

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 9 (1972)

**Rubrik:** Theme Ia: Plasticity and viscosity

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**L'influence de la plasticité et de la viscosité sur la résistance et la déformation des constructions**

Der Einfluss der Plastizität und der Viskosität auf die Traglast und die Verformung von Tragwerken

The Influence of Plasticity and Viscosity on the Strength and Deformation of Structures

**M. SAVE**

Professeur à la Faculté Polytechnique  
de Mons

**CH. MASSONNET**

Professeur à l'Université  
de Liège

1. INTRODUCTION.

1.1. Contenu du rapport.

Le thème décrit par le titre ci-dessus est extrêmement vaste. Il a fait l'objet, dans les quarante dernières années, de travaux de recherche innombrables et de dizaines de livres.

Dans le présent rapport, nous nous limiterons à deux matériaux : l'acier, considéré comme un matériau élasto-plastique, et le béton considéré comme un matériau visco-élasto-plastique aux caractéristiques dépendant de l'âge, tous deux à la température ambiante. Nous nous intéresserons aux doctrines de calcul inélastique des structures formées de ces deux matériaux. Nous rappellerons les éléments essentiels de ces doctrines dans leur état actuel, nous soulignerons les points délicats ou non résolus et nous tenterons de dégager les voies de recherche les plus intéressantes. L'historique et les exposés détaillés de ces méthodes de calcul pourront être trouvés dans les textes de références.

Afin d'éviter toute duplication avec les travaux du Colloque de Madrid de septembre 1970 sur l'influence du fluage et du retrait sur les constructions en béton, nous nous contenterons d'évoquer les applications essentielles du modèle visco-élastique linéaire.

1.2. Le modèle parfaitement plastique.

La Mécanique des Solides déformables schématise les corps réels en des modèles mécaniques pour lesquels elle construit des théories mathématiques rigoureuses.

En théorie des structures, le modèle parfaitement plastique est apparu avec les travaux de G. de Kazinczy [1], en 1914, et de N.C. Kist [2], en 1917, sur les poutres fléchies. Il comporte les hypothèses suivantes :

- 1. le moment fléchissant dans une section droite ne peut dépasser un seuil, appelé moment plastique ( $M_p$  en flexion positive,  $M'_p$  en flexion négative) indépendant de la déformation subie par cette section (plasticité parfaite).

-2. quand ce seuil est atteint, les parties adjacentes à la section droite peuvent subir une rotation relative permanente arbitraire sous moment constant (plasticité parfaite), cette rotation ayant obligatoirement le même signe que le moment fléchissant (loi d'écoulement). On dit qu'il s'est formé une "rotule plastique dans la section".

Sous un système de charges dont toutes les grandeurs sont proportionnelles à un seul paramètre scalaire  $P$ , une structure formée de poutres fléchies parfaitement plastique possède une "charge limite"  $P_\ell$ , valeur du paramètre de charge à laquelle elle se transforme, par formation d'un nombre suffisant de rotules plastiques, en un mécanisme cinématiquement déformable, sous charge constante  $P_\ell$  tant que le changement de forme produit par le mécanisme reste négligeable.

Dans l'état limite qui vient d'être décrit, le champ des moments fléchissants satisfait aux conditions d'équilibre et ne viole pas la condition de plasticité :

$$-M'_p \leq M \leq M_p \quad (1)$$

Tout champ de moments ayant en commun avec le champ à l'état limite de satisfaire aux conditions d'équilibre et à la condition de plasticité (1) est dit "statiquement admissible". Si son paramètre de charge est appelé  $P_-$ , le premier théorème fondamental de l'analyse limite, dit théorème statique (ou de la borne inférieure) nous apprend que : [3] [4] [5] [6]

$$P_- \leq P_\ell \quad (2)$$

Dans l'état limite, le mécanisme fait produire aux charges appliquées une puissance positive  $P_e$ .

Si le mécanisme comporte  $n$  rotules positives de vitesse de rotation  $\dot{\theta}_i$  et  $m$  rotules négatives de vitesse de rotation  $\dot{\theta}_j$ , la puissance dissipée dans les rotules est

$$D = \sum_{i=1}^n M_{pi} \dot{\theta}_i + \sum_{j=1}^m M'_{pj} |\dot{\theta}_j| \quad (3)$$

La conservation de l'énergie impose :

$$P_e = D \quad (4)$$

équation qui fournit  $P_\ell$ .

Tout mécanisme ayant en commun avec le mécanisme de l'état limite de fournir une puissance positive  $P_e$  est dit cinématiquement admissible. Si on appelle  $P_+$  son paramètre de charge calculé par l'équation de puissance (4), le second théorème fondamental de l'analyse limite, dit théorème cinématique (ou de la borne supérieure) nous apprend que [3], [4], [5], [6]

$$P_\ell \leq P_+ \quad (5)$$

Quand  $P_- = P_+$ , on a, d'après (2) et (5),

$$P_- = P_\ell = P_+ \quad (6)$$

(théorème combiné).

Cette situation se présente quand le champ de moments statiquement admissible et le mécanisme cinématiquement admissible se correspondent par la loi d'écoulement :  $\text{signe } \dot{\theta}_i = \text{signe } M_i$  en toute rotule  $i$ . On a alors une solution complète.

La théorie qui vient d'être esquissée s'étend facilement aux structures plus complexes comportant plusieurs variables statiques  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) : poutres simultanément fléchies, tendues (ou comprimées) et tordues, plaques, coques [7], [8]. Un élément de structure possède une condition d'écoulement représentée dans l'espace des forces internes  $Q_i$  par une surface d'écoulement fixe et convexe vers les axes positifs. Tout champ de sollicitations internes en équilibre et représenté par des points à l'intérieur de la surface ou sur celle-ci est statiquement admissible. Il fournit une approximation  $P_-$  de la charge limite.

Si on superpose à l'espace des  $Q_i$  l'espace des vitesses de déformation correspondantes  $\dot{q}_i$  (si  $Q_1$  est par exemple un moment,  $\dot{q}_1$  est une vitesse de courbure,  $Q_2$  un effort normal,  $\dot{q}_2$  une vitesse d'extension ou de contraction, etc...), la loi d'écoulement s'exprime par la normalité du vecteur de composantes  $\dot{q}_i$  à la surface d'écoulement au point de contraintes de composantes  $Q_i$ , situé sur la surface.

Un mécanisme cinématiquement admissible est maintenant décrit par un champ de vitesses de déplacement, dont dérivent les champs des  $\dot{q}_i$  à l'aide desquels on peut, par la loi de normalité, calculer la dissipation. En égalant la dissipation à la puissance, positive, des forces appliquées, on obtient une approximation  $P_+$  de la charge limite.

Cette théorie s'applique également lorsque les charges se divisent en un système de charges permanentes données, incapables à elles seules de produire la ruine par mécanisme, et en un système de surcharges à un paramètre  $P_s$  [3] [7]. La charge limite est alors la valeur limite  $P_{s,\ell}$  de  $P_s$  telle que l'ensemble des charges conduise à l'état limite. On a

$$P_{s,-} \leq P_{s,\ell} \leq P_{s,+} \quad (7)$$

où  $P_{s,-}$  et  $P_{s,+}$  sont, une fois associés aux charges permanentes, fournis respectivement par les méthodes statique et cinématique. On peut ainsi suivre d'assez près les recommandations du C.E.B. [9] et de la C.E.A.C.M. en utilisant une limite d'écoulement "de calcul" déduite d'une limite d'écoulement caractéristique tenant compte de la dispersion dans les limites d'écoulement mesurées, et deux coefficients de majoration des charges, l'un  $\gamma_p$  sur les charges permanentes et l'autre  $\gamma_s$  sur les surcharges. La valeur de  $P_{\gamma}$  étant fixée, il faut s'assurer que, à l'état limite de ruine par mécanisme,  $\gamma_s P_{s,\ell}$  est supérieur à la valeur imposée. Parallèlement à cette façon pratique d'évaluer la sécurité, on peut envisager de considérer certaines variables comme aléatoires (la limite élastique de certaines barres par exemple) de distributions connues, et rechercher la distribution correspondante de  $P_{s,\ell}$ . Il s'agit là d'un problème de programmation stochastique [10].

