

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 10 (1976)

**Artikel:** Die Bedeutung des Kraft- und Weggrößenverfahrens für die  
Optmierung von Tragwerken nach der Lagrange'schen  
Multiplikatorenmethode

**Autor:** Lipp, W. / Thierauf, G.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-10417>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Die Bedeutung des Kraft- und Weggrößenverfahrens für die Optimierung  
von Tragwerken nach der Lagrange'schen Multiplikatorenmethode

The role of the Force- and Displacement-Method for the Optimization  
of Structures with the Lagrangian-Multiplier-Technique

Rôle de la méthode des forces et des déformations dans l'optimisation  
des structures selon la méthode de Lagrange

W. LIPP  
Dipl. Ing.  
Universität, Gesamthochschule  
Essen, BRD

G. THIERAUF  
Prof. Dr.-Ing.  
Ruhr-Universität  
Bochum, BRD

### 1. Problemstellung

Im Konstruktiven Ingenieurbau stehen heute eine Reihe leistungsfähiger Berechnungsverfahren zur Verfügung. Das Dimensionieren von Tragwerken erfolgt dagegen durch den Ingenieur, wobei Können und Erfahrung eine wesentliche Rolle spielen. Kann man eine Gewichts- oder Kostenfunktion definieren, so läßt sich dieses Problem als Optimierungsaufgabe formulieren, die als Folge der Bemessungskriterien i.a. nichtlinear und nichtkonvex ist. Aus der Vielzahl der Lösungsverfahren zur Bestimmung eines lokalen Minimums [1] wird hier das Verfahren der Optimalitätskriterien betrachtet, das eine problemorientierte Variante der Lagrange'schen Multiplikatorenmethode darstellt.

Dem Optimierungsmodell liegt ein durch  $n$  Elemente diskretisiertes Tragwerk zugrunde. Es wird vorausgesetzt, daß für jedes Element  $i$  die Elementflexibilität  $f_i$ ) umgekehrt proportional von einer Querschnittsvariablen (Entwurfsvariable)  $\alpha_i > 0$  abhängt und daß sich das Gewicht des Tragwerkes als lineare Funktion (Zielfunktion) dieser Entwurfsvariablen darstellen läßt:

$$W = \sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n \bar{w}_i \alpha_i \quad (1)$$

Als Nebenbedingungen werden Spannungs- und Verformungsrestriktionen berücksichtigt, wobei  $\sigma_{ij}^0$  und  $\delta_{ij}^0$  die zulässige Spannung des Elementes  $i$  bzw. die zulässige Verformung in Richtung des Freiheitsgrades  $j$  infolge Lastfall 1 bedeutet. Zusätzlich kann eine Einschränkung der Variablen durch untere und obere Schranken  $\alpha_i^u$  bzw.  $\alpha_i^l$  vorgegeben werden. Damit ergibt sich folgende Optimierungsaufgabe:

$$\text{Minimiere } W = \sum_{i=1}^n \bar{w}_i \alpha_i$$

unter Berücksichtigung der Restriktionen

+) Matrizen und Spaltenvektoren werden durch Unterstrichen gekennzeichnet, ein hochgestelltes T bedeutet die Transponierte.

$$\sigma_{il} - \sigma_{il}^o \leq 0 \quad (i=1, \dots, n; l=1, \dots, p) , \quad (2)$$

$$\delta_{jl} - \delta_{jl}^o \leq 0 \quad (j=1, \dots, q; l=1, \dots, p) , \quad (3)$$

$$\alpha_i^u - \alpha_i \leq 0 \quad (i=1, \dots, n) , \quad (4)$$

$$\alpha_i - \alpha_i^o \leq 0 \quad (i=1, \dots, n) . \quad (5)$$

Es bedeutet  $q$  die Anzahl der Freiheitsgrade und  $p$  die Anzahl der Lastfälle. Die Spannungen  $\sigma$  und die Verformungen  $\delta$  sind nichtlineare Funktionen der Entwurfsvariablen  $\alpha$ , so daß die Restriktionen einen nichtkonvexen Lösungsreich beschreiben. Da die Problematik bei einem Lastfall bzw. mehreren Lastfällen dieselbe ist, wird im folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit auf den Belastungsindex 1 verzichtet.

