K_{S+F_{längs}} \leq$ ∞ : ideal; Bild 1: real (6)

$2\frac{d}{l} \leq \qquad \leq$ ∞ : ideal; Bild 1: real (1/4 der Werte) (7)

Die Werte auf der linken Seite gehören zu Balken mit konstantem Querschnitt, die auf der rechten zu - in jedem Querschnitt - vollbeanspruchten mit konstanter Höhe und idealem Zweipunktquerschnitt (quasi Fachwerkbalken). Im einen Fall ist die Tragwerkmasse demnach überhaupt nicht auf den Momentenverlauf abgestimmt, im anderen dagegen vollkommen.

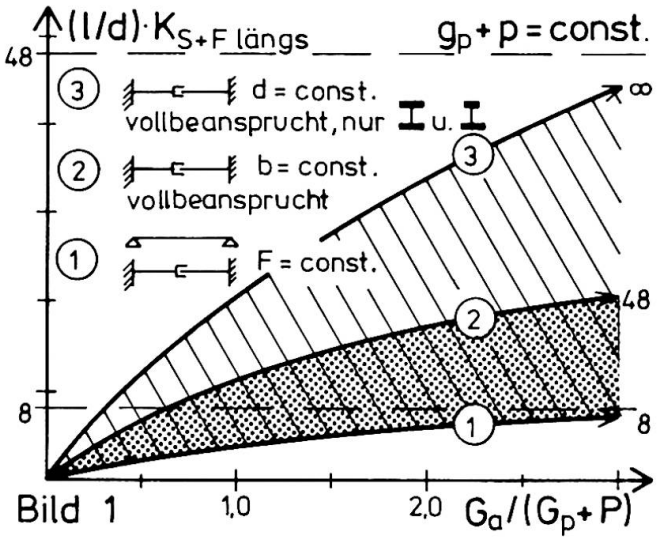


Bild 1

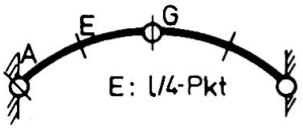
Der ideale Wert ∞ besagt nicht, daß l auch bei realen Kragbalken ∞ groß oder auch nur sehr groß werden kann. Durch nicht affine Fremdlast und einen im Bereich der Kragbalkenspitze technologisch bedingten Mindestbalkenquerschnitt sinkt das Leistungsvermögen außerordentlich ab: der in (6) und (7) angegebene ∞ große Leistungsspielraum schrumpft z.B. allein durch eine konstante Fremdlast auf den in Bild 1 schraffierten endlichen Bereich zusammen. Der baupraktisch nutzbare Spielraum ist noch kleiner, vor allem wenn d ≠ const. ist (im Bild gerastert) oder unterschiedliche Lastfälle zu berücksichtigen sind.

3.2 Druckbogen

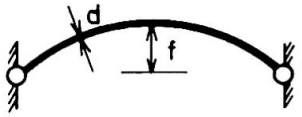
Die nach oben gekrümmte Bogenform ist keine Form minimaler potentieller Energie. Ein Druckbogen hat deshalb den Drang, nach unten durchzuschlagen, sein Tragvermögen geht spätestens mit dem Einsetzen des Durchschlags verloren. Obwohl Durchschlagvorgänge nur mit einer geometrisch nichtlinearen Theorie faßbar sind, genügt für die numerische Traglastrechnung im Schlankheitsbereich, den die technischen Baubestimmungen erlauben, die geometrisch linearisierte Theorie. Bei den baupraktisch allein bedeutsamen Pfeilverhältnissen $f/l \geq 0{,}1$ kann außerdem die Achsdehnung unberücksichtigt bleiben.

