

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 9 (1972)

Rubrik: Theme III: Long-spanned roofs

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

III
Couvertures de grande portée
Weitgespannte Dachkonstruktionen
Long-Spanned Roofs

III a
Structures en câbles et structures suspendues
Seilkonstruktionen und seilverspannte Konstruktionen
Cable and Cable-Suspended Roofs

Leere Seite
Blank page
Page vide

Will Metal Skins Replace Cable Suspended Roofs?

Est-ce que des bâches métalliques remplaceront les toitures en câbles suspendues?

Werden Metallh ute die kabelabgespannten Dächer ersetzen?

HANNSKARL BANDEL
Dr.-Ing.
New York City, USA

1. Introduction

The characteristic of cable roof structures is the use of primary and secondary members to carry the roof loads. The primary members are high-strength steel cables which span large distances stretching from abutment to abutment. The secondary members are bridging the small distance between the cables and really enclose the space below. Either a steel deck, concrete panels, wood planking or plastics are the materials for the secondary members. (Figure 1).

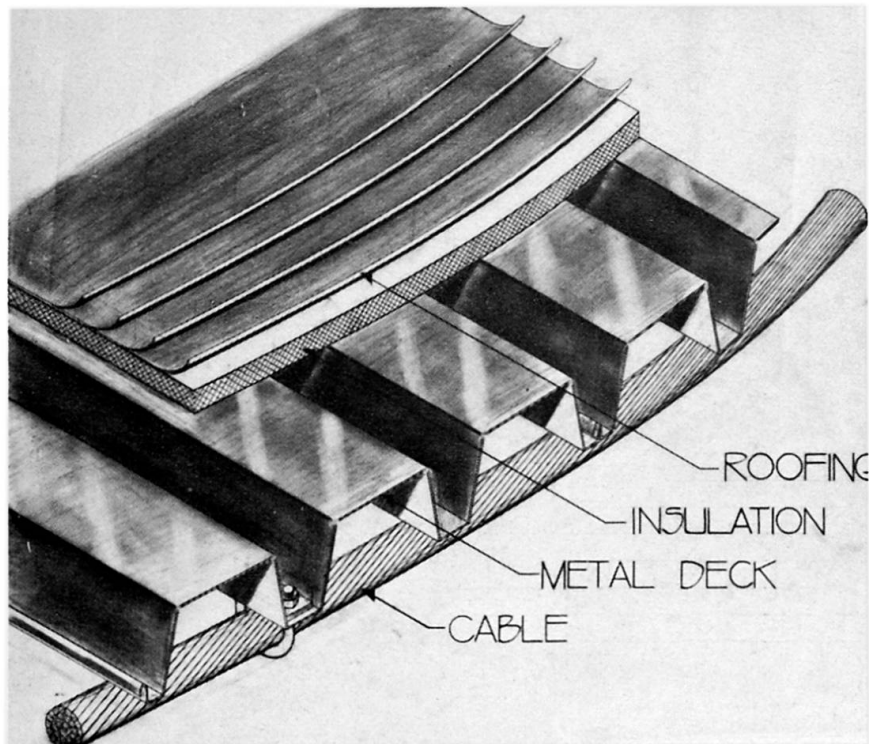


Fig. 1. Conventional Cable Roof Detail

However, if the metallic area of the steel cables is spread to form a thin metal sheet, such a skin could perform both functions of primary and secondary members, of cables and deck. The skin represents simultaneously an infinite number of parallel thin cables carrying the roof load and a metal deck enclosing the space. (Figure 2.) The substitution of the cables by a skin allows straining the material in more than one direction, which without question results in economy.

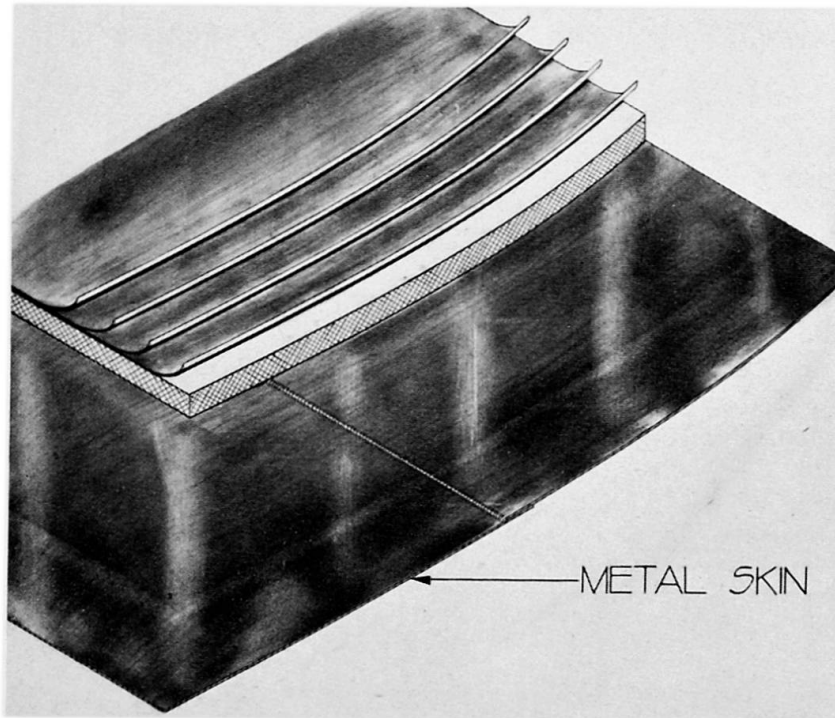


Fig. 2. Metal Skin Roof Detail.

2. Form Stability

It is well known that the major problem in the design of cable roofs is the limitation of their deformation due to non-uniform loading. The stiffness of a cable roof can be controlled by different means, such as weight, guy wires, stiffening trusses, double curvature, or shell action of the roof deck. These methods can also be applied to a hanging steel skin.

However, the continuity of a metal skin allows for more elegant methods of stabilizing a roof. An inside pressure created in the total enclosed space would easily carry the weight of such a skin and would expand it into a dome-like bubble. An under-pressure would preload a hanging skin and stabilize its form, similar to the action of additional weight. The complications of pressurizing a total building finally can be avoided by creating a steel balloon. (Figure 3.)

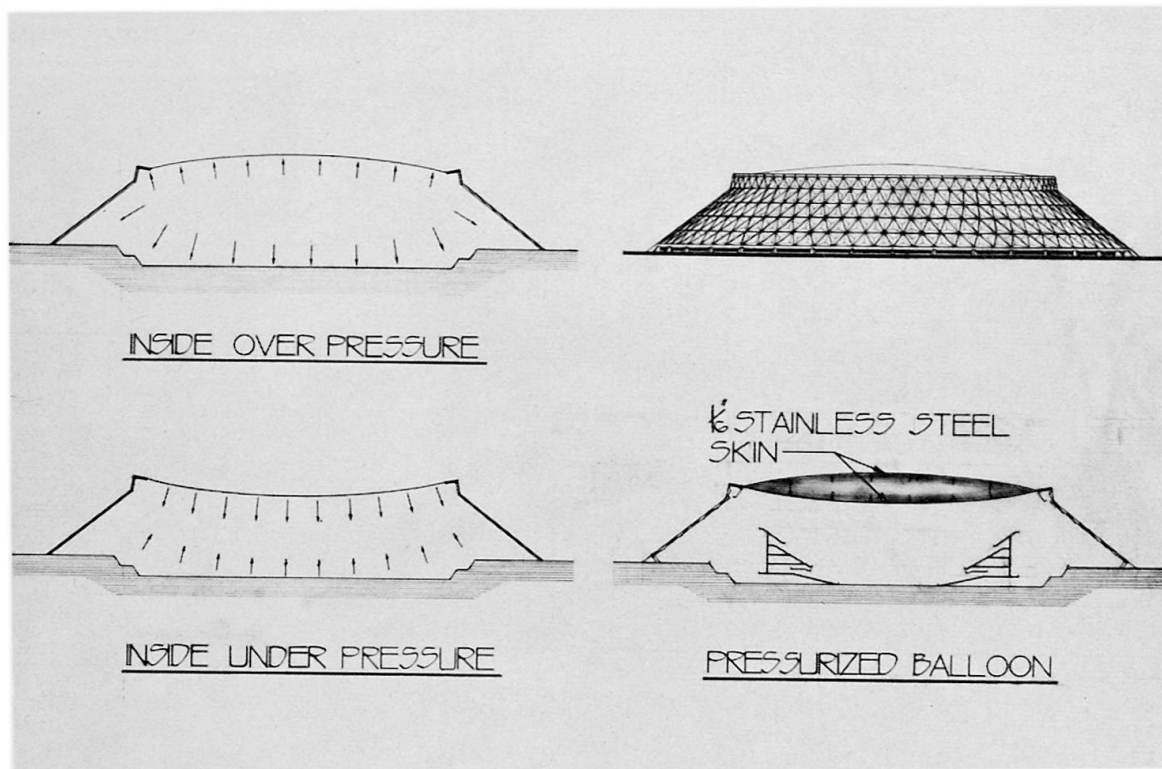


Fig. 3. Stabilization of Metal Skins by Air Pressure.

3. Stainless Steel Balloon

The feasibility of such a stainless steel balloon roof has been studied in our office analytically. Model tests and weld tests with stainless steel were performed by the International Nickel Co., New York. (Figure 4.)

4. Erection

The erection of steel skins must be studied very carefully. There is no question that the fabrication of large steel balloons must be done on the site. In order to avoid scaffolding it is reasonable to assemble the structure on the ground and hoist it in place after completion. Because of the extremely light weight, approximately one-tenth of a conventional steel roof, the hoisting into place does not represent any difficulty.

If a steel skin is used for a tent-like structure with a rather complicated geometry, then plates can be welded on pre-erected ribs, as shown in Figure 5 and Figure 6.

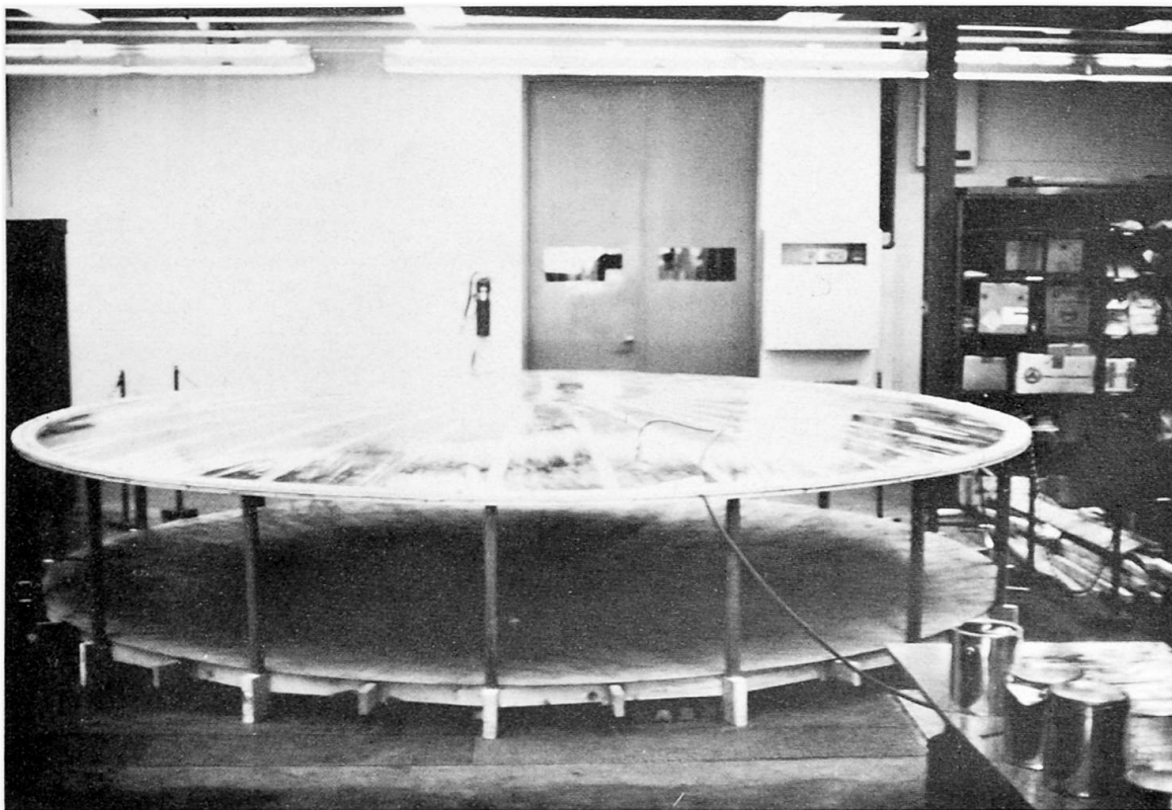


Fig. 4. Model Test of Stainless Steel Balloon Roof.
International Nickel Co., New York, N.Y.

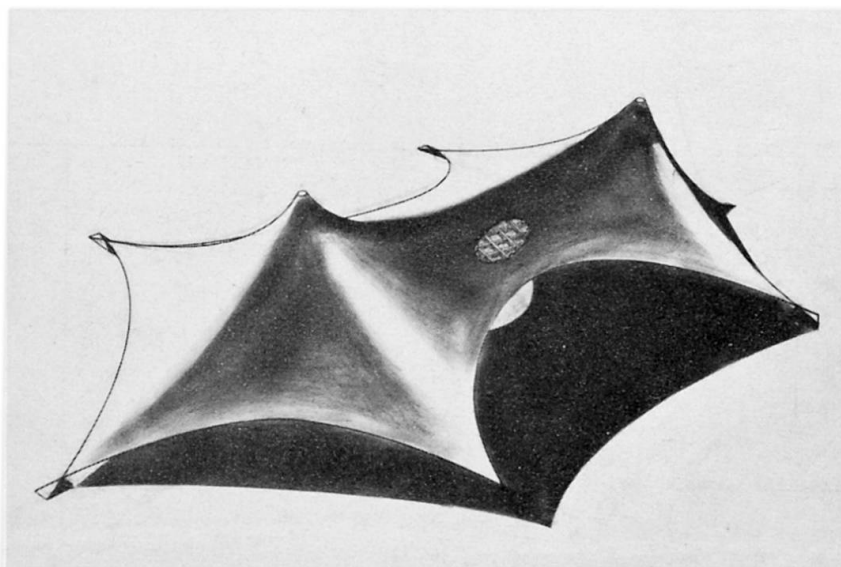


Fig. 5. Free Form Steel Skin Tent.

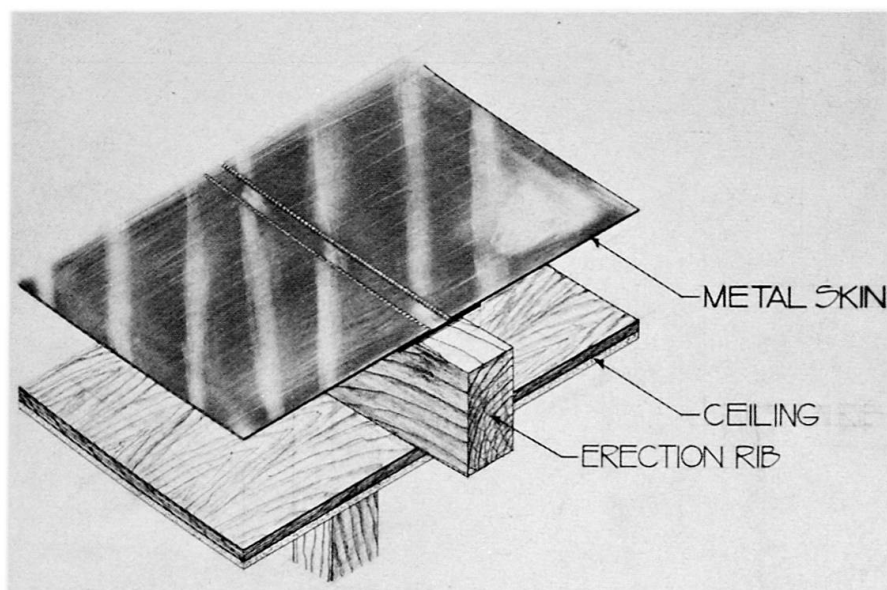


Fig. 5. Erection Detail

5. Permanence

Membrane roofs made of plastics or similar materials have a very serious disadvantage because of the very limited life expectancy of such materials. It is obvious that a stainless steel skin with its unlimited corrosion resistance eliminates completely the more temporary character of membrane roofs existing until now.

Summary

The further development of cable supported suspended roofs to metal skin membranes is discussed. The characteristic of the uniformity of such skins is used to stabilize their shapes by air pressure. Calculations and model tests prove the feasibility of such structures. The use of stainless steel guarantees permanence.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IIIa

An "Equivalent Stiffness" Method for Suspension Roof Analysis

Une méthode de "rigidité équivalente" pour l'analyse de toits suspendus

Eine Methode der "äquivalenten Steifigkeit" zur Analyse von Hängedächern

DONALD P. GREENBERG

Dr.-Ing.

Cornell University

USA

1. INTRODUCTION

A method is derived to obtain the "equivalent stiffness" of a single cable subject to an initial uniform load. This method may be generalized to include any type of vertical loading including triangular, partial or point loading. The equivalent stiffness is defined as the force required to cause a relative unit displacement of the end points of the cable. This displacement is in the direction of the chord connecting the end points.

Once the value of the equivalent stiffness is found, an initially parabolic cable in a cable network may be replaced by an imaginary straight bar-type element of equivalent stiffness. A schematic diagram of this bar-type element is shown in Figure 1. The area of the bar is assumed equal to that of the cable, while its length is assumed equal to that of the chord connecting the end points of the cable. Thus, the bar-type element may be considered to be composed of a fictitious material with an "equivalent modulus of elasticity" such that the resistance provided by the cable and the bar-type element in the chordal direction are equal. The magnitude of this equivalent modulus depends primarily upon the sag-span ratio, the existing stress level, and the true modulus of elasticity of the cable material. The concept of an equivalent modulus was first investigated by Ernst⁽¹⁾ with regard to the lateral stiffness provided by the main cables of suspension bridges to their supporting towers.

An idealized model of a cable roof system composed of parabolic cables can be created from these imaginary bar-type members. The model may then be analyzed for stresses and deflections for any new loading condition. This procedure may greatly simplify the analysis of certain types of cable roof systems as well as improve the accuracy of the predicted results when compared to present methods of analysis.

2. ADVANTAGES OF IDEALIZED BAR-TYPE MODELS

In present methods of analysis the cable network is generally represented by a system of straight line cable segments connecting the nodal points (Figure 2). Stiffness equations are generated at each nodal point. The number and location of the nodal points depend primarily upon: a) the area of the roof, b) the spacing of the cable mesh, and c) the curvature of the roof surface.

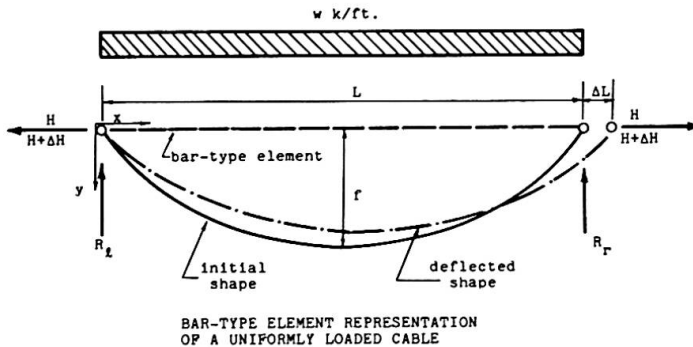
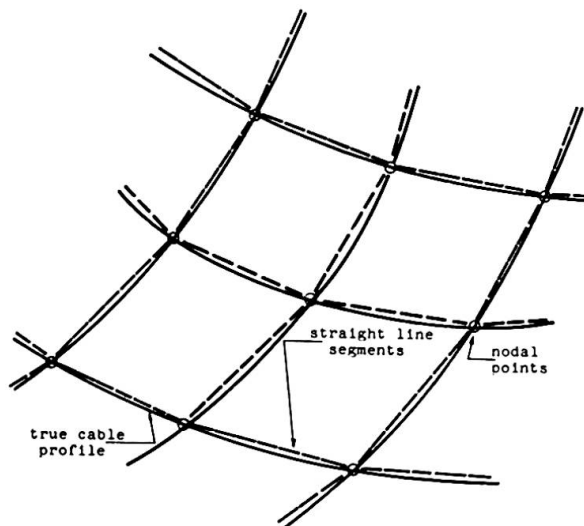


Figure 1

Frequently these methods of analysis are restricted by excessive computational time and limited machine storage capacity. A large number of nodal points are required to sufficiently represent the true roof system. This results in a large number of simultaneous equations. For cable roof structures, the size of the resulting stiffness matrix often may exceed the direct storage capacity of many present day computers. In addition, even if the computer's storage capacity is sufficient, the machine time required to obtain a solution is often uneconomical. Iterative solution techniques, although reducing the storage problems and eliminating the need for matrix inversion, do not always converge due to the ill-conditioned aspects of the deflection equations.⁽²⁾



CABLE NETWORK REPRESENTED
BY STRAIGHT LINE SEGMENTS
CONNECTING NODAL POINTS

Figure 2

Basically, these methods are finite difference approaches, where the continuous trajectories of the cables are represented by a series of discrete points. To solve the stiffness equations, either direct solution methods, such as matrix inversion or Gaussian elimination, or iterative solution methods are utilized.⁽⁴⁾

There are two distinct advantages to using the idealized bar-type models to represent parabolic cable segments. First, a smaller number of nodal points is required to represent the real structure, since each cable may be replaced by only one bar-type element.

This reduces the size of the total structure stiffness matrix which in turn has two decidedly beneficial results. The amount of computational machine time is shortened with its obvious accompanying economic advantages, and a smaller amount of information is required for input.

The second major advantage is that by using these bar-type models, each cable is represented as a continuous element, and not a series of straight line segments connected at discrete points. Thus, the true system is more accurately represented without an increase in the number of nodal points.

3. DERIVATION OF EQUATIONS FOR UNIFORM LOAD CASE

Assumptions

1. Small slopes compared to unity
2. Constant area per cable
3. Vertically applied uniform loading
4. Elastic material behavior
5. Initial profile of cable is parabolic
6. End points at equal elevation
7. Small changes in tension compared to the initial tension
8. Small displacements in the chordal direction compared to the initial length.

The sag and the arc length are expressed respectively by:

$$f = \frac{wL^2}{8H} \quad (1)$$

$$S = L \left(1 + \frac{8}{3} \frac{f^2}{L^2} + \dots \right) \quad (2)$$

where: f = sag
 w = load per unit length
 L = span length
 H = horizontal component of tension
 S = arc length of the cable

From differentiation, Equations (1) and (2) become:

$$df = \frac{wL}{4H} \cdot dL - \frac{wL^2}{8H^2} dH$$

$$df = \frac{2f}{L} dL - \frac{f}{H} dH \quad (3)$$

and,
$$ds = \left(1 - \frac{8}{3} \frac{f^2}{L^2} \right) dL + \left(\frac{16}{3} \frac{f}{L} \right) df \quad (4)$$

By substitution of Equation (3) into Equation (4),

$$ds = \left(1 + \frac{24}{3} \frac{f^2}{L^2} \right) dL - \left(\frac{16}{3} \frac{f^2}{LH} \right) dH \quad (5)$$

The elastic elongation for a change in horizontal tension⁽³⁾, dH , is:

$$\Delta S = \int_0^S \frac{dH}{AE} \cdot \frac{ds}{dx} ds \quad (6)$$

where: A = area of the cable
 E = modulus of elasticity

If only vertical loads are applied, the horizontal component of tension in the cable does not vary with the length, and thus the value of the change in horizontal tension, dH , is also constant. The integral of Equation (6) becomes:

$$\Delta S = \frac{dH}{AE} \int_0^S \frac{ds}{dx} ds = \frac{dH}{AE} (2S - L) \quad (7)$$

Substituting the value for the arc length from Equation (2);

$$\Delta S = \frac{dH}{AE} \left[L + \frac{16}{3} \frac{f^2}{L} \right] \quad (8)$$

For small changes in arc length, $\Delta S \rightarrow ds$, and therefore Equations (5) and (8) must be equal. Thus:

$$\frac{dH}{AE} \left[L + \frac{16}{3} \frac{f^2}{L} \right] = \left(1 + \frac{24}{3} \frac{f^2}{L^2} \right) dL - \frac{16}{3} \frac{f^2}{LH} dH \quad (9)$$

Rearranging Equation (9),

$$\frac{dH}{dL} = \frac{\left(1 + \frac{24}{3} \frac{f^2}{L^2} \right)}{\frac{16}{3} \frac{f^2}{LH} + \left(\frac{L + \frac{16}{3} \frac{f^2}{L}}{AE} \right)} \quad (10)$$

Now consider the extension of a straight bar-type element of length, L , cross-sectional area, A , and subjected to a change in tension, ΔH . This extension is expressed by the following:

$$\Delta L = \frac{\Delta H}{AE_e} \cdot L \quad (11)$$

where E_e = equivalent modulus of elasticity

Rearranging:

$$E_e = \frac{\Delta H}{\Delta L} \cdot \frac{L}{A} \quad (12)$$

As ΔL approaches zero, the ratio of $\Delta H/\Delta L$ approaches the derivative dH/dL . Thus, by substitution of Equation (10) into Equation (12), the equivalent modulus of elasticity of an imaginary bar which will exhibit the same lateral stiffness as the true cable is obtained. Thus,

$$E_e = \frac{dH}{dL} \cdot \frac{L}{A} = \frac{\left(1 + \frac{24}{3} \frac{f^2}{L^2} \right)}{\left(\frac{16}{3} \frac{f^2}{L^2} \cdot \frac{1}{H/A} \right) + \left(\frac{1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{L^2}}{E} \right)} \quad (13)$$

Equation (13) is the expression derived for the equivalent modulus. Alternatively, the expression for the equivalent stiffness of an idealized bar-type element can be written as:

$$k_e = \frac{E_e \cdot A}{L} = \left\{ \frac{\left(1 + \frac{24}{3} \frac{f^2}{L^2}\right)}{\left(\frac{16}{3} \frac{f^2}{L^2} \cdot \frac{1}{H/A}\right) + \left(\frac{1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{L^2}}{E}\right)} \right\} \cdot \frac{A}{L}$$

where k_e = equivalent stiffness of the bar-type element

4. EFFECT OF PARAMETERS

A. Sag/span ratio

The most important parameter in calculating the equivalent modulus of elasticity is the sag/span ratio. A plot of the variation of the equivalent modulus of elasticity versus sag/span ratios is shown in Figure 3. As the sag increases for a given span, the lateral resistance offered by the cable decreases. As the sag/span ratio decreases, the cables become flatter, and the equivalent modulus of elasticity approaches the real modulus. This is easily explained mathematically since all the terms of f^2/L^2 in Equation (13) approach zero, and the equation reduces to:

$$E_e \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{E}} \rightarrow E$$

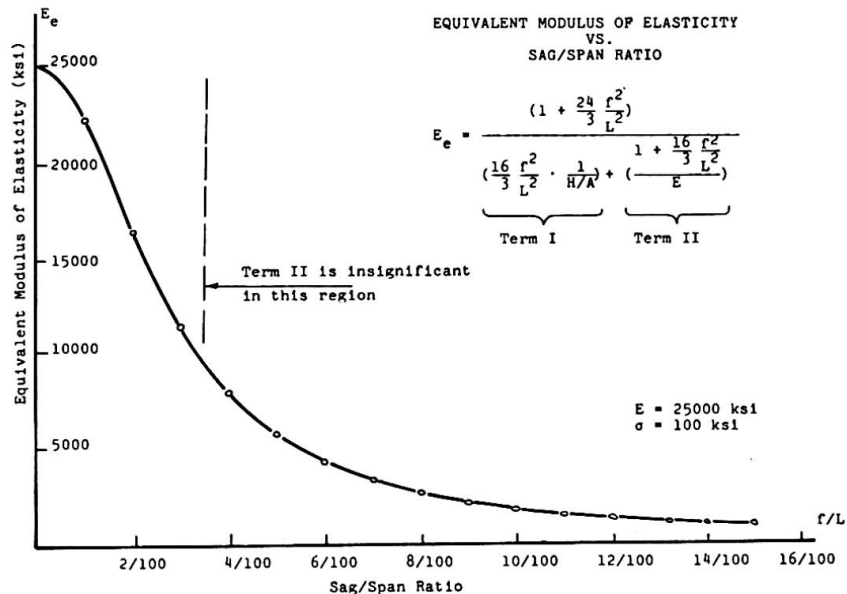


Figure 3

Two examples for calculating the equivalent modulus of elasticity are given below:

Example A

Small sag/span ratio

$$E = 25000 \text{ ksi}$$

$$f/L = 1/100$$

$$E_e = \frac{1 + (8.0 \times 10^{-4})}{1.33 \times 10^{-5} + 4.00 \times 10^{-5}}$$

$$E_e = \frac{1.0008}{5.33 \times 10^{-5}} = 18,750 \text{ ksi}$$

Example B

Large sag/span ratio

$$E = 25000 \text{ ksi}$$

$$f/L = 10/100$$

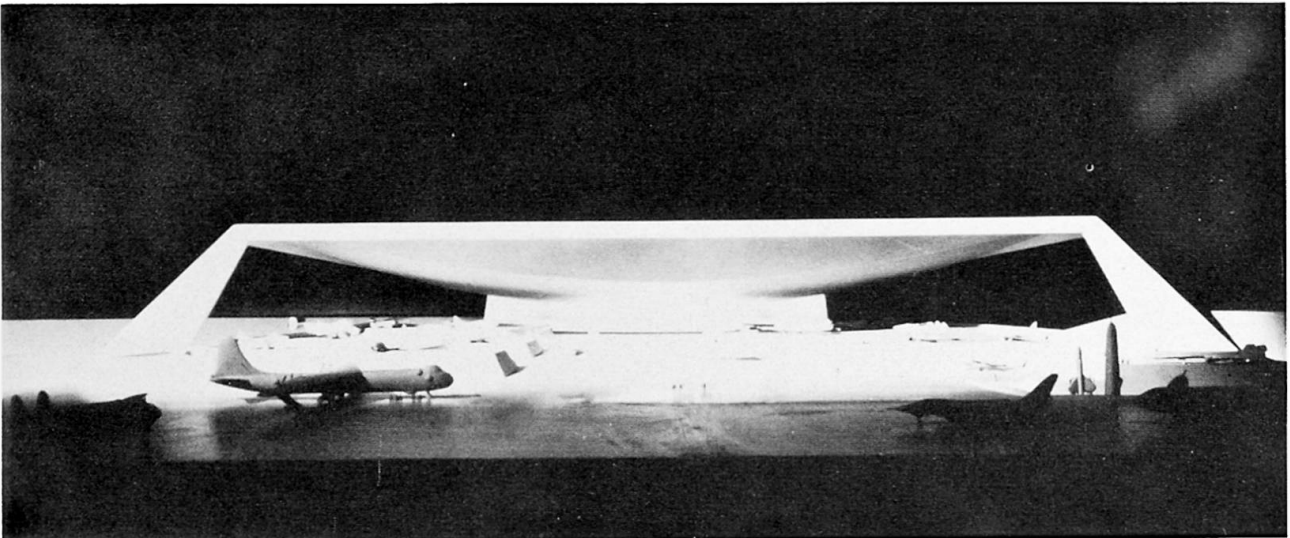
$$E_e = \frac{1 + (8.0 \times 10^{-2})}{1.43 \times 10^{-3} + 4.21 \times 10^{-5}}$$

$$E_e = \frac{1.08}{1.4721 \times 10^{-3}} = 731 \text{ ksi}$$

From these two examples it can be seen that the first term in the denominator plays the dominant role for all but very small sag/span ratios.

5. EXAMPLE OF PROPOSED AIR FORCE MUSEUM*

The advantages of the use of the bar-type element representation may best be illustrated by the method used to determine the forces and displacements of the proposed Air Force Museum in Dayton, Ohio.** A photograph of the architect's model is shown in Figure 4.



MODEL OF PROPOSED AIR FORCE MUSEUM

Figure 4

*The project was designed by the architectural firm of Roche, Dinkeloo and Associates of Hamden, Connecticut. Severud Associates of New York City served as the consulting engineers.

**The analysis of the stresses and deflections of the suspension roof was the responsibility of the author. The task of obtaining the idealized model and writing the computer program was done jointly with Associate Professors Richard White and Peter Gergely of Cornell University.

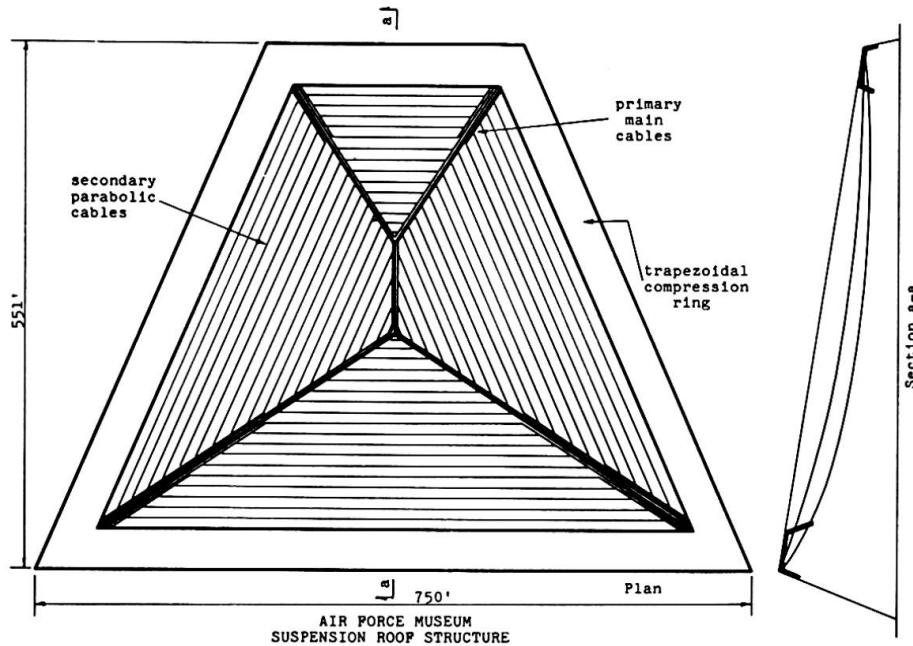
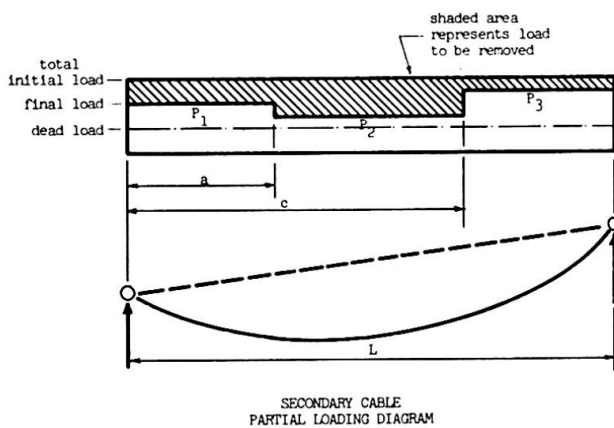


Figure 5

The roof is a suspension roof covering a large trapezoidal area. The structural system, which consists of primary main straight cables supporting sets of parallel secondary parabolic cables is shown in plan and section view in Figure 5. The vertical supports are provided only at the four corners of the trapezoid, and a concrete trapezoidal compression ring around the perimeter absorbs the thrusts from the main cables.

The use of a standard representation technique for the parabolic cables in the roof would be unwieldy; this would require such a large number of nodal points to represent the roof to sufficient accuracy that the direct core storage capacity of the available computer would be exceeded.*** In addition, the machine time required to solve the necessary set of simultaneous equations would have been uneconomical.



All secondary cables, which were initially of parabolic profile, were replaced by the idealized bar-type elements. The properties of these bar-type elements were determined by equations similar to those previously derived, except that they were generalized to include a set of three partial vertical loads per cable.

Figure 6

***The available computer was a CDC 1604.

By specifying the lengths and magnitudes of the line loadings to be added or removed from the initial loading (Figure 6), each secondary cable could then be subjected to a variety of loadings. Thus, the idealized model of the roof enabled analysis of the system for any set of asymmetric or point loading required by code. The resulting idealized model, consisting of only 74 nodal points, is schematically shown in Figure 7. The springs shown in this figure represent the idealized bar-type elements.

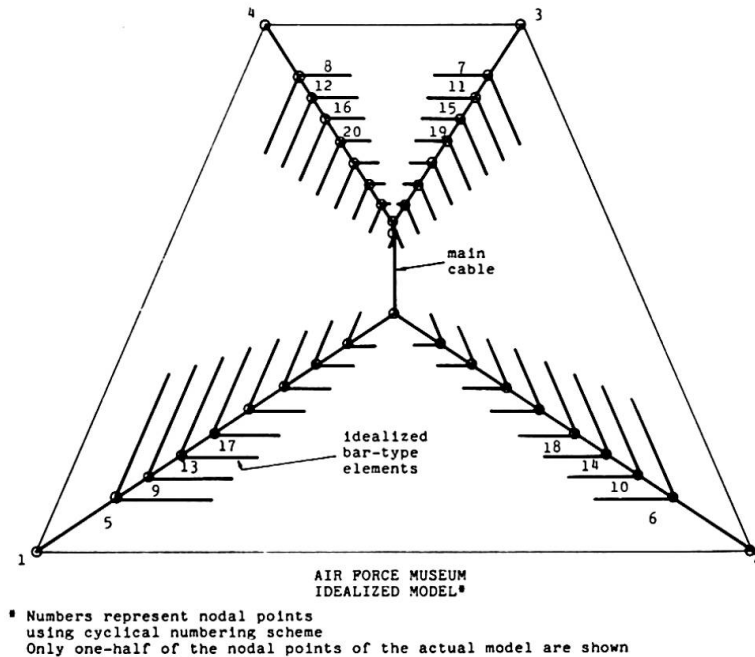


Figure 7

All vertical loads were applied to the secondary cables incrementally to conform with the limitations of the derivation. Secondary cable reactions were then applied to the main cable network, which included the stiffness of the secondary cables. The deformation equations of the total suspension roof were formed using Siev's⁽⁵⁾ method of analysis which guarantees a convergent solution. This formulation assumes elastic material behavior and includes the effects of changes in geometry due to large deformations. Using the schematic representation shown in Figure 7, the nodal points were cyclically numbered in such a manner, that combined with the use of diagonal subscripting, the storage requirements of the structural stiffness matrix were minimized. A Gaussian elimination process, adapted for diagonal subscripting, was used to solve the resulting set of simultaneous equations. A description of the computer program is shown following. The system was successfully analyzed for both uniform loading, and partial loading cases.

Computer Program for Analysis of Air Force Museum
Using "Equivalent Stiffness" Method

1. Begin Program.
2. Read initial equilibrium conditions (tensions, loads, geometry), material properties, types and increments of loading.
3. Compute initial lengths of primary cables.
4. Compute unstressed lengths of primary cables to use as a base for calculating future tensions.
5. Compute lengths of imaginary bar-type elements representing secondary cables.
6. Compute incremental loads from the secondary cables which will be applied to the total structure and find new secondary cable profiles and tensions.
7. Compute equivalent modulus of elasticity of bar-type elements.
8. Generate total structural stiffness matrix based on current conditions of geometry, loads, and tensions, including the stiffness contribution of the bar-type elements. Store as a diagonally-subscripted band matrix.
9. Apply load increments from (6) to the total structure.
10. Solve for incremental deflections in each direction at each nodal point using the stiffness equations and a Gaussian elimination technique adapted for diagonal-subscripting.
11. Compute new geometry and tensions from the linear solutions of (10).
12. Sum equilibrium at each joint to determine unbalance in each direction due to the "linearization" of the deflection equations.
13. Using current geometry and tensions from (11), reload the structure using the unbalanced residuals from (12) and return to (8).
14. Repeat until unbalanced loads become negligible. Solution is then converged for one increment of load.
15. If final load condition has not yet been reached, add another load increment by returning to (6).
16. Repeat until final load condition has been attained.
17. Print final geometry, stresses, and total deflections, including secondary cable profiles.
18. End Program.

6. BIBLIOGRAPHY

1. Ernst, H. R., "Der E-Modul von Seilen unter Berücksichtigung des Durchanges", Der Bauingenieur, Berlin, West Germany, Vol. 40, 1965.
2. Greenberg, D. P., "Inelastic Analysis of Suspension Roof Structures", Journal of the Structural Division, ASCE, May, 1970.
3. Norris, C. and Wilbur, J., "Elementary Structural Analysis", McGraw Hill.
4. Salvadori, M., and Baron, M., "Numerical Methods in Engineering", Prentice Hall.
5. Siev, A., "A General Analysis of Prestressed Nets", Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, Zürich, Switzerland, 1963.

7. SUMMARY

A method is presented to derive the "equivalent stiffness" of a uniformly loaded, parabolic cable which depends primarily on the sag/span ratio of the cable. To simplify the analysis of certain suspension structures, parabolic cables may be replaced by imaginary bar-type elements of equivalent stiffness. This replacement reduces the number of nodal points required to accurately represent these specific structures, and thus has the advantage of reducing both the computer solution time and the input data.

IIIa

Hinweise zur praktischen Ausarbeitung von Zuschnitten für gleichmaschig gespannte Seilnetze, gezeigt am Zuschnitt für die Netze des Olympischen Daches in München

Remarks about the Practical Cutting of Square Strained Networks Shown by the Cutting of the Roof for the Olympic Stadion in Munich

Considérations au sujet de la préparation des éléments constituants de treillis réguliers et leurs applications aux toitures construites pour les Jeux Olympiques de Munich

H. EGGER

Dr. techn.

Wien, Oesterreich

E. JASCH

Dipl.-Ing.

Rheinhausen, BRD

R. RÜMMELEIN

Dr.-Ing.

München, BRD

Arbeitsgemeinschaft Stahlbau-Dach

1. Einführung

Die gespannten Seilnetzkonstruktionen unterscheiden sich von Bauwerken herkömmlicher Art im Ersatz der Bauwerksmasse durch Energie, die in den Netzen in Form der Vorspannung gespeichert ist. Diese Netze erfordern eine im Vergleich mit herkömmlichen Baukonstruktionen ungewohnt hohe Herstellungsgenauigkeit, weil jeder Fehler in den Längen einem Fehler in den Kräften gleichkommt und somit unmittelbar das geplante, zur weiteren Lastabtragung notwendige Potential der Vorspannung verändert.

So liegt das Hauptproblem beim Bau gespannter Seilnetzkonstruktionen in der Ermittlung der exakten Längen aller die Konstruktion bildenden Seile, d.h. in der Findung und Realisierung des dem geplanten Vorspannzustand mit hinreichender Genauigkeit entsprechenden Zuschnittes der Netze.

1.1. Allgemeines über Zuschnitte von Netzwerken

Der Systemzuschnitt für ein gespanntes Netz beinhaltet die eindeutige Festlegung seiner Systemlinien und entspricht einem festgelegten definierten Vorspannzustand.