## 2. Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen

Die Herleitung notwendiger Extremalbedingungen der nichtlinearen Optimierungsaufgabe erfolgt mit der verallgemeinerten Lagrange'schen Multiplikatorenmethode [2]. Da sämtliche Variablen  $\alpha$  nichtnegativ definiert und alle Restriktionen als Ungleichungen gegeben sind, sind diese Bedingungen hinreichend für ein lokales Minimum der Zielfunktion [3]. Bezeichnet man mit  $G_j \leq 0$  die allgemeine Form der Restriktionen (2) und (3), so lautet die Lagrange'sche Funktion:

$$J = W + \sum_{j=1}^m \lambda_j G_j + \sum_{i=1}^n \mu_i (\alpha_i^u - \alpha_i) + \sum_{i=1}^n \eta_i (\alpha_i - \alpha_i^o) . \quad (6)$$

Die Lagrange'schen Parameter  $\lambda_j$ ,  $\mu_i$  und  $\eta_i$  sind festgelegt durch:

$$\lambda_j \geq 0 , \quad \text{für } G_j \leq 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (7)$$

$$\mu_i \geq 0 , \quad \text{für } \alpha_i \leq \alpha_i^u \quad (i=1, \dots, n) \quad (8)$$

$$\eta_i \geq 0 , \quad \text{für } \alpha_i \geq \alpha_i^o \quad (i=1, \dots, n) \quad (9)$$

Als notwendige und hinreichende Bedingung für einen stationären Wert von  $W$  müssen die partiellen Ableitungen von  $J$  nach den Variablen  $\alpha$  verschwinden. Mit  $\partial(\dots)/\partial \alpha_k = (\dots)_{,k}$  erhält man:

$$W_{,k} + \sum_{j=1}^m G_{j,k} - \mu_k + \eta_k = 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (10)$$

Mit (8) und (9) folgt:

$$- \sum_{j=1}^m \lambda_j G_{j,k} \left\{ \begin{array}{l} \geq W_{,k} \\ = W_{,k} \\ \leq W_{,k} \end{array} \right. , \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_k = \alpha_k^o \\ \alpha_k^u < \alpha_k < \alpha_k^o \\ \alpha_k = \alpha_k^u \end{array} \right. \quad (11)$$

Für alle "passiven" Restriktionen  $G_j < 0$  ist nach (7) der Lagrange'sche Parameter  $\lambda_j$  gleich Null, so daß in der Optimalitätsbedingung (11) nur die "aktiven" Restriktionen  $G_j = 0$  berücksichtigt zu werden brauchen.

### 3. Rekursionsformeln zur Bestimmung der optimalen Konstruktion

#### 3.1 Aktive Verformungsrestriktionen

Einzelne Verformungsgrößen können mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte berechnet werden. Es gilt:

$$\delta_j = \sum_{i=1}^n e_{ij} = \sum_{i=1}^n s_i^T f_i \tilde{s}_i \quad (j=1, \dots, q') , \quad (12)$$

wobei  $e_{ij}$  die virtuelle Verzerrungsenergie,  $s_i$  die Schnittgrößen infolge der Belastung,  $\tilde{s}_i$  die Schnittgrößen infolge der virtuellen Einheitsbelastung in Richtung der gesuchten Verformungsgröße des Elementes  $i$  und  $q'$  die Anzahl der aktiven Verformungsrestriktionen darstellt. Als partielle Ableitung nach den Variablen  $\alpha_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) erhält man mit  $e_{kj} = \bar{e}_{kj} / \alpha_k$ :

$$G_{j,k} = -\bar{e}_{kj} / \alpha_k^2 . \quad (13)$$

Bezeichnet  $k \in N_1$  eine "aktive" Variable mit dem Wert  $\alpha_k^u < \alpha_k < \alpha_k^o$  und  $k \in N_2$  eine "passive" Variable mit  $\alpha_k = \alpha_k^u$  oder  $\alpha_k = \alpha_k^o$ , so muß für alle aktiven Variablen  $k \in N_1$  das Gleichheitszeichen in der Optimalitätsbedingung (11) erfüllt sein. Mit  $w_{j,k} = \bar{w}_k$  und (13) folgt:

$$\sum_{j=1}^{q'} \lambda_j \bar{e}_{kj} / \alpha_k^2 = \bar{w}_k \quad (\forall k \in N_1) . \quad (14)$$