Das Leistungsvermögen ist am kleinsten, wenn der Durchschlagvorgang ohne Gleichgewichtsverzweigung abläuft. Dazu gehören Lastkombinationen, die die jeweils kritische Ausweichform durch gleichsinnige Störmomente begünstigen: antimetrische Momente beim 2-Gelenk-Bogen, beim gelenklosen Bogen und beim steilen 3-Gelenk-Bogen, symmetrische dagegen, wenn dieser flach ist (etwa $f/l < 0{,}3$). Die kritische Fremdlast muß demnach zwei Anteile enthalten: einen voraussetzungsgemäß zu g_a affinen - durch K_L erfaßten - und einen anderen, - durch β gekennzeichneten - der die Störmomente erzeugt ($\beta = q_{anti}\, K_L/g_{a,G}$ bei antimetrischer Störlast q_{anti}, $\beta = Q_G K_L/g_{a,G}\, l$ bei symmetrischer Störlast Q_G im Bogenscheitel).

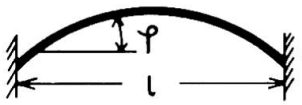
Für den als Stützlinie für g_a geformten Kettenlinienbogen (F = const.) sind die Kenngrößen für System, Form und Baustoff K_{S+F+M}:



$$\frac{1-\cos\rho_A}{\cos\rho_A}\left(\frac{l}{f}\right)\frac{\beta_R}{\gamma}\cos\rho_E\,\frac{n_{\beta,Ecr}}{\nu}\,\frac{1}{\left[1+\frac{\beta}{4}\,\frac{1-\cos\rho_A}{\cos\rho_A}\left(\frac{l}{f}\right)^2\right]\left(1+\frac{v_G}{f}\cos^2\rho_E\right)} \qquad (8)$$



$$\frac{1-\cos\rho_A}{\cos\rho_A}\left(\frac{l}{f}\right)\frac{\beta_R}{\gamma}\cos\rho_E\,\frac{n_{\beta,Ecr}}{\nu} \qquad (9)$$



$$\frac{1-\cos\rho_A}{\cos\rho_A}\left(\frac{l}{f}\right)\frac{\beta_R}{\gamma}\cos\rho_E\left[\frac{n_{\beta,E}}{\nu}\mp\frac{2m_A}{\nu}\left(\frac{d}{l}\right)\sin\rho_E\right]_{cr} \qquad (10).$$

Die bezogenen kritischen Schnittgrößen $n = N/F\beta_R$ und m enthalten implizit die Einflüsse aus (S), (F), (M) und (L). Bis auf das Glied mit v_G, der lotrechten Verschiebung des Scheitelgelenks beim 3-Gelenk-Bogen, stimmen (8)(9)(10) formal mit den Ausdrücken der Theorie 1. Ordnung überein. Ab etwa $f/l > 0{,}3$ gilt (9) auch für den 3-Gelenk-Bogen.

Für flache Kettenlinienbogen ist $\frac{1-\cos\rho_A}{\cos\rho_A}\,\frac{l}{f} \approx 8\,\frac{f}{l}$ (11).

Damit kann bis etwa $f/l < 0{,}3$ gerechnet werden.

Das Leistungsvermögen ist um so kleiner, je größer die Störmomente sind und je schlanker der Bogen ist. Es wird dann auch mehr und mehr f/l-unabhängig. Nur bei sehr kleinen Störmomenten werden in etwa die klassischen Extremstellen für max. l erreicht (z.B. $f/l \approx 0{,}3$ beim Kettenlinienbogen). Der Leistungsabbau kann in allgemeiner Form nur qualitativ angeschrieben werden:

$$n_{\beta,cr} \geq n_{\beta,UII} < n_{\beta,UI} < n_{U,(m=0)} \qquad (12).$$

Bei n_U ist wegen $m = 0$ das Leistungsvermögen des Querschnitts ausgenutzt, durch die Störmomente nimmt es ab auf $n_{\beta,UI}$, durch den Einfluß der Bogenverformungen auf $n_{\beta,UII}$; bei "Stabilitätsversagen" geht das Tragvermögen bereits im Innern des n-m-Interaktionsdiagramms verloren, $n_{\beta,cr}$ ist dann $> n_{\beta,UII}$. Numerische Berechnung ohne besonderen Aufwand nach [1] möglich, dort und in [2] Beispiele zu (12).