Der Ausführungszuschnitt wird mit den Angaben des Systemzuschnittes ausgearbeitet und umfasst alle für die Herstellung der Seile und im weiteren der Netze notwendigen Angaben. Er berücksichtigt sowohl die den Systemzuschnitt bestimmenden Vorspannkraft als auch die Form und Lage aller Beschläge und Umlenkkörper sowie die Dickenabmessungen der Seile selbst.

Die Konstruktion kann in den Systemzuschnitt zeichnerisch eingearbeitet oder bei der Ermittlung der Seillängen auch rechnerisch berücksichtigt werden.

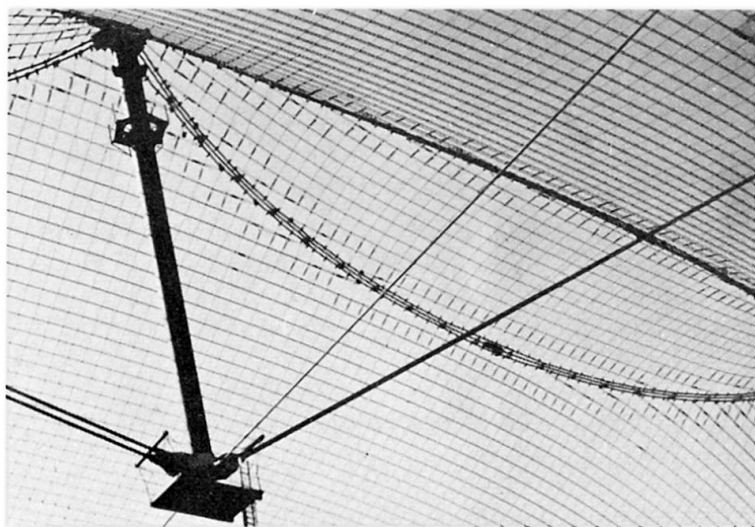
Das Aufzeichnen des Zuschnittes wird durch den Umstand erschwert, dass die sattelförmigen Flächen gespannter Seilnetze nicht abwickelbar sind. Es lässt sich zwar das gleichmaschige Netz, gelöst von der Einbindung in seine Randseile, eben ausbrei-

ten und somit fehlerfrei in einer Zeichenebene darstellen, nie aber der Netzrand mit den Randseilen. Er kann lediglich auf hinreichend eng gelegte Ebenen projiziert werden, die sich aus der Bedingung bestimmen, dass die Summe der Abstandskquadrate zum Minimum wird, oder mit Hilfe der 'wahren Längen' zwischen seinen System- oder Knotenpunkten abgewickelt werden. Das Ergebnis sind die Zuschnittspläne, die in beiden Darstellungsarten systembedingt fehlerbehaftet sind. Der Fehler kann jedoch bei entsprechendem Aufwand hinreichend klein gehalten werden.

1.2. Die Netze für das Olympische Dach in München

Das konstruktive Konzept des Olympischen Daches in München zeigt eine Reihe von sattelförmigen Flächen aus vorgespannten gleichmaschigen Seilnetzen, die von Randseilen eingefasst zwischen Hoch- und Tiefpunkten aufgespannt und miteinander verbunden sind.

Die Netzseile sind hier Zwillingsseile und die Netze sind in die Randseile mit Endschlaufen eingebunden, die an den Zwillingsseilen mit Spannschlössern angeschlossen sind. Die Randseile bestehen aus Seilsträngen gleicher Traglast, die überall dort, wo die Kraft im Rand grösser ist als die Traglast eines Stranges, in entsprechender Zahl in der Netzfläche nebeneinander liegend eingebaut sind. Dabei wird die Last aus dem Netz zunächst in das Girlandenseil eingetragen, welches seinerseits die dahinterliegenden Polygonseile mitbeansprucht.



Hinsichtlich der Methoden der Formfindung, der Formfestlegung und der Ermittlung des Systemzuschnittes sowie auch hinsichtlich konstruktiver Einzelheiten kann auf die Beiträge von Argyris, Linkwitz und Schlaich in diesem Vorbericht hingewiesen werden.

Bild 1. Die Netze über der Sporthalle mit Unterspannung

1.3. Zum Inhalt der vorliegenden Arbeit

In dieser Arbeit werden die Angaben genannt, die der Systemzuschnitt zu umfassen hat (Abschn.2), werden mögliche Methoden zur Ausarbeitung des Ausführungszuschnittes erläutert (Abschn. 3.1), wobei besonders auf die nur rechnerische Methode eingegangen wird (Abschn.3.2), die mit nur einem Rechenprogramm die Ermittlung der Bestelllängen direkt aus den Raumkoordinaten des Systemzuschnittes erlaubt, und wird die praktische Bearbeitung (Abschn.3.3) vorgeführt; weiter werden die bei der praktischen Durcharbeitung und Montage des Olympischen Daches hinsichtlich der Zuschnitte gemachten Erfahrungen (Abschn.4) mitgeteilt.

2. Vorgaben aus dem Systemzuschnitt

Zur Ausarbeitung des Ausführungszuschnittes sind nachfolgend zusammengestellte Angaben aus der Geometriebestimmung, der Festigkeitsberechnung und dem konstruktiven Entwurf notwendig.

Angaben aus zur	Geometriebestimmung	Festigkeitsberechnung	Konstruktiver Entwurf
allgemeinen Beurteilung	Zahl der bei der Formfindung realisierten Maschen Darstellungsart der Zuschnittspläne Grösse der maximalen Projektionsfehler Art der Netzseilinterpolation und der Randseilachsenglättung		Zahl und Lage von Nachspannstellen im Netz und möglicher Nachstellweg
Bestimmung der Netzseile	Übersicht des ausgebreiteten Netzes Begrenzung des gleichmaschigen Bereiches x) Zuschnittspläne	Seilquerschnitt Dehnverhalten des Seiles Vorspannkraft Ablängkraft	Ausbildung der Randseile, des Randseilan-schlusses und möglicher Spannstellen
Bestimmung der Randseile	Zuschnittspläne mit Stationierung der Randseilachse Koordinaten von Punkten auf dieser Achse (soweit möglich der Einbindungspunkte)	Seilquerschnitt Dehnverhalten des Seiles Verlauf der Seilkraft im Vorspannzustand und ihre Aufteilung bei mehreren Strängen Max.Abstand der Randseilverbindungsschellen Vorspannkraft im Netz	Ausbildung der Randseilschellen und ihr Mindestabstand bei sich knapp am Rand schneidenden Seilen Ausbildung der Randseilverbindungsschellen, sowie der Umlenkörper und Endverankerungen
Bestimmung der Abspannseile	Koordinaten der Knotenpunkte und der zugeordneten Abspannpunkte	Seilquerschnitt Dehnverhalten des Seiles Vorspannkraft Ablängkraft	Ausbildung der Knotenpunkte im Netz und der Abstützung im Widerlager
Bestimmung der Umlenk-körperkon-struktionen	Koordinaten der Knotenpunkte Zuschnittspläne aller abgehenden Randseile	Seildurchmesser Grösse der im Knoten angreifenden Vorspannkraft	Minimaler Umlenkradius Ausmass der Systempunktverschiebung im Falle zu grosser Umlenk-körper

x) Bereiche ungleicher Maschenweite entstehen, wenn im Zuschnittsmodell nur jedes n-te Netzseil gebaut wird, bei der Interpolation der fehlenden Netzseile am Rand, weil diese dort vorerst noch nicht eindeutig möglich ist.

3. Die Ausarbeitung zum Ausführungszuschnitt

3.1. Methoden

Bei der Ausarbeitung des Systemzuschnittes zum Ausführungszuschnitt werden die Systemlinien des Netzes durch Seile und seine Systempunkte durch Umlenkkörper- oder Knotenkonstruktionen ersetzt. Der Zuschnitt entspricht dann noch dem dem Systemzuschnitt zugrundeliegenden Vorspannzustand. Erst bei der Zerlegung des Netzes in seine Teile werden die einzelnen Längenmasse der Seile um jenes Mass verkürzt, um die sie sich unter Vorspannung dehnen und so dem Hersteller bekanntgegeben.

3.1.1. Die zeichnerische Methode

Der gezeichnete Systemzuschnitt (Bild 2a) wird im Detail oder schematisch (Bild 2b) zur Konstruktionszeichnung ergänzt, sodass alle zur Herstellung notwendigen, noch fehlenden Masse aus dieser Zeichnung direkt abgenommen werden können. Die Längenmasse (Markierungs- und Schnittmasse) werden dann für jedes Seil in die Masskette einer Schemazeichnung, dem sogenannten Streifen, eingetragen und so dem Hersteller bekanntgegeben.

Für die Zuschnittspläne empfiehlt sich wegen der erforderlichen Genauigkeit der Masstab 1:10. Nach der bisher gemachten Erfahrung ist selbst dann noch eine Zeichengenauigkeit von mindestens 1 mm notwendig, um die Seillängen in den dem Bauwerk zuträglichen Toleranzen bestimmen zu können.

Vorteile: einfache und überschaubare Darstellungsart, keine besonderen Hilfsmittel, wie Computer, erforderlich.

Nachteile: Güte allein abhängig von der Gewissenhaftigkeit der Zeichner und kaum kontrollierbar, grosser Personalaufwand.

Die zeichnerische Methode wurde bei der Zuschnittsbearbeitung für den Dt.Pavillon in Montreal angewendet [1],[2].

Bild 2a.
Zuschnittsplan

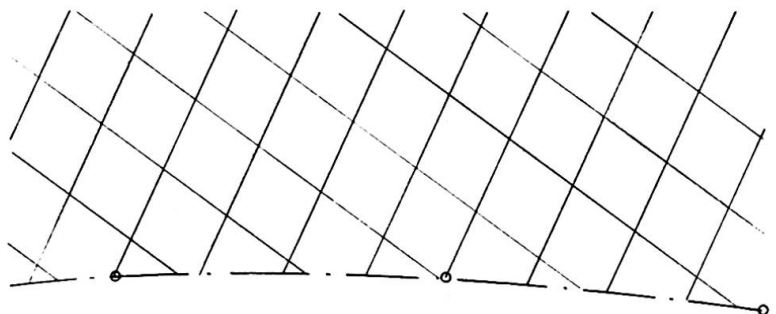
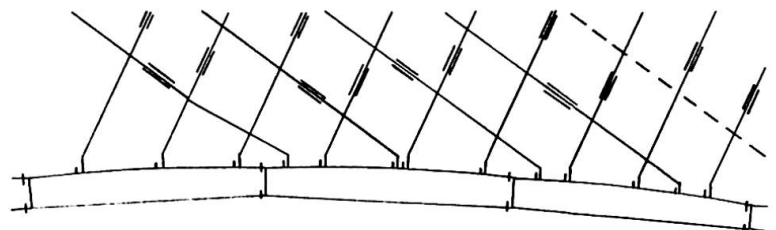


Bild 2b.
Zuschnittswerkplan mit den Achsen der Randseilstränge, der Randseil- und Randseilverbindungs-schellen sowie den zugehörigen Markierungen



3.1.2. Die rechnerische Methode

Bei der rechnerischen Methode wird die an sich mathematisch nicht definierte Randseilachse bereichsweise durch Kreisbögen

festgelegt, wobei ihre vorgegebene Länge beibehalten wird, und werden weiter alle Schritte des Aufzeichnens analytisch vollzogen. Diese Rechenschritte lassen sich in ein Rechenprogramm einbauen, das in einem Rechengang den Ausdruck der Bestellisten (geschriebene Streifen) nach Eingabe der Raumkoordinaten des Netzsystems ermöglicht. Eventuell vorhandene Zuschnittspläne dienen dann lediglich zur besseren Übersicht.

Vorteile: übersichtlich, geringer Personalaufwand, Güte unabhängig von den Leistungsschwankungen des technischen Personals.

Nachteile: konstruktive Verträglichkeit des materialisierten Systemzuschnittes an den Nahtstellen nur schwer kontrollierbar.

Die rechnerische Methode wurde bei der Zuschnittsbearbeitung für das Olympische Dach in München entwickelt.

Da sich die beiden genannten Methoden nur in der Durchführung unterscheiden, kann jeder beliebige Schritt auch zeichnerisch gelöst und das Ergebnis als Zwischenergebnis in die weitere Durchrechnung eingebaut werden. Ein solches Vorgehen wird immer dann notwendig, wenn die Angaben des Systemzuschnittes nicht vollständig sind oder aus konstruktiven Gründen Systempunktverschiebungen vorgenommen werden müssen; auch lassen sich mit ihm die unter 3.1.1 und 3.1.2 genannten Nachteile weitgehend vermeiden. Welche Schritte zweckmässig zeichnerisch gemacht werden, ist im Einzelfalle zu entscheiden.

3.2. Die rechnerische Methode

Alle im folgenden angegebenen Formeln und Hinweise gelten für den allgemeinsten Fall am Zusammenschluss zweier Netzflächen, deren Ränder von je einem Girlanden- und einem gemeinsamen Polygonseil eingefasst sind. Der freie Rand und das einfache Randseil, sowie das Girlandenseil mit mehreren Polygonseilen sind dann Sonderfälle.

3.2.1. Grundlagen

Die lagemässig weitgehend frei festlegbaren Randseilverbindungsstellen RVS (vgl. Abschn. 3.3.2) sind zunächst in die vorgegebene Stationierung der Randseilachse einzubinden.

Mit der Annahme von $B_{i,r}$ und $B_{k,l}$ folgt entsprechend Bild 3a die Bogenlänge $B_{i,k}$ zwischen den RVS i und k zu:

$$B_{i,k} = B_{i,r} + B_{k,l} \quad (1).$$

Für den Schellenbereich $i-k$ kann weiter festgelegt werden:

Der Radius des bereichsweise für die Randseilachse festgelegten Kreisbogens mit drei Punkten der Randseilachse nach

$$r_{i,k} = \frac{s_2}{2\sqrt{1-\cos^2\beta}} \quad \text{mit } \cos\beta = \frac{s_1^2 + s_3^2 - s_2^2}{2s_1s_3} \quad (2),$$

der Schnittwinkel zwischen den beiden Netzflächen mit einem

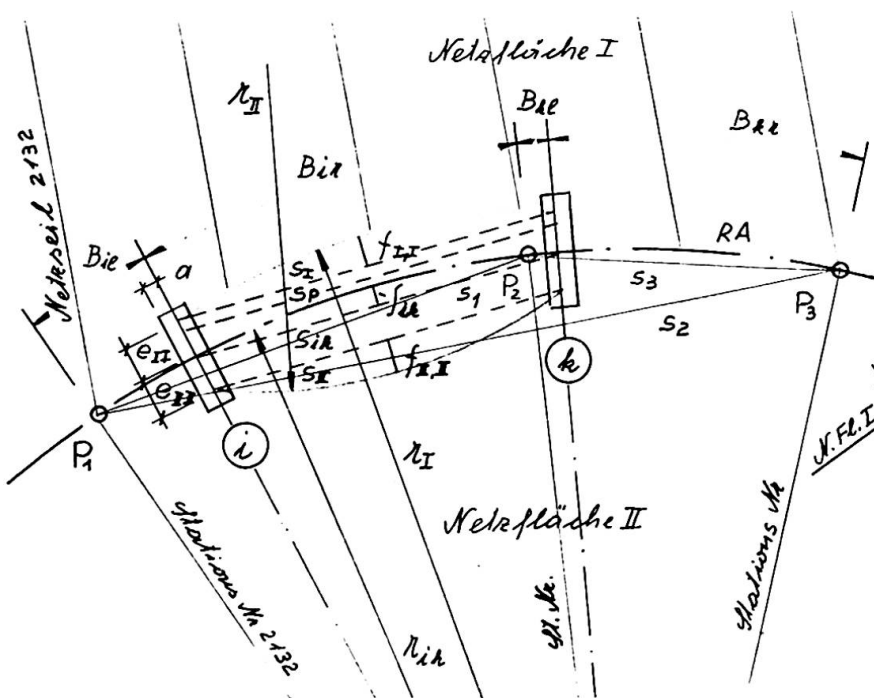


Bild 3b.

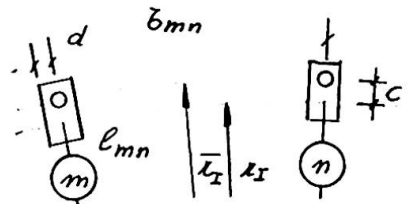
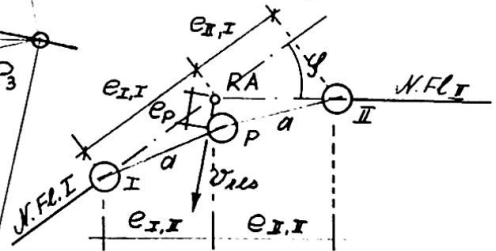
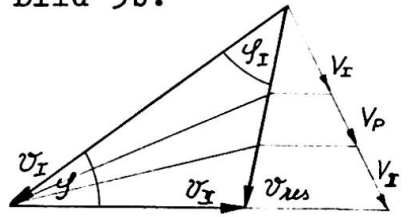


Bild 3a.

Bild 3c.

gegebenen Stationspunkt und je zwei gegebenen Netzflächenpunkten nach

$$P(x_1, y_1, z_1), P_{NI,2}(\dots), P_{NI,3}(\dots) \rightarrow \mathcal{N}_I$$

$$P_{NII,4}(\dots), P_{NII,5}(\dots) \rightarrow \mathcal{N}_{II}$$

$$\cos \varphi = \mathcal{N}_I \cdot \mathcal{N}_{II} \rightarrow \varphi \tag{3}$$

die Lage der einzelnen Randseilstränge zur Randseilachse RA, die identisch der Kraftachse ist, mit dem nach (3) bestimmten Schnittwinkel, den Vorspannkraften v in den vom Grat abgehenden Netzflächen und V in den Randseilsträngen sowie mit dem konstruktiv bedingten Abstand a der Randseile untereinander zeichnerisch nach Bild 3b - aus dieser graphischen Bestimmung folgen die Abstände $e_{I,I}$, $e_{II,II}$ und e_P - ;

der Stich der Girlande in den Netzflächen I und II mit den jeweiligen Bedingungen

$$H = \frac{v s^2}{8 f} \text{ und } H = H_{ges} \cdot \frac{V}{V_{ges}} \text{ nach}$$

$$f_{I,I} = \frac{v_I}{v_{ges}} \cdot \frac{V_{ges}}{V_I} \cdot f_{ges} \quad (\text{analog } f_{II,II}) \tag{4}$$

wobei sich der Index 'ges' auf die Randseilgesamtachse RA und auf die resultierende Gesamtbelastung bezieht;

der Radius der Girlande in den Netzflächen I und II mit (1), (2) und (4) nach

$$r_I = \frac{s_I^2}{8 f_{I,I}} + \frac{f_{I,I}}{2} \quad (\text{analog } r_{II,II}) \tag{5}$$

die Bogenlänge der Girlanden im Vorspannzustand ermittelt aus (5) nach

$$B_I = \frac{\pi}{90} \cdot \frac{\alpha_I}{2} \cdot r_I \quad (\text{analog } B_{II}) \quad (6),$$

und die Länge des Polygonseiles nach

$$B_P = s + 2e_p \sin \frac{\alpha}{2} \quad (7).$$

Für die Stationierung der RVS sowie der Ein- und Ausläufe aus den Umlenkörpern folgen mit den Materialkennwerten der Randseilstränge weiter die (6) und (7) entsprechenden Längen im Ablängzustand zu

$$B_{I,0} = \frac{B_I}{\left(\frac{\Delta\sigma_I}{E} + 1\right) \cdot (1 + \epsilon_{pl}) \cdot \left(1 + \frac{\Delta\sigma_A}{E}\right)} \quad (\text{analog } B_{II,0}) \quad (8),$$

wobei der erste Nennerterm das elastische, der zweite das plastische Verhalten des Seilstranges und der dritte einen gemessenen Spannungsabfall infolge plastischer Verlängerung des mit den Randseilschellen belegten Seiles berücksichtigt, bzw.

$$B_{P,0} = \frac{B_P}{\left(\frac{\Delta\sigma_P}{E} + 1\right) \cdot (1 + \epsilon_{pl})} \quad (9),$$

und für die Festlängen in den Umlenkörperkonstruktionen und der Abspannungen gilt:

$$B_{n,I,0} = \frac{B_{n,I}}{\left(\frac{\Delta\sigma_I}{E} + 1\right) \cdot (1 + \epsilon_{pl})} \quad (\text{analog } B_{n,II,0}) \quad (10),$$

wobei n die Anzahl der Abspannungen und Umlenkungen angibt.

Mit (8) und (10) folgt dann die Stationierung der Achsen der RVS auf den Girlanden der Netzflächen I und II

$$L_I(x) = \frac{n=m+1}{\sum_{n=1}^{n=m+1}} B_{n,I,0} + \frac{i=x-1, k=x}{\sum_{i=1, k=2}^{i=x-1, k=x}} B_{I,0,ik} \quad (\text{analog } L_{II}(x)) \quad (11),$$

wobei $m \dots$ Anzahl der Gusskörper zwischen $x=2$ und $x=k$, und die Stationierung der für die Montage der RVS notwendigen Markierungen am Schellenanfang mit

$$L_I = L_I - a \quad (\text{analog } L_{II}) \quad (12),$$

wobei a die halbe Breite der RVS ist.

Die Gesamtlänge der Girlandenseile in den Netzflächen I und II, sowie des Polygonseiles folgt aus (11) zu

$$L_I = \frac{n=m+2}{\sum_{n=1}^{n=m+2}} B_{n,I,0} + \frac{i=k_{\max}-1, k=k_{\max}}{\sum_{i=1, k=2}^{i=k_{\max}-1, k=k_{\max}}} B_{I,0,ik} \quad (\text{analog } L_{II}) \quad (13).$$

Die Stationierung der zum Setzen der Randseilschellen RS notwendigen Markierungen auf den Girlanden der Netzflächen I und II zwischen den RVS i und j erfolgt nach Bild 3c aus

$$L_s = L_I - d + \sum_{m=0, n=1}^{m=y-1, n=y} b_{0, mn} \quad (14)$$

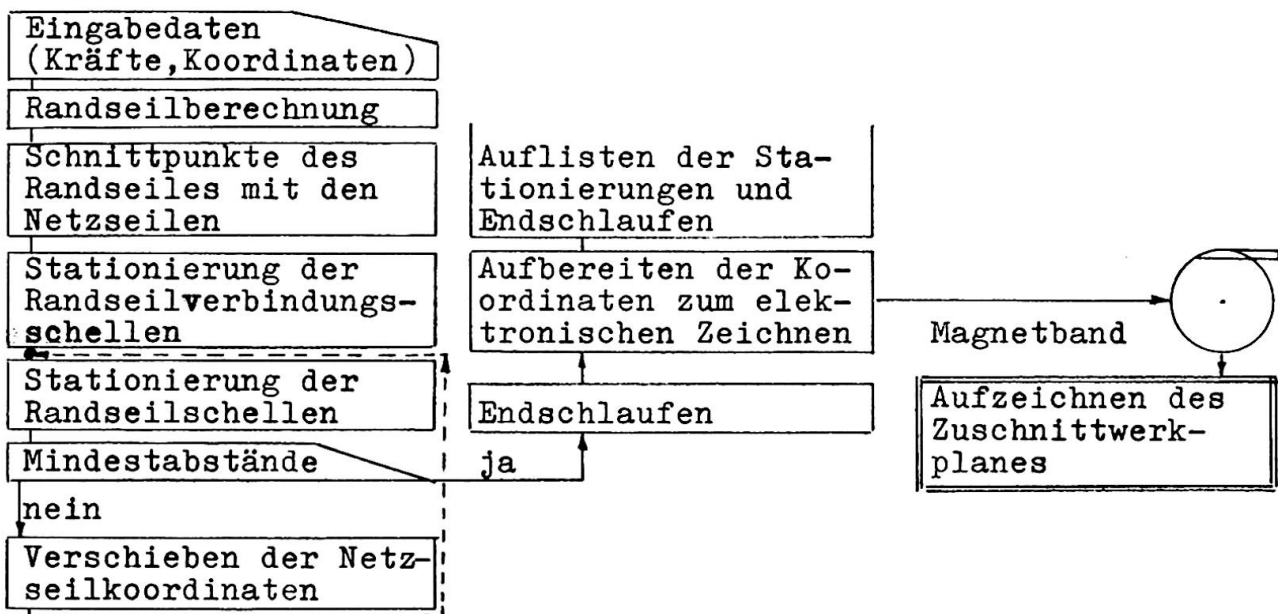
und aus den Koordinaten der Bolzenachse auf r_I und den entsprechenden Netzknotenpunkten errechnet sich schliesslich die Länge der Endschlaufen.

3.2.2. Computerbearbeitung

Da die vorhergehend angegebenen Rechenschritte beim Olympischen Dach für 224 Randseile – insgesamt mehr als 15 km lang mit 13.200 Endschlaufenanschlüssen und 17.600 Stationierungen – durchzuführen waren und die verschiedenen Randseilausführungen mit einem allgemeinen Rechenprogramm bearbeitet werden konnten, bot sich eine Computerbearbeitung an, bei der auch die Zuschnittswerkpläne von einer angeschlossenen, elektronisch gesteuerten Zeichenmaschine aufgezeichnet wurden.

Zu den angegebenen Rechenoperationen kamen noch konstruktive Bedingungen, so waren für die Abstände der Randseil- und Randseilverbindungs-schellen Mindestmasse einzuhalten. Dies bedeutete in manchen Fällen ein Verziehen der Netzseile aus den Achsen des gleichmässigen Netzes heraus zum Rand hin. Diese zeichnerisch zeitraubenden Korrekturen wurden im gleichen Programmdurchlauf mit Hilfe entsprechender Kriterien erledigt.

Der Programmablauf für ein einfaches Randseil lässt sich in folgendem Flussdiagramm schematisch darstellen



Die EDV-Organisation konnte auf ein zeitliches Minimum von 24 Stunden beschränkt werden. Die Eingabedaten (Kräfte und Koordinaten) wurden mittags abgeliefert, nachmittags gelocht, nachts lief das Programm, am nächsten Morgen kamen die Listen ins Konstruktionsbüro und am gleichen Mittag die von einer elektronisch gesteuerten Zeichenmaschine gefertigten Zuschnittswerkpläne. In diesem zeitlichen Rhythmus konnten täglich mehrere Randseile berechnet werden.

3.3. Die praktische Durchführung

Im folgenden wird das schrittweise Vorgehen bei der Ausarbeitung des Ausführungszuschnittes für das Olympische Dach in München mitgeteilt.

3.3.1. Netzseile

Festlegen der Spannschlösser zwischen Zwillingsseil und Endschleufe im Zuschnittsplan nach baupraktischen und gestalterischen Gesichtspunkten, wobei diese nicht vor der ersten vollen Masche und in einem konstanten Abstand vor dem letzten Knoten liegen sollen, und Eintragen in die Netzübersicht.

Abzählen der gleichen Maschen und Bestimmen der ungleichen Maschenweiten aus den Koordinaten des Netzsystems, wobei diese Längen um das Mass der elastischen Dehnung bei Vorspannung zu reduzieren sind, als Angaben für den Hersteller.

Die Längen der Endschleifen (Netzseilenden) folgen bei bekannter Lage der Spannschlösser aus der Zuschnittsberechnung des Randes.

3.3.2. Randseile

Einpassen der Knoten- und Umlenkkörper in die Zuschnittspläne und Einbinden der Auslaufpunkte in die Stationierung der Randseilachse; sofern notwendig Verziehen der Randseilachse.

Ermitteln der Seillängen in den Umlenkungen.

Austeilen der Verbindungsschellen bei n-Randseilsträngen nach statisch vorgegebenem Maximalabstand und so, dass keine Netzseile zu verziehen sind und dass eine annähernd gleichmässige Austeilung am Randseil und zwischen den anlaufenden Netzseilen gegeben ist.

Zahlenmässiges Festlegen der Abstände der Verbindungsschellen von den vorhergehenden Stationierungspunkten mit (1).

Bestimmen des Schnittwinkels zwischen benachbarten Netzflächen mit (2).

Festlegen der Lage der einzelnen Randseile im Raum und gegenüber der Randseilachse nach Bild 3b.

Zusammenstellen der Eingaben für die Computerrechnung: Koordinaten der Punkte auf der Randseilachse mit fortlaufender Nummerierung, Längen in den Abspannungen und Umlenkungen, Stationierung der Randseilverbindingsschellen, Vorspannkräfte in den einzelnen Randseilsträngen, Winkel zwischen den Netzflächen und Flächenvorspannung in den Netzen je Schellenbereich, Abstände der Randseile von der Randseilachse an jeder Verbindungsschelle und Koordinaten der beiden ersten anlaufenden Knotenpunkte von jedem Netzseil, die, wenn nicht bekannt, aus den Zuschnittsplänen mit einem Digitalisiergerät abgegriffen werden können, sowie Lage der Spannschlösser.

Aus der Computerrechnung folgt dann die Randseilgesamtlänge, die exakte fortlaufende Stationierung der Randseilverbindingsschellen und der Randseilschellen mit den zugehörigen Netzseilnummern, sowie die Endschleifenlängen aufgelistet als Angaben für den Hersteller.

3.3.3. Abspannseile

Bestimmen der Längen aus den Koordinaten der Systempunkte mit Berücksichtigung ihrer baulichen Durchbildung, des Durchhanges auf freier Strecke und der Vorspannkraft.

4. Erfahrungen bei der Anwendung in München

4.1. bei der Zuschnittsausarbeitung

Die ausschliesslich rechnerische Methode zur Ausarbeitung des Ausführungszuschnittes ist nur mit Vorbehalt zu empfehlen, denn sie ist schwerfällig beim Eingreifen, wenn notwendige konstruktive Änderungen dies erfordert.

4.2. bei der Montage

Der geplante Spannungszustand lässt sich nicht exakt realisieren. Als eine Ursache können die unterschiedlichen Toleranzen im E-Modull bei den Rand- und Netzseilen angesehen werden. In den Netzseilen sind daher für Korrekturen am Bau Spannschlösser sinnvoll anzuordnen.

Mit Spannschlössern entlang des Randes, wie sie in München die bauliche Durchbildung der Endschlaufen bedingte, können aber allein Einflüsse aus unterschiedlichen Toleranzen und Ungenauigkeiten an der Nahtstelle Netz-Randseil ausgeglichen werden. Es ist daher fallweise zu überlegen, die Netzfläche durch Spannschlossreihen zu unterteilen, um mit diesen vorhandene Fehler verkleinern zu können.

Literaturnachweis

- H.Egger, E.Haug, F.Leonhardt: Der dt.Pavillon ...
'Der Stahlbau' 1968, Heft 4 und 5, Wilhelm Ernst u.Sohn
E.Haug, L.Medlin, F.Otto: Protokoll über die Arbeiten des Institutes für leichte Flächentragwerke am dt.Pavillon (nicht im Handel)

Zusammenfassung

Es ist möglich, aus den Raumkoordinaten des Systemzuschnittes sämtliche Seillängen mit Berücksichtigung der Vorspannkraft und der konstruktiven Durchbildung des Netzes elektronisch exakt zu berechnen. Es ist aber nicht möglich, den geplanten Vorspannzustand am Bau ohne Nachstellmöglichkeiten exakt zu realisieren.

IIIa

Das Olympiadach in München

The Olympic Roof at Munich

Le Toit Olympique à Munich

JÖRG SCHLAICH

H. ALTMANN, R. BERGERMANN, K. GABRIEL, K. HORSTKÖTTER,
K. KLEINHANSS, P. LINHART, G. MAYR, J. NOESGEN, U. OTTO, H. SCHMIDT
Ingenieurbüro Leonhardt und Andrä, Stuttgart, BRD

1. DER ENTWURF DER TRAGENDEN KONSTRUKTION

Das Olympiadach wurde aus der bei einem Wettbewerb preisgekrönten Idee entwickelt, die einzelnen Sportstätten durch ein einheitliches, leicht wirkendes und durchsichtiges Dach zu einer Großform zu vereinigen. Die Aufgabe, eine insgesamt 75 000 m² große Dachfläche möglichst frei zu gestalten und darunter stützenfreie Räume zu schaffen, lösten die Architekten Behnisch & Partner, Frei Otto und die Ingenieure Leonhardt und Andrä mit einer vorgespannten Seilnetzkonstruktion (Bilder 1 und 2).

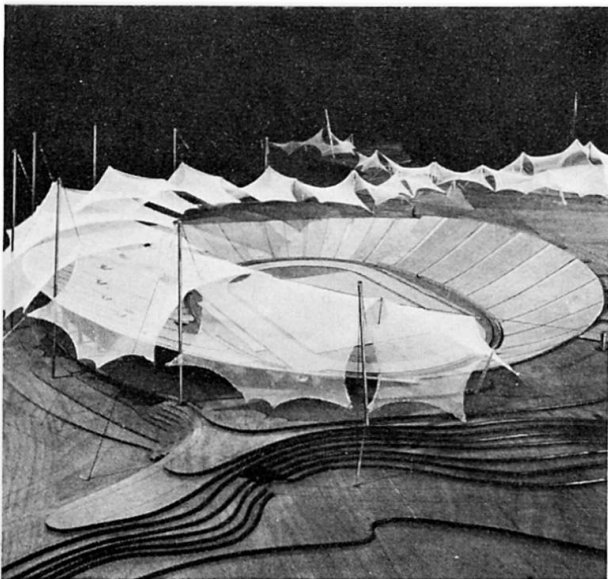


Bild 1: Stadion(links) Zwischenbereiche und Sporthalle(rechts)

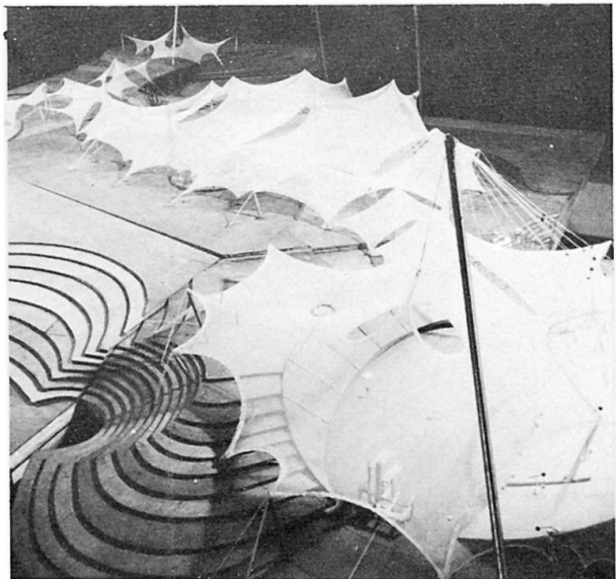


Bild 2: Sporthalle(hinten) und Schwimmhalle, Modellfotos

(Gesamtaufnahme, vgl. Bild 1 des Einführungsberichtes IIIa)

An jeder Stelle des Daches wurden ausreichende, wenn auch häufig nur sehr schwache Krümmungen der Netzflächen dadurch geschaffen, daß sie an vielen Punkten durch außenstehende oder frei hängende unterspannte Maste unterstützt und in viele einzelne, aneinandergeschaltete Dachflächen unterteilt wurden.

Beim Stadion wurde die Aufgabe, die Westtribüne zu überdachen, durch Aneinanderreihen von 9 sattelförmig gekrümmten Netzflächen gelöst (Bild 1). Die einzelnen Netze sind mit Randseilen eingefasst. In den Berührungspunkten benachbarter Netze gleichen sich die Kräfte in Ringrichtung über gemeinsame oder gekoppelte Knotenpunkte aus. In radialer Richtung sind die Knotenpunkte an 8 großen Masten aufgehängt und zum Spielfeld hin gegen ein Randkabel verspannt, das in zwei Widerlagern am Rande der Stadionschüssel verankert ist (Bilder 3 und 4). Die großen Maste sind praktisch nur in einer Ebene abgespannt, müssen sich also bei Querbelastung über Auslenkungen stabilisieren.

Der Vorteil, den eine Einfassung von Netzen mit Randseilen dadurch bringt, daß nur wenige Knotenpunkte zur Unterstützung der Netze notwendig sind, mußte auch hier mit dem Nachteil erkauft werden, daß sich die Netze zwischen benachbarten Knotenpunkten glatt ziehen wollen. Vor allem an den Netzecken (Zwickel) stellen sich praktisch ebene Flächen ein. Wenn diese Flächen, wie hier entlang des Randkabels, wenig geneigt sind, müssen sie gegen die Verformungen unter Schneelasten hoch vorgespannt werden. Die Zwickel sind auch insofern problematisch, als ihre kurzen Netzseile schon unter kleinen Lastverformungen der Randseile große Spannungswechsel aufweisen.

Umstritten ist die Frage der Überdeckung der linsenförmigen Augen zwischen den Knotenpunkten benachbarter Netze. Die hier gewählten schwach vorgespannten Augennetze beeinflussen die Geometrie der Hauptnetze ungünstig und erschweren die Zuschnittsermittlung erheblich, so daß Biegestäbe zwischen den Randseilen vorteilhafter sein dürften.

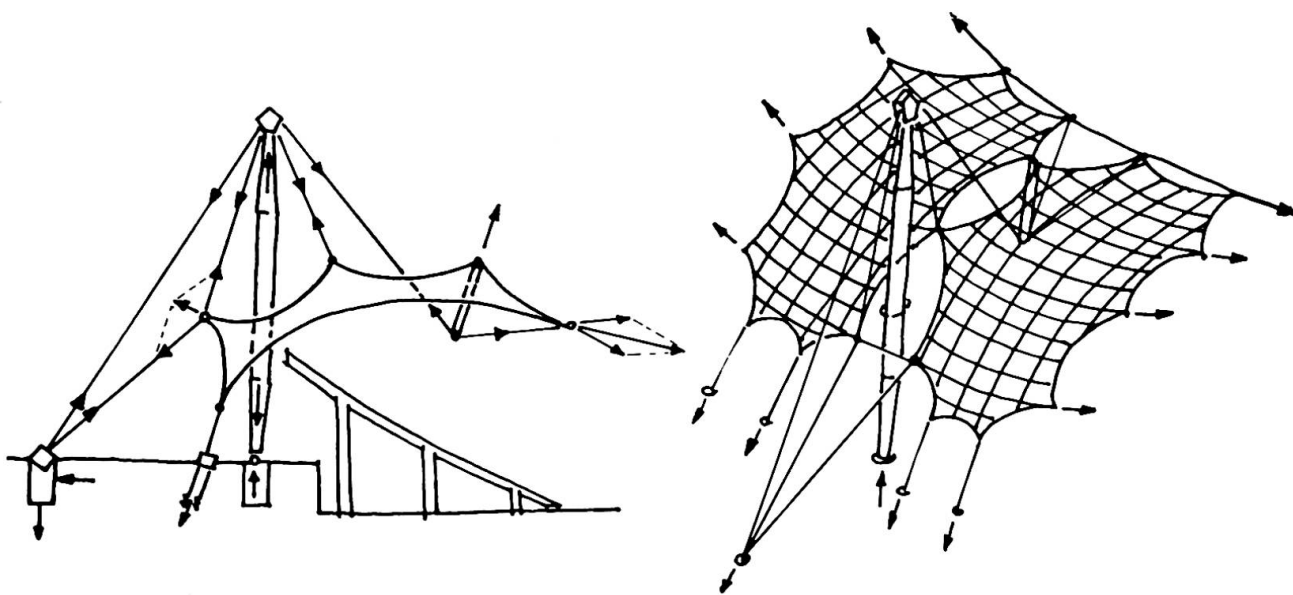


Bild 3: Das Tragwerk des Daches über der Tribüne des Stadions

Für das Dach über der Sporthalle wurde ein im Prinzip ähnliches Tragwerk wie für das Stadion gewählt. Es ist aus 5 aneinandergereihten Netzflächen zusammengesetzt (Bilder 2 und 6). Auf der den beiden Hauptmasten gegenüberliegenden Seite der Halle treten hier an die Stelle des Randkabels des Stadions abgespannte Maste, die die Netze unterstützen, und direkt abgespannte Knotenpunkte. Allerdings hat nur das mittlere Netz eine durchgehend sattelförmige Krümmung, während die 2x2 Seitenfelder Wendeflächen sind, weil je zwei ihrer gemeinsamen Knotenpunkte zu zwei Tiefpunkten hinuntergezogen wurden, um damit einen beidseitigen seitlichen Raumabschluß der Halle zu erreichen. Diese komplizierten Flächen mußten mit hoher Vorspannung erkaufert werden (vgl. Abschn. 4). In den Außenbereichen dieses Daches wurde auf Augen verzichtet und die benachbarten Netze in gemeinsamen Gratseilen zusammengeführt.

Das Dach über der Schwimmhalle hat eine frei gestaltete Flächengeometrie. Eine große, an ihrem Umfang vielfach direkt oder über Randmaste abgespannte Netzfläche, ist einmal an einem Hauptmast über zwei große Augseilschlaufen aufgehängt und zweimal zu Tiefpunkten hin abgespannt (Bilder 2 und 6). Der eine Tiefpunkt liegt im Innern der Netzfläche, wobei die Netzkräfte über ein nach unten abgespanntes Ringseil eingesammelt werden, während der andere - wie bei der Sporthalle - ein gemeinsamer Knotenpunkt mit einer zweiten Netzfläche ist. Am Zusammenschluß der beiden Netzflächen sind zwei linsenförmige Augen und eine beiden Netzen gemeinsame Kehle ausgebildet. Die Halle öffnet sich an einer Seite zum See hin. Diese Öffnung ist während der Olympiade mit einer zusätzlichen Tribüne zugebaut, die provisorisch mit einem vorge-spannten PVC-beschichteten Polyester-Gewebe überdacht wird, das teilweise am Schwimmhallendach aufgehängt ist und allein eine Grundfläche von 2 500 m² überdacht.

Die Zwischenbereiche (Bilder 1 und 5) zwischen den Sportstätten sind mit vielfältigen Netzflächen überdacht, die zwischen die anderen Dächer eingehängt oder unabhängig an Masten aufgehängt oder abgespannt sind.