Diese Gleichung stellt i.a. ein hochgradig nichtlineares Gleichungssystem mit den Unbekannten  $\lambda_j$  ( $j=1, \dots, q'$ ) und  $\alpha_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) dar, das nur iterativ gelöst werden kann. Ist nur eine einzige Verformungsrestriktion zu berücksichtigen, d.h.

$$\delta_j^o = \sum_{k \in N_1} \bar{e}_{kj} / \alpha_k + \sum_{k \in N_2} e_{kj} , \quad (15)$$

so lässt sich der Lagrange'sche Parameter  $\lambda_j$  eliminieren. Die Gleichungen (14) aufgelöst nach  $\alpha_k$  ( $k \in N_1$ ) und in (15) eingesetzt, liefert:

$$\lambda_j = \left( \frac{1}{\delta^*} \sum_{k \in N_1} \sqrt{\bar{e}_{kj} \bar{w}_k} \right)^2 \quad \text{mit } \delta^* = \delta^o - \sum_{k \in N_2} e_{kj} . \quad (16)$$

Bei mehreren aktiven Verformungsrestriktionen ist eine Bestimmung von  $\lambda_j$  ( $j=1, \dots, q'$ ) aus (14) nur dann möglich, wenn  $\bar{e}_{kj} / \alpha_k^2$  als invariant betrachtet werden. In diesem Fall stellt (14) ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem in  $\lambda$  dar:

$$\underline{G} \underline{\lambda} = \underline{E} \quad (17)$$

$$\text{mit } \underline{G} = \begin{bmatrix} \bar{e}_{kj} / \bar{w}_k & \alpha_k^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

und  $\underline{E} = \{1, \dots, 1\}$  für alle  $k \in N_1$  und  $j=1, \dots, q'$ . Mit Hilfe der ersten Gauß'schen Transformation kann eine Lösung für  $\underline{\lambda}$  gefunden werden. Es gilt:

$$\underline{\lambda} = [\underline{G}^T \underline{G}]^{-1} \underline{G}^T \underline{E} . \quad (19)$$

In Bezug auf die ursprüngliche Gleichung (17) stellt  $\underline{\lambda}$  die beste Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate dar. Mit den bekannten  $\underline{\lambda}$ -Werten und der Annahme invariante Größen  $\bar{e}_{kj}$  (bei stat. best. Systemen) entkoppelt sich das Gleichungssystem (14), so daß die aktiven Variablen  $\alpha_k$  ( $k \in N_1$ ) bestimmt werden können:

$$\alpha_k = \left( \sum_{j=1}^{q'} \lambda_j \bar{e}_{kj} / \bar{w}_k \right)^{1/2} \quad (20)$$

Bei stat. unbest. Systemen sind die Größen  $\bar{e}_{kj}$  komplizierte Funktionen von  $\underline{\alpha}$ . Da sich eine Änderung von  $\alpha_k$  in erster Linie auf die Schnittgrößen des

Elementes  $k$  auswirkt, kann (20) iterativ angewendet werden, d.h.

$$\alpha_k^{v+1} = \left( \sum_{j=1}^{q'} \lambda_j^v \frac{e_{kj}^v}{w_k} \right)^{1/2}, \quad (21)$$

wobei  $v$  den Iterationsschritt kennzeichnet und  $\lambda_j^v \ (j=1, \dots, q'_v)$  für  $q' = 1$  aus (16) bzw. für  $q' \geq 2$  aus (19) mit den Werten  $e_{kj}^v$  und  $\alpha_k^v$  berechnet wird. Da die passiven Variablen  $\alpha_k^v$  ( $k \in N_2$ ) i.a. nicht im voraus bekannt sind, muß ihre Bestimmung ebenfalls iterativ erfolgen. Dabei können die Schranken  $\underline{\alpha}_k^u$  und  $\underline{\alpha}_k^o$  durch die Bedingungsgleichungen