Großes Leistungsvermögen setzt gedrungene Bogen voraus. Querschnitte, die dem idealen 2-Punkt-Querschnitt nahekommen, bringen Leistungssteigerung vor allem bei großem l/d, f/l und großen Störmomenten. Der gelenklose Bogen ist am leistungsstärksten. Ausweichen senkrecht zur Bogenebene bedeutet zusätzlichen Leistungsabbau.

3.3 Zugbogen

Ein biegesteifer Zugbogen vermag, dem Druckbogen ähnlich, das Leistungsvermögen des Querschnitts nicht auszunutzen:

$$n_{\beta,cr} = n_{\beta,UII} \begin{matrix} > n_{\beta,UI} \\ < n_{U,(m=0)} \end{matrix} \qquad (13),$$

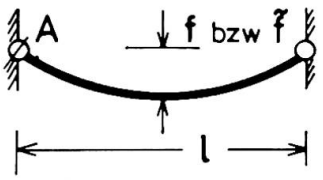
wenn auch bei ihm die Systemverformungen ($n_{\beta,UII} > n_{\beta,UI}$) leistungssteigernd wirken.

Ein Zugbogen muß aber nicht biegesteif sein: Die hängende Bogenform ermöglicht als Form minimaler potentieller Energie den biegeweichen Bogen mit voller Querschnittausnutzung

$$n_{\beta,cr} = n_{U,(m=0)} \qquad (14).$$

Er wird dadurch zum leistungsfähigsten System.

Baupraktisch bedeutsam ist allein der flache Kettenlinienbogen mit



$$K_{M+F_{quer}} = \frac{\beta_R}{\gamma}\,\frac{n_{UA}}{\nu} \qquad (15)$$

$$K_{S+F_{längs}} = \frac{8}{\sqrt{1 + 16(\tilde{f}/l)^2}}\,\frac{\tilde{f}}{l} \approx 8\,\frac{\tilde{f}}{l} \qquad (16).$$

Je nach Bogenbaustoff kann statt n_{UA}/ν auch der Wert des Gebrauchszustandes $n_A \equiv n_{(m = 0)}$ maßgebend sein. Der Zirkumflex kennzeichnet das Pfeilverhältnis des verformten Bogens

$$\tilde{f}/l \simeq f/l \sqrt{1 + 3/8 \cdot (l/f)^2 \cdot (\tilde{b} - b)/l} \qquad (17)$$

mit der gedehnten Bogenlänge $\tilde{b}$.

Von allen Tragwerkformen für Baukonstruktionen dürfen beim biegeweichen Bogen als einziger die Geometriebeziehungen nicht von vornherein linearisiert werden. Dem entspricht (17). Die lineare Beziehung geht um so eher verloren, je flacher der Bogen ist.

Der biegeweiche Bogen ist kinematisch verschieblich, weil seine Achse stets Seillinie der jeweiligen Belastung sein muß. Kritisch sind antimetrische Störungen zusammen mit hoher Entlastung. Sie können mit wachsendem f/l Anlaß großer Verformungen sein, ein zu leichter oder ein in anderer Weise nicht ausreichend stabilisierter Bogen kann nach oben durchschlagen. Dieses Durchschlagproblem, das in [2] behandelt ist, beeinträchtigt das Leistungsvermögen nicht.

4. Die Baustoffe

Die Leistungskenngrößen K enthalten den Baustoffeinfluß in allgemeingültiger Form als Produkt

$$\beta_R/\gamma \cdot n_U \text{ bzw. } \beta_R/\gamma \cdot m_U \qquad (18)$$

Die Spannungsdehnungslinien stecken dabei in n und m, ebenso die Querschnittform und der kritische Dehnungszustand.

Das Leistungsvermögen wächst mit der Reißlänge und der Zerdrückhöhe. Hochfeste Stähle und hochfeste Betone und Leichtbetone kennzeichnen die Entwicklung, mit der Tendenz, auch im Betonbau zu Werten zu kommen, die denen von Baustahl vergleichbar sind.