Si l'on fait un dimensionnement (et non une analyse) il est possible d'assurer une charge limite minima  $P_{s,\ell}$  imposée tout en optimisant la structure.

Dans cet ordre d'idées, la théorie du dimensionnement plastique de poids minimum peut actuellement fournir un grand nombre de solutions, tant analytiques que mécaniques, de problèmes d'ossatures, de plaques et même de coques, soumises à des charges fixes ainsi qu'à des charges déplaçables [11].

Jusqu'à présent, nous ne nous sommes pas préoccupés du comportement de l'élément de structure avant son écoulement plastique, à la seule réserve près que la structure doit rester, juste avant la ruine, assez peu déformée que pour pouvoir être étudiée dans sa géométrie initiale. Si maintenant nous supposons que l'élément de structure est élastique linéaire jusqu'à son écoulement plastique, nous pouvons étudier pas à pas le comportement de la structure en tenant compte, si nécessaire, de l'influence des déformations élasto-plastiques sur les effets des forces. Nous obtenons ainsi la force portante de la structure, à partir de laquelle les déplacements croissent sous charge décroissante [6],[7].

Le comportement post-limite décrit par la forme de la courbe liant le paramètre de charge  $P$  à un déplacement caractéristique  $\delta$  après formation du mécanisme de ruine est très important à connaître. Selon que cette courbe est descendante ou montante, la charge de ruine par mécanisme est une charge d'écoulement ou bien seulement la charge à partir de laquelle l'accroissement de force portante de la structure ne peut se produire qu'au prix de grandes déformations permanentes. Cette étude peut se faire à l'aide du modèle rigide - parfaitement plastique.

Tous les problèmes évoqués ci-dessus peuvent être traités par des méthodes de calcul qui sont actuellement bien établies [6],[7].

Il est très important de faire remarquer ici que, sur la base des théorèmes fondamentaux, l'analyse limite plastique peut se formuler comme un problème de programmation linéaire [6].

Tous les résultats de la programmation mathématique et tous ses algorithmes de calcul lui sont donc applicables. Il en est de même pour le dimensionnement de poids minimum [6]. De nombreux problèmes spécifiques ont déjà été résolus de cette manière.

Avec l'augmentation de puissance des ordinateurs, la méthode basée sur la programmation linéaire [11, 6] semble avoir pris le pas, en rendement-machine, sur les méthodes spéciales développées antérieurement par Heyman [12, 6] et par Prager - Heyman [13, 6] et programmées par Kalker [14]. Par ailleurs, la meilleure méthode manuelle d'étude des ossatures semble rester celle par combinaison de mécanismes simples, due à Neal et Symonds [15, 6] et basée sur le théorème cinématique.

Un essai de programmation de cette méthode sur ordinateur, dû à Cohn et Grierson [16], a conduit à un programme nommé COMECH, qui effectue toutes les combinaisons de mécanismes à un degré de liberté et se révèle par conséquent comme assez inefficace dès que le degré d'hyperstaticité de la structure devient important.

Dans un travail non publié communiqué à l'un des auteurs du présent rapport, Mr. Jubete Portilla a trouvé une méthode permettant de sélectionner automatiquement les mécanismes combinés de manière à augmenter le moment plastique (dans le problème de dimensionnement restreint). Cette méthode devrait pouvoir conduire à un dimensionnement efficace sur ordinateur.

1.3. Le modèle viscoélastique linéaire.

Les recherches expérimentales de Glanville [17] et Davis [18] ont montré que le béton de ciment est essentiellement un matériau viscoélastique linéaire, c'est-à-dire que, toutes choses égales d'ailleurs, la déformation de fluage est proportionnelle, à la contrainte appliquée. Il en résulte qu'on peut appliquer le principe de superposition de Boltzmann, selon lequel il est permis de superposer les effets de fluage provenant de plusieurs états de contrainte, en considérant la durée de leur application et la date de leur début d'application.

Depuis ces recherches fondamentales, le fluage et le retrait du béton - qui sont indissociables - ont été l'objet de recherches expérimentales très nombreuses (cf. par exemple les publications du C.E.B. et Kesler [19]), qui ont permis de mettre en évidence les principaux paramètres qui contrôlent ces phénomènes. Il est clair aujourd'hui que la déformation de fluage est une fonction complexe non seulement de la composition du béton considéré, mais encore de la forme de l'élément étudié de ses dimensions absolues, de son pourcentage d'armatures, des variations du degré hygrométrique de l'atmosphère dans laquelle l'élément est plongé. Il n'est pas possible actuellement de prédire avec précision les propriétés de fluage d'un élément à partir des données ci-dessus.

D'autre part, on peut dire que l'analyse théorique des corps viscoélastiques linéaires a fait, dans ces vingt dernières années, des progrès immenses. Le modèle mécanique généralement admis pour ces corps est une combinaison de ressorts et de dash-pots linéaires. On peut montrer [20, 21] que, quel que soit le nombre de ses éléments, le modèle obéit en traction simple à la loi :

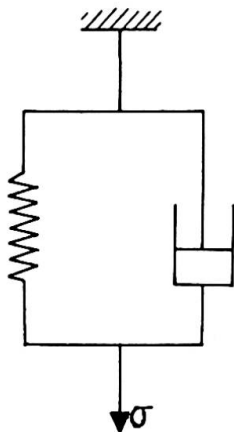
$$P\sigma = Q\epsilon \tag{8}$$

où P et Q sont les opérateurs différentiels linéaires :

$$P = \sum_0^m p_K \frac{d^K}{dt^K}, \quad Q = \sum_0^n q_K \frac{d^K}{dt^K} \tag{9}$$

Souvent, on considère comme suffisant le modèle de Kelvin (fig. 1) qui obéit à l'équation :

$$\sigma = E\epsilon + \mu\dot{\epsilon} \tag{10}$$



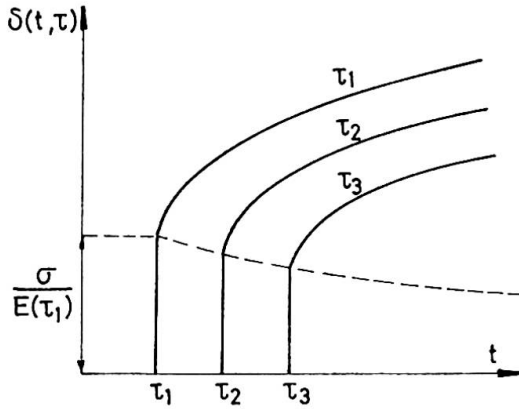
Une autre technique d'analyse est celle basée sur les intégrales héréditaires de Volterra. Elle a l'avantage de mieux se prêter à la représentation d'un matériau dont les propriétés dépendent de l'âge. On y admet que le béton simple sollicité par une contrainte de compression constante  $\sigma$  à partir du temps  $\tau$  (appelé âge du béton) présente au temps  $t > \tau$  la dilatation totale (élastique plus de fluage)

$$\epsilon = \sigma \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] = \sigma \delta(t, \tau) \tag{11}$$

Fig. 1. qui est linéaire en  $\sigma$ .

La plupart des auteurs admettent que la fonction C (t,  $\tau$ ) peut s'écrire :

$$C(t, \tau) = f(\tau) C(t - \tau)$$



Dans ce cas, les parties courbes de la figure 2 sont semblables de forme. Si la contrainte varie suivant la loi connue  $\sigma = \sigma(\tau)$ , on admet avec Boltzmann que la dilatation totale  $\bar{\epsilon}$  est donnée à un instant  $t$  quelconque par la formule

$$\epsilon = \sigma(\tau_1) \delta(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \delta(t, \tau) d\tau \quad (12)$$

- Fig. 2.-

analyser les effets viscoélastiques dans les coques et dans d'autres pièces à trois dimensions, on doit tenir compte du fait que les déformations de fluage en dilatation sont beaucoup moindres en dilatation qu'en distorsion; on doit alors décomposer le tenseur contrainte  $\bar{\sigma}$  en chaque point en sa composante sphérique

$$s = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad \text{avec } s = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

et son déviateur

$$S = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_z \end{bmatrix}$$

avec  $s_x = \sigma_x - s$ , etc...,  $s_{xy} = \tau_{xy}$ , etc...