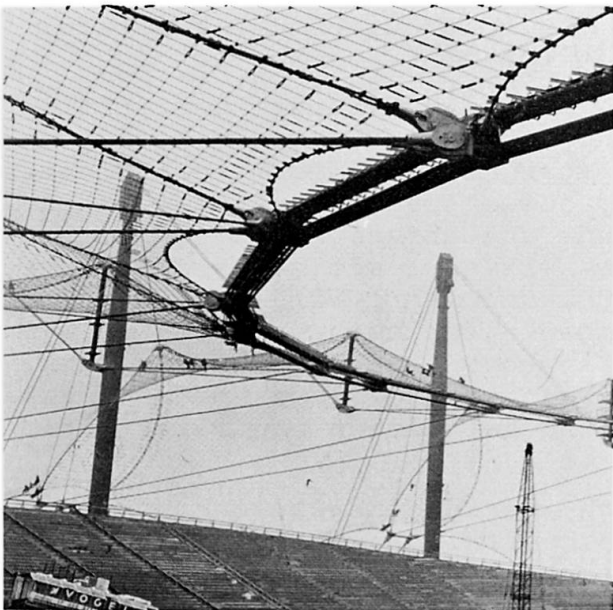


Bild 4: Das Dach über dem Stadion von der Tribüne aus gesehen

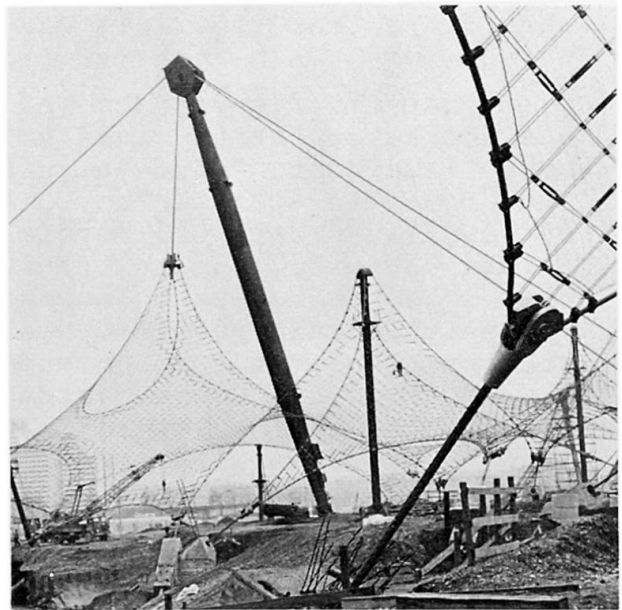


Bild 5: Ausschnitt aus den Zwischenbereichsdächern (ohne Dachhaut)

2. BEURTEILUNG DES OLYMPIADACHS

Die Wettbewerbsidee eines möglichst freizügig gestalteten, alle Sportstätten und die Zwischenbereiche erfassenden Daches, war nur mit einer vorgespannten Seilnetzkonstruktion zu realisieren, da nur sie unter diesen Bedingungen die vollkommene Übereinstimmung zwischen Gestalt und Kraftfluß, der zeitgemäßen Forderung an die Baukunst, ermöglichte. Diese Konstruktionen sind hinsichtlich ihrer vielfältigen Gestaltungsformen unübertroffen.

Durch geschickte Wahl der Verteilung der Vorspannkkräfte in den Seilnetzen läßt sich, wie mit keinem anderen Bausystem, eine solch vollkommene Anpassung der Dachformen an die Idee der Architekten und die Vielfältigkeit des Geländes und der Unterbauten erzielen, wie dies beim Olympiadach möglich und notwendig war.

Auch die beim Olympiadach vom Fernsehen gestellte Forderung nach einer lichtdurchlässigen Dachhaut läßt sich mit vorgespannten, weitmaschigen Seilnetzen, bei denen hinsichtlich des Tragverhaltens in der Dachfläche keine verschattende Masse erforderlich ist, in unübertroffenem Maße erfüllen.

Schwierig ist eine gültige Beurteilung der Wirtschaftlichkeit vorgespannter Seilnetzkonstruktionen. Die Behauptung, daß diese "leichten Flächentragwerke" deshalb, weil ihre oberirdisch sichtbaren Massen gering, also leicht sind, auch unschlagbar wirtschaftlich sind, ist nicht zu halten.

Vorgespannte Seilnetzkonstruktionen können gegenüber anderen Bauweisen vorteilhaft sein, wenn große Spannweiten gefordert werden und gleichzeitig ausreichende Bauhöhen für reichliche Krümmungen der Netzflächen zur Verfügung stehen, und wenn die Flächen so gewählt werden können, daß die Vorspannkkräfte nicht zur Begrenzung der Verformungen unnötig erhöht werden müssen (vgl. Abschn. 4). Ausschlaggebend ist, daß es gelingt, ihre Kräfte auf günstige Weise in einen guten Baugrund abzuleiten. Gerechtfertigt sind vorgespannte Seilnetzkonstruktionen in jedem Fall, wenn bei großen freien Spannweiten wenigstens einer ihrer beiden oben genannten Vorzüge, ihre freie Gestaltbarkeit und ihre mögliche Durchsichtigkeit für das Bauwerk von besonderer Bedeutung ist.

Über das Olympiadach und damit über die Seilnetzkonstruktionen überhaupt gab es wegen dessen hohen Baukosten viele Diskussionen. Diese Kosten sind auf die außergewöhnliche Neuartigkeit der Bauaufgabe zurückzuführen, die ohne jedes Vorbild in kurzer Zeit zu bewältigen war. Die Bereitstellung der Abmessungen jedes einzelnen Bauteils (Zuschnitt) für die Fertigung mit einer Genauigkeit, wie sie sonst im Bauwesen nicht gefordert wird (vgl. Abschn. 5), war das zentrale Problem. Die Abhängigkeiten zwischen diesem Zuschnittsproblem und allen anderen Planungs- und Bauarbeiten für das Dach und die Sportstätten forderten ein völliges Umdenken gegenüber gewohnten Planungsabläufen und bereiteten den Terminplanern größte Schwierigkeiten.

Berücksichtigen sollte man auch, daß die Entwicklungskosten für das Olympiadach einen Abfall technologischen Wissens beinhalten, der allen künftigen Seilkonstruktionen zugute kommt. Im Rahmen des Sonderforschungsbereichs an der Universität Stuttgart haben wir Gelegenheit, die Versuche, die für das Olympiadach durchgeführt wurden, weiter auszuwerten und zu veröffentlichen.

3. ZUR FORMFINDUNG VON VORGESPANNTEN SEILNETZKONSTRUKTIONEN

Die Geometrie der Netzflächen im Vorspannungszustand kann nicht, wie bei anderen Bauweisen, zeichnerisch festgelegt werden, sondern muß erst aus physikalischen Modellen auf experimentellem oder mathematischem Wege entwickelt werden.

Dabei beeinflussen sich die Geometrie, die Größe und die Verteilung der Vorspannkkräfte in jedem Bauteil, die Machart bzw. die Maschengometrie des Netzes, die Art der Berandung (starrer Rand oder nachgiebige Randseile), die Ausrichtung der Netzseilscharen zum Verlauf der Netzberandungen und die Steifigkeitsverhältnisse aller Bauteile wechselseitig.

Aus diesem Grunde wird es auch nie möglich sein, für die Formfindung allgemeine Regeln aufzustellen. Dies macht die Arbeit mit vorgespannten Seilnetzkonstruktionen so schwierig und zugleich interessant, weil sich hier schöpferische Phantasie entfalten kann, die erst nach langer Betätigung durch Erfahrung unterstützt wird. Es ist nur in ganz einfachen Sonderfällen möglich, etwa bei einer Sattelfläche mit starren Rändern, eine gewünschte Form, die man sich mathematisch formuliert vorgegeben hat, auch tatsächlich im Vorspannzustand exakt zu erreichen.

Von Anfang an gilt es, zuschnittsgerecht zu entwerfen, zu spitze Netzecken, sowie zu flach gespannte Rand- und vor allem Grat- und Kehlseile, zu vermeiden. Ebenso wichtig ist es, sich rechtzeitig Klarheit über die konstruktive Durchbildung und die Fertigung zu verschaffen, da etwa die wirklichen Abmessungen der Knotenpunkte, die möglichen Fertigungslängen der Seile oder ihre Umlenkstradien, den Entwurf später grundsätzlich in Frage stellen können.

Für den Entwurf der ersten groben Formen haben sich beim Olympiadach Modelle im Maßstab 1:200 aus Polyester-Gittergewebe für die Netze, Drähten für die Seile und Stäben für die Maste bewährt. Sie sind eine gute Grundlage für die ersten statischen Berechnungen. Mit diesen Rechenergebnissen wurden die Modelle optimiert, bis sie als Grundlage für die Zuschnittsermittlung freigegeben werden konnten.

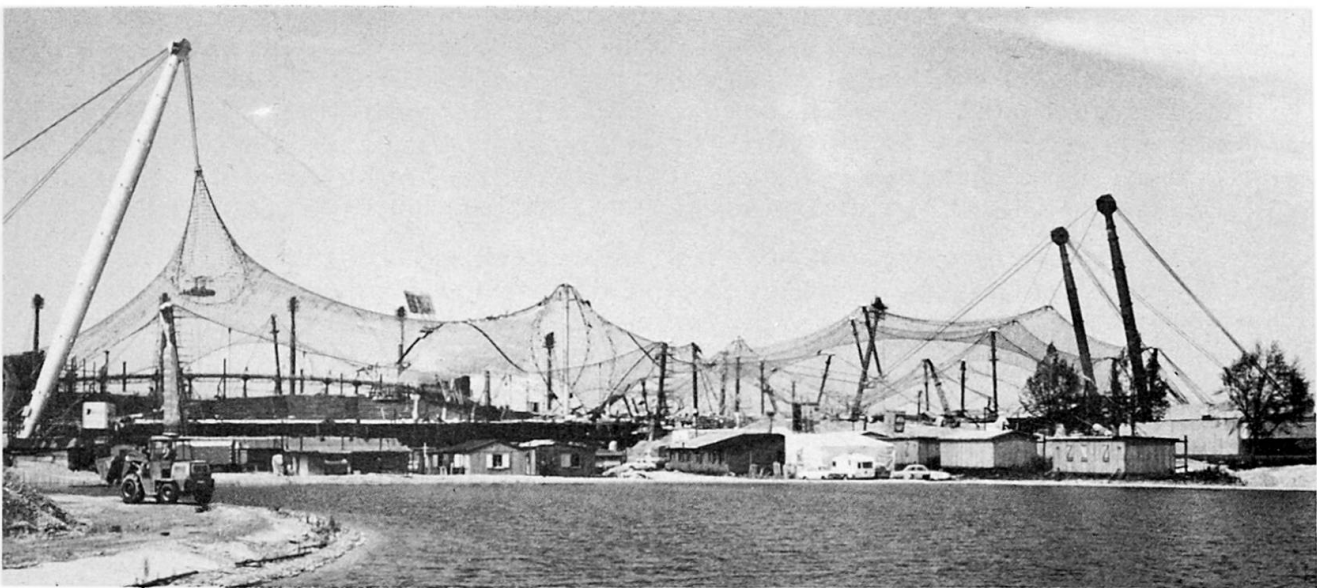


Bild 6: Die Schwimmhalle (links) und die Sporthalle (rechts) ohne Dachhaut

4. ZUR ERFORDERLICHEN GRÖSSE DER VORSPANNKRÄFTE

Während die Verteilung der Vorspannkkräfte die Geometrie und das Tragverhalten einer vorgespannten Seilnetzkonstruktion bestimmt, und es deshalb unabdingbar ist, daß der planmäßige Vorspannzustand am Bau mit großer Genauigkeit realisiert wird (vgl. Abschn.5), ist die absolute Größe der Vorspannkkräfte maßgebend für deren Wirtschaftlichkeit. Die Größe der erforderlichen Vorspannkkräfte wird ausschließlich von den zulässigen Verformungen und den Dauerschwellfestigkeiten der einzelnen Bauteile bestimmt. Dem steht entgegen, daß eine Erhöhung der Vorspannung zur Verminderung von Verformungen, etwa im Vergleich zu einer Vergrößerung der Krümmungen im Netz, wenig wirksam und teuer ist.

Deshalb sollten einem Seilnetzdach immer möglichst große Verformungsmöglichkeiten eingeräumt werden. Dies gilt besonders für die Dachhaut. Sie kann nur in den seltensten Fällen, etwa bei einfachen Sattelflächen, sinnvoll mit dem Seilnetz und dessen Randgliedern zusammenwirkend ausgebildet werden. Bei freier Seilnetzgeometrie ist es stets wirtschaftlicher, eine schub- und biege- weiche Haut den Verformungen des Seilnetzes widerstandslos folgen zu lassen, so daß große Verformungswerte zugelassen werden können.

Bei großen Dächern ist es oft wirtschaftlicher, örtlich begrenzte materielle Schäden unter extremen, während der Lebensdauer des Bauwerks mit geringer Wahrscheinlichkeit zu erwartenden Lasten, in Kauf zu nehmen, als dagegen die Vorspannkkräfte zu erhöhen. Ebenso kann es sinnvoller sein, die Dauerschwellfestigkeit einzelner Bauteile durch eine Überbemessung zu erhöhen, als die Schwingbreite durch höhere Vorspannung zu vermindern.

Regeln für die erforderliche Größe der Vorspannung gibt es nicht. Die übliche Faustregel, sie so hoch zu wählen, daß unter häufig zu erwartenden Lasten oder gar unter Voll-Lasten keine Seile schlaff werden, führt zu unverträglich hoher Vorspannung. Vielmehr, und das kann hier nur in aller Kürze angedeutet werden, ist eine Verformungsbeschränkung über Vorspannung nur vertretbar, wenn damit diejenigen dehnungslosen Verformungen abgebaut werden, die untragbare Verschiebungen in der Netzfläche auslösen.

Bei der idealen Seilnetzfläche stimmt die Flächengeometrie und die Größe und Verteilung der äußeren Lasten dergestalt überein, daß diese Verschiebungen in der Netzfläche nicht auftreten. Die Größe der Vorspannung spielt dann für die Dimensionierung und damit die Kosten keine Rolle. Diese Forderung ist für die Schneelasten, kaum aber für die Windlasten, erfüllbar. Sie bedeutet darüber hinaus eine Einschränkung bei der Auswahl der Formen der Seilnetzflächen.

Die Stärke der vorgespannten Seilnetzkonstruktionen, ihre freie Gestaltbarkeit, kann also aus wirtschaftlicher Sicht zugleich ihre Schwäche sein, vor allem, wenn wegen einzelner ungünstig gekrümmter Bereiche eines großen zusammenhängenden Daches, dieses insgesamt hoch vorgespannt werden muß. Bei der Sporthalle des Olympiadaches mit ihren Wendeflächen in den Seitenfeldern, aber auch bei der Schwimmhalle, war es unumgänglich, die Verformungen durch hohe Vorspannung zu begrenzen. Aus Erfahrung heraus gilt es, beim Entwurf die Wirtschaftlichkeit, den Nutzwert und die Gestaltung optimal gegeneinander abzuwägen. Das Gelingen hängt wie bei keiner anderen Bauweise von einer verständnisvollen Zusammenarbeit zwischen Architekt und Ingenieur ab.

5. ZUSCHNITTSERMITTLUNG - DAS PROBLEM DER MASSGENAUIGKEIT, STATISCHE BERECHNUNG

Unter Zuschnittsermittlung versteht man die Festlegung der Abmessungen und Materialkennwerte jedes einzelnen Bauteiles der tragenden Konstruktion als Vorgabe für die Fertigung einschließlich der Fertigungsangaben, wie Vorreckkräfte für die Seile, Ablängspannung, -temperatur usw. Dabei müssen Anforderungen an die Maßgenauigkeit beim Zuschnitt und bei der Fertigung gestellt werden, wie dies von keiner anderen Bauweise her bekannt ist. Dies ist das zentrale Problem vorgespannter Seilnetzkonstruktionen, das beim Olympiadach noch alle anderen Überlegungen überschattete und dessen Lösung wir heute sehr viel näher gekommen sind:

Der Vorspannzustand bestimmt die Geometrie und das Tragverhalten der gesamten Konstruktion. Er muß deshalb mit ausreichender Genauigkeit in jedem einzelnen Bauteil am Bau realisiert werden. Beim Olympiadach versuchten wir, im Mittel die Sollspannungen auf $\pm 15\%$ genau zu erreichen, wobei die Vorspannung bei den Seilen etwa 50% der zulässigen Spannungen aufbraucht, die mit zweifacher Sicherheit gegen effektiven Bruch festgelegt waren. Voraussetzung für die Baubarkeit einer Millionen Einzelmaße enthaltenden Konstruktion ist die standardisierte Vorfertigung. Das vorgefertigte Dach muß, nachdem es zwischen seinen vorab hergestellten Festpunkten eingehängt ist, seinen planmäßigen Vorspannzustand annehmen. Dazu muß es vor der Montage im spannungslosen Zustand abgewickelt, exakt um das Maß seiner Dehnungen infolge Vorspannung kleiner hergestellt werden als der Abstand zwischen den Festpunkten, abzüglich deren Nachgiebigkeit unter Vorspannung. Darüber hinaus muß die innere Verträglichkeit dergestalt stimmen, daß jedes Bauteil seinen planmäßigen Spannungszustand annimmt, da selbst Einzelabweichungen zu unkontrollierbaren Umlagerungen führen. Jedes zugbeanspruchte Bauteil, hier also jedes Seil, muß um das Maß seiner Dehnung verkürzt, jedes druckbeanspruchte Bauteil, hier also jeder Mast und Druckstab, um das Maß seiner Verkürzung infolge Vorspannung verlängert vorgefertigt werden. Dabei kommt es nicht nur auf die Gesamtlängen von Verankerung zu Verankerung an, sondern es ist jedes innere Teilmaß, etwa von Netzknoten zu Netzknoten, ebenso bedeutsam. Systematische Additionsfehler sind besonders gefährlich. Bei vorgespannten Seilnetzkonstruktionen sind Längenfehler identisch mit Dehnungsfehlern, d.h. mit Kraftfehlern! Bei Balkentragwerken verursachen erst etwa 50-fache Längenfehler denselben Spannungsfehler wie bei vorgespannten Seilen.

Beispielsweise dehnt sich ein 50 m langes Seil unter einer gebräuchlichen Vorspannung um 10 cm. Ist es um $0,1\%$, also 5 cm, zu lang oder zu kurz, sind seine Spannungen und damit seine Umlenkräfte auf die Seile der Querrichtung um 50% falsch, wobei natürlich durch innere, von den Krümmungsverhältnissen abhängige Umlagerungen ein Ausgleich stattfindet. Wenig gekrümmte und kurze Seile sind dabei besonders gefährdet. Handelt es sich bei diesem Seil um ein Netzseil und wird, wie beim Olympiadach, dessen Länge aus der Addition einzelner Maschenweiten von 750 mm ermittelt (vgl. Abschn. 6), so wird der oben angenommene 5 cm-Fehler bereits erreicht, wenn jede Masche entweder von der Längenvorgabe her (Zuschnitt) und/oder bei der Fertigung systematisch um 0,75 mm zu lang oder zu kurz vorgegeben oder gefertigt wird. Handelt es sich gar um ein Randseil, so wirkt sich ein Längenfehler als vielfacher Stichfehler aus, der sich ins Netz hinein fortpflanzt und für die Netzseile einen Längenfehler darstellt. Absolute Genauigkeit ist natür-

lich nicht erreichbar. Je höher die Ansprüche jedoch geschraubt werden, desto weniger kostspielige Korrekturen sind später am Bau zu erwarten. Spannungskorrekturen im Netz sind sehr zeitraubend, auch wenn, wie beim Olympiadach mit Spanschlössern an jedem Netzseil, die konstruktiven Maßnahmen dazu vorhanden sind, da jede Einzelkorrektur unplanmäßige Umlagerungen nach sich zieht.

Daraus wird verständlich, daß manuell hergestellte Zuschnittmodelle aus Draht, wie sie bisher üblich waren und wie sie zunächst auch für das Olympiadach im Maßstab 1:125 gebaut wurden, zu ungenau sein müssen. Wir haben deshalb einen rein rechnerischen Weg für die Zuschnittsermittlung gesucht. Darüber berichten J. Argyris und K. Linkwitz mit Mitarbeitern auf diesem Kongreß, ebenso wie über die Zuschnittspläne, die maßstäbliche Abwicklungen der Systemlinien aller Bauteile sind. In den Zuschnittswerkplänen (vgl. den Bericht von H. Egger) werden die Systemlinien materialisiert, d.h. die wahren Abmessungen aller Seile, Beschläge, Knotenpunkte, Maste etc. so aufgezeichnet, daß daraus die endgültigen Abmessungen aller dieser Bauteile unter Berücksichtigung der Material- und Temperatureinflüsse für die wahren Spannungsverhältnisse unter Vorspannung abgenommen werden können.

Mit den nun vorhandenen rechnerischen Verfahren ist ein wichtiger Teil des Genauigkeitsproblems gelöst, und die vorgespannten Seilnetzkonstruktionen haben damit das Experimentierstadium überwunden. Es bleiben dem Ingenieur bei der Zuschnittsermittlung nach wie vor eine Vielzahl von Problemen, die im Planungsablauf ungewohnte und schwierige Abhängigkeiten zur Folge haben:

Für die Berechnung muß eine möglichst gute Geometrie und ein Vorspannzustand vorgegeben werden. Dazu müssen, bevor die endgültige Geometrie und damit die wirklichen Kräfte bekannt sind, bereits die Abmessungen und Materialkennwerte aller Bauteile bereitgestellt werden, da das Rechenmodell dem endgültigen Bauwerk geometrisch und elastisch exakt entsprechen muß. Dies erfordert eine frühzeitige und detaillierte Kenntnis der Seilführungen, vor allem an den Knotenpunkten, da sonst bei der endgültigen konstruktiven Durchbildung die in die Berechnung eingegebenen Systemlinien verschoben werden müssen. Manches Detail muß verworfen werden, obwohl es alle statischen und konstruktiven Bedingungen ideal erfüllt, weil es nicht zuschnittsgerecht ist. Dabei müssen die Seilkennwerte meist schon in die Berechnungen eingehen, bevor sie an Proben aus den endgültigen Lieferungen bestätigt werden können.

Ferner verlangt die Berechnung eine fortlaufende Betreuung, eine Beurteilung und Anpassung der Zwischenergebnisse, da es wohl keine Bauweise gibt, bei der es zur Berechnung einer solch intimen Kenntnis aller statischen, konstruktiven und fertigungstechnischen Zusammenhänge bedarf.

Nachdem es wegen des Zuschnitts unabdingbar ist, den Vorspannzustand großer Seilnetzkonstruktionen exakt zu berechnen und dies mit der Methode der finiten Elemente elektronisch möglich ist, wird man wenige kennzeichnende Schnee- und Windlastfälle auch auf diesem Wege berechnen, obwohl hierfür wegen der hohen inneren Tragreserven und ohnehin groben Lastannahmen einfache Rechenverfahren ausreichend genau sind. Je komplizierter unsere Tragwerke werden, desto wichtiger ist es, möglichst einfache und transparente Rechenverfahren für den Entwurf, die konstruktive Durchbildung und die Begleitung der genauen elektronischen Berechnungen zu entwickeln

und erst die letzte Verfeinerung dem Computer zu überlassen. Leider reicht der Platz nicht für eine Darstellung unserer am Olympiadach entwickelten Verfahren.

Nachdem es heute noch nicht möglich und auch kein Weg sichtbar ist, über die Ermittlung der Eigenfrequenzen hinaus das aerodynamische Verhalten solcher Tragwerke in natürlichem Wind zu berechnen, haben wir uns beim Olympiadach mit verschiedenen tastenden Untersuchungen, im Windkanal an starren und verschieblichen Modellen, an einem Probedach und mit Teilberechnungen begnügen müssen.

Sicher ist, daß solche Systeme aerodynamisch schwer anzufachen sind, und daß sie gegenüber Stabstahlkonstruktionen eine hohe innere Dämpfung haben, die, wie Versuche zeigten, durch die Acrylglas-Dachhaut noch erheblich verbessert wird. Bei der konstruktiven Durchbildung und Bemessung wurde auf die Dauerfestigkeit aller Bauteile besondere Aufmerksamkeit verwandt.

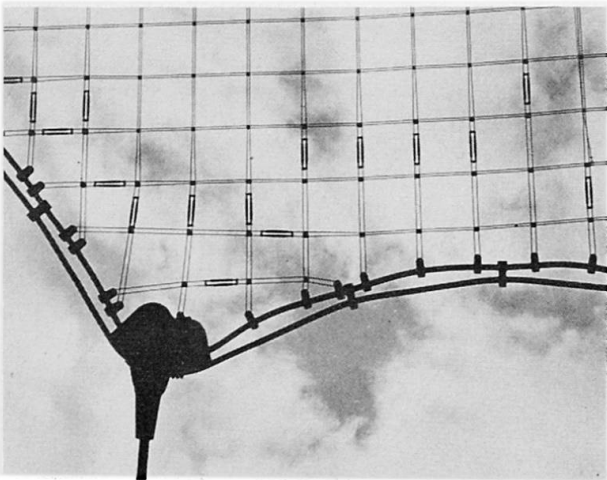


Bild 7: Netzpartie mit Spannschlössern, Randseilklemmen, und Randseil aus 2 gekoppelten Einzelseilen

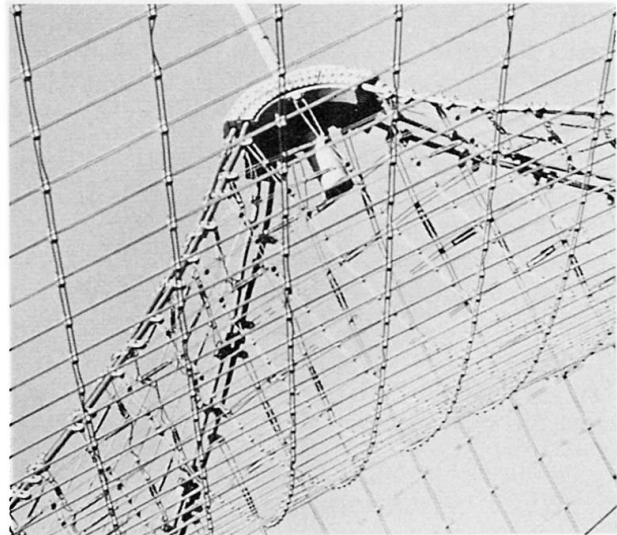


Bild 8: Netzpartie mit über einem aufgehängten Knotenpunkt umgelenkten Randseilen

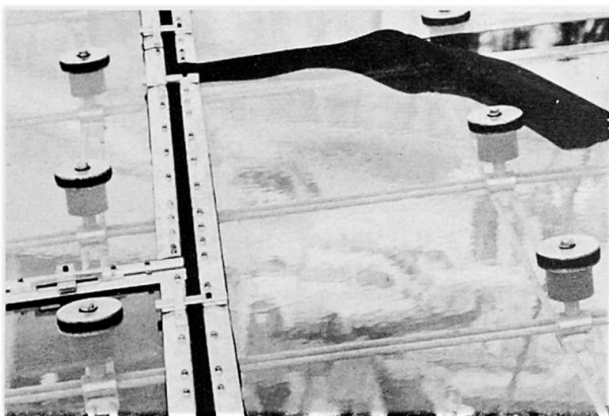


Bild 9: Acrylglas-Dachhaut mit Fugenausbildung und Pufferauflagerung auf den Netzknoten

6. ZUR KONSTRUKTIVEN DURCHBILDUNG

Aus Platzgründen können hier nur die wichtigsten Merkmale der Konstruktion hervorgehoben und muß auf einen Bericht über die große Zahl der Versuche an Seilen, ihren Beschlägen und Verankerungen verzichtet werden.

Das Seilnetz (Bilder 5, 7 und 8) hat viereckige Maschen mit, unter einer konstanten und definierten Vorspannung, gleichen Knotenabständen von 750 mm. Dieses Netz läßt sich mit seinen drehbaren Knoten im eben ausgelegten Zustand spannungslos wie ein Scheurengitter verschieben (Bild 10). Es ist für Seilnetzkonstruktionen universell verwendbar, weil es sich jeder beliebig gekrümmten Fläche spannungslos durch veränderliche Winkelverschiebungen anpassen kann. Das Verlegeschema eines solchen Netzes auf einer gekrümmten Fläche ist frei wählbar. Bei komplizierten Flächen braucht es zur Wahl des besten Verlegeschemas viel Geschick, da davon die Flächenspannungen im Vorspannzustand, das Tragverhalten und die konstruktive Durchbildung stark abhängig sind.

Dieses Netz erfüllt in idealer Weise die Voraussetzungen für die Vorfertigung und damit die Baubarkeit komplizierter Seilnetzkonstruktionen: Im Netzzinnern sind, unabhängig von den Krümmungen der Fläche, alle Maße, die Maschenweiten, gleich. Dies erleichtert die Längenermittlung der Netzseile beim Zuschnitt und bei der Fertigung und garantiert ein Minimum an Fehlerquellen.

Für das Seilnetz des Olympiadaches wurden rund 400 km Seile benötigt. Diese Seile sollen einerseits für die Montage biegsam und daher aus möglichst dünnen Drähten geflochten, andererseits wegen der Korrosionsanfälligkeit möglichst dickdrähtig sein. Gewählt wurden 19-drähtige Litzen aus stark verzinkten Drähten mit 2,3 und 3,4 mm Durchmesser mit einer Schlaglänge von 10 x Durchmesser. Damit erhält das Netz, bei 2-facher Sicherheit gegen Bruch, in den Normalbereichen eine zulässige Tragkraft von 15 Mp/m und in den verstärkten Bereichen von 30 Mp/m.

Auf je zwei Netzseile werden nach dem Vorrecken unter definierter Vorspannung in einem automatisierten Vorgang Aluminiumklemmen mit zentrischen Löchern in genauen Abständen von 750 mm aufgepreßt. Dadurch wird eine gleichbleibende Genauigkeit der Maschenweite garantiert und der Zusammenbau des Netzes sehr einfach: Nach dem Ablängen der Seile können die Klemmen beider Seilscharen mit nur einer Schraube zu drehbaren Netzknoten verbunden werden, ohne daß noch Maße zu nehmen sind (Bild 9 des Vorberichts III a).

Die Längenkorrektur der Netzseile ist durch Spannschlösser am Randseilanschluß möglich. Die Netzseile werden mit den Randseilen durch Randseilklemmen verbunden (Bilder 5 und 7).

Die Randseile in verschlossener Bauart mit einem Durchmesser von 81 mm haben eine zulässige Tragkraft von 300 Mp bei 2-facher Sicherheit gegen Bruch, nach Berücksichtigung aller tragkraftmindernden, durch statische und dynamische Versuche nachgewiesenen Einflüsse, wie Umlenkungen an Sätteln ($r = 80$ cm), Querpressung durch Klemmen und Endverankerungen.

Sind die Rand-, Grat- oder Kehlseilkräfte größer als 300 Mp, so werden mehrere Seile gekoppelt (Bild 7). Damit ergibt sich eine wirtschaftliche Produktionsmenge gleicher Randseile und es können die Randseilklemmen, Führungsnuten und Ankerköpfe vereinheitlicht werden.

Mit äußerster Sorgfalt wurde auf eine genaue Einhaltung der Zuschnittsmaße bei der Fertigung geachtet und dabei alle Seile vorgereckt und unter definierter Vorspannung bei kontrollierter Temperatur abgelängt und mit Markierungen für die Klemmen versehen.

An den Knotenpunkten werden die Randseile entweder umgelenkt und weitergeführt (Bilder 7, 8 u.a.), oder verankert (Bilder 4, 10 u.a.). Die Knotenpunkte sind aus Gußstahl und müssen fast alle der jeweiligen Geometrie folgend angefertigt werden. Gußstahl konnte gewählt werden und war gegenüber Schweißkonstruktionen wirtschaftlich, weil heute statt der teuren Holzformen leicht bearbeitbare Schaumstoffmodelle verwendet werden können. Der schwerste Knotenpunkt wiegt ungefähr 27 t.

Die nicht direkt mit dem Netz verbundenen Abspann- und Aufhängeseile sollen eine große Dehnsteifigkeit haben, da von ihr die Verformungen des Daches unter Wind und Schnee sehr stark abhängen können. Diese Forderung erfüllen Litzenbündel aus parallel verlegten Litzen mit großer Schlaglänge. Ihre Seilköpfe sind mit der neuartigen HiAm-Vergußmasse vergossen (vgl. den Einführungsbericht IIIa), so daß sie bei einer Nennfestigkeit der Litzendrähte von 160 kp/mm^2 mit zulässigen Spannungen von 75 kp/mm^2 bemessen werden konnten. Die einzelnen Litzenbündel sind für Kräfte bis $1\ 150 \text{ Mp}$ bemessen. Bei größeren Kräften - das große Randkabel des Stadions hat $5\ 000 \text{ Mp}$ aufzunehmen - werden mehrere Bündel gekoppelt (Bild 4).

Die Maste mit bis zu 80 m Länge und Lasten bis $5\ 000 \text{ Mp}$ sind zylindrische Rohre mit Durchmessern bis 3,5 m und 7 cm Wanddicke. Die Hauptmaste sind oben und unten konisch. Ihre Mastköpfe sind geschweißte Scheibenkonstruktionen (Bilder 4-6). Die Maste stehen auf allseitig beweglichen Gummitopflagern und einfachen Stahlbetonfundamenten. Für die großen Bewegungen während der Montage sind unter den Gummitopflagern Kugelkalottenlager angeordnet, die nach dem Spannen einbetoniert werden.

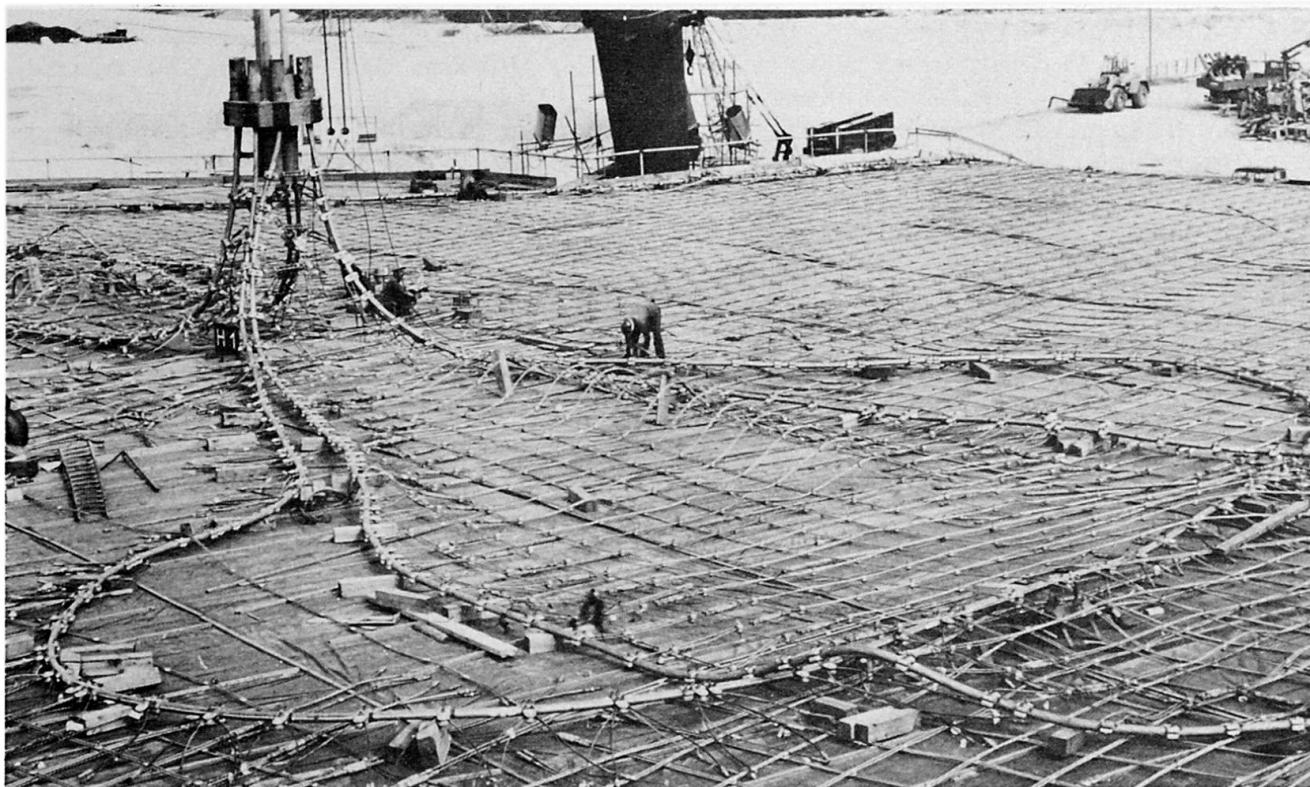


Bild 10: Zusammenbau der Netzkonstruktion am Boden, Schwimmhalle

Für die Zugfundamente wurden entsprechend den örtlichen Verhältnissen 3 Arten verwendet: T-förmige Schlitzwandfundamente, die nach dem Prinzip eines Zelthärings wirken, Schwergewichtsfundamente, die so in Scheiben und Platten aufgelöst sind, daß bei möglichst geringen Betonmassen eine große Erdauflast herangezogen wird, und Bodenankerfundamente.

Das ganze Dach ist mit einer Dachhaut aus 4 mm dicken Acrylglasplatten eingedeckt. Die Platten werden in serienmäßiger Größe von ca. 2,90 x 2,90 m auf dem Seilnetz verlegt. Die Befestigung erfolgt punktförmig im Bereich der Seilnetzknöten. Die Fugen zwischen den Platten werden mit durchgehenden, auf den Plattenrändern aufgeklebten Neoprenprofilen geschlossen (Bild 9). Die Ausgangswinkel der Seilnetzmaschen verändern sich unter Belastung und Temperaturänderungen um bis zu 6°. Die Platten können diese Bewegungen nicht aufnehmen. Deshalb werden zwischen Seilnetzknöten und Dachhaut Neoprenpuffer eingebaut, die eine "schwimmende" Auflagerung der Platten bewirken. Da in den Fugen auch Längsbewegungen auftreten, ist das Fugenband entsprechend breit und dünn, so daß eine Faltenbildung möglich ist.

7. ZUR MONTAGE

Die Beschaffung aller Bauteile, den Zusammenbau am Boden, die Montage und das Spannen des Dachs übernahm eine Arbeitsgemeinschaft aus 6 großen Stahlbauunternehmen.

Bei jedem Dach wurden nach Fertigstellung der Fundamente zunächst die großen Maste montiert und die gesamte Netzkonstruktion einschließlich der Randseile, Litzenbündel und kleinen Maste am Boden zusammengebaut (Bild 10). Dann wurden alle Knötenpunkte über ihre Aufhänge- und Abspannseile in ihre richtige Lage gezogen oder auf die sie direkt unterstützenden Maste aufgesetzt. Dabei sollten alle Bewegungen möglichst gleichmäßig vom geometrischen Mittelpunkt des Daches weg erfolgen. Nachdem alle Abspannseile ihre planmäßige Lage in den Fundamenten erreicht hatten, wurden die Geometrie aller Knötenpunkte und kennzeichnender Netzpunkte, sowie die Spannungen in den Netzseilen, Abspannseilen und Masten, gemessen. Bei größeren Spannungsfehlern wurden Seillängenkorrekturen an den Spanschlössern der Netzseile und an den Verankerungen der Abspannseile vorgenommen. In der Regel wurden Spannungsfehler von $\pm 15\%$ dann hingenommen, wenn durch zusätzliche statische Nachweise gezeigt werden konnte, daß dies hinsichtlich der Standsicherheit tragbar ist.

Insgesamt kann gesagt werden, daß sich die große Mühe, die auf einen genauen Zuschnitt und eine genaue Fertigung verwendet wurde, gelohnt hat, da nur sehr wenig Korrekturmaßnahmen erforderlich waren, bis das Dach seinen planmäßigen Zustand erreicht hatte.

ZUSAMMENFASSUNG

Für die Olympiade in München wurde eine vielfältig gestaltete vorgespannte Seilnetzkonstruktion mit einer Fläche von 75 000 m² gebaut. Ihr Tragsystem wird erläutert und beurteilt. Es folgen einige Hinweise zur Formfindung, erforderlichen Größe der Vorspannkraft, zur Zuschnittsermittlung und dem damit vor allem verbundenen Problem der Maßgenauigkeit dieser Konstruktionen. Abschließend werden die wichtigsten konstruktiven Details und die Montage beschrieben.

Theorie, Programmentwicklung und Erfahrung an vorgespannten Netzwerkstrukturen

Theory, Development of Programs and Experience on Prestressed
Network Constructions

Théorie, développement des programmes et expériences faites sur
des constructions de réseaux de câbles précontraints

<p>J.H. ARGYRIS Prof., Dr., Dr. h.c. Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen Stuttgart, BRD</p>	<p>T. ANGELOPOULOS Dipl.-Ing. Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen Stuttgart, BRD</p>
---	--

Übersicht. Es wird ein Überblick über die statische und dynamische Berechnung von vorgespannten Netzwerkstrukturen gegeben. Grundlage hierfür ist die Methode der Finiten Elemente und die Matrizenverschiebungsmethode. Ferner werden vorhandene Rechenprogramme und deren Weiterentwicklung beschrieben. Eine Reihe von Beispielen, die zum Teil aus den Berechnungen der olympischen Bauten in München entnommen wurden, bestätigen erneut die Eleganz der Methode der Finiten Elemente.

Einleitung. Die rasche Entwicklung der elektronischen Rechenanlagen hat einen großen Einfluß auf die Berechnungsmethoden der Technik und vor allem auf die der Statik und Dynamik bewirkt. Die seit 1953 vom Senior Autor aufgestellte und ständig weiterentwickelte Theorie der finiten (endlichen) Elemente [1,2,3] war in erster Linie für die hochkomplizierten Tragwerke der Luft- und Raumfahrt gedacht. Die Methode wird heute in mehreren wissenschaftlichen Zweigen wie z.B. im allgemeinen Maschinenbau und im Bauwesen angewandt. Nichtlineares Verhalten des Materials [6] und/oder der Geometrie (große Verschiebungen) [4] läßt sich sehr elegant für ein-, zwei- und dreidimensionale Kontinua formulieren. Die statische Berechnung der vorgespannten Netzwerkstrukturen ist ein nichtlineares Problem bezüglich der Verschiebungen, wobei die Dehnungen im linear-elastischen Bereich bleiben. Auch hierzu wurde bereits 1959 vom Senior Autor [2,3] die Theorie entwickelt. Ihre Anwendung speziell auf Netzwerke fand jedoch erst im Rahmen der Untersuchungen der Zeltdächer [7,13] für die olympischen Spiele in München statt. Die Theorie ist ausführlich in [7,13] behandelt worden und in diesem Vorbericht wird sie in Kurzform (Abschnitt 1) erläutert. Mit der Matrizenverschiebungsmethode läßt sich das lineare Schwingungsproblem beliebiger Strukturen sehr einfach ermitteln. Für Netzwerke muß zusätzlich das nichtlineare Schwingungsverhalten berücksichtigt werden (s. Abschnitt 1).

Hierzu ist absichtlich ein extrem nichtlineares Beispiel gewählt worden, um einerseits die eindeutige physikalische Interpretation der Nichtlinearität (Geometrische Steifigkeit) und andererseits die Genauigkeit der numerischen Integration [8] zu demonstrieren. Wie schon oben erwähnt wurde, läßt sich die Methode der finiten Elemente nur mit Hilfe von elektronischen Großrechenanlagen, wie z.B. die im ISD (Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart) installierte CDC 6600, verwirklichen. Seit langem werden im ISD große Programmsysteme entwickelt, welche die statische [9] und dynamische [10] Analyse von beliebigen Strukturen erlauben. Speziell für Netzwerkstrukturen

ist ein Programmsystem entwickelt worden, welches die statische Berechnung (auch für Netze, die zum Teil Biegeträger aufweisen) ermöglicht. Dieses Programmsystem wird im Abschnitt 2 beschrieben, sowie auch seine weitere Entwicklung (Abschnitt 3). Auch für die statische und dynamische Analyse von sehr hohen Masten können die vorhandenen Programme verwendet werden. Schließlich werden im Abschnitt 4 mehrere Beispiele angeführt, welche die Güte der Methode der finiten Elemente und die Zuverlässigkeit der Rechenprogramme demonstrieren. Die starke Begrenzung der Seitenzahl in diesem Vorbericht erlaubt es uns leider nicht, ausführlich auf die Theorie einzugehen. Wir hoffen aber, dies in den Abhandlungen nachholen zu können, insbesondere für das Schwingungsproblem.