Für n_U und m_U lassen sich von der Spannungsdehnungslinie unabhängige obere Grenzwerte angeben:

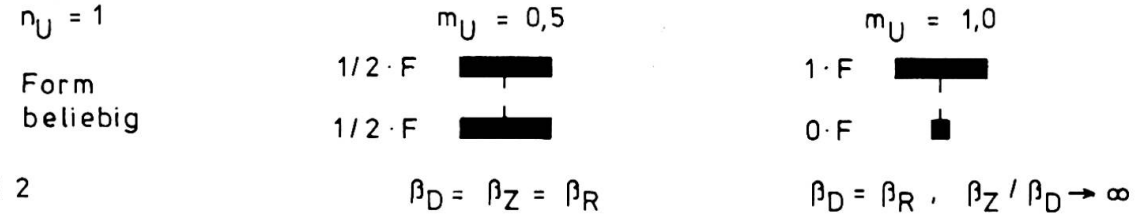


Bild 2

bei homogenem Material. $n_U = 1$ ist im biegeweichen Zugbogen realisierbar. $m_U = 0{,}5$ und 1,0 lassen sich als die Beanspruchbarkeiten der Querschnitte von Fachwerkbalken deuten, deren Diagonalengewicht verschwindend klein ist. Tatsächlich brauchen alle biegebeanspruchten baupraktischen Querschnitte gewisse Zuggurtmassen und, vor allem im Vollwandbereich, Stegmassen, die das Leistungsvermögen verringern. Für sie sind deshalb $m_U = 0{,}5$ und 1,0 unerreichbare Grenzwerte: 0,5 für die Querschnitte des Stahlbaus, 1,0 für die des Spannbetonbaus.

Für Betontragwerke seien noch einige weitere Angaben gemacht:

4.1 Balken

Das Leistungsvermögen der Balkenquerschnitte wird durch die Tragfähigkeit der Biegedruckzone begrenzt (Grenzstauchung ε_{bU}). Voll nutzbar wird es durch eine entsprechend hohe Bewehrung der Biegezugzone, wobei die Bewehrungsgrenze normalerweise aus dem Wunsch

folgt, ein Versagen der Druckzone zu vermeiden, bevor die Zugbewehrung fließt (Bruchvorankündigung durch $\varepsilon_e \geq 3$ ‰).

Im übrigen wird hohes Leistungsvermögen durch geschicktes Formen der Querschnitte erreicht. Wie groß dabei der Spielraum ist, zeigen die Grenzformen "Rechteckquerschnitt" mit $m_U \simeq 0{,}25$ und "idealer Zweipunktquerschnitt" mit $m_U = 1{,}0$ bei unbewehrter Druckzone. Die Bandbreite der realen, baupraktischen Querschnitte ist der in Zuggurt und Steg allein schon technologisch bedingten Betonflächen wegen beträchtlich schmaler. Die bei großen Spannweiten bisher gebauten Formen vollwandiger Balken besitzen etwa

$$\begin{aligned} 0{,}35 \leq \quad & m_U & \leq 0{,}60 \\ 0{,}40 \leq \quad & \bar{\mu} = \mu \beta_S / \beta_R & \leq 0{,}65 \end{aligned} \qquad (19).$$

Je höher m_U ist, um so weniger ist die Beanspruchbarkeit von der $\sigma - \varepsilon$-Linie des Betons abhängig.

Nur mit Hilfe der Vorspannung gelingt es, dem Idealquerschnitt mit $m_U = 1{,}0$ nahezukommen, denn nur durch Vorwegnehmen der Stahldehnung werden hochfeste Stähle ausnutzbar, so daß sich große und größte Zugkräfte in verhältnismäßig kleinen Betonquerschnitten unterbringen lassen. Die damit erzielbare Einsparung an Querschnittfläche wächst mit der Spannweite. Der Vorspanngrad selbst beeinflußt i.a. nur das Verhalten im Gebrauchszustand, nicht aber das Leistungsvermögen. Auch eine "Druckspannbewehrung" zur Zugvorspannung der Druckzone erhöht das Leistungsvermögen nur durch den Bewehrungsgehalt der Druckzone. Wenn die Gebrauchsfähigkeit dies zuläßt, soll auch bei Vorspannung nicht mehr Bewehrung eingelegt werden, als der Bruchzustand erfordert mit einem möglichst hohen Anteil an Spannstahl.