De même, on doit décomposer le tenseur déformation  $\epsilon$  en sa composante sphérique représentant une dilatation pure

$$e = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \quad \text{avec } e = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

et sa distorsion

$$E = \begin{bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_z \end{bmatrix}$$

avec  $e_x = \epsilon_x - e$ , etc...,  $e_{xy} = \epsilon_{xy}$ , etc...

Les lois fondamentales les plus générales du corps viscoélastique linéaires s'écrivent alors

$$\begin{cases} P''s = Q'e \\ P'S = Q'E \end{cases} \quad (13)$$

où  $P'$ ,  $P''$ ,  $Q'$ ,  $Q''$  sont quatre opérateurs différentiels linéaires différents analogues à  $P$  et  $Q$ .

Une littérature extrêmement abondante, basée sur les lois [8] ou [13] et employant comme outil mathématique essentiel la transformation de Laplace, s'est développée ces vingt dernières années. Cette littérature étant largement ignorée des ingénieurs des constructions, il vaut la peine de citer les quelques synthèses de ces travaux qui sont suffisamment complètes et en même temps relativement faciles à lire.

Pour les corps dont les propriétés ne dépendent pas de l'âge, on recommande le chapitre (Viscoelasticity) rédigé par E. H. LEE, dans le Handbook of Engineering Mechanics édité par le Professeur W. Flugge [22] ainsi que l'excellent livre de Flugge intitulé "Viscoelasticity". Ces deux ouvrages ont peut-être plus en vue l'application aux matières plastiques qu'au béton de ciment. Par contre, le livre d'Aroutiounian [23] basé sur l'emploi des intégrales héréditaires, envisage particulièrement l'effet de l'âge du matériau et l'application au béton. Il n'existe pas, en viscoélasticité, de théorèmes généraux équivalents aux deux principes fondamentaux de l'analyse limite (cf. § 1.2.). Néanmoins, on peut mettre en évidence les deux principes de correspondance qui donnent la solution d'une classe restreinte de problèmes pratiques. Ces principes ont été découverts par T. Alfrey [24] et D. Mc. Henry [25], en se basant d'ailleurs sur des lois de viscoélasticité légèrement différentes. Le livre de Levi et Pizzetti, paru en 1951 [28] où ces principes portent le nom de théorèmes d'isomorphisme, a contribué à les clarifier et à les diffuser. On donne ci-après les énoncés de ces principes pour le cas d'ossatures faites de barres soumises à flexion composée, d'après [21] :

#### Premier principe de correspondance.

Si l'on applique à une structure viscoélastique linéaire une mise en charge simple dans laquelle toutes les forces extérieures varient en fonction du temps suivant la même loi  $L(t)$ , les contraintes en tout point et les réactions hyperstatiques éventuelles évoluent suivant la même loi et sont à tout moment égales à celles qui naîtraient, sous l'action des mêmes forces, dans la structure correspondante, parfaitement élastique. Les déplacements et déformations évoluent tous proportionnellement suivant la loi  $y(t)$  identique à la loi d'allongement par fluage d'un barreau tendu sollicité par l'effort de traction  $L(t)$ .

Cas particulier important : Dans le cas simple où l'on applique brusquement au temps  $\tau$  des forces de volume et de surface que l'on maintient ensuite constantes, les contraintes dans la structure viscoélastiques prennent une valeur constante. Par ailleurs, le déplacement d'un point quelconque varie en fonction du temps suivant la loi du fluage en traction.

#### Deuxième principe de correspondance.

Si l'on donne à une structure viscoélastique linéaire non chargée certains déplacements qui évoluent tous proportionnellement en fonction du temps suivant la loi  $L(t)$  (avec  $L(\tau) = 1$ ), les déplacements et dilatations de tous les points de la structure évoluent suivant la même loi et sont, à l'instant  $t = \tau$ , identiques à ceux qui naîtraient sous l'effet des déplacements imposés dans la structure correspondante parfaitement élastique du module d'élasticité  $E(\tau)$ . Quant aux contraintes et réactions hyperstatiques, elles sont à tout moment proportionnelles à celles qui existeraient dans la structure parfaitement élastique. Le coefficient de proportionnalité est l'effort de traction  $g(t)$  nécessaire pour soumettre un barreau du matériau viscoélastique à un allongement imposé  $\delta = L(t)$ .

Remarque : L'énoncé général ci-dessus s'applique également au cas où la structure subit une variation thermique ou un retrait dont la loi dans le temps est connue, car on peut aisément calculer les déplacements d'appui équivalents à ces phénomènes. On voit, par conséquent, que les effets défavorables du retrait et du tassement d'appui accidentels dans des constructions en béton sont considérablement atténués par le fluage du béton.

Cas particulier important : Dans le cas simple où l'on donne brusquement, à l'instant  $\tau$ , des déplacements d'appui connus à une structure viscoélastique non chargée, cette structure prend brusquement une déformation fixe. Les contraintes en tout point et les réactions hyperstatiques éventuelles prennent brusquement les valeurs qui correspondent à la structure parfaitement élastique de référence et décroissent ensuite au fil du temps selon la loi de relaxation valable en traction simple.

$$\begin{array}{c} x \\ x \quad x \end{array}$$

Pour la généralisation de ces principes aux corps continus gouvernés simultanément par les deux lois de fluage [13], nous renvoyons à la littérature (cf. par ex. [20]).

La grande importance des principes de correspondance résulte du fait qu'ils permettent une appréciation plus réaliste de l'effet sur les structures en béton des tassements d'appui, variations thermiques, etc...

Il est clair que de nombreux problèmes relatifs à l'effet du fluage sur les constructions en béton ne peuvent se réduire à l'emploi pur et simple des principes de correspondance. En employant des méthodes pas à pas, on peut écrire des programmes pour ordinateurs qui résolvent les problèmes les plus complexes. Zienkiewicz [26] a montré comment, par la technique des éléments finis, on peut ainsi aborder des problèmes de pièces planes, plaques fléchies, et même des pièces des formes les plus complexes telles que barrages-voûtes et les enveloppes de réacteurs nucléaires en béton précontraint. On peut donc affirmer qu'à l'heure actuelle, en y mettant le prix en programmation et consommation d'heures ordinateurs, on peut résoudre à peu près n'importe quel problème dès que les lois fondamentales ont été formulées. On ne saurait cependant mettre trop les ingénieurs en garde contre le caractère illusoire des résultats de calculs complexes, basés sur des méthodes mathématiques correctes, mais dont les équations de départ (c'est-à-dire les équations constitutives du matériau) représentent mal le comportement physique du matériau.

## 2. STRUCTURES EN ACIER.

### 2.1. Ossatures.

L'analyse limite plastique décrite en 1.2. suppose que ni la faiblesse des assemblages ni l'instabilité élastique ou élasto-plastique des éléments de la structure ne viennent limiter la force portante à une valeur inférieure à  $P_0$ . Les règles à suivre pour qu'il en soit ainsi ont été établies à la suite de très importants travaux sur ces sujets, surtout entre 1945 et 1965 [29] ..

On dispose donc actuellement d'une doctrine pratiquement achevée pour les structures en acier, sanctionnée par plusieurs normes [30] [31] [32] et permettant l'établissement des projets jusque dans leurs détails [6] , [33] [34] . Elle s'applique au moins aux deux principaux aciers de construction (A 37 et A 52), qui possèdent un palier d'étirage suffisant.

Quand certains éléments de la structure ne peuvent être considérés sans danger comme parfaitement plastiques (cordons de soudure ou boulons d'un assemblage) on est conduit à n'admettre qu'une redistribution limitée des sollicitations internes entre ces éléments, selon des règles qui restent encore à perfectionner [35].

Sous chargement statique à un paramètre, une ossature métallique correctement dimensionnée par le calcul plastique ne présentera une rupture qu'après très grandes déformations, loin au delà de la formation du mécanisme. Au contraire, si les charges varient indépendamment entre des bornes, on peut craindre une accumulation des déformations plastiques ou même une rupture par épuisement de la ductilité. Le calcul de la charge de stabilisation (shake-down load), prescrit par certaines normes [32], n'est alors même pas suffisant car il faudrait savoir au prix de quelle déformation permanente elle est obtenue. Par contre, dans des cas où le nombre de cycles de chargement prévu est faible, et certaines déformations permanentes permises, une charge de non stabilisation pourrait être prise comme limite. On est ici à la frontière du problème de la fatigue plastique des structures, où presque tout reste à faire.