1. Überblick über die Statische und Dynamische Berechnungsmethode für vorgespannte Netze

1.1 Iterative Berechnung der Gleichgewichtslage. Die Theorie für die statische Berechnung von vorgespannten Netzwerken wurde schon in [7,13] ausführlich behandelt. Wir wiederholen hier in Matrixschreibweise den Vorgang für die iterative Gleichgewichtsermittlung (siehe auch Abbn. 12,13)

$$R_i = R_{i-1} + \bar{R}_\Delta \quad R_{u_i} = R_i - \bar{a}^t \alpha_{N_i}^t P_{N_i} \quad r_{\Delta i} = [K_E + K_G]_i^{-1} R_{u_i}$$

$$p_{\Delta i} = \bar{a}^t r_{\Delta i} \quad X_{i+1} = X_i + p_{\Delta i} \tag{1}$$

R = Vektor der äusseren Kräfte (Inkrementale Belastung)

\bar{R}_Δ = Zuwachs der inkrementalen Belastung

R_u = Vektor der Ungleichgewichtskräfte der Knoten

P_N = Vektor der natürlichen Kräfte. Für das g -te Element gilt $P_{N_g} = \left(\frac{EA}{L_0} \Delta L \right)_g$

\bar{a}_N = Boole'sche Matrix (siehe [3])

α_N = Diagonale Hypermatrix $[\alpha_{N_1} \dots \alpha_{N_g} \dots \alpha_{N_s}]$ mit $\alpha_{N_g} = [-c^t \quad c^t]$ und c = Vektor der Richtungs-Cosinuse des g -ten Elementes

r_Δ = Inkrementaler Verschiebungsvektor

$[K_E + K_G]$ = Elastische und geometrische Steifigkeit des Netzes

p_Δ = Inkrementaler Verschiebungsvektor der Elemente

X = Vektor der aktuellen Koordinaten der Elemente (Entsprechend p_Δ).

$$= \{X_1 \dots X_g \dots X_s\} \quad \text{mit} \quad X_g = \{x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad z_2\}$$

S = Anzahl der Elemente im Netz.

1.2 Das System der Bewegungsgleichungen für große Verschiebungen. Mit Hilfe des Kraft-Weg-Diagrammes für große Verschiebungen und der Lagrange'schen Vorschrift wird das System der Bewegungsgleichungen hergeleitet. Für die Auslenkungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen definieren wir folgende Vektoren für die Freiheitsgrade von n Knoten

$$r = \{u_1 v_1 w_1 \dots u_2 v_2 w_2\} \tag{2} \quad \dot{r} = \{\dot{u}_1 \dot{v}_1 \dot{w}_1 \dots \dot{u}_n \dot{v}_n \dot{w}_n\} \tag{3} \quad \ddot{r} = \{\ddot{u}_1 \ddot{v}_1 \ddot{w}_1 \dots \ddot{u}_n \ddot{v}_n \ddot{w}_n\} \tag{4}$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Netzes $K_1 = [K_E + K_G]_1$, (auch Tangentiale Steifigkeitsmatrix genannt) wird zu Beginn jedes Integrationsschrittes aus der aktuellen Geometrie und den natürlichen Kräften aufgebaut und bleibt innerhalb des Zeitintervalls konstant. Die Massenmatrix M (ausnahmsweise für Netzwerke) ist nur in ihrer Diagonale besetzt

$$\text{mit} \quad m_j(u, v, w) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mu_i L_{0i} \quad M = [m_{1u} \quad m_{2v} \quad m_{3w} \dots m_{nu} \quad m_{nv} \quad m_{nw}]$$

N = Anzahl der Stäbe die am Knoten j anschliessen

μ = Masse/Länge

Weiterhin ist R_0 der Vektor der Ungleichgewichtskräfte am Anfang jedes Zeitintervalls und $r_\Delta = r_1 - r_0$ der inkrementale Verschiebungsvektor. Die Anfangswerte zur Zeit $t = t_0$ sind $r = r_0$ und $\dot{r} = \dot{r}_0$. Aus dem Energiesatz und unter Berücksichtigung der Nichtlinearität im Diagramm (Abb. 6) gilt

$$\frac{1}{2} \dot{r}_1^t M \dot{r}_1 = \frac{1}{2} \dot{r}_0^t M \dot{r}_0 - r_\Delta^t R_0 - \frac{1}{2} r_\Delta^t K_1 r_\Delta \quad (5)$$

oder

$$\frac{1}{2} \dot{r}_1^t M \dot{r}_1 - \frac{1}{2} \dot{r}_0^t M \dot{r}_0 + (r_1 - r_0)^t R_0 + \frac{1}{2} (r_1^t K_1 r_1 - r_1^t K_1 r_0 - r_0^t K_1 r_1 + r_0^t K_1 r_0) = 0 \quad (6)$$

Nach der Lagrange'schen Vorschrift: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial r_1} + \frac{\partial U}{\partial r_1} + \frac{\partial F}{\partial r_1} = 0 \quad (7)$

mit T, U, F Kinetische, Potentielle bzw. Dissipationsenergie wird

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_1} \right) = M \ddot{r}_1 \quad (8) \quad \frac{\partial T}{\partial r_1} = 0 \quad (9)$$

(da die Masse unabhängig vom Verschiebungsvektor ist)

$$\frac{\partial U}{\partial r_1} = R_0 + K_1 r_1 - K_1 r_0 \quad (10) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{r}_1} = 0 \quad (11)$$

Durch Einsetzen von (8, 9, 10, 11) in (7) ergibt sich $M \ddot{r}_1 + K_1 r_\Delta = -R_0 \quad (12)$

wobei R_0 zu Beginn jedes Integrationsschrittes bekannt sein muß. Wir geben hier die Formel für den $i+1$ Integrationsschritt an:

$$M \ddot{r}_{i+1} = -R_0 - \sum_{j=1}^i [K_j (r_j - r_{j-1})] - K_{i+1} (r_{i+1} - r_i) \quad (13)$$

1.3 Numerische Integration des Systems. Für die numerische Integration können die

Methoden verwendet werden, die auch bei den linearen Schwingungen zum Erfolg geführt haben. Eine sehr genaue Integrationsmethode ist die der "Finite Elements in Time and Space" [8], bei der außer den endlich kleinen Raumelementen auch endlich kleine Zeitelemente eingeführt werden. Wir verwenden hier jedoch eine abgewandelte Methode des in [8] beschriebenen Verfahrens und geben hiervon eine Kurzfassung. Ausführlich soll die Methode noch in [14] behandelt werden. Innerhalb eines Zeitintervalls τ soll die Trägheitskraft eine Funktion dritter Ordnung sein

$$M \ddot{r} = R = \varphi_1 R_i + \varphi_2 \dot{R}_i + \varphi_3 R_{i+1} + \varphi_4 \dot{R}_{i+1} \quad (14)$$

die φ_j sind kubische Hermitesche Interpolationspolynome der dimensionslosen Variablen

$$\xi = t / \tau. \text{ Weiterhin ist } R' = dR / d\xi = \tau dR / dt = \tau \dot{R} \quad (15)$$

$$\varphi_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad \varphi_2 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \quad \varphi_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad \varphi_4 = -\xi^2 + \xi^3 \quad (16)$$

durch Einsetzen von (15) in (14) und durch zweimalige Integration ergibt sich für $\xi = 1$

$$\dot{r}_{i+1} = \dot{r}_i + \frac{1}{12} \tau M^{-1} (6R_i + \tau \dot{R}_i + 6R_{i+1} - \tau \dot{R}_{i+1}) = \dot{r}_i + d\dot{r} \quad (17)$$

$$r_{i+1} = r_i + \tau \dot{r}_i + \frac{1}{60} \tau^2 M^{-1} (21R_i + 3\tau \dot{R}_i + 3R_{i+1} - 2\tau \dot{R}_{i+1}) = r_i + dr \quad (18)$$

Die Beschleunigung läßt sich dann aus $\ddot{r}_{i+1} = M^{-1} R \quad (19)$ berechnen. Man sieht sofort, daß man aus (17) und (18) eine Iterationsprozedur innerhalb jeden Zeitintervalls aufstellen kann, indem man für den Start der Iteration $\dot{R}_{i+1} = \dot{R}_i$ und $R_{i+1} = R_i + \tau \dot{R}_i$ annimmt.

1.4 Anwendung der Integrationsmethode auf die freie Schwingung eines ebenen vorgespannten Netzes. Ein ebenes, quadratisches vorgespanntes Netz mit Auflager in den vier Ecken, also mit freien Rändern, wurde unsymmetrisch belastet (Abb. 1) und zum Schwingen freigelassen. Die Querschnitte im Inneren haben einen $E * A$ Wert (El. Mod. * Fläche) von 2000 Mp und die der Randseile 10000 Mp. Das Gravitationsfeld wurde vernachlässigt. Bei insgesamt 49 Knoten mußte ein System von 135 Dif. Gleichungen 2ter Ordnung integriert

werden. Die Ergebnisse (Abb. 1) der in 1.3 erläuterten Methode wurden durch die Runge-Kutta Integrationsmethode (4ter Ordnung) voll bestätigt. Zusätzlich wurde eine Energiekontrolle durchgeführt, d.h. zu jeder Zeit (freie Schwingung) soll die kinetische Energie gleich der Summe der über alle Integrationschritte frei werdenden potentiellen Energie sein

$$\frac{1}{2} \dot{r}_i^t M \dot{r}_i^t = - \sum_{j=1}^t r_{\Delta}^t \left[R_{0j-1} + \frac{1}{2} K_j r_{\Delta} \right] \quad (20)$$

wobei die Methode der "Finite Elements in Time and Space" derjenigen der Runge-Kutta noch überlegen ist (Abb. 2).

2. Beschreibung der vorhandenen Rechenprogramme. Im Rahmen der Untersuchung der Netzdächer in München ist ein Programmsystem (FORTRAN IV) entwickelt worden, welches die vollständige Berechnung solcher Strukturen ermöglicht. Das System besteht zur Zeit aus 6 Untersystemen, die im folgenden beschrieben werden.

2.1 Vorbereitung der Anfangsdaten. Die aus Modellen oder aus analytischen Funktionen ermittelte Fläche des Netzes liegt in Form von Koordinaten in diskreten Punkten vor und entsprechend auch der Spannungsverlauf. Die geometrischen Daten werden dann mit einer Funktion

$$z = f(x, y) \quad , \quad z = \sum_{j=0}^{ny} \sum_{i=0}^{nx} Q_{ij} X^i Y^j \quad (21) \quad \text{erfaßt (Abb. 7), wobei}$$

die Q_{ij} -Koeffizienten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden. Auf die in analytischer Form gegebene Fläche wird das eigentliche Netz gelegt, indem die konstante ungedehnte Länge, der Querschnitt, der Elastizitätsmodul und der vorgegebene Spannungsverlauf berücksichtigt werden. Auch für die Randseile (Abb. 7) werden Ausgleichspolynome berechnet, womit dann der Rand des Netzes im Raum eindeutig festliegt.

2.2 Topologie des Netzes. In diesem Berechnungsschritt wird die topologische Beschreibung des Netzes vorgenommen. Hierzu gehört die Numerierung der Knoten und der zugehörigen Freiheitsgrade (je Knoten drei Freiheitsgrade, d.h. die Verschiebungen u, v, w), sowie die Unterdrückung von Verschiebungen an den Knoten, an denen das Netz festgehalten wird.

2.3 Iterative Gleichgewichtsermittlung. Den Kern des gesamten Programmsystems bildet die iterative Gleichgewichtsermittlung. Hier wird der Belastungsvektor, die Steifigkeitsmatrix des Netzes, die Auflösung des linearen Gleichungssystems und die Ermittlung der neuen Koordinaten entsprechend der inkrementalen Verschiebungen vorgenommen. Die einzelnen Schritte werden solange wiederholt (Abb. 13), bis alle Restkräfte an den Knoten hinreichend klein sind. (Abbruchkriterium hierzu etwa: 10^{-5} Mp). Die Größe des aufzulösenden linearen Gleichungssystems ist praktisch unbegrenzt, jedoch abhängig von der Konfiguration der jeweiligen Rechanlage.

2.4 Untersuchung der Lastfälle. Die Lastfälle werden nach der gleichen Prozedur berechnet wie die der Vorspannung (Abb. 12). Die Last, z.B. Schnee, wird nicht in einem Schritt aufgebracht, sondern inkremental. Durch die Belastung und die großen Deformationen entstehen große Ungleichgewichtskräfte. Ungeachtet dessen wird weiter iteriert bis die Last voll aufgebracht ist. Anschließend wird bei konstanter Last iteriert, bis das Netz seine endgültige Gleichgewichtslage erreicht hat. Folgende Lastfälle können berechnet werden: Gleichmäßig verteilter Schnee, örtlich angehäufter Schnee, Wind und Temperatur. Zuletzt soll noch erwähnt werden, daß auch der Einfluss von Fabrikationsfehlern ohne weiteres in Form eines Lastfalles berechnet werden kann.

2.5 Automatische Herstellung von Netzzeichnungen, und Überwachen des Netzes mit Hilfe eines Bildschirmgerätes. Es genügt allein, daß die Koordinaten eines Knotens, oder die Nummer der Knoten eines Elementes falsch angegeben sind, um in größeren Bereichen einen nicht brauchbaren Spannungsverlauf zu bekommen, oder daß die Auflösung des linearen Gleichungssystems unmöglich wird, weil die Steifigkeitsmatrix singular ist. Automatisch hergestellte Zeichnungen dienen also in erster Linie der Fehlerfindung. Hierzu werden dem Benutzer folgende Möglichkeiten geboten: Drucken des Netz-Grundrisses auf dem Schnelldrucker der Rechanlage oder Zeichnen des Netzes mit Hilfe einer elektronischen Zeichenanlage (Abb. 3, 4, 5). Selbstverständlich können diese Zeichnungen auch für andere Zwecke ver-

wendet werden. Eine weitere Möglichkeit, die nicht nur die Fehlersuche erleichtert, sondern auch über weite Strecken das Überwachen des Netzes ermöglicht, ist ein Bildschirmgerät, z. B. das im ISD installierte "Digigraphic CDC 1700"

2.6 Auswertung der Ergebnisse. Als letztes übernimmt ein Programm die Auswertung und das Ausdrucken der Ergebnisse in übersichtlicher Form (Abb. 11). Unter anderem können z. B. die Winkeländerungen der Seile zwischen Vorspannung und dem Lastfall Schnee ausgewertet werden. Eine Information, die sehr wichtig für das Verlegen der Platten und der Haut des Netzes ist.

2.7 Formfindung von Netzwerken. Siehe Beitrag in diesem Vorbericht - Thema IIIa. J.H. Argyris und T. Angelopoulos: Ein Verfahren für die Formfindung von beliebigen vorgespannten Netzwerkstrukturen.

3. Weitere Programmentwicklung. Im gleichen Stil, wie die in unserem Institut entwickelten Systeme ASKA [9] und DYNAN [40], soll auch ein komfortables System für vorgespannte Netzwerke entstehen. Zunächst sollen neben dem Stab- und Biegeelement weitere Elemente im System aufgenommen werden. Also: Drei- und Viereck-Membranelemente (große Verschiebungen), die eine Dachhaut auf dem Netz auch unter Berücksichtigung der Anisotropie simulieren können. Die vorhandenen Programme für die Formfindung [12] und dynamische Analyse sollen noch verfeinert und dem Hauptsystem angeschlossen werden. Die dynamische Windlast (d. h. Druck als Funktion der Zeit) ist ein sehr komplexes Problem, das ebenfalls an unserem Institut untersucht wird. Im Rahmen dieser Kurzfassung kann jedoch hierauf nicht näher eingegangen werden.

4. Erfahrung aus statischen Berechnungen von vorgespannten Netzwerkstrukturen. In den letzten zwei Jahren sind in unserem Institut mehrere Berechnungen an vorgespannten Netzwerken durchgeführt worden. Abgesehen von kleinen Strukturen (z. B. ein hyperbolisches Paraboloid), die nur für Testzwecke verwendet wurden, sind folgende Netze berechnet worden.

4.1 Sporthalle in München. Das Bauwerk weist eine sehr komplexe Geometrie auf (Abb. 3, 4), die am Institut für Leichte Flächentragwerke, Universität Stuttgart, anhand von Draht-Meßmodellen entwickelt wurde. Die eigentlichen Anfangsdaten erhielten wir aus dem Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, ebenfalls Universität Stuttgart, welches mit der Messung und Auswertung der Modelle beauftragt war. Bei einer Maschenweite von 3m ergaben sich 3500 Knoten, etwa 6600 Elemente und 10500 Unbekannte Verschiebungen. Ursprünglich dauerte ein Iterationsschritt, also: Aufbau des Belastungsvektors und der Steifigkeitsmatrix sowie Auflösung des lin. Gl. Systems, etwa 200 Min. Durch geschickte Programmierung ist es uns gelungen, diese Rechenzeit auf ein Zehntel, also auf 20 Min. zu reduzieren. Es muß betont werden, daß die Berechnung der Vorspannung keinesfalls abgeschlossen ist, indem man eine Gleichgewichtslage der Struktur ermittelt. Es muß überall im Netz die erwünschte Vorspannung herrschen. Um das zu erreichen, wird am Rand des Netzes (Abb. 8) nachgespannt, indem man das Element, welches zum Rand anschließt, automatisch aus der Berechnung entfernt und an seine Stelle eine Kraft anbringt. Durch anschließende Iterationen wird die Struktur ins Gleichgewicht gebracht und das Element wieder in die Rechnung eingefügt. Knicke, die am Rand des Netzes während der Berechnungen entstehen (Abb. 10) müssen korrigiert werden, was von den Rechenprogrammen automatisch durchgeführt wird. Das Element C-D wird in die Lage C-B gebracht, wobei seine ungedehnte Länge, entsprechend der erwünschten Spannung im Seil, neu berechnet wird.

4.2 Niedersachsenstadion in Hannover. Das Netz wird hier von einem Bogen mit einer lichten Spannweite von ca. 240 m (Abb. 5) getragen. Für diese Struktur wurde kein Modell benötigt, da die Anfangsdaten mit Hilfe von analytischen Funktionen ermittelt wurden. Der Bogen wird mit einem Biegeelement simuliert (Berücksichtigung der großen Verschiebungen). Das Netz ist mit einer Maschenweite von zuerst 6 und dann von 3m untersucht worden. Die Anzahl der unbekanntlichen Verschiebungen beträgt beim 3m Netz unter Symmetrieausnutzung 3200. Der endgültige Zuschnitt, mit einer Maschenweite von 1m, liefert ca. 24000 Unbekannte.

4.3 Osttribüne des Olympiastadions in München. Das Netz (Abb. 9) ist auf dem gleichen Prinzip wie das Westdach des Stadions aufgebaut. Die Vorspannung und die Lastfälle sind

mit einer Maschenweite von 3m untersucht worden. Die Anzahl der unbekanntenen Verschiebungen beträgt 1800. Der endgültige Zuschnitt von 0.75m soll noch exakt ermittelt werden, indem das 3m Netz linear interpoliert und anschließend in seine Gleichgewichtslage ausiteriert wird.

Literaturverzeichnis.

- [1] J.H.Argyris, Energy Theorems and Structural Analysis, a. Part I General Theory, Aircraft Engineering, Bd.26, 1954, Oktober S.347-356, Nov. S.383-387, Bd.27, 1955; Febr. S.42-58, März S.80-94, April S.125-134, Mai S.145-158. Als Buch veröffentlicht, Butterworths, Ldn.60.
- [2] J.H.Argyris, Recent Developments of Matrix Theory of Structures, Paper presented at the 10th Meeting of the Structures and Materials Panel, AGARD, Aachen, Sept.1959, (nicht veröffentlicht aber in 3 enthalten).
- [3] J.H.Argyris, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis, Progress in Aeronautical Sciences, Bd.4, London, New York, 1963.
- [4] J.H.Argyris, Three-Dimensional Anisotropic and Inhomogeneous Elastic Media Matrix Analysis for Small and Large Displacements, Ingenieur Archiv, 34. Band, 1. Heft, 1965, S.33-55.
- [5] J.H.Argyris, Continua and Discontinua, Opening Address to the International Conference on Matrix Methods of Structural Mechanics, Dayton, Ohio, Wright-Patterson, U.S.A.F. Base, October 26th, 1965. Veröffentlicht in den Proceedings of the Conference by U.S. Government, S.1-198, Januar, 1967.
- [6] J.H.Argyris, Elasto-Plastic Matrix Displacement Analysis of Three Dimensional Continua, J. of the Royal Aeron. Soc., 69(1965) S.633-636.
- [7] J.H.Argyris und D.W.Scharpf, Berechnung vorgespannter Netzwerke, Bayer. Akad. Wiss., Sonderdruck 4 aus den Sitzungsberichten 1970, München.
- [8] J.H.Argyris und D.W.Scharpf, Finite Elements in Time and Space, J. of the Royal Aeron. Soc. Vol.73, December 1969.
- [9] ASKA User's Manual. ISD Report 73, Universität Stuttgart, November 1969.
- [10] DYNAN User's Reference Manual, ISD Report 97, Universität Stuttgart, 1971.
- [11] T. Angelopoulos, Zur Formfindung, Statik und Dynamik von vorgespannten Netzwerkkonstruktionen. Dr. Ing. Dissertation, zur Vorlage an der Universität Stuttgart.
- [12] J.H.Argyris und T. Angelopoulos, Ein Verfahren für die Formfindung von beliebigen, vorgespannten Netzwerkkonstruktionen, Vorbericht des 9. IVBH Kongresses 1972, Amsterdam - Thema IIIa.
- [13] J.H.Argyris and D.W.Scharpf, Large Deflection Analysis of Prestressed Networks. Journal of Structural Division, ASCE, Vol.98, No. ST3, March 1972.
- [14] J.H.Argyris and T. Angelopoulos, Nonlinear Oscillations Using the Finite Element Technique. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, No.3, 1972.

5. Zusammenfassung. Die Methode der finiten Elemente ist ein willkommenes Instrument für den Ingenieur, um die statische und dynamische Analyse komplizierter Tragwerke durchzuführen. In diesem Beitrag wurde gezeigt, daß ein nichtlineares Problem der Statik, das mit ca. 10500 Gleichungen beschrieben werden kann, mit Erfolg durchgeführt wurde. Auch das nicht-lineare Schwingungsproblem wurde anhand eines extremen Beispiels behandelt. Die Berechnung von vorgespannten Netzwerken ist nahezu unmöglich ohne den Einsatz von Großrechenanlagen, um in vertretbaren Maßen bezüglich der Sicherheit, der erforderlichen Genauigkeit und der Wirtschaftlichkeit bauen zu können. Trotz Vollautomatisierung der Berechnungsmethode ist der Ingenieur in der Lage, auf die Berechnungen Einfluß zu nehmen.

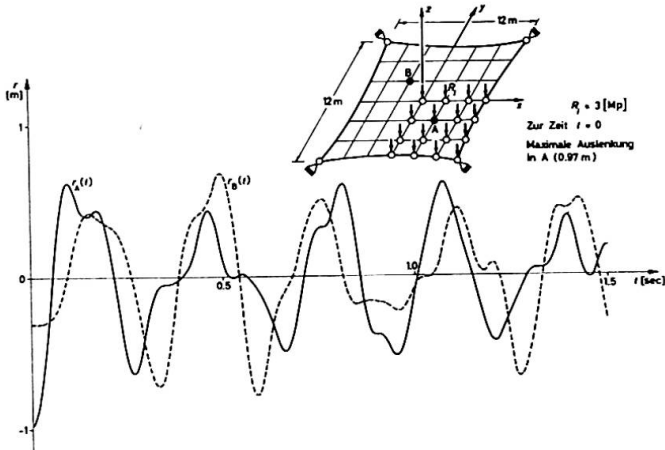


Abb.1 Weg - Zeit Diagramm der Knoten A, B in z-Richtung

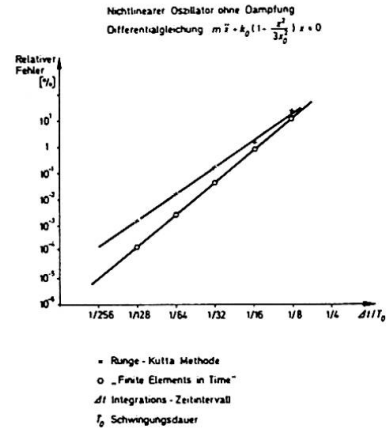


Abb.2 Nichtlinearer Oszillator ohne Dämpfung nach der Methode „Finite Elements in Time“

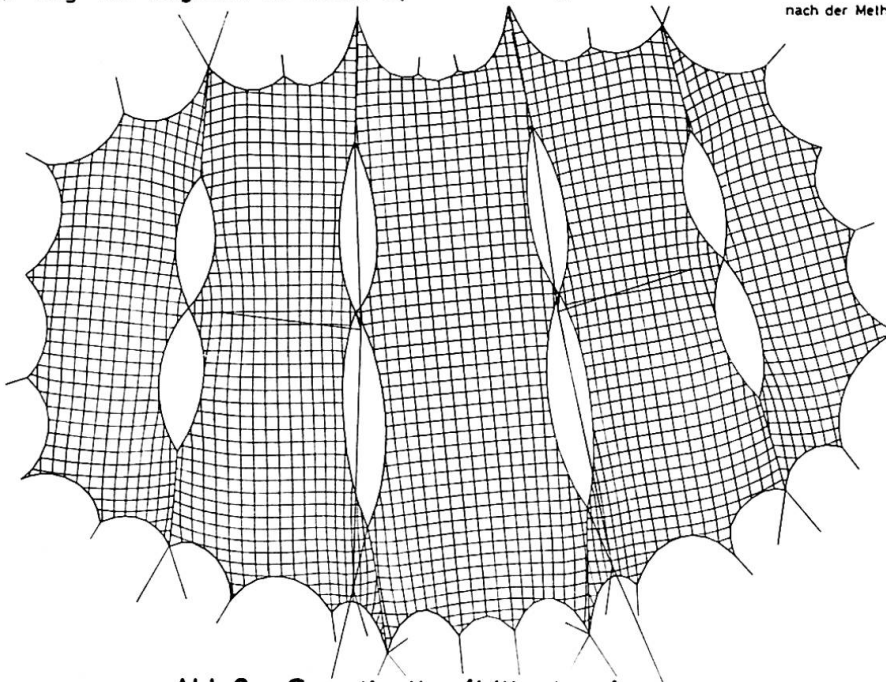


Abb.3 Sporthalle (München)

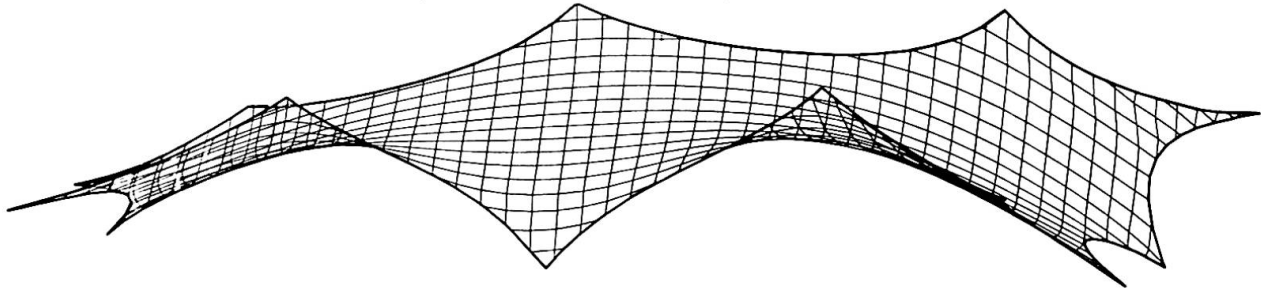


Abb.4 Räumliche Ansicht eines Netzteiles der Sporthalle

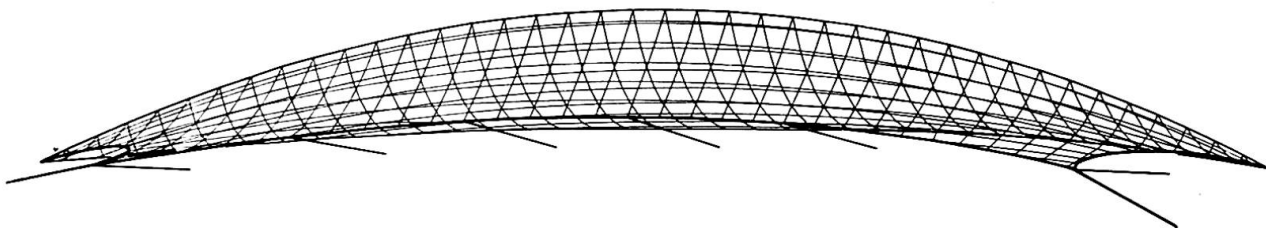


Abb.5 Niedersachsenstadion (Hannover)
 3m Netz , symmetrisch , 3350 Unbekannte

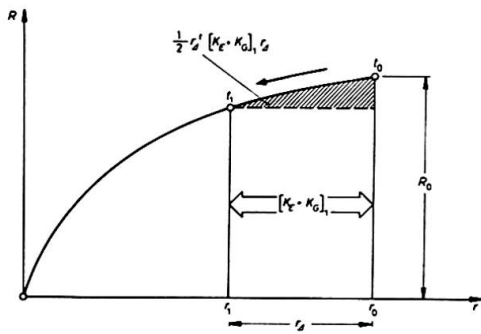


Abb. 6 Kraft-Weg Diagramm
Große Verschiebungen

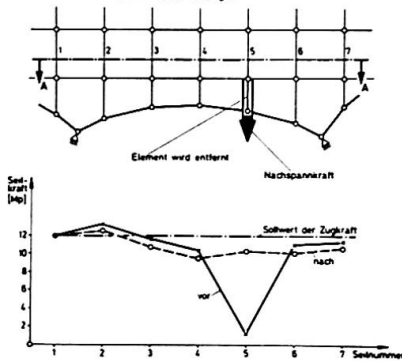


Abb. 8 Nachspannen am Rand des Netzes
Kraftverlauf im Schritt A-A vor und nach dem Nachspannen

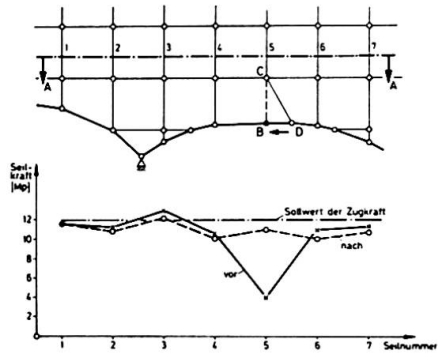


Abb. 10 Korrektur von Knicken am Rand
Kraftverlauf im Schritt A-A vor und nach der Korrektur

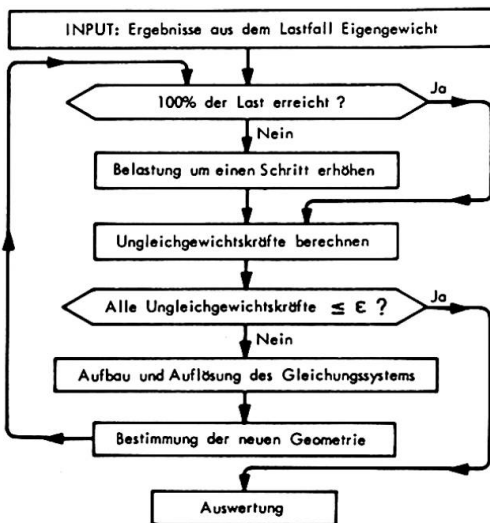


Abb. 12 Flussdiagramm für die Untersuchung der Lastfälle

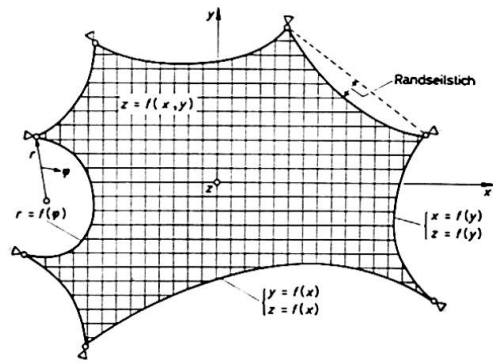


Abb. 7 Analytische Beschreibung des Netzes

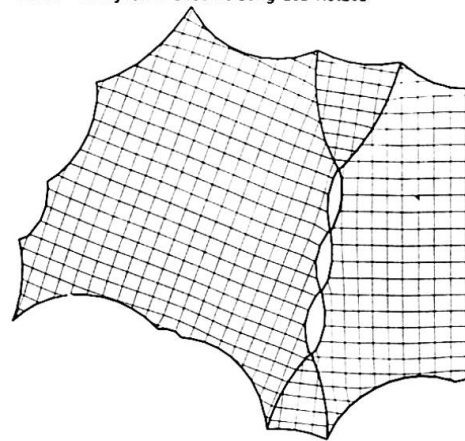


Abb. 9 Osttribüne (Olympiastadion München)
3m Netz, symmetrisch, 3350 Unbekannte

ELECTRONISCHE BERECHNUNG DER LASTFÄLLE MIT DEN SPANNUNGEN

STABEN	FELD	BEIL	LASTFÄLLE	SCHWELDET	PART	1	SEINE	EWF	LE
1	1200	2100	2100	1,0	2,000	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,010	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,020	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,030	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,040	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,050	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,060	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,070	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,080	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,090	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,100	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,110	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,120	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,130	11790	0,0000		
1	1200	2100	2100	1,0	2,140	11790	0,0000		

Abb. 11 Netzwerke
Endergebnisse der Berechnungen

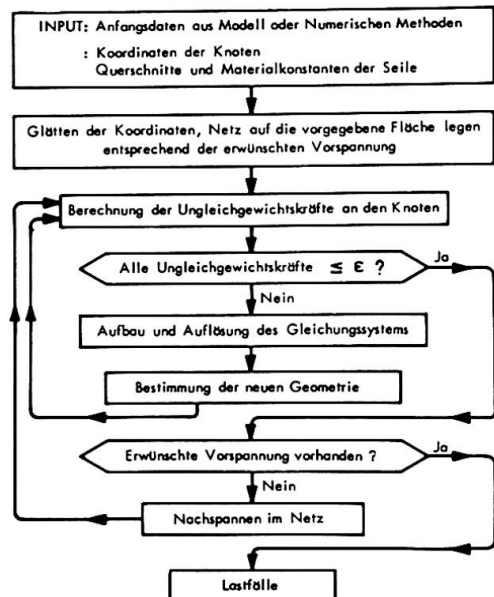


Abb. 13 Flussdiagramm für die Untersuchung der Vorspannung

Ein Verfahren für die Formfindung von beliebigen, vorgespannten Netzwerkstrukturen

A Method for Determining the Shape of Prestressed Network Constructions

Une méthode pour la détermination des flèches des réseaux de câble tendus

<p>J.H. ARGYRIS Prof., Dr., Dr. h.c. Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen Stuttgart, BRD</p>	<p>T. ANGELOPOULOS Dipl.-Ing. Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen Stuttgart, BRD</p>
--	---

Übersicht. Aus rein statischen Überlegungen, durch Anwendung der finiten Elemente und der Matrizenverschiebungsmethode, wird ein Verfahren für die Formfindung von vorgespannten Konstruktionen beschrieben. Mit einer minimalen Anzahl von Anfangsdaten läßt sich bei geforderter Vorspannung die entsprechende Geometrie für beliebige Netzwerke bestimmen. Langwierige und kostspielige Modelle werden dadurch überflüssig. Anhand von komplizierten Beispielen wird die Allgemeinheit des Verfahrens bestätigt.

Einleitung. Die Formfindung von vorgespannten Netzwerkstrukturen ist von fundamentaler Bedeutung für die weitere Entwicklung und Verbreitung solcher Strukturen. Die Form von Seilnetzen wird nicht nur nach architektonischen Gesichtspunkten gestaltet; sie hat in erster Linie die Funktion dieser Strukturen bezüglich des Tragverhaltens zu erfüllen. Die Ermittlung der Form durch Modelle ist langwierig und ungenau. Kleine Maßstäbe verursachen zu starre Simulation der Ränder, der tragenden Maste und große Fehler bei der Messung der Geometrie und der entsprechenden inneren Kräfte. Es wird außerdem für den Fall, daß die Untersuchung der Lastfälle ungünstig ausfällt, z. B. sehr große Verschiebungen, schlaaffe Seile, usw., sowohl aus wirtschaftlichen als auch aus terminlichen Gründen unzumutbar, neue Modelle zu bauen oder die vorhandenen zu ändern. Es ist angebracht, numerische Methoden zu entwickeln, die mit Hilfe von elektronischen Rechenanlagen den Vorgang der Formfindung beschleunigen und wirtschaftlicher zu gestalten. Im Abschnitt 1 des Beitrages wird auf die Forderungen, die an Seilnetzkonstruktionen gestellt werden, eingegangen, sowie auch auf Vernachlässigungen, die erlaubt sind, bis die gesuchte Gleichgewichtsfigur ermittelt worden ist. Trotz aller Argumente gegen Modelle wird im Abschnitt 2 ein rein theoretisches "Modell" beschrieben, das aus einer Materie besteht, die man mit sehr großen Kräften belasten und auch entsprechend dehnen kann, ohne das Hooke'sche Gesetz zu verletzen. Ausgehend von einem ebenen Netz, dessen Seile aus der obengenannten theoretischen Materie bestehen, lassen sich durch inkrementale Versetzung bestimmter Knoten in Richtung von vorgeschriebenen Punkten im Raum und mit Hilfe der Statik doppeltgekrümmte Gleichgewichtsfiguren erzeugen. Der so ermittelte Spannungszustand ist jedoch völlig unbrauchbar für das "Originalgebilde" und muß deshalb mit der geforderten Vorspannung transformiert werden. Die praktische Durchführung des Verfahrens und eine Reihe von Beispielen (z. B. die Formfindung des Netzdaches der Osttribüne des Olympia-Stadions in München) werden in Abschnitt 3 ausführlich behandelt. Eine typische Ingenieur-aufgabe, die den Einsatz von Bildschirmgeräten fordert (s. Abschnitt 4), ist die Formfindung von vorgespannten Netzwerken. Die permanente Mann-Maschine Kommunikation zur Bewältigung solcher Aufgaben ist unerläßlich.

1. Forderungen an vorgespannte Netze. Die wichtigsten Forderungen an vorgespannte Netze sind, daß die Spann- und Trageile (Abb. 1) ausreichend vorgespannt sein müssen um Lastfälle wie z. B. Schnee, Wind und Temperatur aushalten zu können. Die Vorspannung darf

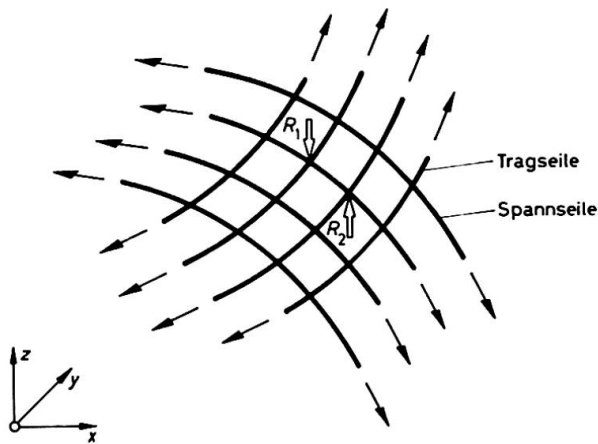
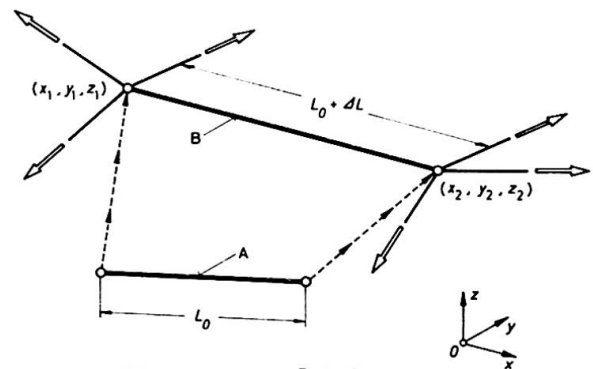


Abb. 1

Abb. 2 A: Seil im ungespannten Zustand
B: Seil im gespannten Netz

allerdings weder zu groß noch zu klein sein. In Abbildung 1 sieht man, daß bei einer äußeren Kraft R_1 (Schnee) die Spannseile entlastet und die Trageile belastet werden. Bei einer Belastung mit R_2 (Wind) verhält sich das Tragwerk umgekehrt. Für eine möglichst rationelle Fertigung sollten außerdem die ungedehnten Längen L_0 der Seile von Knoten zu Knoten im Innern der Netzfläche konstant sein. Die statische Berechnung von Seilnetzen soll die Lage der Knoten im Raum so bestimmen, daß die Längenänderung ΔL die geforderte Vorspannung erzeugt, und daß alle Knoten im Gleichgewicht sind. Für die Formfindung und für die ersten Untersuchungen der Lastfälle ist die Forderung nach der konstanten ungedehnten Länge von geringer Bedeutung. Übersteigt die Anzahl der unbekanntlichen Verschiebungen die Kapazität der Rechenanlage [1], so wird die statische Berechnung mit einer breiteren Maschenweite durchgeführt als die des endgültigen Zuschnitts. Dieser wird dann durch Interpolation [1] ermittelt. Für den Fall, daß die ungedehnten Längen L_0 nicht konstant sind, begeht man den Fehler, daß die Maschenweiten der reduzierten Seilquerschnitte nicht entsprechen. Der Einfluß ist jedoch gering gegenüber der großen Dimensionen der Netze. Man kann also zunächst bei der Formfindung und der ersten Untersuchungen der Lastfälle auf $L_0 = \text{konst.}$ verzichten. Auf die so ermittelte Fläche ist es dann kein Problem, unter Berücksichtigung der Vorspannung ein exaktes Netz zu legen [1], und die statische Berechnung für die Ermittlung der endgültigen Geometrie fortzusetzen. Ein numerisches Verfahren für die Formfindung solcher komplizierter Gleichgewichtsfiguren soll zuverlässig sein, schnell zu erwünschten Lösungen führen und vor allem benutzerfreundlich sein.