4.2 Druckbogen

Im Druckbogen sind zweipunktnahe Querschnittformen der einfachen Rechteckform nicht so selbstverständlich weit überlegen wie im Balken, weil die ihnen eigene überragende Steifigkeit verlorengeht, sobald einer der Gurte reißt. Die Tragfähigkeit fällt dann jäh ab, auf Werte, die sich von denen des Rechteckquerschnitts meist nurmehr unwesentlich unterscheiden. Hohlquerschnitte sind deshalb nur dann entscheidend leistungsfähiger, wenn sie im gesamten Beanspruchungsbereich ungerissen bleiben. Dazu bedarf es vielfach gedrungener Bogen, vor allem bei merklichen Störmomenten und mit wachsendem f/l. Auch eine Vorspannung kann manchmal zweckmäßig sein.

Mit dem Bewehrungsgehalt ist das Leistungsvermögen nur im Zugbruchbereich entscheidend zu beeinflussen. Die Wirkung wächst mit den Störmomenten und wird durch die Schlankheit beschleunigt. Doch ist selbst bei großen Störmomenten eine bewehrungsproportionale Leistungssteigerung nicht erreichbar. Nahezu ohne Wirkung bleibt der Bewehrungsgehalt bei Stabilitätsversagen, zu dem sehr kleine bis kleine Störmomente gehören. Dann kommt es vor allem auf die $\sigma - \varepsilon$-Linie des Betons an.

Die Bandbreite der $n_{\beta,cr}$ des Zweigelenkbogens ist in [2] untersucht.

4.3 Zugbogen

Im biegeweichen Zugbogen hat der Beton, anders als in den mit Biegung arbeitenden Systemen, keine wesentliche Tragfunktion, diese übernehmen die Spannglieder. Der Beton bildet vor allem Raumabschluß oder Fahrbahn, formstabilisierendes Element (Schale, Platte,

Gewicht) und Korrosionsschutz der Bewehrung.

Wenn Spannglieder der Festigkeit β_Z die Bewehrung bilden, ist

$$n_{UA} = \mu_z \ \beta_Z / \beta_R \qquad (20).$$

Der Bewehrungsgehalt μ_z hat nur technologische Grenzen: Die Spannglieder sollen des einfachen Korrosionsschutzes wegen im Betonquerschnitt Platz finden. Das ergibt

$$\text{etwa}\ \mu_z \leq 0{,}15 \qquad (21).$$

Bei Balken und Druckbogen setzt das Tragvermögen der Biegedruckzone dem Bewehrungsgehalt weit niedrigere technische Grenzen: $\mu_z = \beta_R / \beta_S$ oder $\bar{\mu}_z = 1$ als oberste Schranke beim idealen Zweipunktquerschnitt mit $m_U = 1$ und etwa $\bar{\mu}_z \leq 0{,}65$ oder $\mu_z \leq 0{,}015$ bei den baupraktischen Vollwandquerschnitten (19). Der biegeweiche Zugbogen kann demnach etwa 10mal so stark bewehrt werden wie Balken oder Druckbogen. Das, zusammen mit einem hohen β_Z, begründet sein überlegenes Leistungsvermögen.

Die nutzbare Stahlfestigkeit β_Z hängt allein vom plastischen Verformungsvermögen des Bogens ab. Sein Gleichgewicht verlangt ein Spannungsgefälle von den Kämpfern zur Bogenmitte. Deshalb ist das plastische Verformungsvermögen nur mit Stählen nutzbar, die einen Verfestigungsbereich besitzen. Das ist bei allen Spannstählen mehr oder weniger ausgeprägt der Fall. Da sich der Bogen nicht beliebig weit in den Verfestigungsbereich hinein verformen darf, wird β_Z durch das Erreichen kritischer Spannstahldehnungen begrenzt, etwa

$$\text{crit.}\ \varepsilon_z \leq (1{,}0 \text{ bis } 1{,}5)\ 10^{-2} + \varepsilon_z^{(o)} \qquad (22),$$

mit der Spannbettdehnung $\varepsilon_z^{(o)}$ [3]. Bei Bogen bis etwa $f/l \leq 0{,}1$ wird dadurch β_Z so groß, daß die im Gebrauchszustand zulässige Stahlspannung zul σ_z mit $n_A = \mu_z$ zul σ_z / β_R (23) das Leistungsvermögen bestimmt. - Bei Stählen mit idealelastisch-idealplastischem bzw. sprödem Verhalten wäre $\beta_Z = \beta_S$ bzw. β_Z zu setzen.