Le calcul des ossatures en acier à l'état limite plastique apparaît ainsi comme encore perfectible dans certains points de détail et demandant un développement vers le calcul à la fatigue plastique. Il n'en reste pas moins qu'il constitue, dans le cadre où il est applicable, une méthode en bon accord avec les faits expérimentaux, suffisamment simple à employer, et plus réaliste que le calcul élastique qui se réfère à un état limite (de première plastification) dénué de sens physique réel et généralement hors d'atteinte du calcul (présence de contraintes initiales de laminage, soudage, etc...).

Le calcul plastique permet d'uniformiser la sécurité des structures isostatiques et hyperstatiques vis-à-vis d'un état limite réel (ruine par mécanisme). Pourtant, il conduit en général à un dimensionnement plus économique des structures hyperstatiques formées de barres laminées. Il exploite en effet la possibilité de redistribution des moments lors d'une surcharge, qu'entraîne une pré-contrainte automatique après déchargement subséquent. Son influence croissante marque même les normes de nombreux pays [36] où il n'est même pas encore totalement accepté. Son application tend aussi à s'étendre à de plus nombreux types de structures et en particulier aux ossatures à étages multiples.

Plusieurs normes [30] [31] [32] admettent le calcul plastique des ossatures contreventées, quel que soit le nombre d'étages. Pour les ossatures non contreventées, la prise en compte des phénomènes du second ordre (effet P,  $\delta$ ) qui amènent l'instabilité élastoplastique d'ensemble avant la production de toutes les rotules de la théorie plastique simple, fait que le dimensionnement de ces ossatures n'est pas encore entré dans les Normes. Il permet une recherche directe de la structure de poids minimum [6], éventuellement par programmation linéaire. Il s'inscrit dans le cadre d'une doctrine générale de calcul des constructions métalliques vis-à-vis des différents états limites que ces constructions peuvent présenter [9].

## 2.2. Plaques et coques.

Le calcul à l'état limite plastique de flexion des plaques en acier est très développé [7] [60]; cependant il n'a de sens physique que pour des plaques relativement épaisses. Si  $\mu$  est la minceur de la plaque, rapport de la "portée caractéristique" (diamètre d'une plaque circulaire, petit côté d'une plaque rectangulaire) à l'épaisseur, il semble [7], [38] que l'on doive se limiter à  $\mu < 40$ .

Quand  $\mu > 40$ , les efforts de membrane dus à la déformation élasto-plastique, sont prédominants (ils sont d'ailleurs déjà importants en régime purement élastique dès que la charge devient assez grande). La force portante doit donc s'évaluer par une théorie de plaque-membrane élasto-plastique [39] [40] ou plus simplement par une analyse plastique en membrane pure, de forme a priori inconnue, [7]. Cette force portante est, en général, continûment croissante avec la déformation plastique et n'est limitée que par celle ci.

Cette influence des changements de forme, pré et post-limite, est moins grande dans de nombreux cas de coques de révolution [7], mais risque de reprendre vigueur dans les éléments de couverture, où l'instabilité élastique peut être prépondérante.

### 3. STRUCTURES EN BETON.

#### 3.1. Introduction.

On se bornera dans ce qui suit à examiner les structures en béton armé ou précontraint. Le matériau béton simple peut être considéré comme un matériau semi-raide, qui manifeste au cours du temps les phénomènes de retrait et de fluage.

Tout d'abord, une pièce quelconque faite en béton de ciment, libre de se déformer, et placée dans une atmosphère non saturée d'humidité subit au cours du temps un raccourcissement triaxial appelé retrait. Ce phénomène est indépendant de l'état de contrainte. De plus, une pièce de béton soumise de façon permanente à l'action de forces extérieures subit, outre une déformation élastique ou élasto-plastique instantanée, une déformation différée partiellement irréversible appelée fluage. Ces phénomènes ont été étudiés extensivement au cours des toutes dernières années.

##### 3.1.1. Le retrait du béton armé.

D'après les Recommandations du Comité Mixte CEB-FIP, la dilatation finale de retrait  $\epsilon_r$  d'une pièce en béton armé peut être déterminée par la relation :

$$\epsilon_r = \psi \alpha_r \beta_r (1 - 0,1 \bar{\omega}_0)$$

où :

$\psi$  est le retrait final du béton non armé, dépendant de l'humidité relative du milieu de conservation ;

$\alpha_r$  est un coefficient traduisant l'influence de la plus petite dimension de la pièce. Plus cette dimension est faible, plus le retrait est important ;  $\alpha_r$  dépend du diamètre moyen de la section droite de la pièce, égal à  $2 \Omega/l$ , où  $\Omega$  est l'aire de la section et  $l$  son périmètre ;

$\beta_r$  est un coefficient dépendant de la composition du béton et principalement du rapport eau/ciment et du dosage en ciment ;

$\bar{\omega}_0$  est le pourcentage géométrique d'armatures longitudinales de la pièce.

Tous ces coefficients sont définis dans les Recommandations susdites par des courbes expérimentales

##### 3.1.2. Le fluage du béton armé ou précontraint.

Comme le retrait, le fluage d'une pièce en béton armé ou précontraint dépend principalement des trois variables ci-après : conditions climatiques - dimensions de la pièce - composition du béton. Le Comité Mixte FIP-CEB propose une relation permettant de calculer en fonction du temps la dilatation totale d'une fibre due à une contrainte unitaire, relation dans laquelle interviennent divers coefficients expérimentaux traduisant l'effet des variables ci-dessus.

Il est admis par la généralité des auteurs que la dilatation en un point est proportionnelle à la contrainte appliquée en ce point ; on peut donc appliquer aux structures en béton armé ou précontraint la théorie des corps viscoélastiques linéaires dont les propriétés dépendent de l'âge (cf § 1.3.).

En tenant compte du fluage éventuel des câbles de précontrainte, il est donc possible de prévoir le comportement d'un ouvrage en béton précontraint sollicité par des postcontraintes appliquées à des temps successifs, comme c'est le cas pour les ponts construits en encorbellement ou par voussoirs préfabriqués. Evidemment, il faut tenir compte également du retrait du béton et du fluage des câbles de précontrainte.

Un travail de Fin d'Etudes exécuté par un des étudiants de la section des Constructions de l'Université de Liège, sous la direction du professeur R. Baus, montre qu'il est possible, moyennant des calculs à la portée des bureaux d'études, d'arriver à des prédictions numériques concernant :

- a) l'évolution dans le temps de la flèche d'une travée d'un pont continu ;
- b) la variation dans le temps des moments dits "parasitaires" par feu le professeur Magnel - et de montrer que ces moments croissent avec le temps d'une manière non négligeable, contrairement à la théorie élastique qui les suppose constants ;
- c) l'importance de l'effet de la relaxation des armatures sur les pertes différées de précontrainte, qui est sous-estimée en pratique.

Par ailleurs, il faut veiller, pour les pièces comprimées soumises à des charges de longue durée, à prendre en considération le flambement par fluage. La théorie des déformations progressives d'une pièce chargée axialement obéissant au modèle viscoélastique  $P \sigma = Q \epsilon$  du § 1.3. et présentant une déformée initiale quelconque a été donnée par Hilton [27]. Il reste évidemment à l'ingénieur à tirer parti de cette théorie en définissant un état limite pour la pièce.

### 3.1.3. Les propriétés plastiques des pièces en béton armé ou précontraint.

Le béton de ciment lui-même étant d'autant plus raide qu'il est plus âgé, la plasticité d'une pièce en béton armé ou précontraint ne provient que de l'acier qu'on y a placé et dépend essentiellement :

- a) du pourcentage d'armature ;
- b) de la limite élastique de l'acier utilisé ;
- c) du caractère (passif, précontraint, ou mixte) de l'armature ;
- e) de la résistance du béton à la compression ;
- d) de la ductilité supplémentaire éventuelle provenant de la présence d'une armature comprimée et d'étriers [51] [55].