$$\alpha_k^{v+1} = \begin{cases} \alpha_k^o & \text{für } \alpha_k^{v+1} \geq \alpha_k^o \\ \alpha_k^{v+1} & \text{für } \underline{\alpha}_k^u < \alpha_k^{v+1} < \alpha_k^o \\ \alpha_k^u & \text{für } \alpha_k^{v+1} \leq \alpha_k^u \end{cases} \quad (22)$$

berücksichtigt werden. Alle Variablen, für die  $\alpha_k^u$  bzw.  $\alpha_k^o$  maßgebend ist, werden in der nächsten Iteration zu den passiven gezählt.

### 3.2 Aktive Spannungsrestriktionen

Sind ausschließlich Spannungsbeschränkungen vorgeschrieben, so kann die Bestimmung der Variablen  $\alpha$  nach der bekannten "stress-ratio"-Methode [4] erfolgen, in der jedes Element entsprechend seiner spannungsmäßigen Auslastung dimensioniert wird. Es gilt:

$$\alpha_k^{v+1} = \alpha_k^v \mid \sigma_k^v / \sigma_k^o \mid \quad (23)$$

wobei  $\sigma_k^v$  die maßgebende Spannung des Elementes  $k$  im  $v$ -ten Iterationsschritt bedeutet. Als Ergebnis erhält man eine sogenannte "voll-beanspruchte" Konstruktion, die in jedem Element die zulässige Spannung ausnutzt, wenn nicht der durch  $\alpha_k^u$  festgelegte minimale Querschnitt maßgebend ist.

Bei aktiven Verformungsrestriktionen können Spannungsbeschränkungen berücksichtigt werden, wenn man in jeder Iteration die nach (23) berechneten  $\alpha$ -Werte in der Bestimmungsgleichung (22) als zusätzliche untere Schranken auffaßt.

### 3.3 Konvergenz des Verfahrens

Die Anwendung der Gleichungen (16), (19), (21) bis (23) verlangt nach jeder Iteration eine vollständige Berechnung der Konstruktion. Um jeweils eine zulässige Lösung zu erhalten, werden sämtliche Variablen  $\alpha$  mit einem globalen Skalierungsfaktor multipliziert, so daß keine der Restriktionen (2) und (3) verletzt und mindestens eine identisch erfüllt wird. Danach erfolgt die Bestimmung der aktiven Verformungsrestriktionen, wobei alle Verformungen, die im Verlauf des Iterationsprozesses einmal ihren zulässigen Wert erreicht haben, weiterhin zu den aktiven gezählt werden. Ergibt sich jedoch nach (19) ein negativer  $\lambda$ -Wert so muß die entsprechende Restriktion aufgrund der Nichtnegativitätsbedingung (7) wieder eliminiert werden. Erst wenn alle aktiven Verformungen bekannt sind, ist mit einer schnellen Konvergenz zu rechnen. Das Konvergenzverhalten kann durch eine Begrenzung der Schrittweite in aufeinanderfolgenden Iterationen beeinflußt werden. Mit

$$\alpha_k^{v+1} = \alpha_k^v \quad (k=1, \dots, n)$$

ist die optimale Konstruktion gefunden, für die das Gewicht ein (lokales) Minimum annimmt.

#### 4. Die Bedeutung des Kraft- und Weggrößenverfahrens

Bisher wurde nur das Iterationsverfahren zur Lösung der Optimierungsaufgabe betrachtet. Über die Lagrange'schen Parameter  $\lambda$  bei mehreren aktiven Restriktionen wurde im Sinne der kleinsten Quadrate verfügt. Im Vergleich mit anderen Verfahren [4] ergibt sich hierdurch ein stabiles Konvergenzverhalten bei nur wenigen Iterationsschritten. Die wiederholte Berechnung des Tragwerkes nach der Finiten-Elementmethode erfordert bei den vorliegenden Problemen einen erheblichen Rechenaufwand und verdient damit besondere Beachtung. Ohne auf die Möglichkeiten der Ableitung von Elementmatrizen [5] einzugehen, werden hier nur die Lösungsverfahren betrachtet. Diese Verfahren folgen direkt aus den klassischen Minimalprinzipien elastischer Tragwerke.