5. Die Tragwerkmasse

Die das aktive Gewicht g_a bildende Tragwerkmasse ist dann am wirksamsten eingesetzt, wenn sie

- an jeder Tragwerkstelle und
- in jeder Querschnittfaser voll ausgenutzt ist und
- selbst möglichst wenig Beanspruchung erzeugt.

Damit ist hohes Leistungsvermögen gegeben, nicht aber unbedingt auch ein optimales Tragwerk vom Aufwand und Nutzen her gesehen. Je weniger das Leistungsvermögen gefordert wird, um so mehr darf und wird man von diesen Kriterien abweichen.

Das Abstimmen von Tragwerkmasse und Momentenverlauf lohnt sich demnach am meisten beim Kragbalken, der dadurch viel leistungsfähiger als der einfache Balken wird. Dieser reagiert darauf viel weniger empfindlich, weshalb bei ihm der mögliche Leistungsgewinn nur ein ziemlich grobes Abstimmen rechtfertigt (5) (6). Begründet ist dies in der unterschiedlichen Völligkeit des Momentenbildes beider Systeme: Der Kragbalken braucht, im Gegensatz zum einfachen Balken, die Tragwerkmasse dort, wo sie nur mit kleinem Hebelarm momentenwirksam ist. Ein Tragwerk aus aneinandergereihten, richtig geformten Kragbalken ist deshalb auch leistungsfähi-

ger als ein solches mit Einhängebalken oder aus Durchlaufbalken. Da der einfache Balken auch "Ersatzbalken" der Bogen ist, lohnen auch diese das Abstimmen der Tragwerkmasse auf den Beanspruchungsverlauf nur mit einem ähnlich eng begrenzten Leistungszuwachs. Der Zweigelenkdruckbogen nach (9) kann dadurch wenig mehr als 10 % weiter gespannt werden. Beim biegeweichen Zugbogen scheidet diese Möglichkeit, Leistung zu gewinnen, fast ganz aus.

Nicht ausgenutzte Tragwerkmasse kann sich sehr unterschiedlich bemerkbar machen: solange sie die Grenzspannweite l_{Gr} unbeeinflußt läßt, bedeutet sie eine Leistungsreserve und wirkt wie eine erhöhte Fremdlast, sobald durch sie aber l_{Gr} kleiner wird, wirkt sie leistungsmindernd. Das typische Beispiel für eine solche Leistungsminderung ist der Kragbalken mit F = const.

Bei jedem Tragwerk dürfen bestimmte Mindestabmessungen nicht unterschritten werden, die untere Grenze der Tragwerkmasse ist deshalb technologisch bedingt. Auch das sind nicht ausgenutzte Tragwerkmassen und leistungsmäßig dementsprechend zu behandeln.

6. Die Fremdlast

Beide Anteile der Fremdlast, die nutzungsbedingte Verkehrslast p und das konstruktionsbedingte passive Gewicht g_p beeinflussen das Leistungsvermögen gleich nachteilig durch $K_L < 1{,}0$. Vor allem bei hoher Leistungsforderung muß deshalb g_p so klein wie möglich gehalten werden. g_p ist nicht immer nur Gewicht, auch die formstabilisierende Vorspannung in Seilwerken und Seilnetzen zählt dazu. Flächentragwerke nutzen die Baumasse vielfältig, sie haben daher meist ein verhältnismäßig kleines g_p, Stabtragwerke mit ihren eindimensionalen Traggliedern dagegen ein großes.