Il en résulte que la ductilité de la pièce en question est essentiellement variable d'une pièce à l'autre et éventuellement, pour une même pièce, d'une section droite à l'autre.

## 3.2. Dimensionnement non-linéaire des ossatures formées de barres en béton armé ou précontraint.

### 3.2.1. Introduction.

Le problème du dimensionnement à la ruine a donné lieu à un nombre de publications dépassant largement la centaine. C'est pourquoi nous ne pouvons en donner qu'une bibliographie très partielle et renvoyer le lecteur, entre autres, au Symposium d'Ankara du C.E.B. 1964 et au Symposium de Miami de l'A.C.I.-A.S.C.E.

Idéalement, on devrait, dans le dimensionnement d'une structure soumise à un certain chargement, considérer plusieurs stades de ruine de plus en plus sévères et de moins en moins probables [53]. Pour du béton armé travaillant essentiellement en flexion, ces stades pourraient être le début de

1. la fissuration fine (d'habitude précédant la plastification de l'acier) ;
2. la fissuration large (d'habitude après plastification de l'acier) et la déformation excessive ;
3. l'écrasement et l'épaufrage du béton ;
4. la ruine locale ;
5. la ruine générale par écroulement de la structure.

C'est pourquoi Sawyer [53] considère que, idéalement, le dimensionnement est une procédure complexe par laquelle on établit une corrélation entre les résistances de la structure aux différents stades cités ci-dessus et la probabilité des charges correspondantes de façon à minimiser le coût total, y compris le coût initial et les valeurs des pertes provenant des divers états de ruine.

Le dimensionnement élastique linéaire et le dimensionnement à la ruine ne sont que des aspects limités de ce problème général.

Comme il semble impossible d'appliquer pratiquement la procédure ci-dessus, on doit la simplifier arbitrairement. A ce point de vue, les positions du Comité Européen du Béton [9] et celles exprimées par Sawyer [54] au Symposium de Miami sur le Comportement inélastique du Béton Armé sont les mêmes, à savoir que le dimensionnement du béton armé hyperstatique devrait être basé sur deux stades principaux de ruine :

- 1) le stade de ruine par fissuration large ;
- 2) le stade de ruine par écrasement et épaufrage du béton.

La structure doit être étudiée dans le premier stade pour garantir une bonne serviciabilité sous les conditions de service. L'étude dans le second stade, de son côté, montrera sa résistance effective à une surcharge.

### 3.2.2. Analyse du stade largement fissuré.

L'opinion la plus répandue est que le premier stade peut être analysé sur la base de la théorie élastique. Cependant, Macchi [49], [50] a montré théoriquement et expérimentalement que la redistribution des efforts intérieurs commence à l'apparition de la première fissure et que son effet est déjà important sous la charge de service. Cette redistribution existe donc aussi si la structure est dimensionnée pour les moments fléchissants prédits pour la théorie élastique ; par conséquent, dans ce cas, son effet est défavorable.

### 3.2.3. Analyse du stade ultime.

Pour ce qui concerne le second stade de ruine, de grandes divergences existent parmi les chercheurs en ce qui concerne la forme de la courbe moment-courbure ou moment rotation à utiliser comme base de l'étude, et en ce qui concerne la meilleure méthode d'analyse.

Les calculs exécutés sur ordinateur par Ferry Borges et ses collaborateurs [47] en admettant la loi de conservation des sections planes d'où découle l'existence d'une loi moment-courbure, ont nettement mis en lumière le fait que, pour des structures à faible degré d'hyperstaticité, on peut compter sur la formation et la rotation plastique suffisante des rotules plastiques dans le cas de pièces ayant un pourcentage d'armature nettement inférieur au pourcentage critique, ces armatures étant faites d'acier doux. Dans ces conditions, le modèle élastique (ou rigide) parfaitement plastique du § 1.2. peut s'appliquer de façon très satisfaisante.

Au fur et à mesure que le pourcentage d'armature et la limite élastique de l'acier utilisé augmentent, la capacité de rotation plastique des rotules diminue, pour éventuellement disparaître totalement (rupture par insuffisance du béton), et avec elle, le bénéfice dû à la redistribution des moments fléchissants.

Selon un travail non publié, ce problème complexe d'analyse peut se formuler comme un problème de programmation mathématique et être résolu sur ordinateur par les méthodes mathématiques correspondantes. On peut, dans ce cas, tenir compte des variations des propriétés du béton armé d'une section à l'autre et des différents états limites qui peuvent être atteints.

#### 3.2.4. Procédures de dimensionnement.

Notons immédiatement une différence essentielle entre les ossatures en acier et en béton : dans les secondes, il est possible de faire varier les propriétés de résistance et de ductilité d'une section à l'autre en variant le pourcentage d'armature, le frettage par étriers, etc...

Les trois conditions fondamentales qui doivent être satisfaites dans un dimensionnement limite concret des structures en béton armé ou précontraint sont :

- 1) l'équilibre limite ;
- 2) la compatibilité des rotations ;
- 3) la serviciabilité.

Celà étant, on peut distinguer deux grandes catégories de méthodes de dimensionnement :

Première catégorie : les méthodes de dimensionnement proprement dites ; où l'accent est mis sur l'optimisation. Dans cette catégorie rentrent les méthodes de A.L.L. Baker [41], [42], [45] de Ferry Borges et collaborateurs [47], de Guyon [45], de Macchi [45], [49], [50], de Sawyer [54], etc... La place nous manque même pour présenter ces diverses méthodes. Bornons-nous donc à dépeindre les grandes lignes de la méthode de A.L.L. Baker, qui est une des premières et des mieux connues :

Baker considère qu'une structure doit être dimensionnée pour avoir une marge de sécurité prédéterminée contre la ruine et, dans ce but, développe une technique simplifiée. De plus, il faut éviter une fissuration et des déformations excessives sous la charge de service, de sorte qu'on a également besoin d'une solution élastique ; cependant, cette solution ne doit être qu'approchée, parce qu'elle ne sert qu'à contrôler que la fissuration n'est pas excessive. Les deux analyses mentionnées ci-dessus peuvent se faire en utilisant des versions simplifiées des équations de compatibilité de la méthode des forces (Müller-Buslan) généralisées pour les déformations non linéaires.

Deuxième catégorie : les méthodes de dimensionnement optimal. Ces méthodes, dues surtout à Cohn [43] [44] et Petcu [51], ont évolué fortement au cours des années et la terminologie employée par leurs inventeurs a également varié.

Les recherches récentes ont révélé, ainsi qu'on l'a déjà dit (fin § 3.2.3) la possibilité de formuler le problème de dimensionnement en sorte que les solutions soient optimales au sens mathématique, c'est-à-dire qu'elles minimisent des "fonctions économiques" adéquates qui sont le volume de béton, d'armatures, ou mieux le coût total de la structure.

Théoriquement, il est possible à présent [44], de formuler (et dans des cas simples) de résoudre des problèmes en satisfaisant simultanément aux conditions d'équilibre limite de serviceabilité, de compatibilité élastique, de limitation des rotations maxima dans les rotules plastiques, et à un critère d'optimalité. Cependant, pour l'application pratique, il paraît plus simple de ne considérer au départ que les conditions d'équilibre limite et de serviceabilité [43], [43 bis], [43 ter], [51].

### 3.2.5. Situation actuelle (1970).

La pratique actuelle du calcul du béton armé à travers le monde ne fait généralement intervenir qu'un seul contrôle de résistance au lieu du double contrôle défini au § 3.2.1. ; elle est donc insatisfaisante. De plus, il y a de grandes variations dans les méthodes employées. En effet, dans certains pays tels que l'U.R.S.S., on utilise des relations non linéaires, tant pour déterminer la distribution des moments fléchissants que pour déterminer les dimensions des diverses sections droites [46] [48]. Au Portugal, les Normes permettant un certain degré de redistribution découlent des études de Ferry Borges et collaborateurs commentées au § 3.2.3. Dans d'autres pays, on détermine la distribution des moments fléchissants par la théorie élastique, tandis que le dimensionnement organique des sections est basé sur leur résistance ultime. Il est donc clair qu'à travers le monde, les ingénieurs du génie civil ont des opinions très divergentes quant à la manière de tenir compte de l'inélasticité des structures en béton dans leur dimensionnement.