2. Ein Computer-orientiertes "Modell" für die Formfindung. Die Formfindung von räumlichen Flächen, die bestimmte Randbereiche und fast singuläre Punkte erfassen und die sich gleichzeitig im Gleichgewicht befinden sollen, bestimmt man experimentell mit der Seifenhautmethode oder an leicht deformierbaren Stoffen. Solche Versuche sind meistens kurzlebig, da der Werkstoff reißt. Es ist außerdem unmöglich verschiedene Lastfälle zu untersuchen ohne auf Draht-Meßmodelle auszuweichen. Wenn wir versuchen, die Arbeit des Modellbauers im Computer nachzuahmen, dann brauchen wir einen leicht dehnbaren Stoff. Dieser muß mit sehr großen Zugkräften belastet werden können und dabei beliebig lang dehnbar sein. Für Seile mit obigen Eigenschaften ist das Hooke'sche Gesetz für einen beliebig großen Bereich gültig. Im Computer kann dies sehr einfach durch Zahlen dargestellt werden. Ungeachtet der endgültig gesuchten Form bauen wir ein ebenes Netz, welches alle diese theoretischen Voraussetzungen erfüllt. Wir können dann durch Versetzen bestimmter Knoten das Netz zwingen, eine natürliche Gleichgewichtslage, die mit Hilfe der Statik bestimmt wird, anzunehmen. Dieses statische Experiment ist nichtlinear, da dabei große Verschiebungen auftreten, die Dehnungen bleiben aber durch

die obige "Annahme" im linearen Bereich. Mit Hilfe eines einfachen Beispielen wiederholen wir den oben geschilderten Vorgang, ohne auf die Methode der Finiten Elemente einzugehen, da sie in [2,3] ausführlich behandelt wird.

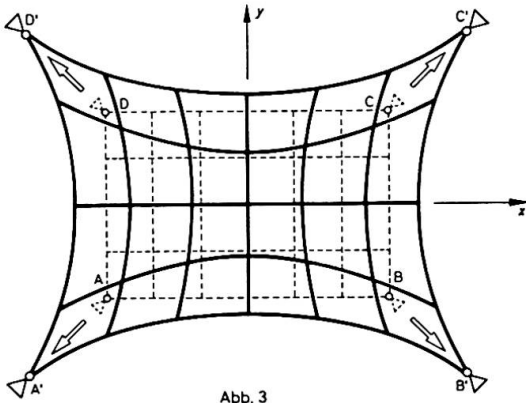


Abb. 3

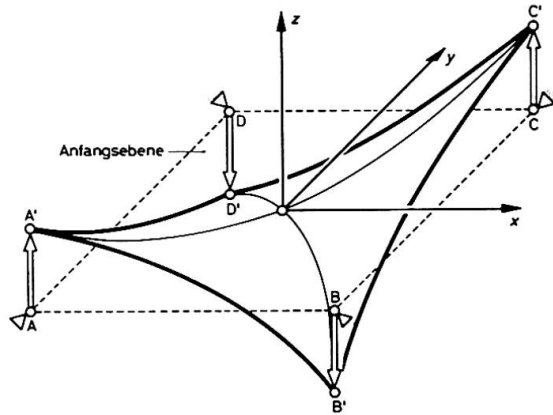


Abb. 4 Umformen einer ebenen Fläche in eine vorgespannte doppelte gekrümmte Membran durch Versetzen der Auflager

Gegeben sei ein ebenes Netz ABCD (Abb. 3), gesucht wird seine Form wenn wir die Eckknoten A, B, C, D nach A', B', C', D' verschieben. Die Knoten A, B, C, D werden mit Auflager versehen und dann inkremental versetzt bis sie die Punkte A', B', C', D' erreichen. Bei jeder inkrementalen Verschiebung der Knoten wird der Belastungsvektor R_u (Ungleichgewichtskräfte an den Knoten, siehe Ref. 1, 3)

sowie die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Netzes $[K_E + K_G]$ für große Verschiebungen aufgebaut und das lineare Gleichungssystem

$$R_u = [K_E + K_G] r_\Delta$$

aufgelöst. Die daraus ermittelten inkrementalen Verschiebungen werden zur alten Geometrie hinzuaddiert und danach werden die Ecken des Netzes erneut versetzt. Wird bei dem Start der Berechnung angenommen, daß sich das ebene Netz im Gleichgewicht befindet, was nicht unbedingt der Fall sein muß, so wäre der Vektor R_u ein Nullvektor, da die resultierende Kraft an jedem Knoten gleich Null ist. Nachdem aber die Knoten zum ersten Mal versetzt worden sind, entstehen die ersten Ungleichgewichtskräfte. In Abbildung 5 wird der Knoten C nach C^* verschoben, dadurch entstehen die Ungleichgewichtskräfte

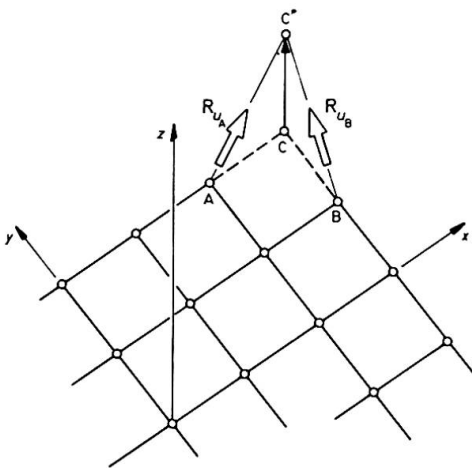


Abb. 5 Ungleichgewichtskräfte beim Hochziehen des Knotens C

$$R_{uA} = \{ R_{uAx} \ R_{uAy} \ R_{uAz} \}$$

$$R_{uB} = \{ R_{uBx} \ R_{uBy} \ R_{uBz} \}$$

$$R_u = \{ 0 \ 0 \ 0, \dots, R_{uAx} \ R_{uAy} \ R_{uAz}, 0 \dots 0, R_{uBx} \ R_{uBy} \ R_{uBz}, \dots 0 \ 0 \ 0 \}$$

Somit wird das Netz gezwungen entsprechend der Belastung eine neue Gleichgewichtslage im Raum einzunehmen. Während der einzelnen Schritte entstehen sehr große Ungleichgewichtskräfte, die nicht stören, solange die Struktur stabile Lagen durchquert. Sobald die Knoten A, B, C, D ihre Soll-Lage erreicht haben, wird weiter iteriert bis die Restkräfte einen Gleichgewichtszustand darstellen. Das gleiche Prinzip kann man auch anwenden, wenn bestimmte Knoten räumlich verschoben werden. In Abb. 4 sieht man die Entstehung einer doppelte gekrümm-

ten Fläche durch Verschieben der Knoten A, B, C, D nach A', B', C', D'. Die auf diesem Wege gewonnenen Figuren befinden sich im Gleichgewicht. Der Spannungszustand ist jedoch unbrauchbar, da durch die Seile sehr große Kräfte übertragen werden.

2.1. Transformation der aus dem "Modell" gewonnenen Werte auf das "Original".

Der Spannungsverlauf im "Modell" muß so transformiert werden, daß er angenähert dem der erwünschten Vorspannung P_{Nf} entspricht. Dies ist möglich, wenn die ungedehnten Längen des ebenen Netzes entsprechend P_{Nf} neu berechnet werden.

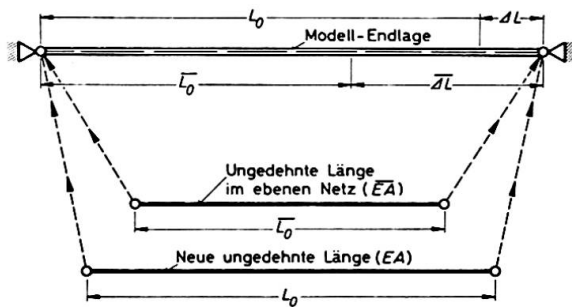


Abb.6 Neue ungedehnte Länge entsprechend der geforderten Vorspannung P_{Nf} ($EA = \bar{EA}$)

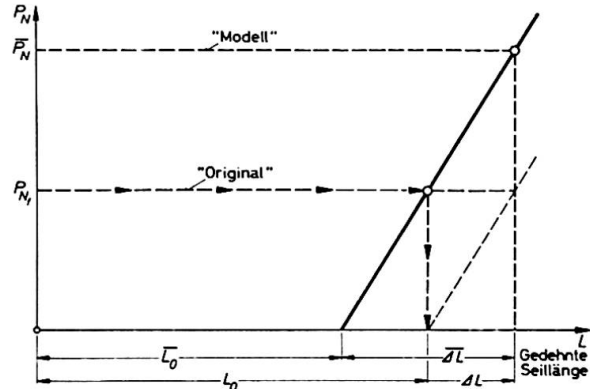


Abb.7

Damit jedes Seilstück von der Anfangsebene aus seine Gleichgewichtslage im Raum einnehmen kann (Abb.6), muß es um ΔL gedehnt werden. Aus den folgenden 3 Gleichungen

"Modell": $\bar{P}_N = \bar{EA} \frac{\Delta L}{L_0}$ "Original" $P_{Nf} = EA \frac{\Delta L}{L_0}$

und der Bedingung $\bar{L}_0 + \Delta L = L_0 + \Delta L$ lassen sich die ungedehnten Längen des "Originalnetzes" so bestimmen, daß innerhalb jedes Seilnetzes die erforderliche Zugkraft übertragen wird.

$$L_0 = \frac{\bar{L}_0 + \Delta L}{(1,0 + P_{Nf}/EA)} \quad (EA = \bar{EA})$$

Durch die Änderung der Längen L_0 bzw. der inneren Kräfte des Netzes ist die Gleichgewichtslage des Netzes verletzt und somit wird die iterative Gleichgewichtsermittlung erneut vorgenommen, bis die Ungleichgewichtskräfte hinreichend klein sind. Danach haben wir eine Gleichgewichtsfigur, deren Spannungsverteilung in der Nähe der geforderten Vorspannung liegt. Für die Randseile gilt die gleiche Prozedur. Auch sie nehmen eine Gleichgewichtslage im Raum ein.

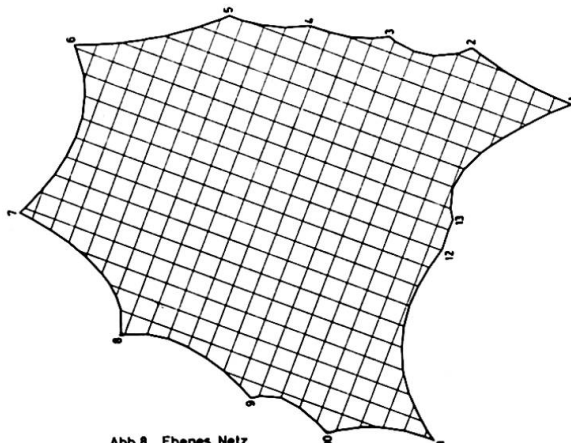


Abb.8 Ebenes Netz

3. Praktische Durchführung des Verfahrens und Beispiele.

Eine interessante vorgespannte Netzfläche mit dem Verfahren zu testen, bietet der Entwurf des Netzdaches für die Osttribüne des Olympiastadions in München [1]. Das Dach besteht aus drei miteinander gekoppelten Netzen. Wir wollen nun das Generieren eines der drei Netze (Abb.8) durch das im Abschnitt 2 beschriebene Verfahren verfolgen (siehe auch Flußdiagramm Abb.9). Die endgültigen Untersuchungen der einzel-

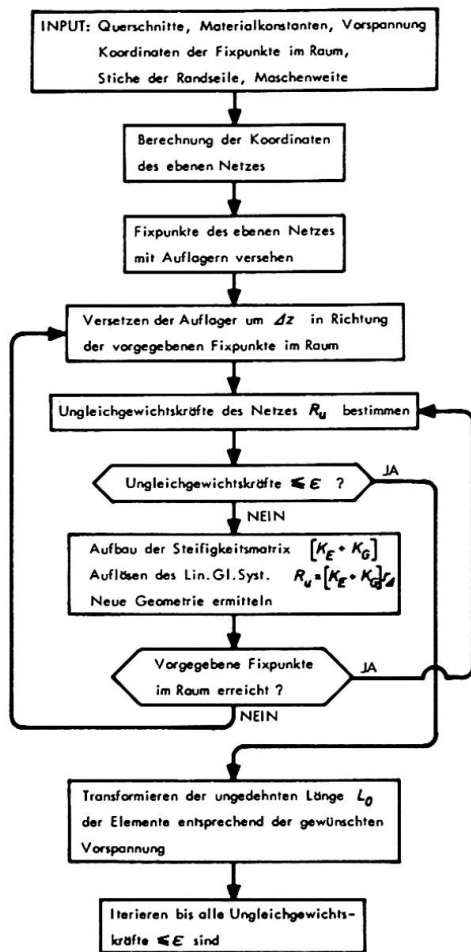


Abb.9 Flußdiagramm für die Formfindung durch Versetzen der Auflager

nen Lastfälle sollen mit einer ungedehnten Länge L_0 von 3m untersucht werden. Zuerst wird ein ebenes Netz $L_0 = 2,9m$ berechnet. Als Vorspannung wird im Inneren des Netzes eine Kraft von 1 Mp und am Rand eine Kraft von etwa 10 Mp angenommen. Diese Anfangswerte der Vorspannung spielen keine Rolle. Man schreibt deshalb irgendwelche kleineren Werte vor. Die EA-Werte werden im allgemeinen aus einfachen Vorberechnungen bestimmt und werden gleich für das Ebenen Netz übernommen. Man kann sie auch schätzen und während der Berechnungen für die Formfindung abändern. Für die Osttribüne sind folgende EA-Werte für die Maschenweite angesetzt worden:

EA-Rand=65250 Mp, EA-Trag-Spannseile=10930 Mp.

Für die Schnittpunkte der Randseile untereinander im ebenen Netz wurden die Projektionen der räumlich vorgegebenen Fixpunkte genommen. Als nächster Schritt wird eine Niveauhöhe gewählt und daraus die Z-Distanzen ermittelt um welche die 13 Knoten inkremental versetzt werden. Weiterhin unterdrücken wir die möglichen Verschiebungen der Knoten 1 bis 13, damit kann das Versetzen der Knoten beginnen. Die Endlagen in z-Richtung werden in 10 Schritten erreicht (siehe Flußdiagramm Abb.9).

Anschließend wird in 4 weiteren Iterationen, bei denen die Knoten festgehalten werden, die Gleichgewichtslage des "Modells" ermittelt (Abb.10). Aus dieser "Modell" Endlage (Abb.10) werden die ungedehnten Längen des "Originals" berechnet. Für die Trag- und Spannseile werden 12 Mp Zugkraft gefordert und für die Randseile 150 Mp. In Abbildung 10 sieht man 5 räumliche Phasen der Formfindung. Zuerst eine Gerade, die das Ebene Netz darstellt, anschließend drei Zwischenstufen der Entwicklung und am Ende die Geometrie des "Originals", welche kaum von der des "Modells" abweicht. Die Differenz der Koordinaten variiert zwischen 0.01 und 0.14m bei einer maximalen Länge und Breite des Netzes von ca. 68 bzw. 60m. In der Abbildung 11 sind die Zugkräfte "Modell", "Original" über die Randseilelemente aufgetragen. Verblüffend ist dabei die Ähnlichkeit der Kurven. Die zwei Knicke der Kurven werden durch den Anschluß der waagerechten Seile erzeugt. Weitere Auswertungen des Verfahrens sind die Abbildungen 12, 13. Hier sind die Zugkräfte entlang der Elemente sowie die ermittelte Geometrie aufgetragen. Die Kurven haben die gleiche Ähnlichkeit wie Abb.11. Sehr interessant sind auch die sogenannten S-Kurven (Abb.14), die man auch im Tüllmodell (Institut für leichte Tragwerke Universität Stuttgart) sehen kann. Im Durchschnitt aber ist die geforderte Spannungsverteilung nicht erreicht, sondern etwa um 30% geringer. Dies ist jedoch kein Hindernis, zumal wir die Möglichkeit haben, automatisch die Spannung zu erhöhen (Abb.15) durch Nachspannen am Rand (siehe auch Ref. 1 Abschnitt 4). Die ungedehnten Längen der Seile im Inneren nach der Transformation beträgt etwa im Durchschnitt 3.01 bis 3.15m.

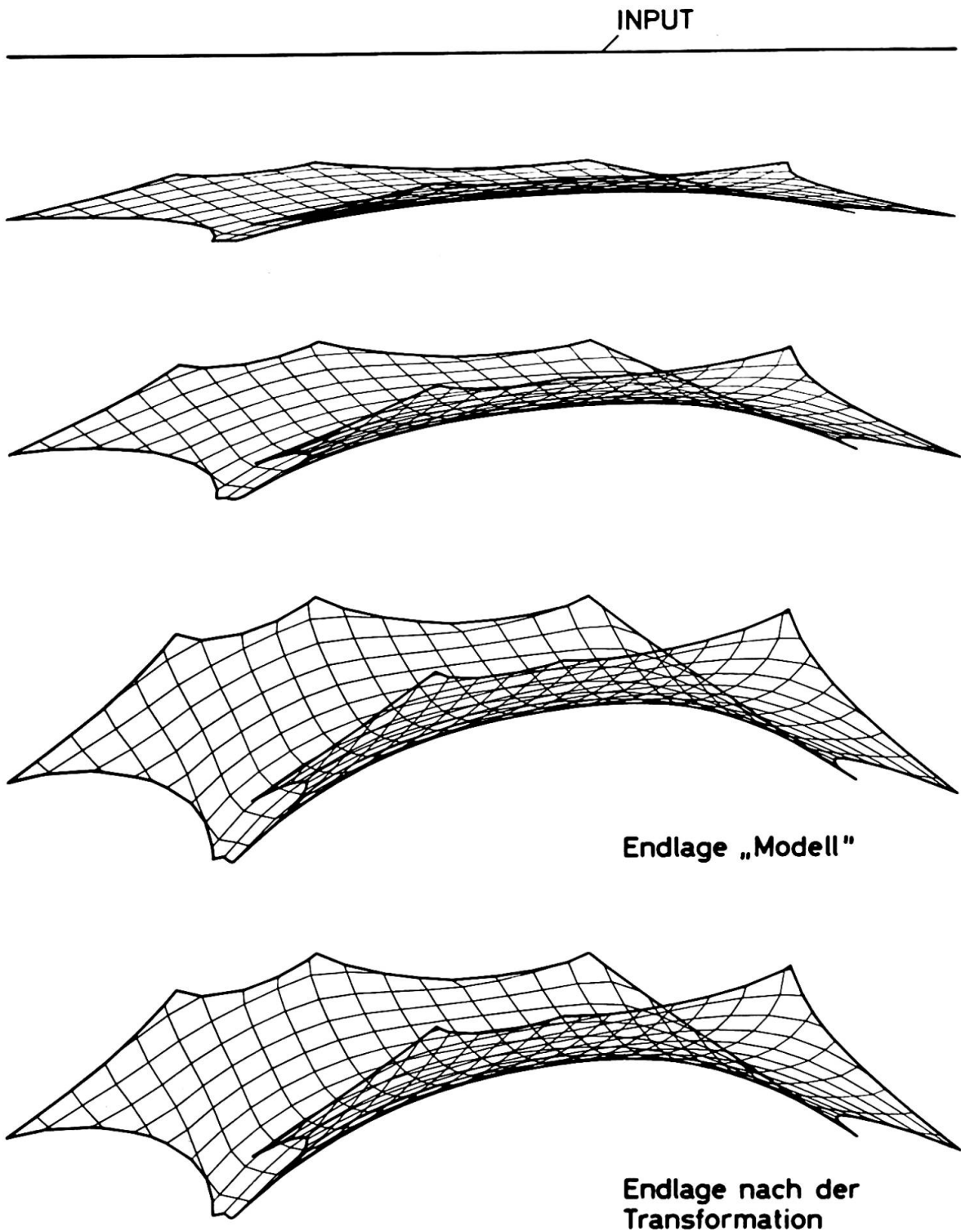


Abb.10 Hochziehen eines Netzes
Osttribüne des Olympiastadions München

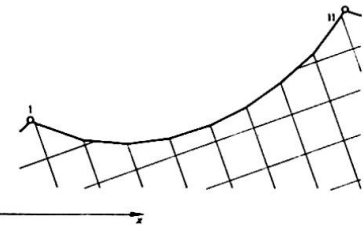
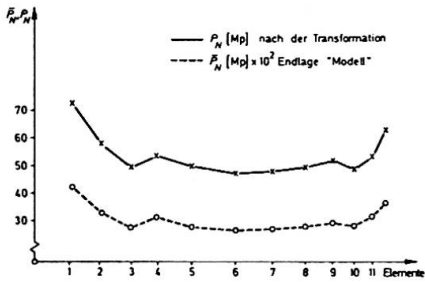


Abb.11 Kraftverlauf längs eines Randseiles (Ostribüne, München)

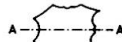
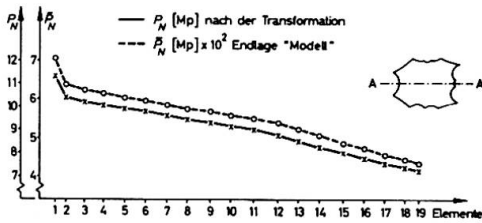


Abb.12 Kraftverlauf und Geometrie längs des Seiles A - A (Ostribüne, München)

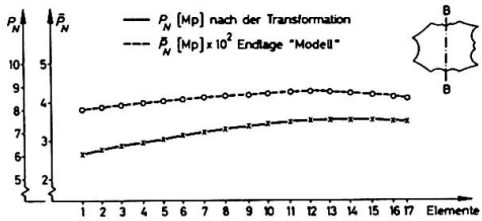


Abb.13 Kraftverlauf und Geometrie längs des Seiles B - B (Ostribüne, München)

Wir wollen jedoch wiederholen, daß es kein Problem ist, aus dieser Geometrie durch Berücksichtigung der EA-Werte und der ermittelten Vorspannung, ein Netz mit konstanter ungedehnter Länge zu berechnen. Das Verfahren soll trotzdem erweitert werden, indem die konstante ungedehnte Länge beibehalten wird. Zwei weitere Netze (Abb. 16, 17), die man in der Praxis antrifft, sind mit dem gleichen Verfahren aus einem ebenen Netzwerk erzeugt worden. Das in Abbildung 16 dargestellte Netzdach kann man vielleicht analytisch vorgeben. Schwierigkeiten gibt es jedoch bei Randseilen, die das Netz in Richtung der Fundamente abspannen. Speziell soll mit diesem Beispiel gezeigt werden, daß man ausgehend von einem Ebenen Netz große Entfernungen (hier 37.5m) durch Versetzen bestimmter Knoten (hier wird nur der Mittelpunkt des Kreises versetzt) erreichen kann.

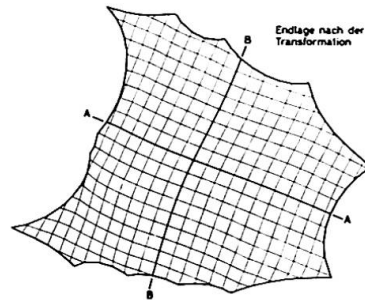


Abb.14 Grundriß der Anfangs- und Endlage beim Hochziehen

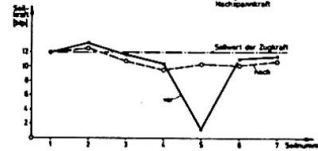
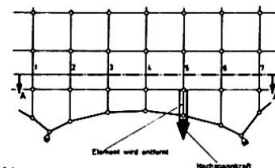


Abb.15 Nachspannen am Rand des Netzes Kraftverlauf im Schnitt A-A vor und nach dem Nachspannen

Das in Abb.17 entwickelte Netz hat ebenso eine komplizierte Geometrie, insbesondere unter dem Bogenträger.

4. Der Einsatz von Bildschirmgeräten für die Formfindung und Berechnung von Seilnetzen.

Die komplizierte Geometrie von vorgespannten Netzen fordert eine schnelle Kommunikation zwischen Ingenieur und Computer. Tausende von Knotenkoordinaten und entsprechende Anzahl von Elementen müssen ständig kontrolliert werden. Sehr oft müssen gezielte Änderungen vorgenommen werden, wie z.B. Entfernen und Zufügen von Knoten und Elementen oder Nachspannen (Abb. 15) in Bereichen mit Spannungsabfall bzw. Erhöhung. Speziell bei der Formfindung müssen flache Bereiche, die unerwünscht sind, sofort erkannt und entsprechend behandelt werden. Als sehr gutes Gerät für diese Forderungen erweist sich ein aktiver Bildschirm [4], wie z.B. das im ISD der Universität Stuttgart installierte System Control Data 1700 mit Display Konsole.

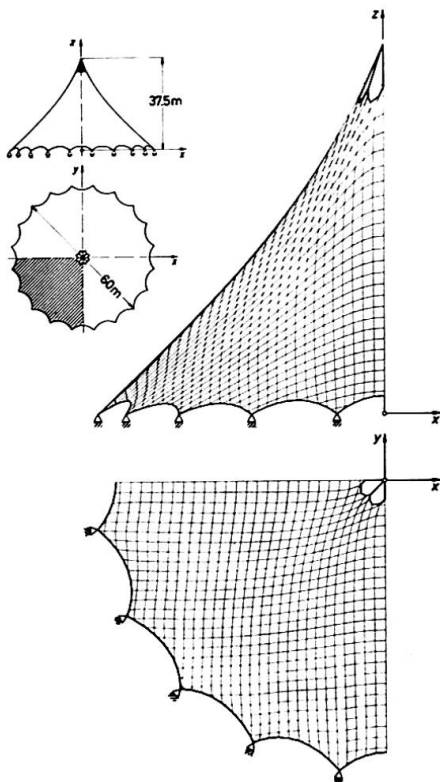
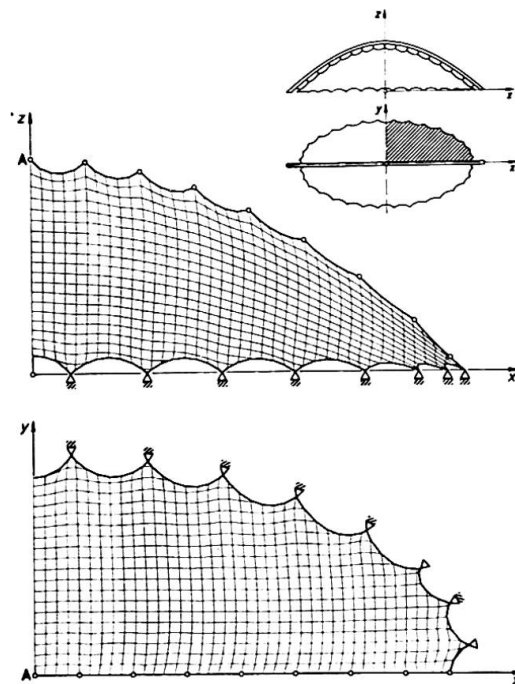


Abb.16 Hochziehen eines ebenen kreisförmigen Netzes

Abb.17 Formfindung durch Hochziehen
Netzüberdachung eines elliptischen Grundrisses
mit Hilfe eines Bogenträgers

Besondere Vorteile bietet der ON-LINE Betrieb mit einer Großrechenanlage, wie z.B. CDC 6600. Man kann die in diesem Beitrag (siehe auch Ref.1) dargelegte Problematik fast kontinuierlich verarbeiten. Überdies hat der Ingenieur ausreichende Möglichkeiten um in die Berechnungen eingreifen zu können. Wir glauben, daß Netzwerke in Zukunft nur wirtschaftlich mit Hilfe von Bildschirmgeräten entwickelt werden können.

Literatur

- [1] J.H.Argyris und T.Angelopoulos.Theorie, Programmentwicklung und Erfahrung an vorgespannten Netzwerkkonstruktionen Vorbericht des 9.IVBH Kongresses 1972, in Amsterdam
- [2] J.H.Argyris und D.W. Scharpf.Berechnung vorgespannter Netzwerke, Bayer. Akad.Wiss., Sonderdruck 4 aus den Sitzungsberichten 1970 München
- [3] J.H.Argyris and D.W. Scharpf Large Deflection Analysis of Prestressed Networks Journal of Structural Division, ASCE, Vol.98 No.ST3, March 1972
- [4] I.Grieger.Über den Einsatz von Bildschirmgeräten bei der Tragwerksberechnung, an die Universität Stuttgart eingereichte Dr.Ing. Dissertation.

Zusammenfassung

Die Formfindung von vorgespannten Netzwerken läßt sich nicht nur durch Modelle sondern auch durch numerische Wege ermitteln.Mit dem in diesem Beitrag dargelegten Verfahren lassen sich beliebige vorgespannte Flächen erzeugen.Weiterhin ist es möglich mit Hilfe von Bildschirmgeräten diese Berechnungsmethode erheblich zu beschleunigen und wirkungsvoller zu gestalten.

Über eine neue Methode zur Berechnung vorgespannter Seilnetze und ihre praktische Anwendung auf die Olympiadächer München

A New Method of Analysis of Prestressed Cable Networks and its Use on the Roofs for the Olympic Games Facilities at Munich

Nouvelle méthode de calcul de couvertures précontraintes suspendues et son application pratique aux voiles construits à Munich pour les Jeux Olympiques

K. LINKWITZ H.-J. SCHEK
Stuttgart, BRD

Die hier knapp umrissene neue Berechnungsmethode wurde konzipiert, in ein Programmsystem übersetzt und in großem Umfang praktisch angewendet bei der Ermittlung des Zuschnitts^{+) für die vorgespannten Seilnetze der Dächer von Stadion und Zwischenteilen der Olympiabauten München.}

Bei der analytischen Berechnung faßt man die durch die Knotenpunkte des Netzes repräsentierte Fläche als Gleichgewichtsfigur auf. In jedem Knotenpunkt, in welchem im Netzzinnern vier und auf dem Randseil drei Seilstücke unter Zugspannungen zusammenstoßen, besteht Gleichgewicht. Die Gleichgewichtsfigur ist dann bekannt und die Aufgabe ihrer Bestimmung dann gelöst, wenn man die Koordinaten aller Knotenpunkte und die Kräfte in allen Seilstücken kennt.

1. Voraussetzungen und Grundlagen

Zur Berechnung geht man von der vereinfachenden Vorstellung aus, daß alle Seilstücke biegeschlaff sind, und ersetzt damit das Seilnetz durch ein räumliches Fachwerk aus in den Knotenpunkten gelenkig miteinander verbundenen Zugstäben. Die in den einzelnen Seilstücken wirkenden Zugkräfte ergeben sich nach dem Hookeschen Gesetz (h_j ist das Produkt aus Elastizitätsmodul und Querschnitt des j -ten Seilstückes) aus der Differenz v_j zwischen tatsächlichem räumlichen Abstand w_j benachbarter Knotenpunkte i und k im Vorspannungszustand und der jeweils etwas kürzeren Länge l_j des zugehörigen ungespannten Seilstücks nach

$$s_j = \frac{h_j}{l_j} (\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2} - l_j) = \frac{h_j}{l_j} (w_j - l_j) = \frac{h_j}{l_j} v_j \quad (1)$$

Für den Lastfall Zuschnitt nimmt man an, daß mit Ausnahme der Abspannkräfte keine äußeren Kräfte in den Knotenpunkten angreifen und vernachlässigt das Eigengewicht. Bei m Seilstücken ist die Energie des Systems

$$u = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m s_j \cdot v_j = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m v_j^2 \cdot \frac{h_j}{l_j} = \frac{1}{2} \cdot V' H L^{-1} V \quad (2)$$

^{+) Unter dem Zuschnitt versteht man die Ermittlung aller Seillängen und die Darstellung der Randzonen der räumlich gekrümmten Netze in möglichst verzerrungsfreien Plänen.}

Die Matrix H bzw. L^{-1} ist eine Diagonalmatrix mit den Elementen h_j bzw. $1/l_j$ und V ist eine einspaltige aus v_j aufgebaute Matrix. Entsprechend werden im folgenden die Matrizen X für die Knotenpunkte, S für die Seilkräfte sowie L bzw. W für die ungedehnten bzw. gedehnten Längen gebildet.

Das System ist im Gleichgewicht, wenn die unbekanntes Knotenpunktkoordinaten so gewählt werden, daß die Energie zum Minimum wird. Die partiellen Ableitungen von u nach den Koordinaten X ergeben sofort die Gleichgewichtsbedingungen

$$A'S = 0 \quad \text{oder} \quad A'HL^{-1}(W-L) = 0 \quad \text{oder} \quad A'HL^{-1}V = 0 \quad (3)$$

Die Matrix A' in (3) erhält man durch Ableiten von V nach X . Sie enthält so viele Spalten wie Seilstücke und so viele Zeilen wie unbekanntes Koordinaten im Netz vorhanden sind; ihre Elemente entsprechen den Richtungscosinus für die räumlichen Richtungen der Seilstücke. Zur praktischen Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen (3) können wir verschiedene Wege einschlagen:

2. Newton-Verfahren (A)

Faßt man in (3) die ungedehnten Längen L der Seilstücke als fest vorgegeben auf, so erhält man bei n Knotenpunkten $3n$ nichtlineare Gleichungen zur Bestimmung von $3n$ unbekanntes Knotenpunktkoordinaten X . Nach Einführung von Näherungswerten X_0 und einer Linearisierung durch Differenzieren nach X , läßt sich das Newton-Verfahren mit den jeweils linearen Gleichungen

$$(A'W^{-1}A + D)\Delta X = -A'HL^{-1}(W-L)/X_0 \quad (4)$$

anwenden. Die Herleitung von (4) aus (3) ist in /3/ ausführlich beschrieben. Setzt man die Matrix $D=0$, so erhält man mit der Näherung $L=W$ gerade das Gleichungssystem, welches man nach der Verschiebungsmethode bei der Theorie 1. Ordnung erhalten hätte und welches in dem hier vorliegenden Fall singular wird, da die Anzahl der Seilstücke in vorgespannten Netzen kleiner ist als die Anzahl der Koordinatenverschiebungen.

In ganz analoger Weise ließe sich aus (3) ein (4) entsprechendes Gleichungssystem gewinnen, in welchem anstelle der l_j die Seilkräfte s_j jedes Seilstücks zur Lösung vorgegeben werden müßten. Schließlich ist auch eine Kombination der Gleichungen in der Weise möglich, daß für eine Anzahl von Seilstücken - etwa im gleichmässigen inneren Teil des Netzes - die ungedehnten Längen und für den Rest - etwa im unregelmässigen Randbereich - die Kräfte in den Seilstücken vorgeschrieben werden. Nach einer dieser Vorgabe entsprechenden Methode berechneten ARGYRIS/SCHARPF /1/ das Sporthallennetz.

Praktische Schwierigkeiten bei der Anwendung dieses Verfahrens können dadurch auftreten, daß für alle Seilstücke - also auch für die Seilstücke unbekannter Länge im Zuschnittsbereich des Randes - entweder die ungedehnte Länge l oder die Seilkraft s vorgeschrieben und damit bekannt sein müssen. Gerade diese Werte sind jedoch unbekannt und können nur aus Modellmessungen, Überschlagsrechnungen oder Erfahrungen geschätzt werden. Insbesondere kann es geschehen, daß die geschätzten, vorgegebenen Kräfte nicht zu einer aus Modellen entnommenen geometrischen Form passen. Dann konvergiert die Berechnung schlecht oder überhaupt nicht, oder es ergeben sich große Änderungen in der Form und Seilführung.

3. Verfahren der kleinsten quadratischen Abweichungen (B)

Dieses neue, im Detail in /3/ beschriebene Verfahren unterscheidet sich von den Methoden (A) dadurch, daß bei der Herleitung der linearisierten Rechengleichungen aus den Gleichgewichtsbedingungen (3) auch die Seilkräfte im Randbereich des Zuschnitts - bzw. die ungedehnten Längen ausgewählter Seilstücke - als Unbekannte in (3) und dem daraus abgeleiteten linearisierten System belassen werden. Die Gleichungen (3) sind dann unterbestimmt und zunächst nicht eindeutig lösbar. Wir erhalten jedoch sofort eine eindeutige Lösung, wenn wir die von Kräften und Koordinaten der Gleichgewichtsfigur zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen als Nebenbedingungen eines zunächst noch frei wählbaren Minimumproblems auffassen. Die unten beschriebenen Anwendungen legten folgenden Ansatz nahe: Setzt man voraus, daß man für die unbekanntes Seilkräfte Schätzwerte S_0 und für die unbekanntes Koordinaten Schätzwerte X_0 kennt - dies trifft immer zu - so erhält man mit der zusätzlich zu erfüllenden Minimumbedingung

$$(X-X_0)'B_1(X-X_0) + (S-S_0)'B_2(S-S_0) \rightarrow \min \quad (5)$$

von allen möglichen Lösungspaaren (X,S) , welche (3) streng erfüllen, dasjenige Paar, welches sich im quadratischen Mittel von den Schätzwerten (X_0,S_0) am wenigsten unterscheidet. Je nach der Wahl der zwei Bewertungsdiagonalmatrizen B_1 und B_2 , erhält man dann eine Gleichgewichtsfigur, welche sich entweder sehr eng an die durch X_0 eingegebene geometrische Form hält, oder welche den geschätzten Kräfteverlauf S_0 möglichst gut anhält.

Insbesondere werden die geschätzten Kräfte dann exakt eingehalten, wenn die Elemente von B_2 sehr groß im Vergleich zu denen von B_1 gewählt werden. Dann geht das Verfahren (B) in (A) über. Praktisch geht man jedoch häufig umgekehrt vor, besonders, wenn eine vorgegebene Form möglichst eingehalten werden soll: Nach Einführung kleiner B_2 -Elemente liefert die Auflösung des linearisierten Systems (3) einen ersten Überblick über den der Form angepaßten Kräfteverlauf. Nach diesem ersten Orientierungsschritt können dann entweder die Kräfte begründet vorgegeben und die Rechnung mit A fortgesetzt werden, oder aber - das ist bei anfänglichen Schritten bequemer - das Verfahren B wird mit verbesserten Kraftschätzungen und erhöhten Bewertungsfaktoren B_2 wiederholt.

4. Anwendung des Verfahrens B bei der statischen Berechnung der Seilnetze des Stadions

Das nach dem Konzept B völlig neu für die CDC 6600 erstellte Programmsystem wurde im Mai 1970 fertig und sollte sofort auf die Berechnung des Stadions, bei dem sich während der geometrischen Zuschnittsermittlung große Probleme ergeben hatten, angewendet werden. Bei Beginn der Berechnungen lagen aus dem Zuschnittsmodell geometrischer Zuschnitt, Primärkonstruktion, Gußteile und alle Fundamente bereits fest. Die dadurch gegebenen Zwangsbedingungen mußten von den Berechnungen, die hier vor allem zur Kontrolle und nicht - wie im Normalfall - zur Zuschnittsermittlung dienten, möglichst eingehalten werden. Es war daher wesentlich, daß nicht durch die Vorgabe von festen Randbereichskräften S eine bestimmte Gleichgewichtsfigur X nach dem Verfahren A berechnet, sondern daß umgekehrt zu der schon in Plänen und konstruktiven Details verwendeten Modellgeometrie X_0 eine möglichst benachbarte Geometrie \hat{X} und ein passender Kräfteverlauf \hat{S} bestimmt wurden.

Durch Anwendung des Verfahrens B konnte bei befriedigendem Kräfteverlauf die Geometrie sehr gut eingehalten werden. Die Anpassung der Felder auf die vorhandenen Fundamente gelang in allen Abspannpunkten, jedoch an einigen Stellen nur durch größere Änderungen im Randseilverlauf: Zur Abänderung der Resultierendenrichtungen in den Abspannpunkten mußten die Kräfte in den Endstücken der betroffenen Randseile mit hoher Bewertung vorgegeben werden. Die Einzelfelder des Stadions wurden zusätzlich bei der Berechnung so beeinflusst, daß bei ihrer Zusammenfügung zum Gesamtsystem auch in den Übergangspunkten Gleichgewicht herrschte.

5. Anwendung des Verfahrens B bei der statischen Verdichtung der Zwischenteile

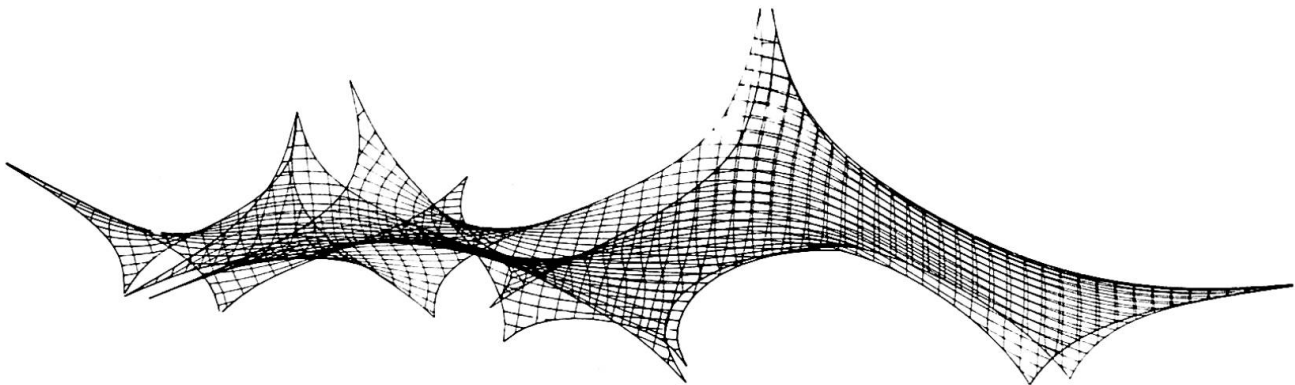
Die Berechnung der Felder der Zwischenteile Z1 und Z2 war Grundlage für die Zuschnittsermittlung. Hier hatte man wesentlich mehr Freiheiten; jedoch mußten die Abspannrichtungen in sämtlichen Fundamenten eingehalten und darüber hinaus das Teil Z2 rechnerisch lage- und kräftemäßig an die bereits berechnete Sporthalle angepaßt werden. Dadurch wurde eine ursprünglich vorgesehene Zusatzabspannung an dem entsprechenden Mast entbehrlich. Eine ähnliche Kräfteanpassung war auch beim Übergang vom Stadion zum Z1 erforderlich.

Bei der Berechnung des 3m-Netzes konnte man schon in den ersten Schritten durch Einführung größerer B2-Elemente einen homogenen Kräfteverlauf erzielen. Ausgehend von den gemessenen Modellkoordinaten stellte sich meistens nach drei bis vier Iterationen ein erstes Gleichgewicht ein. Dieses mußte jedoch im Kräfteverlauf - vor allem zum Einführen der Resultierenden in die Fundamentlöcher - durch weitere Iterationen verbessert werden. Nach diesen der Stadionberechnung entsprechenden Schritten wurden die zunächst festgehaltenen Abspannpunkte der Wirklichkeit entsprechend in der Rechnung zur Verschiebung freigegeben. Als Ergebnis bekam man daher Angaben über die Verschiebung des Netzes im Bereich der Abspannpunkte bei der Einwirkung von Restkräften und die Knickwinkel der Abspannseilrichtungen gegenüber den Fundamentrichtungen. Nachdem bei allen 23 Abspannrichtungen des Z1 dieser Knickwinkel kleiner als 3° war, konnte die Einpassung abgebrochen werden.