Das Prinzip vom Minimum der Potentiellen Energie

$$\text{Min} \left\{ \frac{1}{2} \underline{\delta}^T \underline{K} \underline{\delta} - \underline{P}^T \underline{\delta} \right\}, \quad (24)$$

mit der positiv definiten Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}$ , den Lasten  $\underline{P}$  und den Verschiebungen  $\underline{\delta}$ , liefert als notwendige und hinreichende Bedingung die Grundgleichung der Verschiebungsmethode:

$$\underline{K} \underline{\delta} = \underline{P}. \quad (25)$$

Das Prinzip vom Minimum der Komplementärenenergie

$$\text{Min} \left\{ \frac{1}{2} \underline{S}^T \underline{f} \underline{S} \mid \underline{N} \underline{S} = \underline{P} \right\}, \quad (26)$$

mit der Hyperdiagonalmatrix  $\underline{f}$  der Elementflexibilitätsmatrizen, den verallgemeinerten Spannungen  $\underline{S}$  und der Gleichgewichtsmatrix  $\underline{N}$  ergibt die Grundgleichungen der Kraftmethode:

$$\begin{aligned} \underline{N} \underline{S} &= \underline{P} && \text{(Gleichgewicht)}, \\ \underline{B}_x^T \underline{f} \underline{S} &= 0 && \text{(Verträglichkeit)}. \end{aligned} \quad (27)$$

$\underline{B}_x^T$  ist der Kern der Gleichgewichtsmatrix ( $\underline{N} \underline{B}_x^T = 0$ ).

Den geringsten Aufwand für die einmalige Berechnung eines Tragwerkes erfordert im allgemeinen die Verschiebungsmethode: Der einfache Aufbau, die positive Definitheit und Bandstruktur der  $q \times q$  Matrix  $\underline{K}$  erleichtert die Berechnung. Bei einer mehrmaligen Berechnung des Tragwerkes mit variabler Flexibilität  $\underline{f}$  zeigt jedoch die Kraftmethode gewisse Vorteile: Die  $q$  Gleichgewichtsgleichungen (27) müssen nur einmalig gelöst werden, die Verträglichkeitsbedingungen lassen sich einfacher darstellen und mit geringerem Aufwand für jede Wiederbemessung lösen. Als Lösung erhält man die  $n$  Schnittgrößen  $\underline{S}_i$  zur Iteration nach (12). Mit dem in [6] näher beschriebenen Lösungsverfahren kann zudem die Bandstruktur der Gleichgewichtsgleichungen gewahrt werden. Ein genauer Vergleich des numerischen Aufwandes beider Methoden führte zu dem Ergebnis, daß mit steigender Zahl der Wiederbemessungen der Aufwand  $A_F$  der Kraftmethode abnimmt. Das Verhältnis des Aufwandes  $A_D$  der Verschiebungsmethode zur Kraftmethode nimmt jedoch bei wachsendem  $n/q$  ab. In den für die Praxis wichtigen Stabtragwerken ist jedoch i.a.  $n/q < 2$ . Für ein System mit 1000 Freiheitsgraden der Verschiebung und einem speziellen Elementtyp (s) ergibt sich die in Bild 1 dargestellte Abhängigkeit [6].

Umfangreiche numerische Untersuchungen [7] an den aus der Literatur bekannten optimalen Tragwerken bestätigen in allen Fällen die Überlegenheit der Kraftmethode.

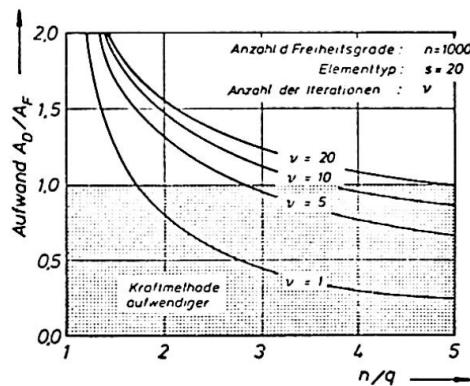


Bild 1: Vergleich der Kraft- und Verschiebungsmethode

Lastfall	Knoten ( $P_z = 1000$ lbs)
1	1
2	1-4, 7-13, 19-28, 37
3	1-37
4	1, 4-7, 13-19, 28-37