### 3.2.6. Conclusions.

Il semble qu'après une intense activité de recherche déployée entre 1955 et 1965, le sujet en discussion soit un peu en veilleuse actuellement. Cela provient à notre avis de la résistance des ingénieurs à exploiter des phénomènes inélastiques dans les barres fléchies pour des raisons fondamentales de sécurité et de durabilité de la structure.

Ce point de vue a été clairement mis en évidence en 1964 par Winter, dans sa discussion introductive présentée au Symposium de Miami [56]. Quelques uns des arguments du professeur Winter sont résumés ci-après :

1) Il y a une différence fondamentale entre le comportement de l'acier, matériau ductile écrouissable, et du béton, matériau semi-raide désécrouissable, dans lequel les déformations plastiques sont dues à une micro-fissuration progressive. Cette différence a d'importantes conséquences sur le comportement inélastique des structures faites de ces deux matériaux :

a) Quand une structure continue soudée en acier est chargée jusqu'au point où certaines rotules plastiques se sont développées mais que le stade de ruine n'est pas encore atteint, aucun dommage visible n'a été produit.

Au contraire, quand des soi-disant rotules plastiques se sont développées en béton armé, une fissuration par traction absolument excessive a déjà eu lieu dans les rotules "underreinforced" (c'est-à-dire de pourcentage inférieur au pourcentage critique) ou bien des écrasements et épaufréments inadmissibles ont eu lieu dans des rotules à pourcentage élevé d'armatures ;

b) Si une structure en acier partiellement plastifiée est déchargée, puis rechargée dans le même sens, on constate que son domaine de comportement élastique s'est agrandi à cause des moments fléchissants résiduels favorables provoqués par le premier cycle de charge. Dans le cas du béton armé, les informations concernant le comportement après rechargement de structures qui ont été partiellement plastifiées puis déchargées, semblent rares. Pour de faibles pourcentages d'armatures, le comportement est probablement semblable à celui de structures en acier. Pour de plus grands pourcentages, le développement des rotules exige d'utiliser la branche descendante de la courbe moment-rotation. Or, à ce moment, l'expérience montre que la structure est une semi-ruine. On peut accepter de baser le dimensionnement sur un tel état de semi-ruine dans des situations extrêmes telles que violents séismes ou souffle de bombes nucléaires, mais un état de semi-ruine peut difficilement servir de critère de dimensionnement pour les structures civiles habituelles.

- 2) Vu la capacité de rotation limitée du béton armé, si le dimensionnement des structures en béton armé devait être basé sur la charge ultime calculée en utilisant pleinement cette capacité, il n'y aurait plus de ductilité additionnelle disponible pour absorber les effets des tassements d'appui, du retrait et des effets thermiques, etc ...
- 3) La ductilité d'une structure en béton armé décroît rapidement quand la limite élastique de l'armature augmente. Ainsi, il apparaît que le dimensionnement inélastique est économiquement prometteur principalement pour les aciers doux. D'autre part, tous les développements de ces dix dernières années, aux Etats-Unis comme en Europe, démontrent la supériorité économique des armatures en acier à haute résistance. Nous arrivons ainsi à la situation paradoxale qu'une nouvelle méthode (le dimensionnement inélastique) est présentée, qui promet quelque bénéfice économique précisément pour les nuances douces d'acier qui se voient rapidement remplacées par de plus économiques.

### 3.3. Plaques et coques.

Les plaques en béton armé sont, avec les ossatures en acier, le domaine dans lequel, à l'heure actuelle, le calcul plastique (dit ici aussi "calcul à la rupture") s'applique le mieux. C'est d'ailleurs au congrès de l'AIPC (Zurich 1932) que fut présenté un des premiers mémoires sur ce sujet [57]. Bien que le critère de plasticité le plus généralement admis reste l'objet de certaines discussions [58][59], les applications auxquelles il conduit ont obtenu une bonne vérification expérimentale [60][61]. Les dalles en béton armé sont en effet très généralement peu armées et suivent donc bien le schéma parfaitement plastique. Les efforts tranchants y sont négligeables, sauf dans le problème du poinçonnement. Même l'analyse purement cinématique, donnant une charge limite erronée par excès, est très souvent acceptée comme suffisante compte tenu de divers effets stabilisants et à condition de prendre à son égard une sécurité adéquate. Cependant, le progrès est sans aucun doute dans le développement des solutions statiques, grâce auxquelles on peut distribuer au mieux les armatures [7][61]. Pour des plaques fabriquées en série, on peut même rechercher l'armature de poids minimum [62], et assurer la rigidité en service par une épaisseur suffisante de la plaque. De manière plus générale, on peut, dans le dimensionnement plastique, imposer une optimisation (prix minimum par exemple) sous diverses contraintes (charge limite minimum assurée, flèche en service limitée, etc ...).

Quoi qu'il en soit, l'analyse limite cinématique des plaques est actuellement d'un emploi courant en pratique dans de multiples pays, où elle est accompagnée de règles empiriques permettant de pallier l'absence d'analyse statique.

Il n'en est pas de même de l'analyse limite des coques (couvertures, réservoirs, etc...) où la recherche, théorique [63] et expérimentale [64], [65], en est encore à ses débuts. L'importance du sujet est cependant évidente, car le "mécanisme plastique" est bien un des plus fréquents modes de ruine d'une coque en béton armé. Un autre mode tout aussi important est le voilement par fluage, qui a entraîné plusieurs écroulements. A notre avis, la solution la plus directe de ce problème est par un essai sur modèle dont le matériau doit représenter aussi fidèlement que possible le matériau réel. La voie théorique exigerait l'analyse pas à pas de l'équilibre des formes successives en lesquelles la coque initiale se transforme par le fluage. Ceci impose bien entendu le recours à un ordinateur de grande puissance.

#### 4. STRUCTURES MIXTES ACIER - BETON.

La littérature relative aux structures mixtes, dont l'exemple principal est le pont à poutres métalliques et tablier en béton, est bien connue des ingénieurs des constructions. Elle débute avec les recherches de Dischinger [66] et a trouvé un développement plus ou moins raffiné dans les ouvrages de Sattler [67], Fritz [68] et d'innombrables articles de revue.

Les calculs de dimensionnement sont assez complexes et sont souvent, à l'heure actuelle, effectués sur ordinateur. Le modèle rhéologique adopté pour le béton est généralement le modèle simple de Kelvin (Fig. 1) qui en fluage simple se déforme suivant la loi exponentielle bien connue.

L'objection principale à ces méthodes est que la prédiction du coefficient de fluage est si complexe et si incertaine (cf. [19]) que la signification des calculs est quelque peu illusoire. Pour ces raisons, il semble que, dans les pays non de langue allemande, de nombreux bureaux d'études se contentent toujours de tenir compte du fluage en jouant sur la valeur du coefficient d'équivalence  $m = E_a/E_b$ . Si cette méthode nous paraît insuffisante, par contre l'emploi des méthodes raffinées ne se justifiera pleinement que quand on sera mieux armé pour prédire les propriétés rhéologiques effectives des éléments de béton qu'il est prévu de mettre en oeuvre. Pour le présent, il faut signaler l'excellent petit livre de Birkenmaier [69] qui, en décomposant l'effet du fluage en un petit nombre d'intervalles de temps - souvent un ou deux suffisent - permet d'obtenir de façon très simple des résultats suffisamment précis. La méthode de Birkenmaier donne toute la précision que l'on désire - il suffit d'augmenter le nombre d'intervalles  $\Delta t$  - et est réellement conçue dans l'esprit "ordinateur".

En conclusion de ce paragraphe, il faut attirer l'attention sur la nécessité, sous peine de s'exposer à des déboires, de tenir compte du fluage du béton si l'on veut combattre la fissuration de la dalle en béton par dénivellement des appuis intérieurs dans les ponts continus ou par précontrainte longitudinale des tronçons de la dalle situés au droit de ces appuis.