Bei allen Bauwerken - mit Ausnahme der Felder des Z1 - erfolgte der Übergang von der 3m-Grobmasche des Modells zu der 75cm-Feinmasche der Ausführung geometrisch mittels Interpolation. Bei dem geometrisch komplizierten größeren Feld des Z1 wurde dagegen das geometrisch entstandene "halbierte" 1,5m-Netz und bei den zwei kleinen Feldern von Z1 sogar das "geviertelte" 75cm-Netz als Näherungswert X_0 für eine exakte statische Berechnung nach Verfahren (B) eingegeben. Die Kräfte S_0 wurden aus der vorausgegangenen Berechnung des 3m-Netzes geschätzt. Es zeigte sich, daß bei sorgfältig durchgeführter geometrischer Vorbereitung (z.B. manuelle Eingriffe in kritischen Randbereichen und automatische Erzwingung der Gleichmaschigkeit) die Korrekturen aufgrund der exakten Berechnung klein waren: Zur Berechnung des 1,5m-Netzes des unten im Aufriß dargestellten Netzes waren nur zwei Iterationen notwendig. Dabei wurde der Kräfteverlauf des Gleichgewichts nach der 1. Iteration sowie einige Seilaufläufe für die Eingabe zur zweiten Iteration korrigiert. Ebenfalls bemerkenswert war, daß sich an den Abspannungsrichtungen und am Gleichgewicht der Übergangspunkte nichts Wesentliches änderte, so daß eine diesbezügliche Kräftebeeinflussung nicht erforderlich wurde.

6. Einige Daten zu den Berechnungen

	ber.Netz	Knotenkoord.	Seilstücke	unbek.Kräfte
Z1 großes Feld	1,5 m	6453	4061	1044
Z1 kleines "	75 cm	6069	3883	335
Z2	3 m	408	252	109
mittl.Stadionf.	3 m	1632	1039	137



Ausschnitt aus dem automatisch gezeichneten Aufriß des nach (B) berechneten Zwischenteilnetzes

Literatur:

- /1/ J.H. Argyris, D.W. Scharpf, Berechnung vorgespannter Netzwerke, Bayr. Akad. d. Wiss., München 1970
- /2/ E. Haug, Berechnung von Seilfachwerken, Bericht 1/70 des Inst. für Leichte Flächentragwerke, Stuttgart
- /3/ K. Linkwitz, H.-J. Schek, Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen, Ing. Arch. 40 (1971), S. 145 - 158

Zusammenfassung:

Die Gleichgewichtsbedingungen für eine vorgespannte Seilnetzkonstruktion zur Ermittlung der Lage der Knoten und der Seilkräfte werden als unterbestimmtes nichtlineares Gleichungssystem aufgefaßt. Zur eindeutigen Lösung kann man entweder eine Anzahl Unbekannte fest vorgeben (A) oder aber die Gleichgewichtsbedingungen als Nebenbedingungen eines geeignet zu wählenden Minimumproblems auffassen (B). Stadion- und Zwischenteilnetze wurden nach (B) so berechnet, daß die Gleichgewichtsfiguren möglichst wenig vom gemessenen Modell abwichen.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IIIa

Die Darstellung der Randzonen vorgespannter Seilnetzkonstruktionen in Zuschnittsplänen; praktische Erfahrungen bei den Olympischen Dächern München

Mapping of the Cutting Patterns of the Boundary Zones of Prestressed
Cable Nets; Experiences from the Roofs of the Olympic Facilities at
Munich

La représentation sur les plans des bordures des structures en réseau de
câble; application pratique pour les toits olympiques à Munich

K. LINKWITZ H.D. PREUSS
Stuttgart, BRD

Eine der Aufgaben des Zuschnitts ist die Ermittlung der Längen aller Seilstücke zwischen je zwei Netzknoten und die Bestimmung der Gesamtlänge jedes Netzseils und jedes Randseils durch Addition der Seilstücke. Da Zahlenangaben allein zur Netzfertigung und -verknüpfung nicht ausreichen, gehören zum Zuschnitt auch grossmassstäbige Zuschnittspläne, in denen die Netzränder möglichst verzerrungsfrei dargestellt werden. Da das Netz ein doppelt gekrümmtes, dreidimensionales Gebilde ist, müssen aber bei der Abbildung in die Ebene gewisse Verzerrungen in Kauf genommen werden. Man kann nur anstreben, diese Abbildungsfehler durch geeignete Abbildungsmethoden klein zu halten.

Solange die Zuschnittsmasse direkt von Modellen abgenommen wurden - Pavillon Montreal -, benutzte man Photographien des Netzrandes, welche mit jeweils zum Netzstück senkrechter Aufnahmeachse aufgenommen worden waren. Nach massstäblicher Vergrösserung und fortlaufender Montage erhielt man eine in die Zeichenebene sukzessiv eingedrehte ebene Abbildung des Netzrandes.

Bei der Aufnahme der Randzonen mit Hilfe eines Messtisches oder der Nahbildphotogrammetrie, schliesslich auch bei der analytischen Berechnung von Seilnetzen erhält man Raumkoordinaten der Netzknoten, die in die Ebene abgebildet werden müssen. Dazu wurden bei den Dächern der Olympia-Sportstätten München zwei verschiedene Methoden angewendet:

Verfahren "Planebene": Eine einfache Abbildung gewinnt man durch orthogonale Projektion der Netzknoten in eine Ebene. Die Abbildungsfehler sind dann umso kleiner, je besser sich die Abbildungsebene dem abzubildenden Netzstück anschmiegt. Tatsächlich wurde die räumliche Stellung der Abbildungsebene als "ausgleichende Ebene" so bestimmt, dass je Randzonenstück und damit je Plan die gewogene Quadratsumme der quadratischen Punktabstände zum Minimum wurde.

Praktische Versuche zeigten, dass nicht alle Punkte des Abbildungsbereiches zur Bestimmung dieser Ebene mit gleichem Gewicht herangezogen werden dürfen. Günstige Projektionseigenschaften ergaben sich, wenn alle Punkte auf dem Randseil und einige ausgewählte in seiner Nachbarschaft in die Berechnung der Parameter eingingen. Um zu vermeiden, dass sich die Ebene zu stark dem Randseil anpasste, erhielten die ausgewählten Netzknoten ein "Gruppengewicht" gleicher

Grösse wie das aller Randseilpunkte. Dadurch lässt sich die Anpassung der Abbildungsebene an ausgezeichnete Punkte oder Netzstücke beeinflussen.

Nach dieser Methode - übersetzt in ein Programmsystem - wurden die Zuschnittspläne von Sporthalle, Schwimmhalle und Stadion berechnet und automatisch im Massstab 1:10 gezeichnet. Dazu mussten zunächst in Übersichtsplänen 1:125 die Blattschnitte für die einzelnen Abbildungsebenen so festgelegt werden, dass je Plan der Zeichenbereich der Zeichenmaschine eingehalten wurde, dass sich aufeinanderfolgende Pläne genügend überdeckten und dass weiter die Abmessungen jedes Planes den Krümmungsverhältnissen des Netzes angepasst waren.

Das Programmsystem lieferte je Plan einen Steuerstreifen für die Zeichenanlage KONGSBERG KINGMATIC und ein Protokoll, welches alle für die Bearbeitung der Werkstattpläne notwendigen Zahlenangaben enthielt. Zusätzlich wurden je Plan Transformationsparameter berechnet, damit die Stahlbaufirmen bei der Weiterverarbeitung Raumpunkte in die Ebene und - umgekehrt - Punkte aus den Zuschnittsplänen in den Raum transformieren konnten.

In stark gekrümmten Netzbereichen traten - obwohl der Blattschnitt durch zusätzliche Unterteilungen dem Netz besonders angepasst wurde - Projektionsverkürzungen auf, die über der Zeichengenauigkeit lagen und manuell verbessert werden mussten; die für jeden Punkt berechneten Projektionshöhen lieferten dazu wesentliche Angaben.

Verfahren "Abwicklung": Nach einer analytischen Berechnung des Netzes kennt man die Raumkoordinaten der Knotenpunkte einer Gleichgewichtsfigur. Im Lastfall Zuschnitt werden die Seilstücke als gewichtslos angenommen, alle äusseren Belastungen sind null. An den Knoten des Randseils greifen dann jeweils drei Kräfte an, nämlich zwei Kräfte in den im Knoten aneinanderstossenden Randseilstücken und eine Kraft im abgehenden Netzseil. Da im Gleichgewicht, müssen diese drei Kräfte und damit die Seilstücke, in denen die Kräfte wirken, in einer Ebene liegen und können direkt in dieser Ebene abgebildet werden. Sukzessiv aufeinanderfolgende "3-Kräfteebenen" lassen sich aneinandersetzen und bilden einen in der Nachbarschaft jedes Randseilknotens verzerrungsfreien Plan. Dehnt man nach diesem Prinzip den Plan in die Tiefe des Netzes aus, so erhält man auch in einigem Abstand vom Randseil noch eine - innerhalb der Zeichengenauigkeit - winkel-, flächen- und streckentreue Abbildung, die als "quasi-konform" charakterisiert werden kann. Ein Blattschnitt ist nicht mehr notwendig; jede Randzone kann in einem Endlosplan dargestellt werden.

In dieser Weise wurden - wiederum nach Erstellung eines entsprechenden Programmsystems - die Zuschnittspläne der Zwischenteile und zusätzlich die Randzonen des Stadions nach der Berechnung der 3m-Gleichgewichtsnetze berechnet, in Protokollen für die Stahlbaufirmen ausgegeben und auf der Zeichenanlage CONTRAVES CORAGRAPH im Massstab 1:10 gezeichnet.

Zusammenfassung: Es werden zwei Verfahren beschrieben, die bei der Herstellung von insgesamt etwa 3800 qm Zuschnittsplänen im Massstab 1:10 für die Olympiadächer München entwickelt und praktisch angewendet wurden. Bei der Methode "Planebene" bildet man die Randzonen in aufeinanderfolgenden ausgleichenden Ebenen ab. In der Methode "Abwicklung" wird eine quasi-konforme Abbildung der Randstreifen in Endlosplänen gezeichnet.

IIIa

Planning and Execution of a Prestressed Cable Roof

Planification et exécution d'une couverture suspendue en câble précontraints

Planung und Ausführung eines vorgespannten Kabeldaches

K. BERGHOLT

Civilengineer

Partner of Chr. Ostfeld & W. Jonson

Consulting Engineers

Copenhagen, Denmark

Introduction

The cable roof above the icehockey-stadium at Tampere, Finland erected 1964 comprises a simple structural system as shown at fig. 1; after a brief description of the roof structure proper, of the anchoring arrangements and of the principles of the statical calculations, attention will be given to practical experiences.

In Scandinavia light hanging roofs are introduced in two different structural concepts namely either as Mr. Jawerths system (see introductory report page 106) based on prestressed cable trusses or as cable nets where two sets of cables of opposite curvature are established in a prestressed state. Wind suction necessitates prestressing of these light structures and this prestressing represents at the same time the advantage of increasing the rigidity of the system and the disadvantage of adding to the loading.

The Scandinavian structures usually cover rectangular areas and the edge elements to which the cables are anchored will often be straight; in this case the problem is to bring the large horizontal reactions from the cables down to the foundation in an elegant way and the economical influence from the shape of the anchoring structures should be critically analysed at a very early stage of the concept. A hanging roof will almost automatically be cheap, but the surrounding anchoring system might be rather expensive.

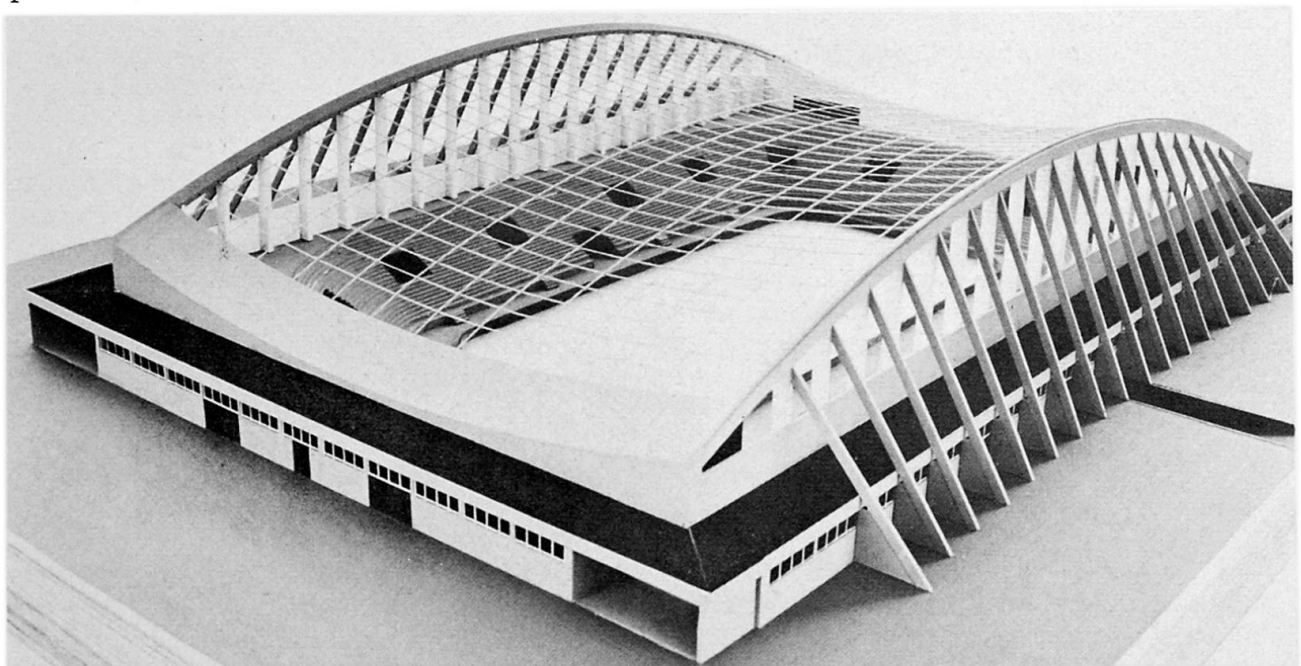


Fig. 1: Model photo

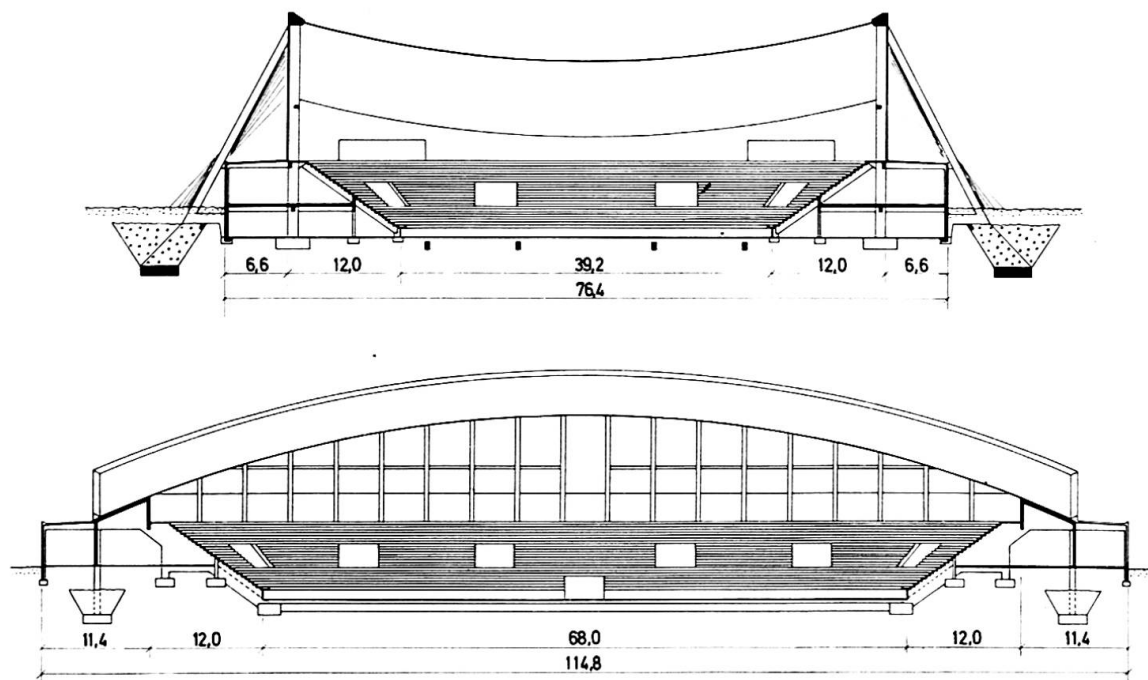


Fig. 2: Sections through ice hockey stadium

At Tampere the time left for design and erection was very scarce and the choice of cable type, prestressing technique and anchors took into account that the building process should proceed simultaneously with the detailing.

The Structure

The geometrical proportions of the building are shown at fig. 2. The length of the hall is 92.0 m and the width is 63.2 m. The shape of the roof is a hyperbolic paraboloid with a sag for the suspension cables of 3.9 m and a rise for the prestressing cables of 8.4 m. Spacing of the cables are 80 cm for the suspension cables and 160 cm for the prestressing cables, all cables being solid \varnothing 26 mm S.H. bars with an ultimate tensile strength of 110 kg/mm^2 .

The prestressing cables pass above the suspension cables and any two crossing cables are linked together with a friction clamp (see fig. 3) which also serves as support for the wooden rafters.

All the cables are anchored to the R-C edge structures, the suspension cables to the two vertically curved beams above the facade columns and the prestressing cables to the doubly curved roof slabs above the gable buildings. As indicated at fig. 4 all cables pass the edge beam through a pipe to the anchor at the outer side; on account of the cable movements vertically and horizontally caused by variations in prestress and live load all the pipes end up with a "trumpet" sleeve made of polyether, reinforced with glassfibres.

The composition of the roof proper as shown at fig. 4 did permit an execution without any scaffolding.

A central problem of the design was how to anchor the edge beams to take up the horizontal component of the suspension cable forces; preference was given to conventional gravitation anchors because cheap rock boulders could be procured for production of the necessary mass concrete.

The inclined ties from the edge beams to the R-C plinth below the mass concrete counterweight were executed in posttensioned concrete with passive anchors in the plinth. In this manner a very rigid support for the suspension cables was obtained.

The forces from the prestressing cables are introduced in a R-C profile with great torsional stiffness. This profile is composed by the doubly curved slab above the gable building and the two adjoining vertical walls (see fig. 2). The profile is supported horizontally by the facade structures and by four rigid frames in the grand-stand structure.

The Statical Calculations

The live load from snow was assumed to be 150 kg/m^2 in the Tampere area; four different cases of snow distribution were investigated.

For statical wind load only suction developed by wind directions parallel to the two main axes of the hall was considered. As no wind tunnel tests were available and as the suction values for flat roofs indicated in the codes in different countries vary rather much, the loading assumptions were greatly influenced by model tests described by Beutler in ref. (1). Finally the suction at the windward side was estimated to -80 kg/m^2 and at the leeward side estimated to -40 kg/m^2 ; as the highest in Finland registered velocity pressure was 70 kg/m^2 , this assumption should be quite conservative when the great size of the roof surface is considered.

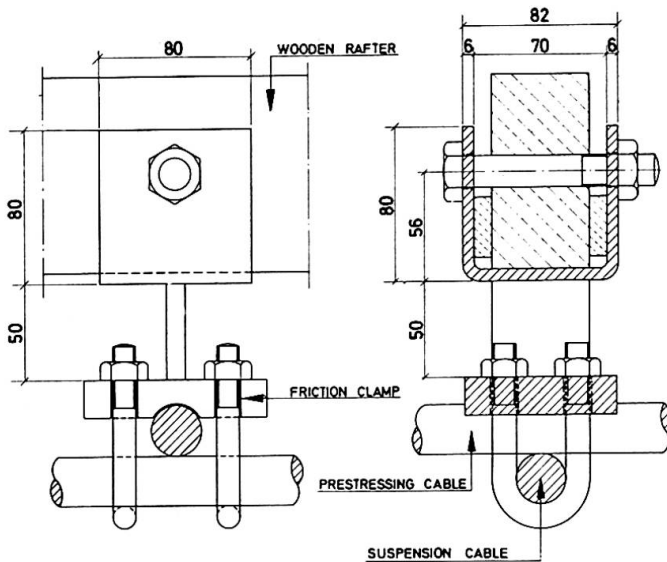


Fig. 3: Cable link

All the calculations for the cable net proper follow the method suggested by F-K Schleyer in ref. (2); information about the mesh sizes selected for the different loading cases and the numerical work in general is presented by the author in ref. (3) and (4) where attention is given to the corrections due to additional loads resulting from the first calculation step with non-linear terms.

The necessary prestressing of the cables is found by trial and error and the final "equivalent" pressure defined as the pressure the two nets perform against each other in the pure prestressed condition is approx. 90 kg/m^2 .

The actual factor of safety as the collapse of a cable depends on the ultimate strength of the cable anchors and of the thread of the cable socket sleeves. Preliminary calculation indicated definitely that the dimensioning of the cable net would solely depend on the choice of the permissible stresses at working conditions with due regard to all extra influe-

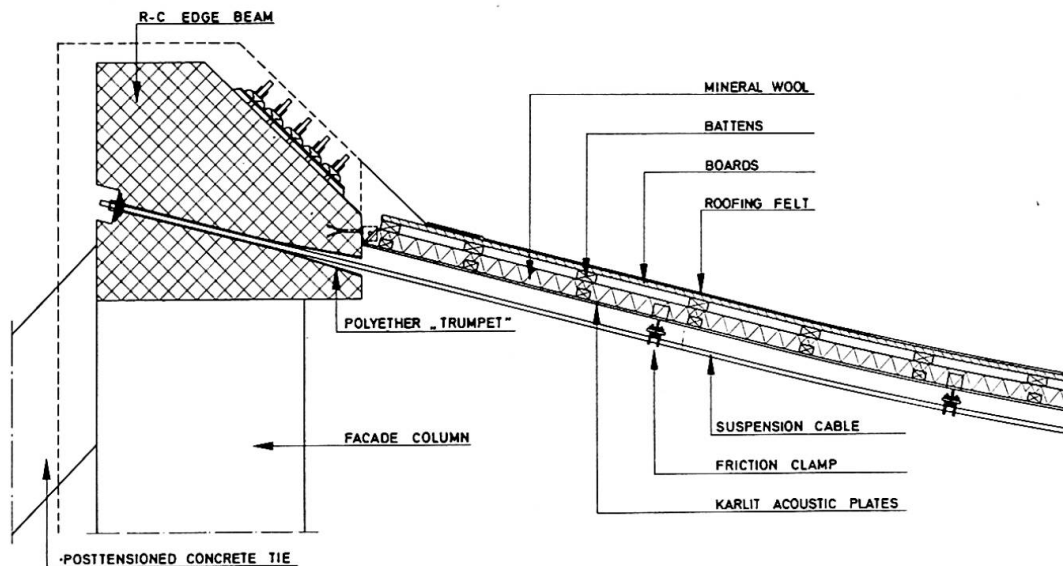


Fig. 4: Section through roof near the edge

nces (creep and shrinkage of ties, temperature changes, relaxation etc.). In₂ this case maximum cable stresses of a magnitude of approx. 6,000 kg per cm² were accepted, this being 5-10% less than are normally accepted for the use of the same cables in posttensioned concrete; it should be pointed out that the investigated load combinations are fairly intricate and as well that the stress calculation from the linear theory is proved to be on the safe side. While the above-mentioned extra influences only increase the maximum stresses in the suspension cables approx. 15% the maximum stresses in the prestressing cables increase approx. 60%; this fact has considerable importance for the dimensioning of the stabilising gable buildings.

The dynamic wind effect on a suspension structure of this type is difficult to analyse, the evidence by Vaessen in ref. (5) gave no reason to assume that the wind pressure at a specific point of the roof surface should pulsate into step with the self exciting vibrations of the roof; we found still less reason to assume that all the local wind pressures on the great roof surface should coordinate to a pulsation into step with the said vibrations. As the fatigue strength of the threads in the cables is relatively low it was attempted to estimate the number of stress variations greater than the fatigue strength but of course this is a primitive approach. It should be emphasized that the cable net technique has the advantage that a random local fatigue fracture does not lead to collapse of the complete structure but the notice permits to take countermeasures.

Some Experiences from the Erection Work

Naturally it proved difficult to erect the formwork and to cast in situ the geometrically complicated and large perimeter R.C. structures with the exactitude usually expected for normal R.C. work, but no serious consequences occurred.

A good deal of trouble came up in fixing the "trumpets", through which the cables pass, in the right direction and level; the design asked for a margin of ± 0.5 cm as to the position in height of the two ends of the pipe, but levelling control found deviations on the finished structure 4 or 5 time this value; fortunately enough deviations of this size never occurred for two adjacent cables, but the deviations were rather evenly built up over quite long distances. As all the hanging cables had to respect the actual levels of the trumpet centers an adjustment analysis of the height of all hanging cables in the erection situation has to be carried out.

Each suspension cable consists of four cable parts interconnected with socket sleeves. According to a proposal put forward by the contractor a preliminary bridge was built along the central axis. The cable parts were lifted by crane and while the central socket sleeves could be mounted from the above-mentioned bridge, the other two socket sleeves at the quarter points were screwed in position from light movable bridges cantilevered from the previously erected suspension cables. Temperature correction as to the position in height of each suspension cable was compulsory as the actual temperature varied approx. 10°C during the time of erection.

The prestressing cables were put up by hand from light movable bridges on the hanging cables. As the friction clamps at each crossing of two cables had to be active before the prestressing took place, the cable net was built to a geometrical shape worked out in such a way that the net after prestressing would project in two sets of equidistant straight lines. In order to facilitate this procedure all cable parts were cut with a margin of 0.1 cm and all intersection points marked with coloured lines on both suspension cables and prestressing cables before they were brought in position.

An adjustable momentum wrench was applied for the tightening up to the friction bolts in the clamp. Test was carried out to evaluate the correlation between the tightening moment and the resulting friction in order to obtain a reasonable safety against sliding of the connection.

The prestressing of the cable net was only introduced through the longitudinal prestressing cables which were tensioned two by two working simultaneously from the two facades towards the center line, each cable being activated from both ends. The final stresses were built up by repeating this procedure six times. After each stage the elongation and pump pressure at either cable end were registered.

Strain gauges were mounted on certain cables as a further control. For the check of whether the required prestress condition was attained everywhere in the cable net, measurement of the deflections took place at 25



Fig. 5: Interior of the finished stadium

points for comparison with the predicted ones. Interpretation of these results indicated that the cable net had been slightly "overstressed" (5-10%) and it was also observed that one of the sides had obtained a bit higher stresses than the other one, but this fact was deemed of no consequence. The total erection of cables and the prestressing lasted approx. 6 weeks.

More accurate calculation of the cable deflection near the supports is fairly difficult as this involves extensive computation; in the actual case great care was exercised to ensure that the "trumpets" had reasonable variations in curvature in all directions to avoid any tendency to breaks. The distances between the cables and the "trumpets" edges were measured before and after execution of the roof cover.

Observations After Completion

The stadium has now been in use for 7 years and has proved that the choice of this type of suspended roof-structure was suitable.

Observations during the past years indicate that no vibrations of any kind due to the action of the wind have occurred. It can also be mentioned that the snow uses to distribute itself with very high loads near the gable building at the leeward side; this special loading has in no case caused deflections, which exceed what has been calculated.

Visual control now has also confirmed that the shape selected for the "trumpet" is satisfactory because the cables keep reasonable distance from the "trumpet" edge.

As far as the water tightness of the roof is concerned, there has been no problems due to the fact that the total roof-surface is separated by longitudinal and transversal expansion joints, which absorb the movements due to the above-mentioned loads.

From the spectators point of view the solution is very satisfactory because it is possible to see the whole game area from every part of the stadium without any obstacles.

References:

- (1) J. Beutler : Beitrag zur statischen Windbelastung von Seilnetzwerken-Ergebnisse von Windkanaluntersuchungen. (Proceedings of the IASS colloquium on hanging roofs, Paris 1962).
- (2) F-K Schleyer : Uber die Berechnung von Seilnetzen (Diss. Berlin 1960).
- (3) K. Bergholt : Planlægning og udførelse af et forspændt kabeltag (Ingeniøren nr. 5, 1965).
- (4) K. Bergholt : Cubierta de doble curvatura de cables pretensados (Informes de la construcción 178, instituto eduardo torroja, Marzo 1966).
- (5) F. Vaessen : Wind-channel tests to investigate the windpressure on a hyparshell roof (Proceedings of the IASS colloquium on hanging roofs, Paris 1962).

Summary

The contribution describes the design of a 63.2 x 92 m hanging roof above the new icehockey stadium at Tampere, Finland, built during 1964. The structural system is a rectangular prestressed cable net composed of high tensile steel bars. After comments on the support systems and the statical calculations the article is concluded with some remarks about the practical problems on the site and later observations.

IIIa

The Design and Testing of a Cable Beam Structure for Prefabrication

Projet et essai d'une structure en câbles pour la préfabrication

Entwurf und Versuch an einem Kabeltragwerk für die Vorfabrikation

H.A. BUCHHOLDT

Principal Lecturer

The Polytechnic of Central London, England

B.R. McMILLAN

Lecturer

V.L. GILL

Chief Civil Engineer

British Ropes Ltd.

London, England

1. Introduction

The objective of this work is to show that it is possible to design a cable beam structure that compares favourably in cost, at the lower range of long span roofing, with conventional methods of construction. The design of the boundary structure has been considered in this context and particular attention is paid to the method of construction in order to ensure that site work and the erection of the cable beams is undemanding of the contractor's skill and ability.

The experimental work gains greatly from the fact that a full scale model is being used and it is intended to use this advantage to establish the effect of construction errors and dimensional variation on the behaviour of the structure.

The priorities are considered generally as follows:

- (a) The boundary structure should comprise simple frame elements of weight and dimension convenient for transportation and handling and should have inherent stability whilst final adjustment and alignment is being made.
- (b) The cable beams should be easy to assemble and lift and with simple joint details not requiring close tolerances on dimensions.
- (c) The final alignment of the cable beams should be by means of the forces in the cables and not dependent upon the accuracy of alignment of the boundary structure.
- (d) The steel tendons and anchoring devices of the beams and the required jacking equipment should be readily available as for example such as used in prestressing.

2. Description of Cable Beam Structure

Each cable beam takes the form of two pairs of 0.5 in (12.8mm) Dyform plastic covered prestressing strands in reverse catenary, held in position by vertical 1.0 x 0.25 in (25.4 x 6.35mm) steel ties. A pair of cable beams of 75 ft (22.8m) span and 9 ft (2.74m) apart form the unit under test. The strands are anchored into the concrete end frames with standard prestressing grips at heights of approximately 14 ft (4.3m) and 21 ft (6.4m). The end

frames are prestressed through slots in their vertical columns to the floor of the laboratory, thus each pair of end frames together with a portal unit produces a stable structure for the erection of the cable beams. The cable beams were assembled on the ground and were easily lifted into position. Final alignment was achieved by adjusting the tension in the cables. Fig. 1 shows the structure before the roof cladding, troughed aluminium sheeting, was fixed in position.

3. Experimental Work

The roof cladding for cable truss structures of the type investigated is normally designed using either troughed steel or aluminium sheeting spanning between the trusses and attached either to the suspension cable (SC) or prestressing cable (PC), depending upon the architectural requirements. Thus purlins are not used and both the weight of the cladding as well as snow and wind loading is applied transversely along the cables and not only at the joints as assumed in the usual analysis of cable structures.

In carrying out the experimental work on an individual truss this was taken into account by applying the load in the form of 50-lb sandbags at eight load points for each loaded cable link as well as at the joints with increasing loads of $q = 50, 100$ and 150 lbf (222, 445, 667N) per load point, the maximum load corresponding to 20.28 lbf/ft² (971 N/m²). The following six loading tests were carried out:-

- (a) increasing load on full span (LOFS) and
- (b) increasing load on half span (LOHS)

both on: (i) the suspension cable
 (ii) the prestressing cable and
 (iii) the whole structure with cladding supported on the suspension cables.

When testing the individual truss, the sandbags were supported from the load points with nylon ropes. When the whole structure was tested the sandbags were placed on top of the cladding. The positions of loading on full and half span and a diagram of the truss are shown in Fig. 2a.

The experimental and theoretical deflections for a loading of 150 lbf (667N) per load point are shown in Fig. 2b and 2c. Fig. 2d shows the differences in calculated deflections using the theories described in the next section. The experimental and theoretical curves for the forces in the end links of the top and bottom cable are shown in Fig. 3a and 3b.

To determine the natural frequencies and the damping of one truss, the truss was pulled down at the centre in turn by a force of 25, 50, 100, 150 and 200 lbf (111, 222, 445, 667, 890N) which was then released.

The vibration of the truss was transmitted by a displacement transducer to a storage oscilloscope yielding a lower natural frequency of 9.4 cycles per second. This was repeated for the whole structure with the cladding in position yielding a natural frequency of 3.95 cycles per second.

To gain some idea of the damping of the trusses with and without cladding the above was repeated and the time for the vibrations to die down measured. The results of these tests are shown in Fig. 4 and the vibration for release

loads of 150 lbf (667N) per truss without and with cladding are shown in Fig. 5 and Fig. 6, respectively.

4. Theory

The analysis of cable beams with the load applied along the cables are like the cases when the load is assumed supported at the joints based on minimisation of the total potential energy W by an iterative process. In the latter case, when the tension in the cables are sufficient to ensure linear elastic behaviour of the cable links, this implies descent on an energy surface which is quartic in the displacements. The minimising steps are usually taken in either the Newton-Raphson, Conjugate Gradients or Steepest Descent directions, a distance S to a point where W is a minimum in that direction (Ref. 1. and 2.). Thus it can be proved that at the $(k+1)$ iterate,

$$W_{k+1} = C_1 S_k^4 + C_2 S_k^3 + C_3 S_k^2 + C_4 S_k + C_5 \quad (1)$$

where C_1 to C_5 are functions of the displacements at the end of the k th iterate to powers varying from one to four.

Thus S for each iteration can be found from

$$\frac{W}{S_k} = 4C_1 S_k^3 + 3C_2 S_k^2 + 2C_3 S_k + C_4 = 0 \quad (2)$$

When the load is applied along the cables the cable elements cannot any longer be regarded as components with linear load/extension characteristics. When this is taken into account together with the change in the potential of the loading due to the sag of each cable link, it can be shown that the descent takes place upon an energy surface which is octal in the displacements. In Ref. 3 it is shown that equation (1) above becomes

$$W_{k+1} = C_1 S_k^8 + C_2 S_k^7 + C_3 S_k^6 + C_4 S_k^5 + C_5 S_k^4 + C_6 S_k^3 + C_7 S_k^2 + C_8 S_k + C_9 \quad (3)$$

when C_1 to C_9 are functions of the displacements at the end of the k^{th} iterate to powers varying from one to eight.

Using the method of Conjugate Gradients the above theory has been used for the analysis of small cable beam models for which the differences between theoretical and experimental results varied from 5% to 8% when the loading was placed on the prestressing cables. One part of the current work is to see if this theory also will yield similar differences when applied to a full-scale structure.

5. Conclusions

After the stressing of the cable beams some movement took place of the tie fastenings over the plastic sheeting. This reduced the prestress in the top and bottom chord from 16,000 to 11,000 lbf. During the stressing no movements of the end frames were evident.

The load tests showed that load applied to the prestressing cables results in larger displacements and cable forces than when applied to the suspension cables. The stiffening effect of the aluminium sheeting was as expected, negligible.

The difference between theoretical and calculated results was greatest for loading on half the span only. This is thought to be due to small relative

movements of the cables at the central joints. When the load is supported on the top cable the two theories give very nearly identical results but when the load is supported on the bottom cable the simplified theory underestimates both forces and deflections. The loss of prestress caused the prestressing cables to go slack when the last load increment was applied. The load intensity at which this occurs was accurately predicted by the analysis. The damping effect of the aluminium sheeting can be seen in Fig. 4. It has a negative rather than the expected positive effect, which must be due to the fact that the sheeting acts as a spring in which energy is stored. The tests described should be considered as a preliminary investigation which will be continued when the tie joints have been modified, a fact which has been most usefully made evident by the use of a full-scale model.

- References
1. Buchholdt, H.A.: A non-linear deformation theory applied to 2-dimensional pretensioned cable assemblies. Proc. Inst. Civ. Engrs. 1969, 42 (Jan).
 2. Buchholdt, H.A. & McMillan, B.R.: Iterative methods for the solution of pretensioned assemblies having significant geometrical displacements. IASS Symposium on Tension Structures and Spaceframes, Japan, October, 1971.
 3. McMillan, B.R.: Deformation of prestressed cable structures having significant displacements and non-linear link elements. Ph.D. Thesis, London University (to be submitted).

Summary

This paper contains the description and testing of a cable beam structure which has been developed for prefabrication and low cost. The experimental results have been compared with the results from two different non-linear theories indicating for which cases the two different theories are applicable.

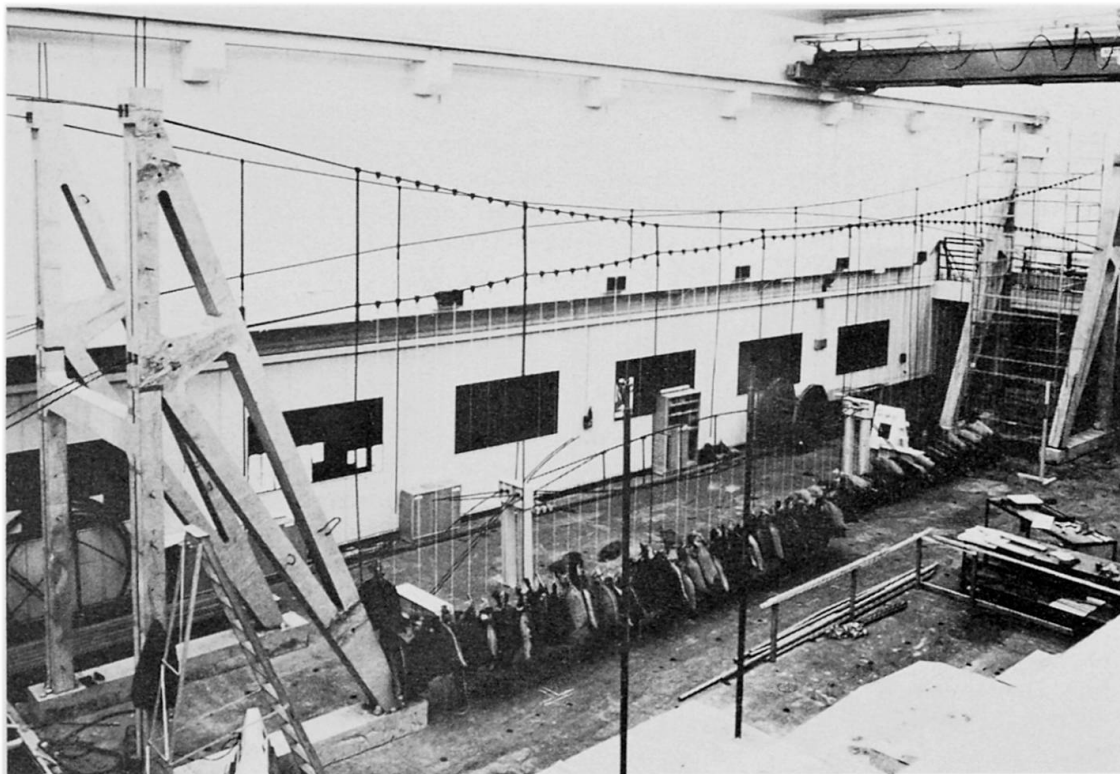


Fig. 1.