Tabelle 1: Belastungsangaben

## 5. Numerische Ergebnisse

Die Zuverlässigkeit des Optimierungsverfahrens soll hier an einem ausgewählten Beispiel gezeigt werden. Die in Bild 2 dargestellte Fachwerkkuppel, die in den Knoten 38 - 61 unverschieblich gelagert ist, wird durch vier Lastfälle beansprucht. Die genauen Belastungsangaben sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Als Material wird Aluminium mit einem Elastizitätsmodul von  $E = 10^7$  psi und dem spezifischen Gewicht von  $\rho = 0.1$  lbs/in<sup>3</sup> verwendet. Für alle Stäbe beträgt der minimale Querschnitt 0.1 in<sup>2</sup>, wobei die zulässige Spannung von  $\pm 25000$  psi nicht überschritten werden darf. Die Verschiebungen sämtlicher Freiheitsgrade in z-Richtung werden auf  $\pm 0.1$  in. begrenzt. Alle Entwurfsbedingungen sind mit denen aus [8] identisch.

Ausgehend von einer zulässigen Konstruktion mit querschnittsgleichen Stäben ( $W_1 = 358.85$  lbs) wird die optimale Kuppel nach 15 Iterationen und einem Gewicht

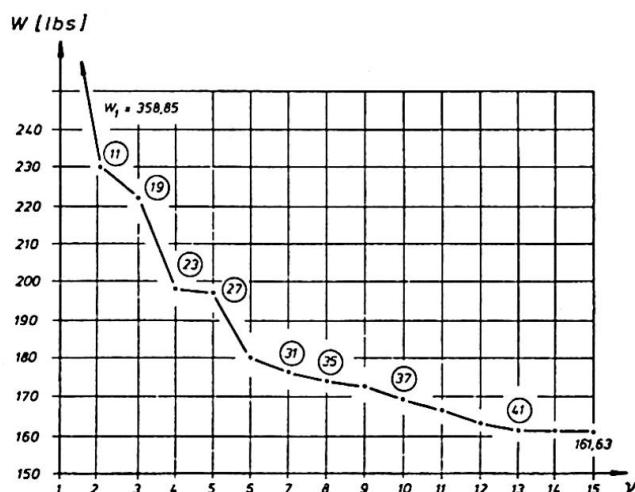


Bild 3: Iterationsverlauf

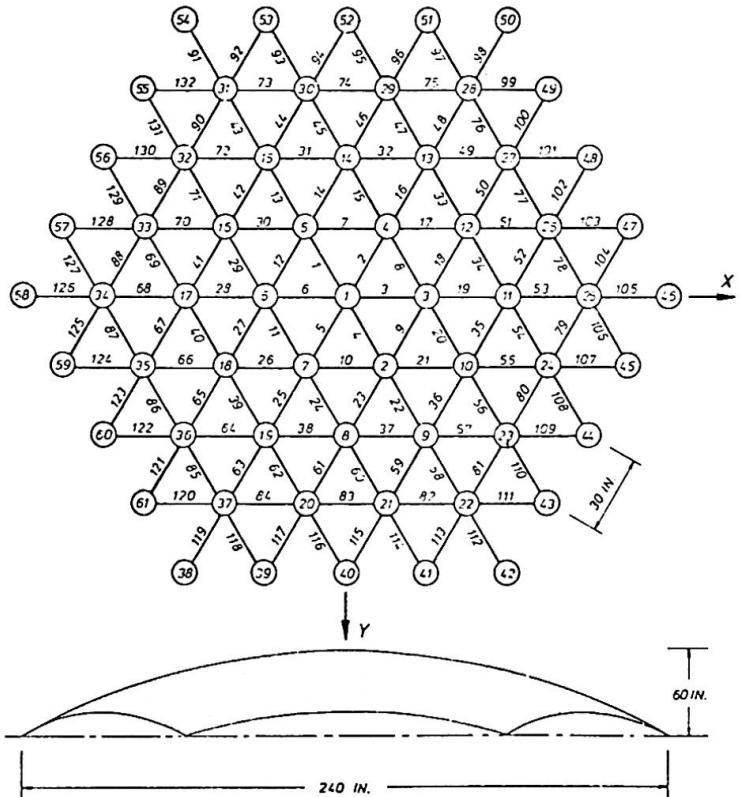


Bild 2: Fachwerkkuppel

von 161,63 lbs gefunden, das um 10,7% geringer ist als in [8]. Während zu Beginn der Optimierung nur die Verschiebung von Knoten 1 (LF 1) den maximal erlaubten Wert von -0,1 in. erreicht, sind von der 13. Iteration an 41 Verformungsrestriktionen zu berücksichtigen, die jeweils durch einen der 4 Lastfälle aktiviert wurden. Spannungen waren in keiner Phase des Iterationsprozesses maßgebend. Bild 3 zeigt das stabile Konvergenzverhalten, wobei insgesamt eine Gewichtsreduktion von 55% erreicht wird. Die Querschnittsflächen der optimalen Kuppel, die symmetrisch zu den beiden Achsen 38-50 und 44-56 ausgebildet

ist, sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Bei  $n/q=1.19$  konnte die Kraftmethode äußerst wirtschaftlich eingesetzt werden. Die Rechenzeit (TR 440) betrug nur 182 sec.

Stab	Fläche	Stab	Fläche	Stab	Fläche	Stab	Fläche
4	1.0176	36	0.4831	62	0.3177	111	0.1003
5	1.1732	37	0.3051	63	0.6572	112	0.2403
9	0.9720	38	0.3514	80	0.3062	113	0.3088