## 5. CONCLUSIONS.

### 5.1. Influence de la théorie de la plasticité sur la pensée de l'ingénieur constructeur.

L'introduction du calcul plastique en théorie des constructions a établi clairement la distinction entre

- 1) le groupe des lois de statique ;
- 2) le groupe des lois de cinématique ;
- 3) le groupe des lois de comportement du matériau,

auparavant très mêlées dans le traitement du seul corps élastique. Il a ouvert la voie vers l'étude d'autres comportements (modèle visco-élastique). La Résistance des Matériaux et la Théorie des Structures sont ainsi devenues des applications de la Mécanique des Solides à l'art de l'ingénieur constructeur.

Jusqu'en 1940, la seule doctrine enseignée et appliquée était la théorie élastique, pessimiste quant à la capacité portante de la structure et en désaccord avec les règles pratiques de la construction métallique (en particulier dans le calcul des assemblages). Le théorème statique, sous sa forme la plus générale (cf [7]) était employé intuitivement par les ingénieurs depuis un siècle. Il a donné une formulation précise à la règle empirique d'après laquelle il faut dimensionner les pièces de manière à trouver un chemin pour les efforts sans violer la capacité de résistance du matériau. Le théorème statique nous apprend que cette règle n'est valable que pour un matériau de ductilité infinie. D'où :

- 1) l'accent mis sur la ductilité et la nécessité de la contrôler soigneusement lors de la réception des matériaux ;
- 2) l'accent mis sur la nécessité de préserver la ductilité pendant la fabrication (exemple : interdiction des trous poinçonnés) ;
- 3) l'accent mis sur l'obligation de restaurer la ductilité initiale si elle a été diminuée par le processus de fabrication (recuit après cintrage, après soudage, pour détendre les contraintes résiduelles).

La doctrine plastique a déteint sur la doctrine classique (dite des contraintes admissibles) en tendant à faire adopter - dans le cas des charpentes soumises à des charges quasi-statiques - une conception plus simple des assemblages et un mode de calcul purement statique ainsi qu'un coefficient de sécurité porté sur les charges plutôt que sur les contraintes (règles C.M. 1966), ce qui est obligatoire en cas de comportement non linéaire.

Alors que l'ingénieur de 1940 n'avait à sa disposition qu'une théorie pessimiste en laquelle il n'avait qu'une foi relative, l'ingénieur de 1970 a à sa disposition plusieurs modèles mathématiques, dont deux particulièrement développés vers les applications :

- le modèle élastique (pessimiste)
- le modèle parfaitement plastique (souvent optimiste quant à la ductilité, parfois encore pessimiste quant à la résistance).

Comme nous l'avons dit dans notre communication au Congrès de Rio de Janeiro [9], il reste à élaborer une "doctrine-cadre" générale dans laquelle chacun de ces modèles entrerait, et à développer d'autres théories particulières entrant dans ce cadre (visco-élasticité appliquée, fatigue plastique et avec fluage etc...).

La clef de l'élaboration d'une telle "doctrine-cadre" réside dans la classification des processus de ruine en fonction d'une part du comportement mécanique du matériau et d'autre part de la variabilité des charges dans le temps.

Devant la puissance des méthodes de la programmation mathématique et leur adaptation au calcul sur ordinateur, et devant la découverte de leur applicabilité au calcul des structures, il importe de faire un effort considérable vers une meilleure connaissance des lois de comportement des matériaux et des modes d'application des charges, afin de ne pas perdre dans l'incertitude des données de base tout le progrès réalisé dans les méthodes de calcul.

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] De Kazinczy, G., Expériences sur des poutres encastées (en hongrois) (Betonszemle, vol. 2, p. 68, 1914).
- [2] Kist, N.C., Leidt een sterkteberekening, die uitgaat van de evenredigheid van kracht en vormverandering, tot een goede constructie van ijzeren bruggen en gebouwen ? Dissertation inaugurale, Ecole polytechnique de Delft (1917).
- [3] Gvozdev, A. A., La détermination de la valeur de la charge de ruine pour les systèmes hyperstatiques subissant des déformations plastiques (Compte rendu de la Conférence sur les déformations plastiques, décembre 1936, p. 19, Adademia Nauk, U.S.S.R. Traduction par Haythornthwaite, R. M. dans Int. Journ. Mech. Sci., vol. 1, p. 322, 1960).
- [4] Hill, R., On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield-point (Phil. Mag., vol. 42, pp. 868-875, 1951).
- [5] Drucker, D. C., Prager, W. et Greenberg, H. J., Extended limit design theorems for continuous media, Quart. Appl. Math., Vol. 9, pp. 381-389, 1952.
- [6] Massonnet, Ch. et Save, M., Calcul plastique des Constructions, Vol. 1, structures à un paramètre, deuxième édition française, édit. CBLIA, 47, rue Montoyer, Bruxelles, et les traductions de la première édition : en anglais : éd. Blaisdell Publishing Co., 1965 - en espagnol : éd. Montaner y Simon, Barcelone 1966 - en italien : éd. N. Zanichelli, Bologne, 1967.
- [7] Massonnet, Ch. et Save, M., Calcul plastique des Constructions, Vol. 2, structures spatiales, 2ème édition, 1970, éd. CBLIA, Bruxelles, et les traductions de la 1ère édition : en espagnol : Montaner y Simon, Barcelone 1966 -en italien : éd. N. Zanichelli, Bologne, 1968.
- [8] Hodge, P. G., Plastic Analysis of Structures, Mc. Graw Hill, New-York, 1959.
- [9] Comité Européen du Béton : Recommandations pratiques à l'usage des constructeurs, Bulletin n° 39, 1963.
- [10] Gavarini, C., Concezione probabilistica del Calcolo a Rottura, Giornale del Genio Civile, fascicule 8, août 1969.
- [11] Save, M. A. and Shield, R. T., "Minimum-weight design of sandwich shells subjected to fixed and moving loads", Proc. 11 th Int. Congr. Appl. Mech., Munich 1964, pp. 341-349, H. Görtler ed., Springer 1966.
- [11 bis] Gavarini, C., I teoremi fondamentali del calcolo a Rottura e la dualità in programmazione lineare, Ingegneria Civile, N° 18, 1966.
- [12] Heyman, J., Automatic plastic analysis of steel framed structures under fixed and varying loads, Proc. Inst. Civ. Eng., vol. 12, p. 39, 1959.
- [13] Heyman, J., and Prager, W., Automatic minimum weight design of steel frames, Journ. Franklin Inst. vol. 266, pp. 339-364, 1952.

- [14] Kalker, J.J., Automatic minimum weight design of steel frames on the IBM 704 Computer, Rapport IBM 2038/3, Brown University, September 1958.
- [15] Neal, B.G. et Symonds, P.S., The rapid calculation of the plastic collapse load for a framed structure, Proc. Inst. Civ. Engrs, London, pp. 68-100, 1952.
- [16] Cohn, M.Z. et Grierson, D.E., An automatic approach to the analysis of plastic frames under fixed and variable loading, Solid. Mech. Div., Univ. of Waterloo, Report N°22, Oct. 1969.
- [17] Glanville, W.H., Building Research Paper N° 12, p. 111, 1930.
- [18] Davis, R. H., Journal Amer. Concrete Institute N° 7, 1932.
- [19] Wallo, E.M. et Kesler, C.E., Prediction of creep in structural concrete. University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin N° 498, 65 pp. , 1968.
- [20] Flugge, W.:Viscoelasticity, Blaisdell Publishing Co., 1967.
- [21] Massonnet, Ch., Résistance des Matériaux, Vol. II, 2ème édition, 1970, Thone, Liège, et Dunod, Paris, éd.
- [22] Flugge, W., Editeur : Handbook of Engineering Mechanics, Mc Graw Hill Co., 1962 (voir le chapitre 53, intitulé : Viscoelasticity, 22 pp. rédigé par E.H. Lee).
- [23] Aroutiounian, N.Kh., Applications de la théorie du Fluage, Eyrolles, 1957.
- [24] Alfrey, T.Jr., Quart. Applied Math., Vol.2, pp. 113-119, 1944 et Mechanical Behavior of High Polymers, Interscience Ed., New-York, 1948.
- [25] Mc. Henry, D., Proc. Amer. Soc. Test. Mater., Vol. 43, p. 1069, 1943.
- [26] Zienkiewicz, O.C., Watson, M; et King, I.P., A numerical method of Visco-elastic stress analysis, Inter. Jl. Mech. Sci. Vol. 10 pp. 807-827, 1968.
- [27] Hilton, H., Journ. Aero. Sci., Vol. 19, pp. 844-846, 1952.
- [28] Levi, F. et Pizzetti, G., Fluage, Plasticité, Précontrainte, Paris, Dunod, 1951.
- [29] Nombreuses publications de l'Université Lehigh et leur synthèse intitulée "Commentary on Plastic Design in steel"
- [30] British Standard 449, 1948.
- [31] Specifications for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings, Part 2, American Institute of Steel Construction, 1969.
- [32] Addendum "Calcul en Plasticité" à la norme belge N.B.N. 1 "Charpentes en acier", Institut Belge de Normalisation, 29, avenue de la Brabançonne, Bruxelles 1040, 1961.