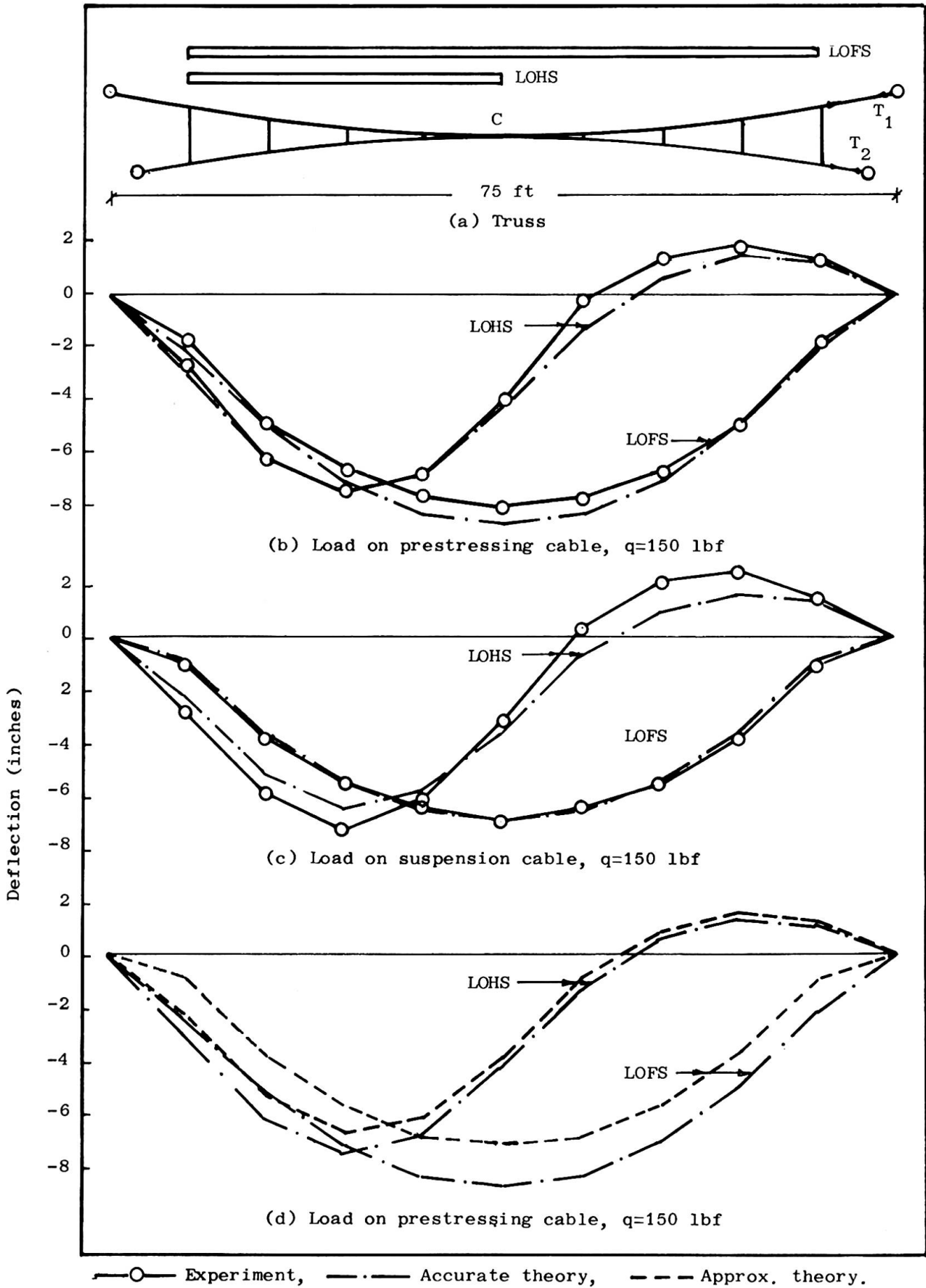


Fig. 2. Deflection diagrams of cable truss

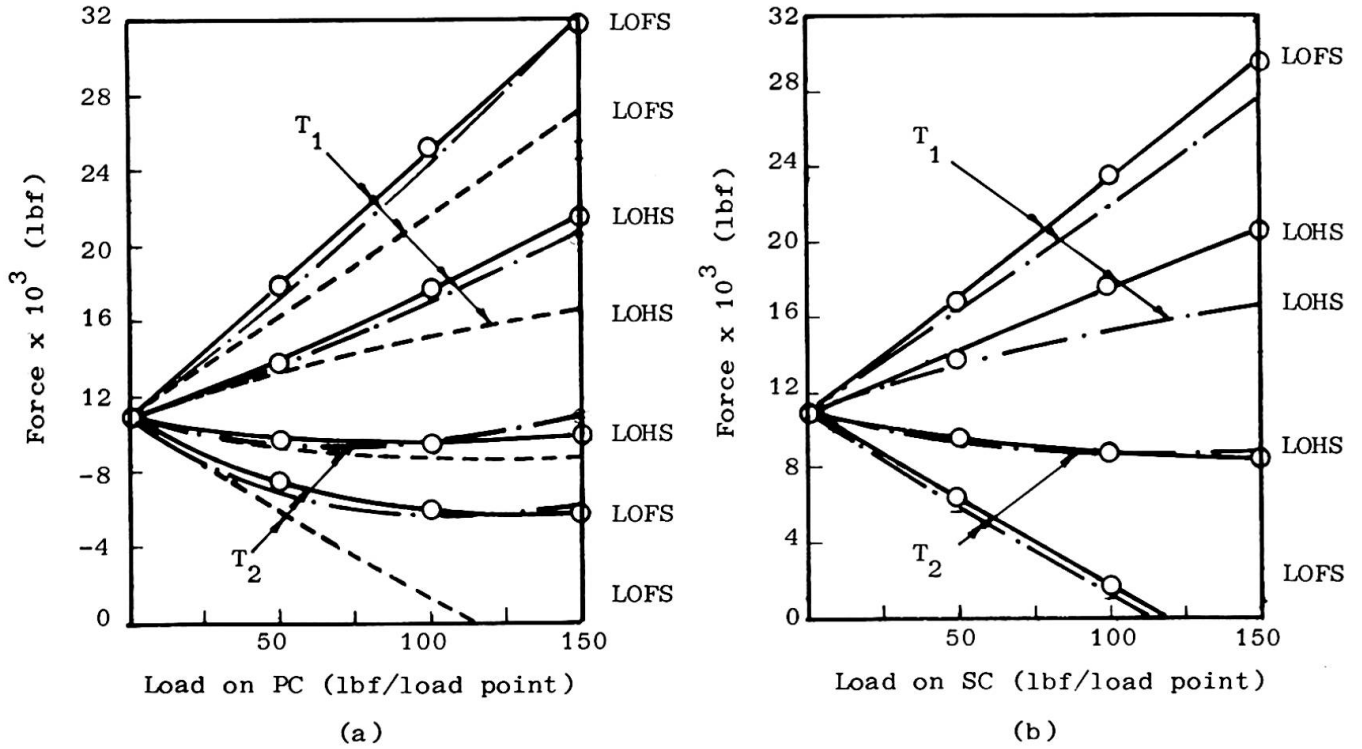


Fig. 3. —○— Experiment, —·— Accurate theory, --- Approx. theory

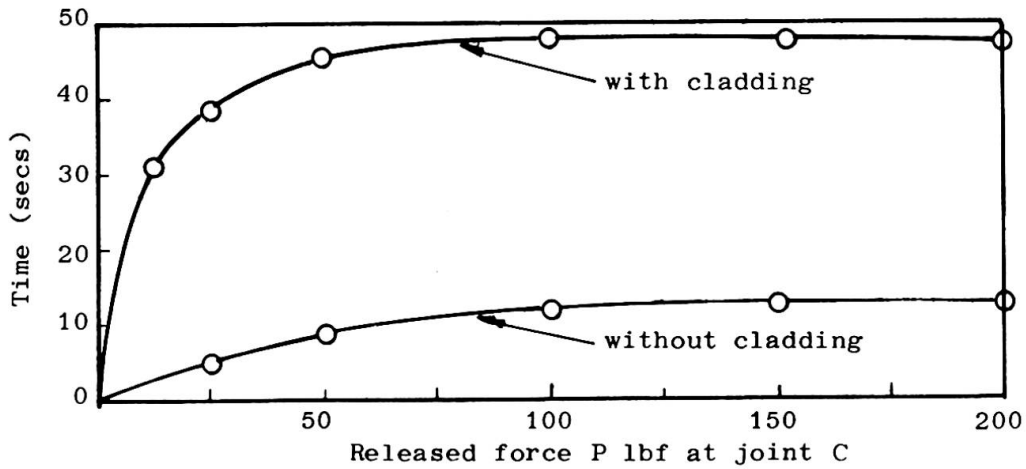
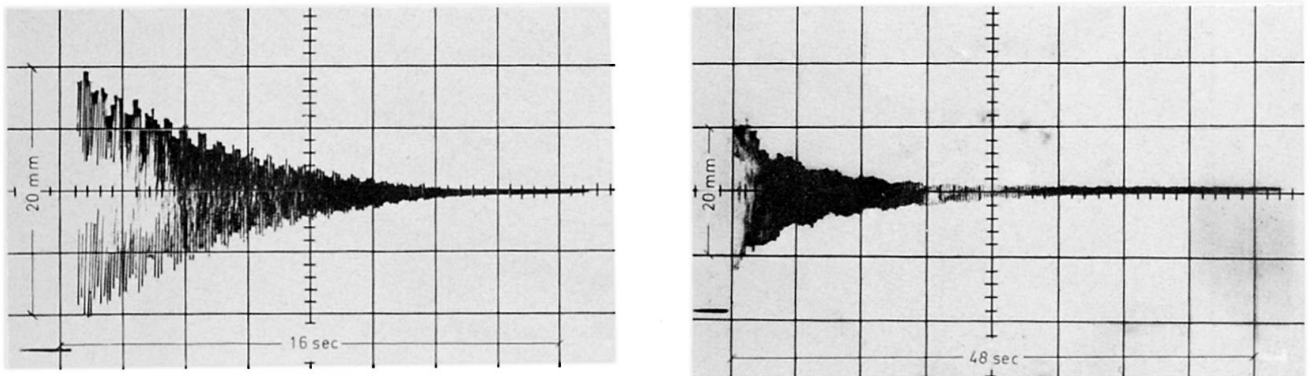


Fig. 4
Time for vibrations to cease for increasing initial forced displacements



(a) Vibration without cladding, P=150 lbf (b) Vibration with cladding, P=150 lbf

Fig. 5.

IIIa

A Large Span Hanging Roof: The "PALASPORT" in Milan

Un toit suspendu de grandes dimensions: le "PALASPORT" à Milan

Ein weitgespanntes Hängedach: Der "PALASPORT" in Mailand

A. SAMUELLI FERRETTI

A. ZINGALI

Istituto di Scienza delle Costruzioni
Università di Roma, Italia

A 11.000 seat Palasport is currently being built in Milan. Figures 2,3,4 show the architectural design. The main hall, including the field, a bicycle track of 265 m and the stands for the audience, is approximately in the shape of a reversed truncated cone. The upper rim of the cone follows a saddle-like profile, while keeping a perfectly circular shape in the horizontal projection; the outside diameter is 140 m. Such an arrangement gives to the roof surface a negative gaussian curvature throughout.

The structure of the reversed cone consists of 38 reinforced concrete ribs supporting on the upper edge the stands, and in the lower one the walls forming the outside face. From the above mentioned architectural arrangement, as far as the action of transmitting to the ground the strong pull of the cable network supporting the roof is concerned, arises quite a problem, because the rib structure should be of an exceptionally large size. It has been preferred to support the beforementioned inward pull by means of a self sufficient structure, which could transmit to the underlying reinforced concrete structure its dead weight and the roof's one, that is vertical actions only.

The network was thus anchored to the internal edge of a peripheral beam in the shape of a ring,

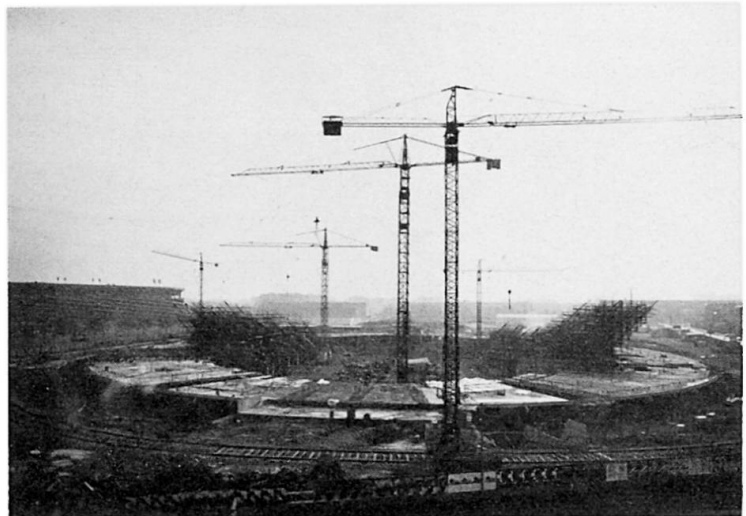


Fig.1 - General view of the building site

which resists the inward pull of the cables in the various design load conditions, simply supported by the reinforced concrete ribs.

The main geometrical data of the roof are hereunder listed:

- area covered by the network : 11,500 m²
- maximum camber of the sagging cables : 10.70 m;
- maximum camber of the hogging cables : 7.84 m.

The network consists of high tensile steel cables, spaced 1.50 m each other. Such spacing was chosen in order to allow the cables to support the roof plates consisting of cold formed light gauge steel sheet. The steel sheet supports the insulating and waterproofing coverings.

The cables are anchored at both ends by means of toggles and screws which allow a length regulation for about 500 mm, in order to ease the operation of assembling and prestressing the network.

The ring consists of a box steel girder whose cross section is of about 7.00x3.00 m; the skin plates are reinforced by means of transversal frames and longitudinal stringers. The shop welded elements are assembled in place and jointed by means of high tensile bolts.

The 38 abovementioned supports are simple action ones, that is they allow every rotation and every displacement in an horizontal plane. Special devices have been designed to realize supports which can react downwards as well as upwards.

The horizontal displacements of the ring as a whole are preven-

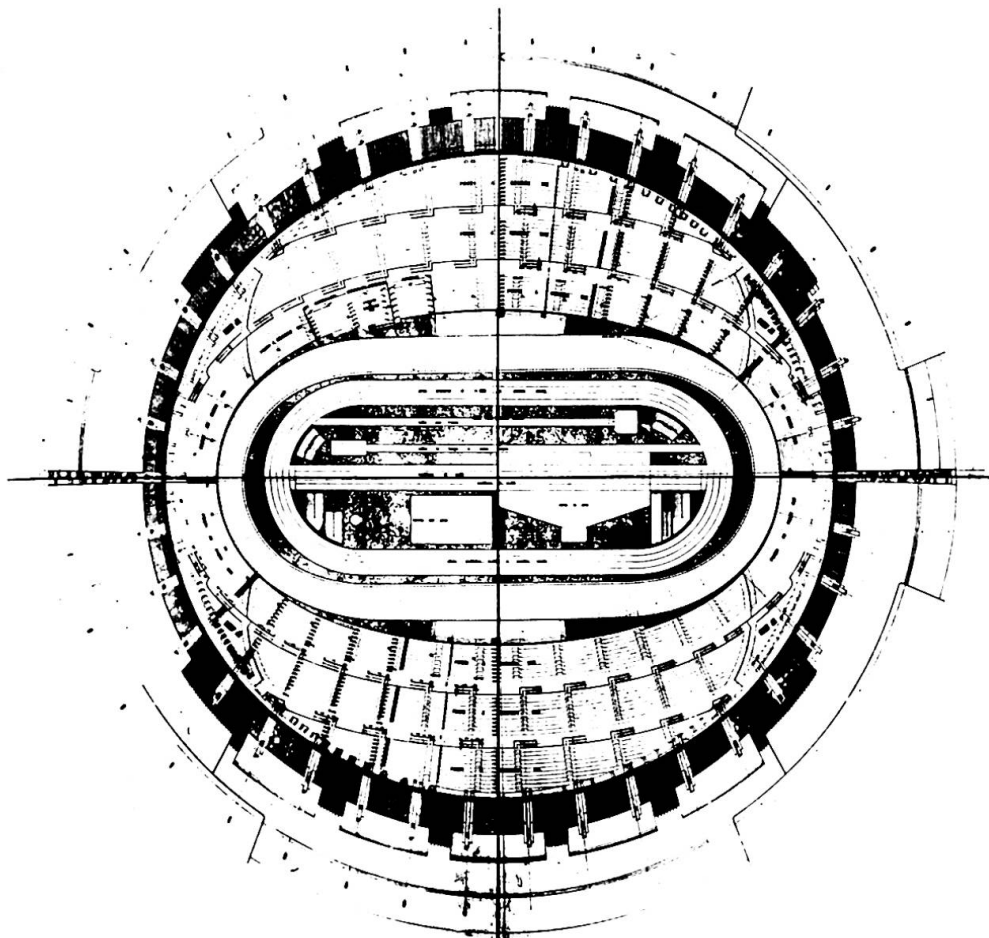


Fig.2 - Plan of the hall

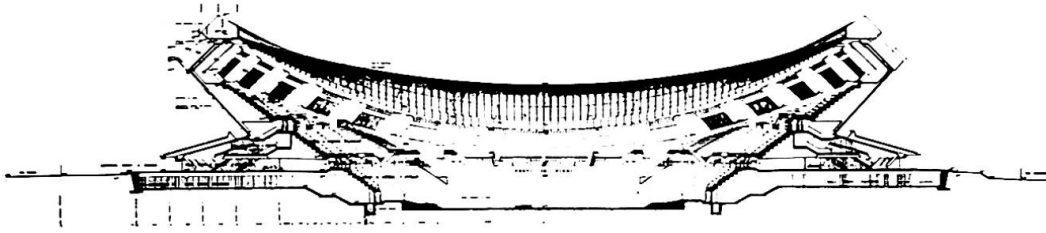


Fig. 3 - Section

ted by means of limit stops provided for the supports at the opposite ends of two diameters. Therefore, the thermal ring displacements as well as the elastic ones due to live loads can be distributed between the opposite supports, thus avoiding excessive slippage of the ring with respect to the supporting plates.

The study of the static behaviour of the roof structure put in to evidence the great importance of the ring flexibility in the geometrical and static conditions of the network. The influence of the ring flexibility is so important to completely cancel the schema of the fixed-end network, even as first approximation.

It is, therefore, necessary to take into account from the very beginning of the computational work the structure consisting of the network and the ring as a whole; a method envisaging such interaction as well as the non-linear behaviour of the network was specially perfected. The calculation procedure is briefly resumed in the flow-chart shown in figure 6, and its details are currently being published.

The roof shape, not far from an hyper one, was determined by imposing, as known quantities, the coordinates of the outside ring togetherwith the distribution of the prestressing forces in the cables.

As the design live loads can be upwards (suction caused by the wind) as well as downwards (snow load), the ensuing moment distribution in the anchoring ring beam are subjected to reversing.

The initial prestressing of the cables has been designed in order to minimize the bending moments in every section, by splitting their excursion in two almost equal parts.

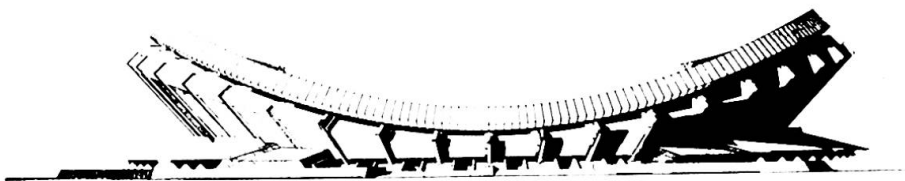


Fig. 4 (1°) - Main views

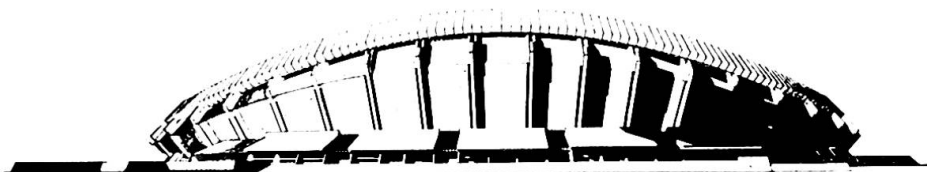


Fig. 4 (2°) - Main views

The ensuing stress distribution in the sagging cables is almost constant, and equal to the hogging ones (20 t/m); under such forces the ring is subjected to almost pure compression.

As a matter of fact it has to be pointed out that the distribution of moments around the strong axis (horizontal) of the ring beam, whose center line follows a space curve, is not far from the one obtained by applying an equal system of forces to a flat ring-beam, whose centerline follows a plane curve.

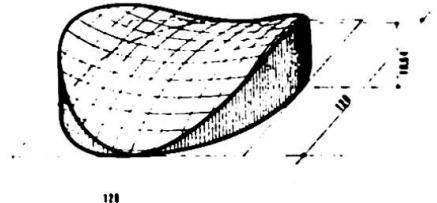


Fig.5 - Shape of the roof whose centerline follows a plane curve.

Therefore, the ring being subjected to forces almost radial in direction and constant in value under dead load, the pressure curve is almost coincident with the center line.

Of course, the weak axis bending moment and the twisting moment distribution depends mainly from the altimetric shape of the ring; it has been found out, in particular, that the twisting moments never reach very important values.

As far as the choice of the orientation of the principal axes of the cross section is concerned, the possibility of placing the beam with its strong axis following the tangent of the network along its outside edge has been examined.

A small saving in the maximum moment was thus possible, but this solution has been cancelled for aesthetical as well as assembling reasons.

The most singular consequence of the aforementioned interaction

between ring-beam and network can be observed in the behaviour of the cables under the action of an uniform live load such as the snow. In a fixed ends network the effect of such a load is well known: the tension in the sagging cables increases while the tension in the hogging cables decreases. In our case the shortening of the diameter between the points of support of the longest sagging cables is followed, in the ring-beam, by an elongation of the same order of magnitude

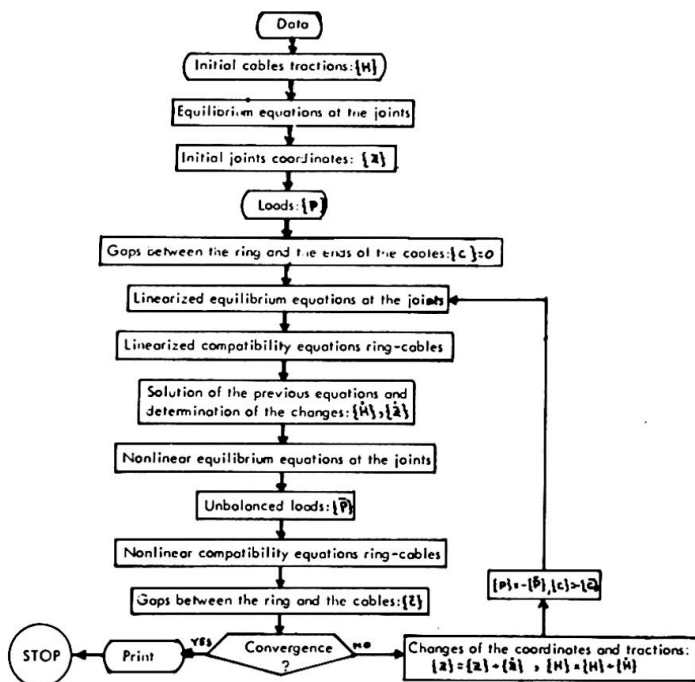


Fig.6 - Flow chart

of the perpendicular diameter, corresponding to the longest hogging cables. Those displacements are large enough to increase the tension in the hogging cables also. Thus the live load is supported, so to speak, by means of a rather large increase in the curvature of the sagging cables. As a consequence, the deflections of the network due to live loads are rather large, as compared to the very small ones that can be observed in a fixed-end network; in the latter case, on the other hand, the variations of the network tensions are much larger, and, consequently, so are the moments in the outer ring.

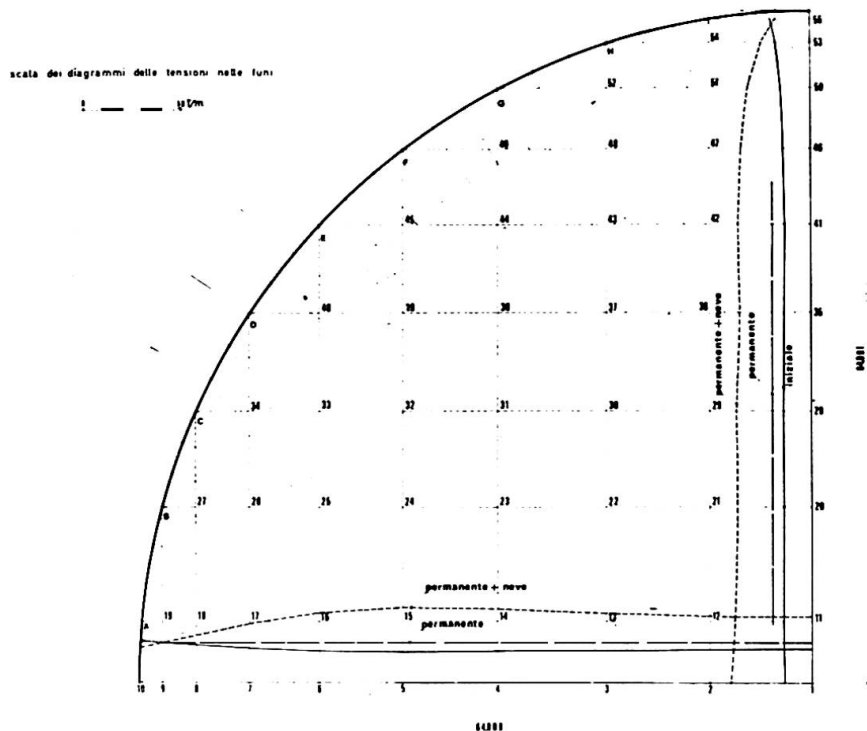


Fig. 7 - Tensions of the cables

In order to check the results of the calculations, a model in the scale of 1 : 100 was built and subjected to tests at the Istituto di Scienza delle Costruzioni, of the engineering faculty of Rome. The tests are conducted by A. Gallo Curcio and F. Piccarreta of the aforementioned Institute.

The ring-beam of the model was made of cast aluminium, the cables of high tensile steel bands, spaced 10 cm and provided with turnbuckles. The supports are made by means of aluminum bars provided with spherical hinges at both ends, and linked to a very rigid steel frame. The bars are provided with dynamometrical devices in order to evaluate the reactions over the supports.

A second model, in the scale of 1:200, is currently being tested for evaluation.

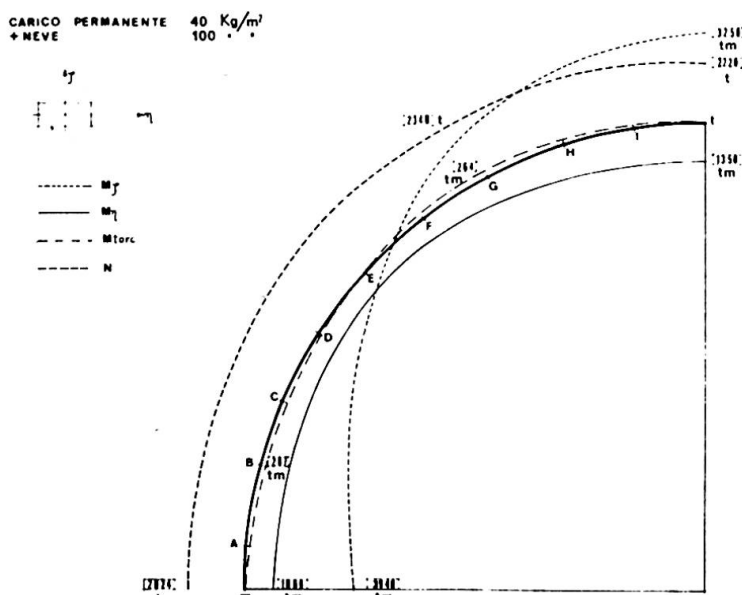


Fig. 8 - Moments and normal forces in the ring for the snow load

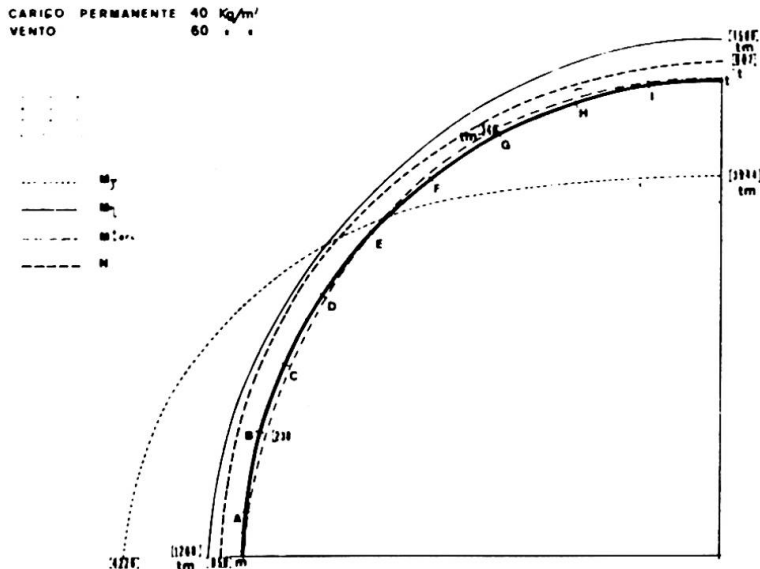


Fig.9 - Moments and normal forces in the ring for the wind suction

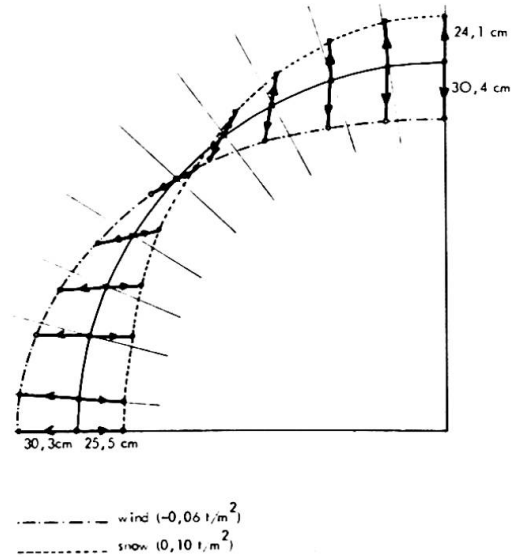


Fig.10 - Displacements of the ring

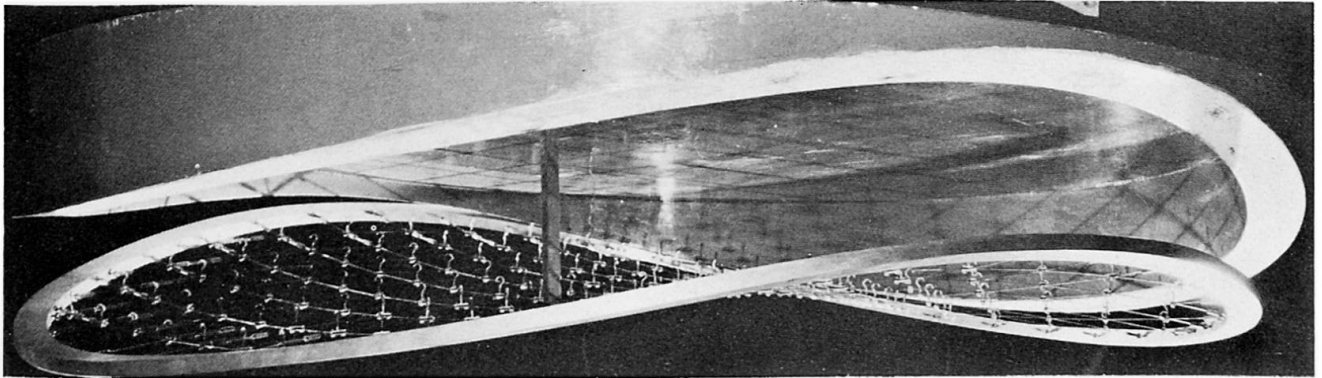


Fig.11 - The Model before being placed on its supports

valuation of wind actions, to the faculty of Aerospace Engineering of Milan, (director prof. G.Rotondi).

The building of the Palasport has been committed by the Italian Olympics Committee to the "Società Italiana per Condotte d'Acqua", which was awarded the contract following a national call for bid.

The design has been developed by the Studies and Design Division of the "Società Italiana per Condotte d'Acqua", with the participation of the following consulting engineers and architects:
 Architecture : arch. G.e T.Valle; Soc.Italiana Grandi Padiglioni
 Calculation of the structure: Società Italiana per Condotte d'Acqua
 Calculation of the network and ring-beam: ing. A.Samuelli Ferretti and A.Zingali

SUMMARY

The hanging network roof structure of large span, for the new Palasport in Milan, is described. Design as well as computational criteria are given, with some details about the effect of the interaction between network and peripheral ring.

Das dynamische Verhalten eines vorgespannten Kabelnetzes

The Dynamic Behaviour of a Prestressed Cable-Net Structure

Le comportement dynamique d'un filet de câbles précontraint

JENS JACOB JENSEN
The Technical University of Norway

1. EINLEITUNG

Die heutigen Berechnungsverfahren der Seil- und Membrantragwerke ermöglichen eine theoretische Berechnung dieser Systeme in statischer und dynamischer Beziehung (1), (2), (3). Für eine dynamische Untersuchung aber, sind die Dämpfungseigenschaften von Bedeutung. Bisher liegen wenige Angaben über die Dämpfungseigenschaften ausgeführter Seil- und Membrantragwerke vor. Versuche in grossem Masstab können Auskunft über die Dämpfungseigenschaften, die Einwirkung der umgebenden Luft sowie das dynamischen Verhalten unter Windlast geben. Im folgenden soll über den Bau eines vorgespannten Kabelnetzes für die Durchführung von dynamischen Versuchen in grossem Masstab, und die erzielten Ergebnisse berichtet werden.

2. VERSUCHSOBJEKT

Die erbaute Dachkonstruktion ist ein vorgespanntes Kabelnetz, bestehend aus gegenseitig gekrümmten Stahlseilen. Das Tragwerk überspannt eine Fläche von etwa 170 m² und ist durch vier Stützen gestützt. Das Netz weist eine Maschenweite von 1,50 m auf und ist an Randseilen, die über den Stützen und im Boden verankert sind befestigt. Als Dachhaut wurde ein Polyestergewebe mit beidseitiger PVC-Beschichtung gewählt. Die Dachfolie ist über das Kabelnetz gespannt und an den Netzknoten befestigt.

Für die Netz- und Randseile wurden verzinkte Spiraldrahtseile mit einer Zugfestigkeit von 145 kp/mm² verwendet. Die Netzseile bestehen aus zwei parallelen Spiralseilen von je ϕ 9,0 mm (F=50 mm²), während die Randseile bestehen aus drei parallelen Spiralseilen von

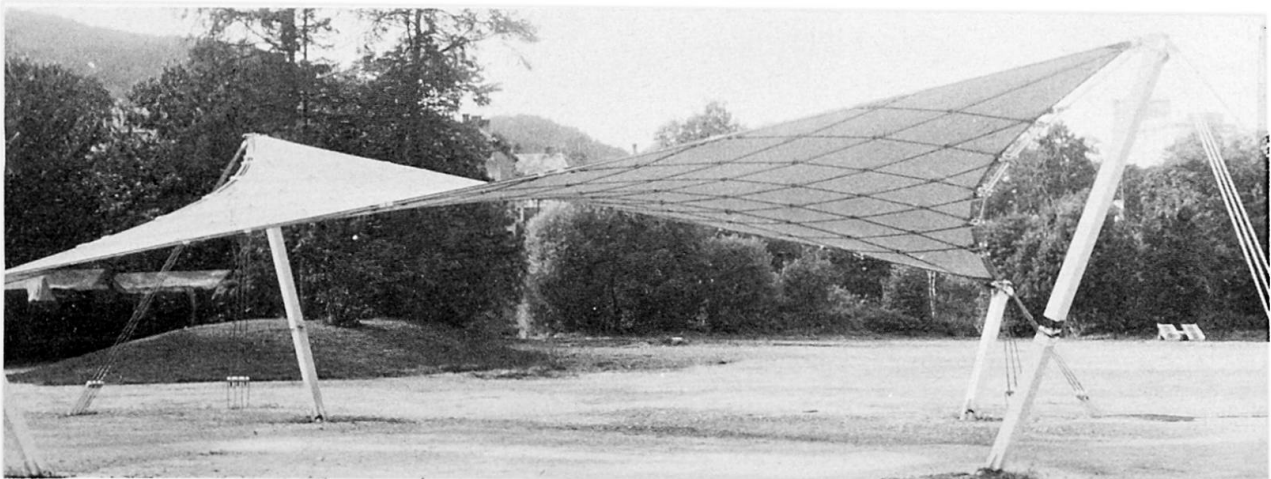


Bild 1. Versuchsobjekt

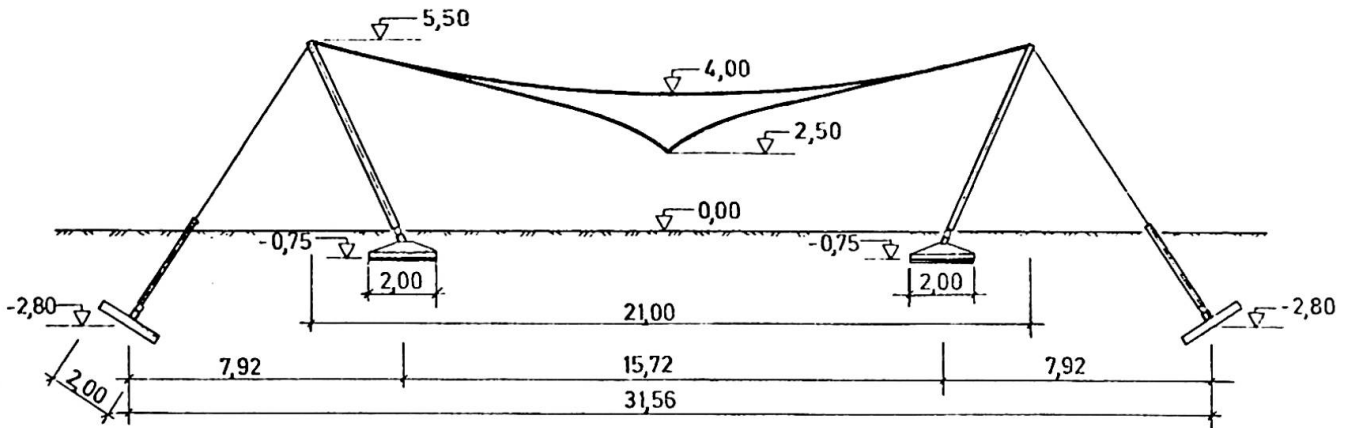


Bild 2. Abmessungen des Versuchsobjektes

je $\phi 21,0$ mm ($F=260$ mm²). Die inneren Knotenpunkte verbinden die sich kreuzenden Netzseile durch Klemmwirkung, und die Netzseile sind an den Randseilen gelenkig angeschlossen.

Die Seilverankerungen der Netz- und Randseile sollen weil es sich um eine Neuentwicklung handelt, kurz etwas näher beschrieben werden. Sie vermittelt die Verbindung zwischen Seil und einem Anschlussstück und dient zum Anschluss der Netzseile an den Knotenpunkten der Randseile, und zum Anschluss der Randseile an den Bodenverankerungen. Es handelt sich um ein patentiertes Kompressionssystem, wobei das Anschlussstück durch Explosive an das Kabelende aufgedrückt wird. Bei Detonation der Explosive wird das Anschlussstück einem Aussendruck der ein Mehrfaches der Fließgrenze des Materials des Anschlussstückes beträgt ausgesetzt. Man erhält somit eine Verformung des Anschlussstückes und des Seilquerschnittes, und erzielt die Verbindung zwischen Seil und Anschlussstück (Bild 4).

Zur Festlegung der Hauptabmessungen der Netz- und Randseile sowie der Hauptabmessungen der Stützen und Bodenverankerungen wurden die Schnittkräfte des Kabelnetzes mittels einfacher Seilstatik ermittelt. Für eine genauere Untersuchung des Tragwerkes wurden elektronische Berechnungen nach dem in (1) aufgestellten Verfahren durchgeführt. Es wurde mit zwei Berechnungsmodellen gerechnet, ein großes Modell und ein einfaches Modell. Das große Modell enthält 208 Elemente und 117 Knotenpunkte und kommt dem vorhandenen Kabelnetz sehr nahe. Das kleine Modell ist im Bild 5 wiedergegeben und enthält 48 Elemente und 25 Knotenpunkte.

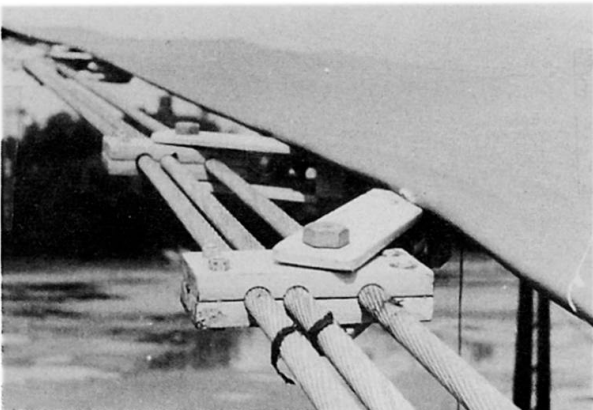


Bild 3. Randknotenpkt.

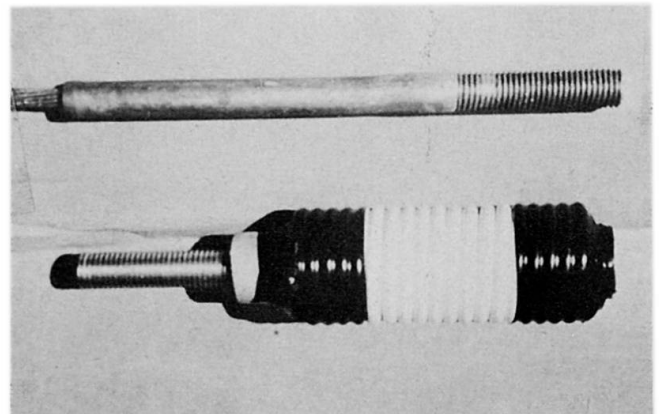


Bild 4. Seilverankerung

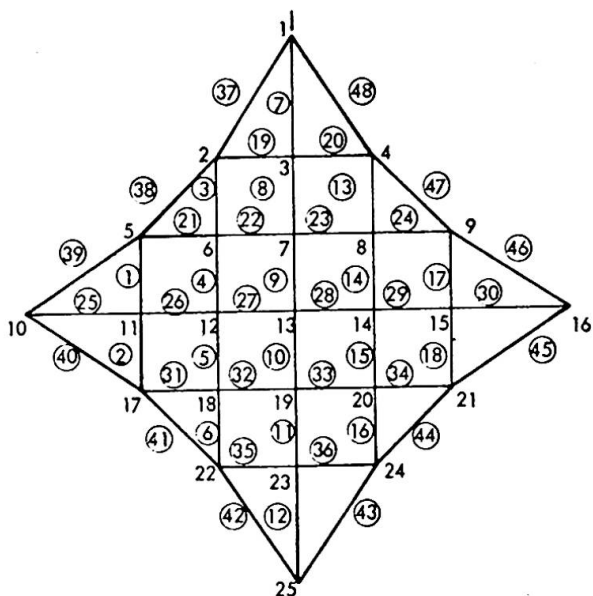
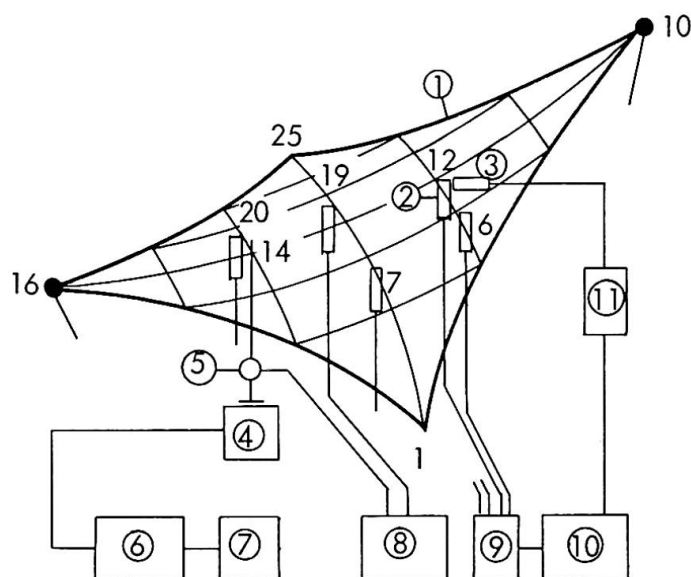


Bild 5.

Kleines Berechnungsmodell



1. Kabelnetz 2. Verschiebungsmesser 3. Luftdruckmesser 4. Vibrator 5. Kraftmesser 6. Verstärker 7. Oszillator 8, 10. Schreiber 9, 11. Messbrücke.

Bild 6. Versuchseinrichtung

3. VERSUCHS- UND MESSEINRICHTUNGEN

Die Durchführung einer experimentellen Untersuchung des Kabelnetzes, speziell im Rahmen eines Feldversuches, erforderte besondere Einrichtungen. Vor allem wurden die Versuche auf das dynamische Verhalten des Kabelnetzes konzentriert, womit die verschiedenen Eigenfrequenzen, Schwingungsformen und Dämpfungseigenschaften sowie die Einwirkung des Luftdruckes und das Verhalten bei Wind untersucht werden sollte. Statische Versuche wurden vor und nach der dynamischen Untersuchung, vorwiegend um die Geometrie und den Spannungszustand des Kabelnetzes zu überprüfen durchgeführt. Das Versuchsprogramm sah freie und erzwungene Schwingungen des Kabelnetzes vor, und zwar mit und ohne Dachhaut. Durch Luftdruckmessungen während des Schwingungsvorganges sollten Fragen in bezug auf die aerodynamische Dämpfung und das Verhalten der umgebenen Luft geklärt werden. Die allgemeine Versuchseinrichtung ist im Bild 6 dargestellt.

4. VERSUCHSERGEBNISSE

Freie Schwingungen

Das Kabelnetz wurde entweder von Hand, oder durch Loslassen eines aufgehängten Gewichtes im Kabelnetz in Schwingungen versetzt. Dabei konnten die tieferen Eigenschwingungsformen mit den zugehörigen Eigenfrequenzen und Dämpfungseigenschaften bestimmt werden. Die Versuche wurden mit und ohne Dachhaut und mit variabler Masse durchgeführt. Die Stufen der Massenverteilung werden wie folgt bezeichnet:

- $m=1$: Masse entsprechend eine volle Belastung von etwa 10 kp/m^2 (23,0 kp in jedem inneren Knotenpunkt), zusätzlich Eigengewicht.
- $m=\frac{1}{2}$: Masse entsprechend einer Belastung von 23,0 kp in jedem zweiten inneren Knotenpunkt, zusätzlich Eigengewicht.
- $m=0$: Masse entsprechend Belastung infolge Eigengewicht.