Eine zur Tragwerkmasse nicht affine Fremdlast ist leistungsmäßig über ihre beanspruchungswirksamen Hebelarme zu beurteilen. Sind sie größer als die der Tragwerkmasse, wirkt die Nichtaffinität leistungsmindernd. Nur beim Kragbalken mit einer auf die Beanspruchung abgestimmten Tragwerkmasse ist die Annahme einer Affinität keine gute erste Näherung, weil bei ihm eine konstante Fremdlast sehr leistungsmindernd ist.

7. Das Maßstabgesetz

Die Spannweitenfunktion (1) beschreibt l als absolute Größe; mit γ / β_R multipliziert enthält sie nur mehr relative Größen:

$$l \cdot \gamma / \beta_R = \gamma / \beta_R \cdot f \left(\text{Verhältniswerte für (S),(F),(M),(L)}\right) \qquad (1a).$$

Das ist das Maßstabgesetz des Leistungsvermögens. Beispiel:

$$l \frac{\gamma}{\beta_R} = 8 \frac{m_U}{\nu} \frac{d}{l} \frac{1}{1 + (g_p + p)/g_a} .$$

Die linke Seite sagt nun aus, wie weit die Reißlänge oder Zerdrückhöhe des Bezugsbaustoffs als Spannweite nutzbar ist, - über $\gamma = a\varrho$ ist der Einfluß allgemeiner Schwerkraftfelder enthalten.

Wenn die Beanspruchbarkeit ausgenutzt und damit wie die Reißlänge und Zerdrückhöhe ein Festwert ist, müssen die Maßstabsfaktoren: λ für die Spannweite, $\lambda_{d/l}$ für das Bauhöhenverhältnis und

λ_{K_L} für das Lastverhältnis die Bedingung

$$\lambda = \lambda_{d/l} \cdot \lambda_{K_L} \quad \text{oder} \quad \bar{\lambda} = \lambda / \lambda_{d/l} = \lambda_{K_L} \tag{24}$$

erfüllen. Statt λ_{K_L} interessiert λ_{g_a}, der Maßstabsfaktor für die Tragwerkmasse, der mit ihm verknüpft ist. Bei konstant bleibender Fremdlast ist dieser

$$\lambda_{g_a} = \bar{\lambda} \frac{1 - K_L}{1 - \bar{\lambda} K_L} \lesseqgtr \lambda^2 \text{ bei } K_L \lesseqgtr \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{\lambda^2 - \bar{\lambda}}{\lambda^2 - 1} \tag{25}$$

$$\lambda_{g_a} \gtreqless 0: \text{Leistungsvermögen} \begin{matrix} \text{besteht} \\ \text{versagt.} \end{matrix}$$

Bei $\lambda_{g_a} = \lambda^2$ und $\lambda_{d/l} = 1$ ist das gesamte Tragwerk affin größer geworden. K_L ist auf das Ausgangstragwerk bezogen.

Die Auswertung zeigt: Nur bei kleinen Spannweiten ist es möglich, ein Tragwerk, das sich bei einer Bauaufgabe bewährt hat, durch bloß affines Vergrößern einer größeren Aufgabe anzupassen. Bei großen Spannweiten muß stets und vor allem auch das Bauhöhen- oder Pfeilverhältnis vergrößert werden.

Das bedeutet: Große Tragwerke müssen nicht nur massiger sein als kleine, System, Form und Baustoffe sind schließlich nicht mehr frei wählbar, sondern werden eine Funktion der absoluten Größe.

(25) ist für Balken ermittelt. Die damit gewonnenen Aussagen gelten qualitativ auch für Bogen.

8. Das wirtschaftliche Leistungsvermögen

Das technische Leistungsvermögen endet mit der Grenzspannweite l_{Gr}. Tatsächlich wird ein Tragwerk aber lange vorher bedeutungslos, weil seine Wirtschaftlichkeit verlorengeht.