10	0.8322	56	0.3207	81	0.2128	114	0.1429
21	0.2990	57	0.1904	82	0.1003	115	0.5000
22	0.3395	58	0.3378	83	0.1003	116	0.1003
23	0.5773	59	0.3431	84	0.3347	117	0.4381
24	0.4148	60	0.29 6	109	0.1003	118	0.3312
25	0.6776	61	0.5494	110	0.4961	119	0.1003

Tabelle 2: Optimale Querschnittsflächen (in<sup>2</sup>) eines Quadranten

#### Literaturangaben

- [1] Numerical Methods for Non-linear Optimization. Edited by F.A. Lootsma, Academic Press, London 1972.
- [2] Künzi, H.P./ Krelle, W.: Nichtlineare Programmierung, Springer, Berlin 1962.
- [3] Hadley, G.: Nonlinear and Dynamik Programming, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1964.
- [4] Gellatly, R.A. / Berke, L.: Optimal Structural Design. AFFDL-TR-70-165, Ohio 1971.
- [5] Robinson, J.: Integrated Theory of Finite Element Methods, Wiley & Sons, London 1973.
- [6] Thierauf, G. / Topcu, A.: Structural Optimization using the Force Method. World Congress on Finite Element Methods in Structural Mechanics, Bournemouth, England, Oct. 1975.
- [7] Lipp, W.: Ein Verfahren zur optimalen Dimensionierung allgemeiner Fachwerkstrukturen und ebener Rahmentragwerke. Dissertation, Ruhr-Universität, Bochum 1976.
- [8] Venkayya, V.B. / Khot, N.S. / Reddy, V.S.: Energy Distribution in an Optimum Structural Design, AFFDL-TR-68-156, Ohio 1969.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine spezielle Anwendung der Lagrange'schen Multiplikatoren-methode, die als Verfahren der Optimalitätskriterien bekannt wurde, dargestellt. Eine lineare Transformation der Lagrange-Parameter führt zu einer schnellen und gleichmässigen Konvergenz.

#### SUMMARY

A special application of the Lagrangian-Multiplier-Technique, known as the optimality-criterion-method, is presented. A simple linear transformation of the Lagrange parameters leads to fast and uniform convergence.

#### RESUME

Une application spéciale de la technique des multiplicateurs de Lagrange, dite méthode des critères d'optimisation est présentée. Une transformation linéaire entraîne une convergence rapide et uniforme.

**Leere Seite**  
**Blank page**  
**Page vide**