- [33] Baker, J.F., Horne, M.R. et Heyman, J., The Steel skeleton, Vol 2. : Plastic behaviour and design, Cambridge University Press, 1956.
- [34] Beedle, L.S., Plastic design of steel frames, J. Wiley, New-York, 1958.
- [35] Guiaux, P. et Peschon, E., Charpentes en acier. Calcul des assemblages soudés soumis à une sollicitation statique. Revue (belge) de la Soudure, Nos. 1, 2 et 3, Bruxelles, 1965.
- [36] Beedle, L.S., Recent developments in plastic design practice, Proc. ASCE, Journ. Struct. Div., Vol. ST9, pp. 1911-1937, 1969.
- [37] Massonnet, Ch. et Save, M., Reflexions sur une doctrine générale de calcul des Constructions Métalliques (VII<sup>e</sup> Congrès de l'A.I.P.C., Rio de Janeiro, Rapport final, pp. 101-108, 1966).
- [38] Save, M.A., "Vérification expérimentale de l'analyse plastique des plaques et des coques en acier doux", (Experimental verification of plastic limit analysis of mild steel plates and shells), C.R.I.F. Report n° M.T. 21, February 1966, Fabrimétal, 21, rue des Drapiers, Brussels.
- [39] Massonnet, Ch., General theory of elasto-plastic membrane plates, pp. 443 à 471 du livre "Engineering Plasticity" Ed. J. Heyman et F.A. Leckie, Cambridge Univ. Press., 1968.
- [40] Capurso, M., Comportamento elasto-plastico delle piastre sottili metalliche nel campo dei grandi spostamenti, Costruzioni Metalliche, pp. 42-51, 1968.
- [41] Baker, A.L.L., General equations for frame analysis. Concrete and Constr. Eng., pp. 97-103, 1961.
- [42] Baker, A.L.L., Ultimate load design of reinforced concrete beams : a recapitulation and appraisal, Mém. A.I.P.C., Vol. 23, pp. 33-50, 1963.
- [43] Cohn, M.Z. Limit design of reinforced concrete frames, Journ. Struc. Div. ASCE, vol. 94, N° ST 10, pp. 2467-83, Oct. 1968.
- [43bis] Cohn, M.Z. et Grierson, D.E., Optimal design of reinforced concrete beams and frames, Rapport final, 8<sup>ème</sup> Congrès de l'A.I.P.C., New-York, pp. 215 à 226, Sept. 1968.
- [43ter] Cohn, M.Z. et Grierson, D.E., Further results on the equilibrium method of limit design, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Canada Report N° 15, Août 1969.
- [44] Grierson, D.E. et Cohn, M.Z., A general formulation of the optimal frame problem, Mémoire présenté au Second Congrès canadien de Mécanique Appliquée, Mai 1969, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario.
- [45] Comité Européen du Béton,  
Bulletin N° 21, notes de A.L.L. Baker, G. Macchi et Y. Guyon.  
Bulletin N° 30, note de A.L.L. Baker.  
Bulletin N° 34, résumé des trois méthodes à la ruine développées par A.L.L. Baker, Y. Guyon et G. Macchi.

- [46] Instructions pour le calcul des structures hyperstatiques en béton armé en tenant compte de la redistribution des efforts (en russe)- Académie de la Construction et de l'Architecture de l'U.R.S.S., Moscou 1961, traduction française par le C.E.B.
- [47] Ferry Borges, Arga et Lima, J. Teixeira Coelho et Monteiro, V., résultats analytiques concernant le comportement non linéaire des structures en béton armé, Lab. Nat. de Génie Civil, Lisbonne, 12 pp. août 1964.
- [48] Gvozdev, A.A. et Dmitriev ; Calcul des structures en béton armé et pré-contraint selon la méthode des états limites utilisée en U.R.S.S.- Contribution à la Session du Comité Mixte FIP-CEB.
- [49] Macchi, G. Moment redistribution beyond elastic limit and at failure in prestressed concrete beams, P.C.I. Journal, pp 8-26, 1957.
- [50] Macchi, G. , Behaviour of reinforced concrete continuous beams designed according to the elastic distribution of moments, Miami Symposium, paper N° 6, 1964.
- [51] Petcu, V. Nombreuses publications dans des revues techniques roumaines et autres.
- [52] Rüschi, H. et Stöckl, S., L'influence des étriers et de l'armature comprimée sur le comportement de la zone comprimée de poutres en béton armé (en allemand) Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - Ernst und Sohn, éd., Berlin, n° 148, 1963.
- [53] Sawyer, H.A., The status and potentialities of non linear design of concrete frames, Miami Symposium, paper n° 11, 1964.
- [54] Sawyer, H.A., Design of concrete frames for two failure stages, Miami Symposium, paper N° 18, 1964.
- [55] Siess, C.P. Load-moment curvature characteristics of reinforced concrete cross sections. Journal A.C.I., Juillet 1964.
- [56] Winter, G., Whether inelastic concrete design, Note introductive présentée au Symposium de Miami, 1964.
- [57] Johansen, K.W., Bruchmoment kreuzweise <sup>bewehrten Platten.</sup> Mémoire de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes, 1er volume, Zurich 1932.
- [58] Baus, R. and Tolaccia, S., "Calcul à la rupture des dalles en béton armé et étude expérimentale du critère de rupture en flexion pure", (yield line theory and experimental investigation of the yield criterion of reinforced concrete slabs in pure bending). Ann. Inst. Tech. Bât. Trav. Pub., Paris, June 1963.
- [59] Lenschow, R.J. et Sozen, M.A., "A yield criterion for reinforced slabs" A.C.I. Journal, pp. 266-273, May 1967. Discussion of this paper to be published in the November 1967, ACI Journal.
- [60] Sawczuk, A. and Jaeger, T. "Grenztragfähigkeits- Theorie der Platten, Springer - Verlag, pp. 522, 1963.
- [61] Wood, R.H. "Plastic and elastic design of slabs and plates", London, Thames and Hudson, 1961.

- [62] Sacchi, G. et Save, M., Le problème du poids minimum d'armature des plaques en béton armé. Mém. AIPC, Vol. 29, II, pp. 157-166, 1969.
- [63] Olszak, W. and Sawczuk, A., Inelastic behaviour in shells", Noordhoff, Groningen, 1967.
- [64] Sawczuk, A. "On experimental foundations of the limit analysis theory of reinforced concrete shells", Shell research, North-Holland Publ. Co. Amsterdam, pp. 217-231, 1961.
- [65] Bouma, A.L., Riel, A.C., Van Koten, H. and Beranek, W.J., Investigations on models of eleven cylindrical shells made of reinforced and prestressed concrete", Shell research, North-Holland Pub. Co. Amsterdam, pp.79-101, 1961.
- [66] Dischinger, Fr. "Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken, Bauingenieur 18, 1937, p. 487.  
"Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken, Bauingenieur 20, 1939, p. 54.
- [67] Sattler, K. "Theorie der Verbund konstruktionen" Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1959.
- [68] Fritz, B. "Verbundträger", Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1961.
- [69] Birkenmaier, M. "Berechnung von Verbundkonstruktionen aus Beton und Stahl" Verlag Leemann, Zurich, 1969.