Aus (2) (3) folgt das aktive Gewicht, das bei gegebener Fremdlast aufzuwenden ist, um eine gegebene Spannweite zu bewältigen:

$$g_a = \frac{1}{l_{Gr}/l - 1} (g_p + p) \geq \text{technolog. } g_a \tag{26}$$

Die Tragwerkmasse, beschrieben durch g_a, wächst demnach hyperbolisch mit abnehmendem Verhältnis l_{Gr}/l oder je mehr das technische Leistungsvermögen ausgeschöpft wird. Sie wird schließlich unwirtschaftlich groß, bei $l_{Gr}/l = 1$ unendlich groß, auch wenn die Fremdlast noch so klein ist.

Ziel des Entwerfens muß es demnach sein, System und Baustoffe so zu wählen, das System so zu formen und das passive Gewicht so zu beeinflussen, daß der Abstand $l_{Gr} - l$ groß genug bleibt, um g_a vernünftig klein zu halten. Wird für ein bestimmtes Tragwerk g_a unwirtschaftlich groß, muß ein leistungsfähigeres mit größerer Grenzspannweite gewählt werden. Ausreichendes Leistungsvermögen ist dabei im gesamten Spannweitenbereich nötig.

Die Tragwerkmasse zeigt zwar, daß die wahren Leistungsgrenzen wirtschaftlich bedingt sind, doch ist das im Leichtbau sinnvolle Prinzip des minimalen Gewichts kein allgemein brauchbares Kriterium für niedrige Herstellkosten oder gar für ein wirtschaftliches Bauwerk. Dazu sind die Stoff- und Verarbeitungskosten der einzel-

nen Baustoffe viel zu unterschiedlich. Wenn z.B. im Stahlbau $g_a/(g_p + p) \leq 0{,}5$ die wirtschaftliche Grenze wäre, müßte sie im Betonbau um ein Vielfaches höher sein. Außerdem ist der Aufwand für die Stützkonstruktionen einzubeziehen, der vom einfachen Balken über den Kragbalken und Druckbogen bis zum erdverankerten Zugbogen größer und größer wird. Die Wirtschaftlichkeit eines Bauwerks ist deshalb - wenn überhaupt - nur im Einzelfall und nur als Ganzes zutreffend zu beurteilen.

SCHRIFTTUM

[1] Bomhard, H.: Ein baustatisches Verfahren zur Bestimmung der Traglasten ebener Druckbogen. IVBH - Symposium, Quebec 1974, Vorbericht S. 323-332

[2] Bomhard, H.: Versagensformen und -größen der Druck- und Zugbogen des Hallenbaus. Sicherheit von Betonbauten, Beiträge zur Arbeitstagung, Berlin 1973, Wiesbaden: Deutscher Betonverein E.V. S. 341-351

[3] König, G.: Zur Beurteilung der Sicherheit von Hängedächern aus Spannbeton, Habilitationsschrift TH Darmstadt, 1970

ZUSAMMENFASSUNG

Balken, Druckbogen und Zugbogen sind die Grundformen aller zur Bewältigung von Spannweiten geeigneten Tragwerke. Die für sie im gesamten Leistungsbereich massgebenden Spannweitenfunktionen werden angegeben und die diese bestimmenden Kenngrössen untersucht und diskutiert. Nichtlinearitäten der Baustoffe und - soweit erforderlich - auch der Geometrie werden berücksichtigt. Der Einfluss unterschiedlicher Baustoffgesetze und der Vorspannung wird studiert. Die Grenzen der Wirtschaftlichkeit und ihre Kriterien werden aufgezeigt.

SUMMARY

Beams, compression arches and tension arches are the fundamentals of all structures suitable to cope with spans. The standard span functions for the whole capacity range are specified and their characteristic values examined and discussed. Nonlinearities of building materials and - as far as necessary - of the geometry are considered. The effects of different laws of building material and of prestressing are studied. Limits of economy and their criteria are shown.

RESUME

Des poutres, des arcs de compression et des arcs de traction constituent les formes fondamentales de toutes les structures franchissant une certaine portée. Les fonctions de portées déterminantes sont indiquées, leurs valeurs caractéristiques sont examinées et commentées. Des non-linéarités des matériaux de construction et - si nécessaire - de la géométrie sont considérées. L'influence de différentes lois relatives aux matériaux de construction ainsi que de la précontrainte sont étudiées. Les limites économiques et leurs critères sont donnés.