Die gemessenen Eigenfrequenzen der ersten Schwingungsform (Bild 7) sind zusammen mit berechneten Werten als Funktion der Masse im Bild 8 dargestellt. Die rechnerischen Werte der Eigenfrequenzen sind am einfachen Berechnungsmodell (Bild 5) ermittelt. Eine wichtige Erkenntnis dieser Versuchsergebnisse ist die unterschiedliche

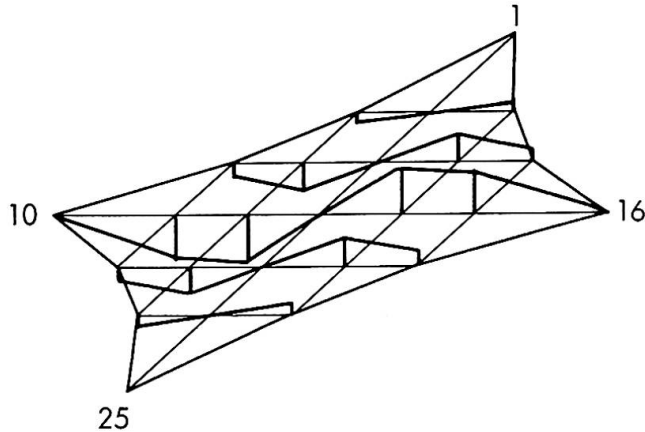


Bild 7. Erste Schwingungsform

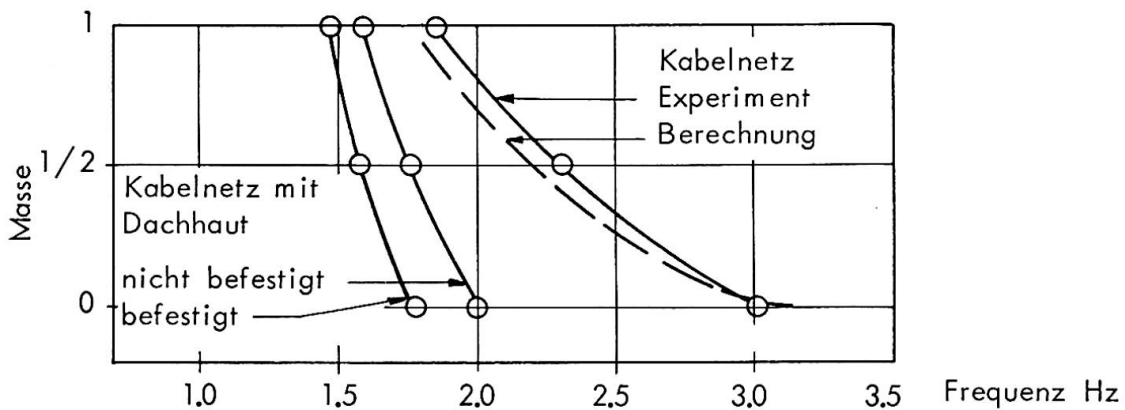


Bild 8. Erste Eigenfrequenz als Funktion der Masse

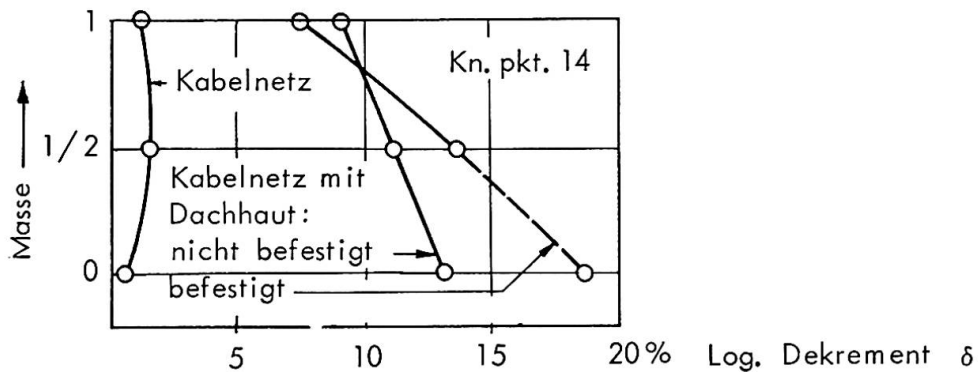


Bild 9. Dämpfung als Funktion der Masse

Massen- und Frequenzabhängigkeit des Kabelnetzes mit und ohne Dachhaut. Erstens liegen die Frequenzen des Kabelnetzes ohne Dachhaut höher, zweitens nehmen die Frequenzen mit abnehmender Masse stärker zu als beim Kabelnetz mit Dachhaut. Die theoretisch oder rechnerisch, ermittelten Eigenfrequenzen folgen im Ganzen den Frequenz-Masse-Verlauf des Kabelnetzes ohne Dachhaut. D.h. die rechnerischen Voraussetzungen stimmen gut mit den Verhältnissen des Kabelnetzes überein, im Gegensatz zu den Verhältnissen beim Kabelnetz mit Membranhaut. Aus dem Bild 8 sieht man, dass das Kabelnetz mit Dachhaut für verschiedene Massen mit der gleichen Frequenz schwingt. Es ist anzunehmen, dass das Kabelnetz mit Dachhaut die Schwingung mit einer Zusatzmasse ausführt (die viel grösser als die Masse der Dachhaut sein muss), und dass diese Masse von der mitschwingenden Luft herkommen muss.

Die Dämpfungsmasse der ersten Schwingungsform sind als Funktion der Masse im Bild 9 dargestellt. Als Mass der Dämpfung wird das logarithmische Dekrement verwendet: $\delta = \ln(A_i/A_{i+1})$ wobei A_i und A_{i+1} zwei aufeinander folgende Schwingungsamplituden darstellen. Man erkennt die unterschiedlichen Dämpfungsmasse der Versuche mit und ohne Dachhaut. Weiter erkennt man eine gewisse Abhängigkeit zwischen Masse und Dämpfung bei Kabelnetz mit Membranhaut; für das Kabelnetz ohne Dachhaut, aber nicht. Für das Kabelnetz mit Dachhaut nehmen die Dämpfungsmasse mit abnehmender Masse zu. Die Strukturdämpfung des Kabelnetzes konnte somit in dieser Weise getrennt werden. Sie beträgt etwa $\delta = 1-2\%$. Die restliche Dämpfung setzt sich aus die Strukturdämpfung des Dachhautes und die aerodynamische Dämpfung zusammen. Es darf angenommen werden, dass die aerodynamische Dämpfung von der Masse abhängig ist. Um diese Annahme zu überprüfen wurde der Einfluss der Luft durch Luftdruckmessungen untersucht.

Durch Schwingungen eines Tragwerkes in freier Luft wird die umgebende Luft in Bewegung gesetzt. Es entsteht somit eine Druckvariation des umgebenden Luftmediums, die die Schwingung eines leichten Tragwerkes beeinflussen kann. Gleichzeitige Messungen des Luftdruckes und der Verschiebungen des Tragwerkes haben gezeigt, dass der Extremalwert des Druckes beim grössten Ausschlag erreicht wurde (Bild 10). Es handelt sich somit um einen Beschleunigungsdruck im Gegensatz zu einem Geschwindigkeitsdruck. Im letztgenannten Fall wäre eine Phasenverschiebung von etwa $\pi/2$ zwischen Druck und Verschiebung zu erwarten. Das Entstehen und die Berechnung des Luftdruckes kann auf die Theorie der mitschwingenden Luftmasse zurückgeführt werden. Die Folgen einer mitschwingenden Luftmasse sind normalerweise eine Herabsetzung der Resonanzfrequenzen, was auch deutlich bei den Versuchen der freien Schwingungen gezeigt wurde. Weiter kann die aerodynamische Dämpfung infolge des Entstehens der Luftdrücke erklärt werden.

Überschlägig kann die gesamte mitschwingende Masse der Luft als

$$m'' = C_m \rho_L a^3$$

bestimmt werden, wobei $\rho = 0,125 \text{ kp sek}^2/\text{m}^2$ die Densität der Luft, und $2a$ die Abmessungen (Seitenlänge) des Tragwerkes darstellen. Die Konstante C_m hängt von der Form des Tragwerkes ab und konnte für das untersuchte Tragwerk auf $C_m = 2,5-7,5$ angesetzt werden.

Die aerodynamische Dämpfung konnte als

$$\delta = \frac{C_D \rho_0 F}{2m\omega^2 r_0} = \frac{1}{2} C_D \frac{m'' F}{F_{Tot} m}$$

gefunden werden (4). Dabei bedeutet p_0 den Beschleunigungsdruck der Luft bei der Schwingungsamplitude r_0 , und dem Kreisfrequenz ω .

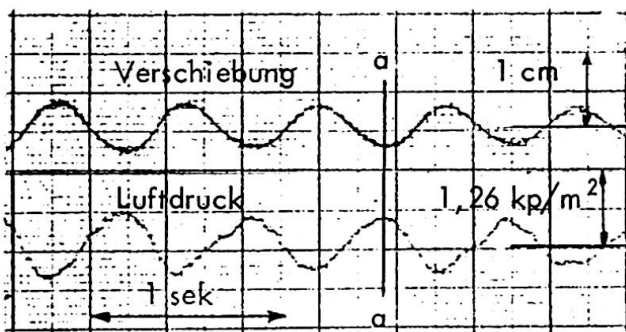


Bild 10. Verschiebung und Luftdruck in Kn.pkt. 12

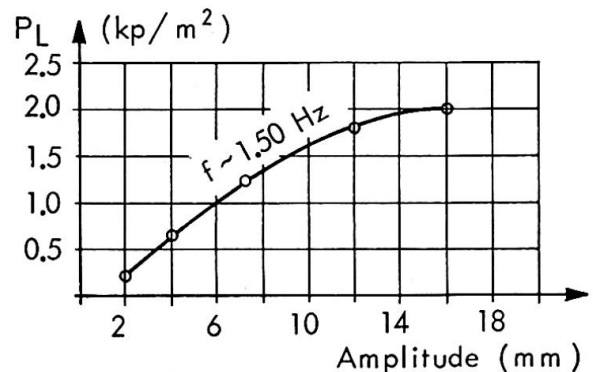


Bild 11. Gemessene Luftdrücke Kn.pkt. 12

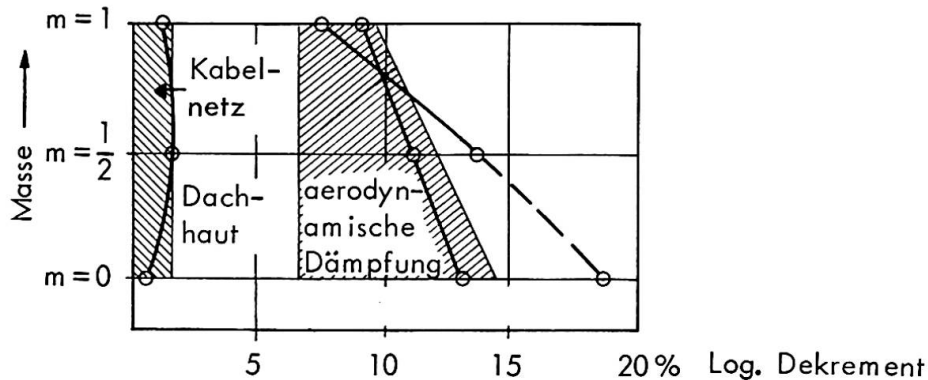


Bild 12. Trennung der Dämpfungseigenschaften

m/F bedeutet die mittlere Masse des schwingenden Tragwerkes pro Flächeneinheit, und m''/F_{Tot} die entsprechende mittlere Masse pro Flächeneinheit der mitschwingenden Luft. Die Konstante C_p wurde bei den ausgeführten Versuchen als $C_p=0,03-0,07$ gefunden.^P Wichtig ist, dass die aerodynamische Dämpfung umgekehrt proportional der Masse ist, und dass die Bedeutung der aerodynamischen Dämpfung bei Schwingungen mit grossen Lasten (z.B. Schneelast) abnimmt. Die im Bild 9 erzielten Dämpfungsverhältnisse lassen sich wie folgt erklären:

Die Gesamtdämpfung des Tragwerkes besteht aus der Strukturdämpfung des Kabelnetzes, der Strukturdämpfung der Membranhaut und der aerodynamischen Dämpfung. Bild 12 zeigt die Trennung der Dämpfungseigenschaften.

Erzwungene Schwingungen

Durch einen Vibrator konnte das Tragwerk in erzwungenen Schwingungen versetzt werden. Dabei sollten die verschiedenen Resonanzstellen und die zugehörigen Schwingungsformen aufgenommen werden. Bei stetiger Änderung der Erregerfrequenz des Vibrators konnten die Resonanzstellen des Kabelnetzes entdeckt werden. Als Beispiel sollen die experimentell gefundenen Resonanzstellen des Kabelnetzes ohne Dachhaut für den Fall $m=1$ d.h. Voll-last aufgeschrieben werden (4):

1,85, 1,90, 2,00, 2,40, 2,55, 2,80, 2,85, 3,15, 3,25, 3,40, 3,70 Hz.

Die theoretisch ermittelten Eigenfrequenzen stimmen gut mit den experimentell gefundenen Werten des Kabelnetzes ohne Dachhaut überein. Man erkennt, dass die Eigenfrequenzen des Kabelnetzes sehr nahe liegen.

Ein beschränkter Zahl der Resonanzstellen des Kabelnetzes mit Dachhaut konnte ebenfalls gefunden werden.

Die Aufnahmen von Response-diagrammen wurde unter Konstanthalten der Erregerkraft (3,0 kp Doppelamplitude) in den Knotenpunkten 14 bzw. 20 durchgeführt. Dabei wurde der Unterschied der zwei Systemen, Kabelnetz ohne Dachhaut, und Kabelnetz mit Dachhaut, sehr deutlich. Als Beispiel sind die Frequenz-Amplituden-diagramme der Resonanzstelle des ersten Schwingungsformes im Bild 13 dargestellt. Erstens ist die Verschiebung der Resonanzstelle, zweitens der Unterschied den Ausschläge deutlich. Man erkennt sofort der Einfluss der Dämpfung.

Beobachtungen beim Wind

Der natürliche Wind ist der massgebliche Schwingungserreger eines Seil- oder Membrantragwerkes. Durch Wirbelbildungen, Windstösse oder durch Flattern, können die Tragwerke dynamisch beansprucht werden. Beobachtungen des vorhandenen Tragwerkes haben

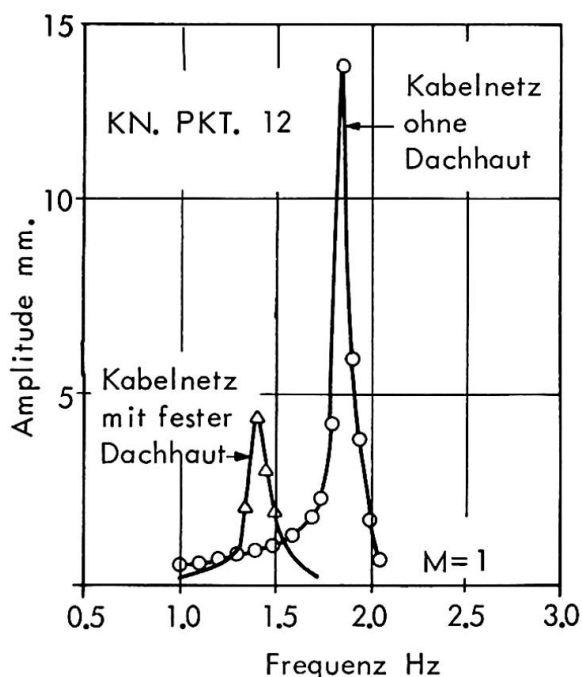


Bild 13. Response-diagramm

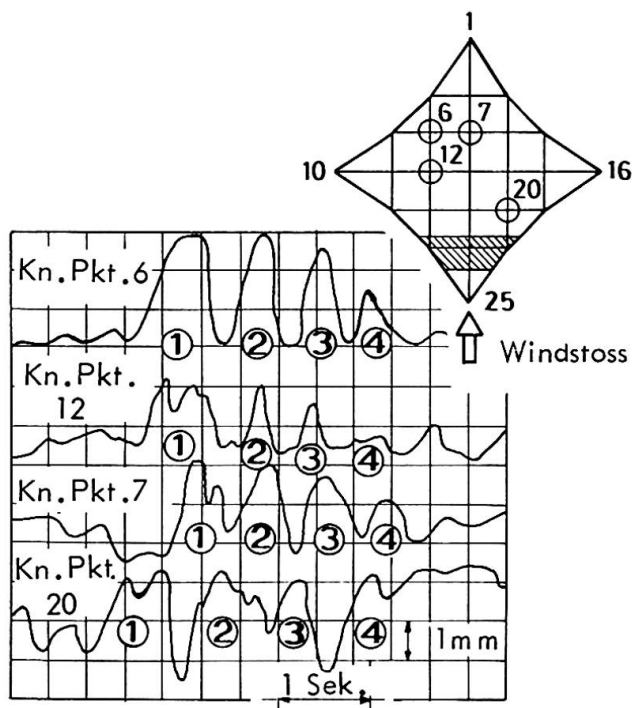


Bild 14. Windstoss

Auskunft über die Häufigkeit und die Entfaltungsdauer von Windböen gegeben. Die Bewegung der Windböen quer zur vorhandene Dachfläche wurde registriert, und auf Grund der Beobachtungen darf bei Berechnungen mit einem "Wandern" der Windböen gerechnet werden. Bild 14 zeigt das Fortschreiten einer Windböe quer zum vorhandenen Bauwerk. Die mitschwingende Luftmasse ist auch unter Windlast bei leichten Tragwerken in Rechnung zu stellen

5. ZUSAMMENFASSUNG

Durch experimentelle Untersuchungen in grossem Masstab wurde das dynamische Verhalten eines vorgespannten Kabelnetzes untersucht. Insbesondere haben die Versuche eine bessere Kenntnis der Dämpfungseigenschaften, der Einwirkung der umgebenden Luft, sowie des Verhaltens des Tragwerkes unter Windlast gegeben.

LITERATUR

- (1) Jensen, J.J.:
"Eine statische und dynamische Untersuchung der Seil- und Membrantragwerke" Division of Structural Mechanics, The Norwegian Institute of Technology, The University of Trondheim, Norway. Report No. 70-1, September 1970.
- (2) Knudson, W.C.:
"Static and Dynamic Analysis of Cable-Net Structures" University of California, Berkeley. April 1971.
- (3) Argyris, J.H. und Scharpf, D.W.:
"Berechnung vorgespannter Netzwerke" Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. München 1970.
- (4) Jensen, J.J.:
"Das dynamische Verhalten eines vorgespannten Kabelnetzes" Division of Structural Mechanics, The Norwegian Institute of Technology. Report No. 71-2. September 1971.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Analysis of a Prestressed Cable-Roof Anchored in a Space-Curved Ring Beam

Analyse d'une couverture précontrainte suspendue sur un cordon tridimensionnel courbe

Analyse eines Hängedaches mit vorgespanntem Seilnetz, verankert in einem räumlich gekrümmten Ring

GUNNAR KÄRRHOLM

Professor of Building Construction

ALF SAMUELSSON

Professor of Structural Mechanics

Department of Civil Engineering
Chalmers University of Technology
Göteborg, Sweden

The structure

In May 1971 the arena "Scandinavium" in Gothenburg, Sweden, was completed. With space for 14000 spectators it is the largest covered arena in northern Europe and has already been utilized for various activities as ice-hockey, concerts and opera performances.

The roof consists of a prestressed cable net carrying corrugated steel plates with thermal and water insulation. Its weight is 60 kg/m^2 . All cables are anchored in a space-curved reinforced concrete ring whose projection on a horizontal plane is almost circular with a diameter of 108 m. The ring is carried by 40 slender columns of circular sections and four stiff ones each formed by two walls connected by beams. The surface of the roof, Fig 1, deviates but little from a hyperbolic paraboloid.

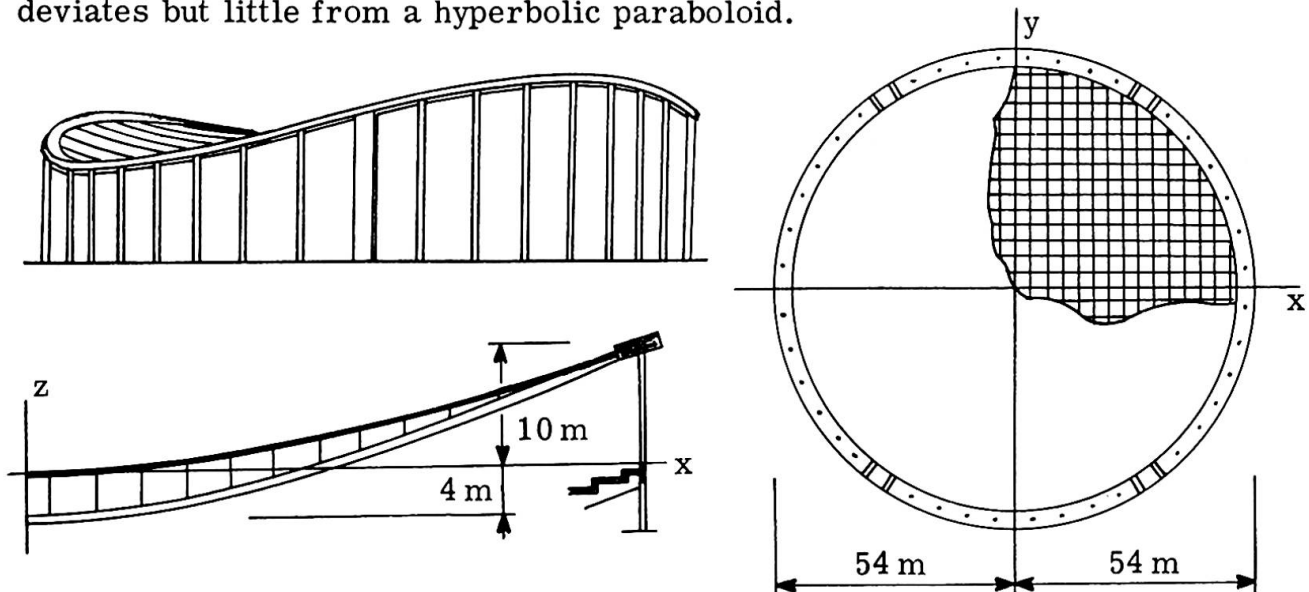


Fig 1. View of the arena and dimensions of the roof

From the center point of the roof the main cables rise 10 m to the top and the perpendicular cables fall 4 m to the valley of the ring. The distances

between the cables are nearly constant and equal to 4 m in both directions.

Preliminary calculations

Preliminary dimensions of the ring and the cables were estimated by analysis of a shear-free membrane model. The stiffness of the ring was taken as the stiffness of a plane ring with the same dimensions as the real one supported horizontally at the four stiff columns. The deflection of the roof was approximated by polynomials and the membrane stresses were approximated by sectionally constant values in each direction. The unknowns were determined from equations expressing vertical equilibrium and compatibility between membrane and ring. Section forces and moments in the ring due to snow and wind loads calculated from the membrane forces were modified with respect to the inclination of the ring. Comparison with the more accurate analysis presented below showed a difference of at most 10% in bending moments in the ring. Accurate values of the twisting moments could not be obtained by the approximate method.

Finite element method, general

The more accurate analysis was performed by applying a mixed finite element method. The structure was then divided into two substructures, the network of cables and the ring beam on columns. In studying the effect of vertical live load on the roof and arbitrary live load on the ring the substructures were analysed by the stiffness method and connected by the flexibility method.

The symmetry of the roof was utilized by making the calculations for only a quarter of the roof. Since the analysis was non-linear superposition was possible only in combination with iteration.

Form load condition

The analysis for live load was made for deflections and forces measured from a reference position defined by vertical positions z and the corresponding vertical dead load P^0 on the cable joints. In matrix form the vertical equilibrium of the cable joints can be expressed as

$$(1) \quad -X_H 0 z = P^0 / H_G + \text{boundary terms}$$

where H_G is a reference force and

$$(2) \quad H_G X_H 0 = H_G \alpha^0 X_x + A^T H_G \beta^0 X_y A$$

Here X_x and X_y are second-order difference operators, see ASPLUND, and $H_G \alpha_i^0$, $H_G \beta_k^0$ the horizontal components of the dead load cable forces in the x - and y -cables i and k . The first term on the right hand side of eq (2) yields the contribution from the x -cables and the second from the y -cables. The matrix A is an ortho-normal renumbering matrix. The minus sign on the left hand side of eq (1) annihilates minus signs in the diagonals of X_x and X_y , thus making the set of equations positive definite.

With the chosen form of the roof the forces $H_G \alpha_i^0$ and $H_G \beta_k^0$ were constant giving a nearly moment-free concrete ring under dead load.

Live load

For dead load P^0 plus live load P vertical equilibrium of the cable joints requires

$$(3) \quad -X_{(H_0 + H)}(z + p) = (P^0 + P)/H_G + \text{boundary terms}$$

where

$$(4) \quad H_G X_{(H_0 + H)} = H_G \alpha X_x + A^T H_G \beta X_x A$$

The difference between eq (3) and eq (1) can be written

$$(5) \quad -X_{(H_0 + H)} p + ZH/H_G = P/H_G$$

where H is a column matrix with $H_G(\alpha - \alpha^0)$ followed by $H_G(\beta - \beta^0)$ and Z is a rectangular matrix built up by the second-order difference operators multiplied by the vertical distances between the anchors and the cable joints.

The second order difference operator X is built up by quotients $\Delta(z + p)/\Delta(x + u)$. Here the changes Δu in horizontal movement u can be neglected or be considered approximately e. g. as indicated by ASPLUND.

The other set of equations needed expresses compatibility between the cable net and the ring. This set should be expressed by the same unknowns as eq (5). Combined with eq (5) the two sets of equations can be written

$$(6) \quad \begin{bmatrix} -X_{(H_0 + H)} \cdot H_G & Z \\ -Z_p^T & (L/EA + B^T e B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ h_0 \end{bmatrix}$$

The minus sign in the second line is typical for the mixed formulation. The matrix Z_p is equal to Z in a linear theory. A more accurate formulation is here needed. A second and satisfactory approximation of Z_p is obtained if z is replaced by $(z + p/2)$.

In $(L/EA + B^T e B)$ the first term gives the elastic elongations of the cables. The effective length of a cable can here be approximated with good accuracy as

$$(7) \quad L_{\text{eff}} = L_H + (3/2) z^T (-X) z$$

where L_H is the horizontal distance between the anchors.

The second term $B^T e B$ is the flexibility of the ring on columns loaded by cable forces. The matrix e is the flexibility matrix of the ring on columns loaded by general forces and moments. For the calculation of this matrix the ring was divided into elements, the straight parts between the columns. The matrix e can be obtained by first or second order theory from a standard finite element system program.

The column matrix h_0 on the right hand side is zero in general. It can, however, be used for the complementary solution to a particular solution. Load on the ring and temperature changes in the ring were included in this way.

Iteration

The set of equations (6) was solved by iteration starting with a guess on

H, solving for p , establishing Z_p^T , solving for H and so on. Even with a poor guess on H the convergence in all practical cases was rapid (3 to 4 iterations were sufficient). On an IBM 360/65 the central processing time for one iteration with 105 unknowns was about one minute.

Pretensioning stages

After the main cables had been hanged out, four cables in the other direction located symmetrically around the valley were laid out and tensioned. Repeatedly four and four cables were laid out and tensioned until all cables were on place. After that the roof plates were laid out. In the analysis this procedure was followed backwards from the reference state by eliminating the dead load and the forces in some cables. In eq (6) this means that P was set equal to $-P^0$ and that some elements in H were set equal to zero. The calculations were checked against measurements of the vertical position of the line from valley to valley and the horizontal movement of the valley. Maximum discrepancies between calculated and measured values of the vertical position at full pretensioning amounted to 7 cm. The horizontal movement of the valley of the ring during pretensioning was calculated and measured to 7.5 cm. The corner strains of the ring were also measured during pretensioning. Comparison with theoretical values gave maximum discrepancies of 1 MN/m^2 in corner stresses of 10 MN/m^2 at full pretensioning.

Behaviour under live load

With a concrete ring of $3.0 \cdot 1.2 \text{ m}^2$ in section area all cables were tensioned by uniform snow load because the valleys of the ring moved outwards considerably. How the flexibility of the ring affects the forces in the cables is illustrated in Table 1.

Stiffness of ring	A	B
K	105	51
3K	99	28
10K	92	-32

Table 1. Cables forces in kN/m due to snow load calculated for rings of stiffness K, 3K and 10K where K is the actual stiffness.

A Cables anchored at the top

B Cables anchored at the valley

The chosen flexibility of the ring gave a favourable distribution of cable forces. This became relatively uniform both for downward snow load and upward wind load, thus giving ring moments of moderate magnitude. The upward wind load was after wind-tunnel tests taken to -400 N/m^2 . The snow load was 750 N/m^2 according to Swedish norms. The maximum vertical movement of the net due to snow load was calculated to 68 cm.

Natural vibrations

The roof was also analysed with regard to natural modes of vibration. Only small vibrations superposed on deflections under dead load and dead load plus uniform snow were considered. For vibration calculations a pure stiffness formulation is suitable. With variables

$$(8) \quad p = p_a \sin \omega t, \quad h = h_a \sin \omega t$$

where h is the horizontal component of the cable movement in the cable direction at the ring, the homogeneous equations become

$$(9) \begin{bmatrix} (-X(H+H_0)H_G + Z(L/EA)^{-1}Z^T - M_n\omega^2) & Z(L/EA)^{-1} \\ (L/EA)^{-1}Z^T & ((L/EA)^{-1} + (B^T_eB)^{-1} - M_r\omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_a \\ h_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

For small vibrations Z_p^T is equal to Z^T and $X_{(H+H_0)}$ is constant so eq (9) is linear. In the diagonal matrix M_n the mass of the roof and load on it lumped to the cable joints is arrayed. In M_r the mass of the ring and the columns increased by some contributions from the roof is lumped to the cable anchors.

For vibration modes antisymmetric in both directions h_a is zero so eq (9) can for this case be simplified. Symmetrical modes, however, induce bending of the ring and for such cases the acceleration of the ring should be considered. Results from some calculations are given in Table 2.

Mode	A	B
Antisym.	0.96	1.45
Sym.	0.85	1.27

Table 2. Period times in sec. for lowest antisymmetric and symmetric modes of vibrations superposed on deflections due to dead load (A) and dead load + snow (B)

Reference:

S. O. Asplund: Structural Mechanics, Ch N and S, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.

Summary

The roof structure of the arena "Scandinavium" in Gothenburg consists of a prestressed cable net anchored in a space-curved ring beam. It was analysed by a non-linear mixed finite element method with the cable joint deflections from a reference position and the live load cable forces as variables.

The comparatively high flexibility of the ring caused a favourable distribution of cable forces due to snow and wind. Still the system was sufficiently stiff for ensuring acceptable dynamic properties.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Elastic and Inelastic Analyses of Pretensioned Cable Networks

Analyses élastiques et non-élastiques de couvertures précontraintes suspendues

Elastische und nichtelastische Analysen von vorgespannten Seilnetzen

J.B. KENNEDY

Ph.D., Professor and Department Head

Department of Civil Engineering, University of Windsor

Windsor, Ontario, Canada

T. KUMANAN

M.A.Sc., Commonwealth Scholar

1. INTRODUCTION

In recent years several studies [1] have been published on cable roofs. Siev and Eidelman [2] developed a procedure for determining the initial shape of a cable roof. They also described [3] an approximate method of analysis of prestressed roofs, neglecting the horizontal displacements of the joints; Siev [4] presented a general linear method of analysis accounting for horizontal displacements and introducing a correction for nonlinearity by means of an iterative procedure. These analyses were in general for orthogonal nets where the angle between the two sets of cables was assumed to be a right angle.

Thornton and Birnstiel [5] derived nonlinear equations for a three-dimensional suspension structure; an influence coefficient method was used by Krishna and Sparkes [6] for the solution of the nonlinear equations with the principle of superposition assumed in a limited way to analyze pretensioned cable systems consisting of two cables of reverse curvature, pretensioned together by means of a set of vertical hangers; Buchholdt [7] employed a theory based on the minimization of the total potential energy and presented a solution by the method of steepest descent. Bathish [8] utilized the membrane theory to analyze cable roofs. Siev [9] analyzed an orthogonal roof bounded by main cables and compared his results with experimental findings.

In this study, nonlinear displacement equations are derived for general non-orthogonal cable networks. The solution is substantiated by experimental results from tests conducted on models of cable roofs.

2. THEORETICAL STUDY

The displacement equations for a general nonorthogonal cable net were derived with the following assumptions: The cables are weightless and the applied load acts at the joint between cables; the cables are straight between joints and have constant cross-sectional area; the joints are perfectly smooth; and, the cables do not carry any compressive or bending loads.

The Newton-Raphson method was suitably adapted to provide a convenient numerical solution of these equations. The behaviour of nonorthogonal hyperbolic

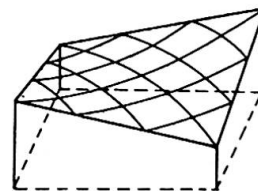
paraboloid nets under various modes of loading and temperature changes were studied. The effects of changes in nonorthogonality of the cables, initial pretension and the slope of the roof were also examined. In addition to taking into account the geometric nonlinearity, material nonlinearity was also considered by assuming an appropriate theoretical model for the stress-strain curve of the cable and hence the ultimate load capacities of the roofs were determined; the stress-strain curve of the cable was assumed to be a second-degree parabola between the proportional limit and the ultimate strength.

Numerical and experimental studies were carried out on two types of roofs: (i) a common saddle-shaped hyperbolic paraboloid roof consisting of two nonorthogonal sets of cables; this is referred to as the 'single roof' herein; (ii) a compound shape consisting of two hyperbolic paraboloids connected together; this is referred to herein as the 'double roof'. The single and the double roofs are shown in Fig. 1 (a) and (b) respectively. The double roof may also be extended to form a continuous multi roof with a series of hyperbolic paraboloids as shown in Fig. 1 (c). The two roofs used in the numerical analysis were 120 ft. x 240 ft. in plan with a difference in heights of 12 ft. between adjacent corners. The single roof had a total of 61 joints while the double roof had only 28 joints.

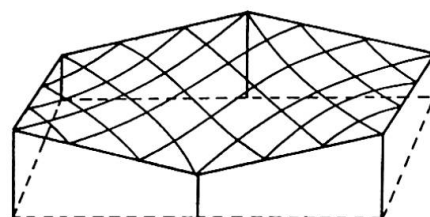
When a uniform load was applied on these roofs, the deflections were found to be more nonlinear than the tension changes with deviations of about 40% and 15% respectively from the corresponding linear solutions. For concentrated loads, the tension changes behaved more nonlinearly than the deflections with corresponding deviations of 25 - 30% and 10% respectively. The nonlinear solution was underestimated in some cases and overestimated in others by the linear solution. This behaviour was found to be related to the slope of the roof. The effect of changing the nonorthogonality of the cables on the deflections and tension changes was also examined. The deflections were found to increase as the nonorthogonality of the cables increased but the tension changes were practically unaffected by any change in nonorthogonality. When the cable pretensions were increased, the deflections and tension changes decreased as expected. The nonlinearity was also reduced at the same time since the stiffness of the roof increased. The final cable tensions increased with the pretension but at higher loads this increase became smaller. Thus it is advantageous to use a high pretension to avoid large deflections without appreciably increasing the final cable tensions.

It was revealed that it is beneficial to use a higher pretension in the prestressing cables than in the load carrying cables. It is possible to find an optimum ratio of pretensions at which the maximum cable tension produced is least and the variation in cable tensions is a minimum.

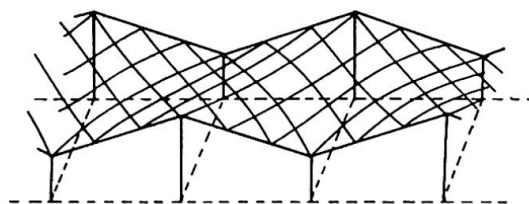
When the behaviour of roofs with different heights was examined, it was found that the deflections decreased with increase in the roof-height. The tension increment was found to be a maximum at a particular roof height which was defined as the critical roof-height. Based on this definition of critical height, roofs can be classified as flat and steep roofs. Steep roofs tend to weaken under increased



(a) SINGLE ROOF



(b) DOUBLE ROOF



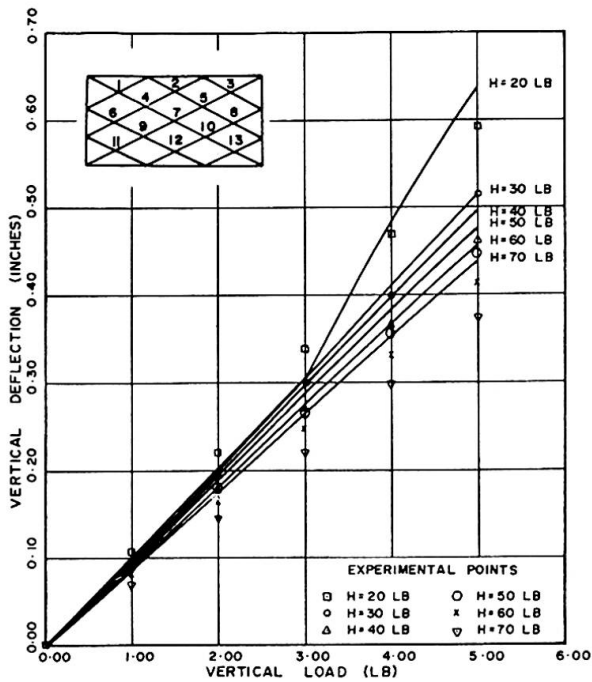
(c) CONTINUOUS MULTIROOF

Fig. 1

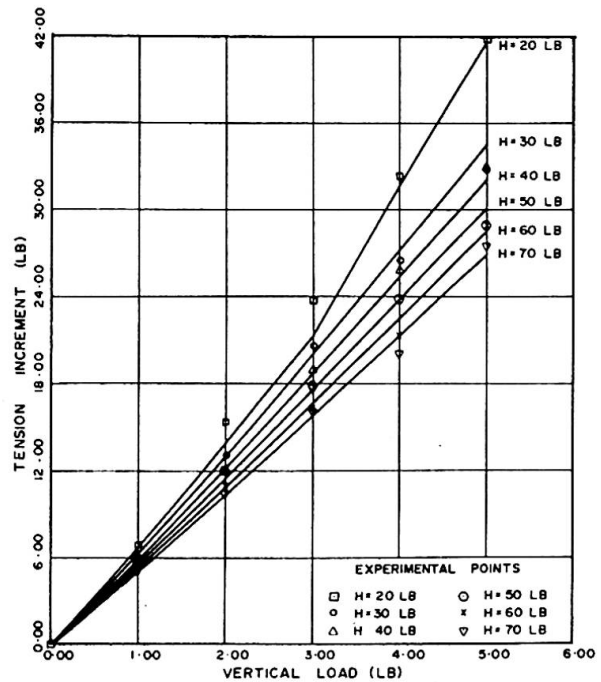
load with the linear solution underestimating the actual values; while flat roofs tend to increase in strength under load with the linear solution overestimating the true solution. The ultimate load capacity of cable roofs are also affected by the slope of the roof. The ultimate capacity is highest for flat roofs and lowest for steep roofs with an intermediate value at the critical height.

3. EXPERIMENTAL STUDY

Experimental investigations were carried out on test models, to verify the validity of the theoretical solution. A nonorthogonal single roof model and an orthogonal double roof model having dimensions of 36 in. x 72 in. in plan and a height of 9 in., were tested. Both models consisted of five 3/64 inch diameter stainless steel wire ropes of 7 x 7 construction in each direction. Tension measurements were made with precalibrated load cells connected at the ends of the wire ropes. Deflections were measured by displacement transducers. Tests were carried out with various values of initial pretension, the horizontal component of which was kept constant in all the cables in both directions. The models were subjected to equal loads at all the joints and in different tests, concentrated loads at specific joints.



DEFLECTION AT JOINT 7 OF SINGLE ROOF MODEL (UNIFORM LOADING)
Fig. 2



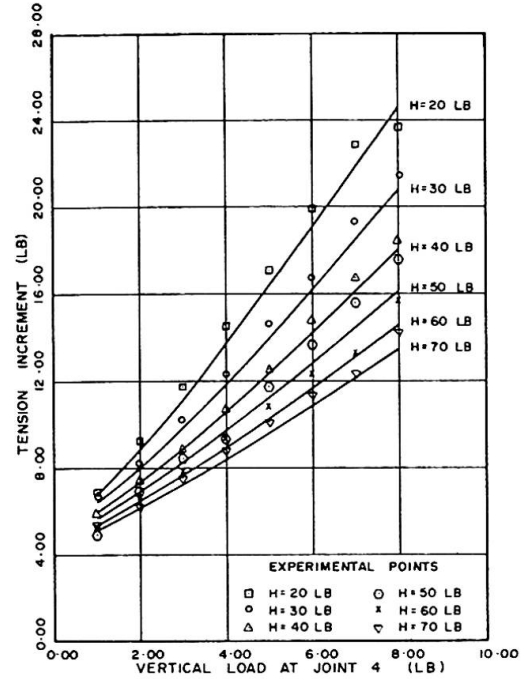
MAX. TENSION INCREMENT IN SINGLE ROOF MODEL (UNIFORM LOADING)
Fig. 3

The deflection at the centre of the single roof model under a uniformly applied load is shown in Fig. 2. Each theoretical line is for a specific value of H, the horizontal component of the initial tension, and the corresponding experimental points are shown. The measured deflections are generally lower than the theoretical values, with a maximum difference of 12%.

The maximum tension increment produced by the uniform load on the single roof model has been plotted against applied load in Fig. 3. The experimental values are within 4% of the theoretical values. The discontinuity in the line at H = 20 lbs. is due to the fact that some prestressing cables became slack as the load is increased beyond 3 lb/joint. The theory takes such discontinuity into account and the experimental results substantiate this.

Fig. 4 shows the maximum tension increment produced by a concentrated load applied in addition to a uniform load of 1 lb/joint. Here the nonlinearity is clearly demonstrated. The experimental values are within 5% of the theoretical values in almost all cases.

Similar tests were carried out on the double roof model. Curves of maximum deflection versus load for the double roof model under a uniform load are presented in Fig. 5. It can be observed that the nonlinearity is more marked here than that in the single roof model. The experimental deflections are again within 10% of the theoretical results in most cases with a maximum difference of 13%. The corresponding tension increments under uniform load is shown in Fig. 6. The experimental values are quite close to the theoretical values with a maximum difference of 4%. Fig. 7 shows the maximum tension increment vs. load when a concentrated load is applied on the double roof model in addition to a uniform load of 1 lb/joint. The agreement between the experimental and theoretical values is within 5%.

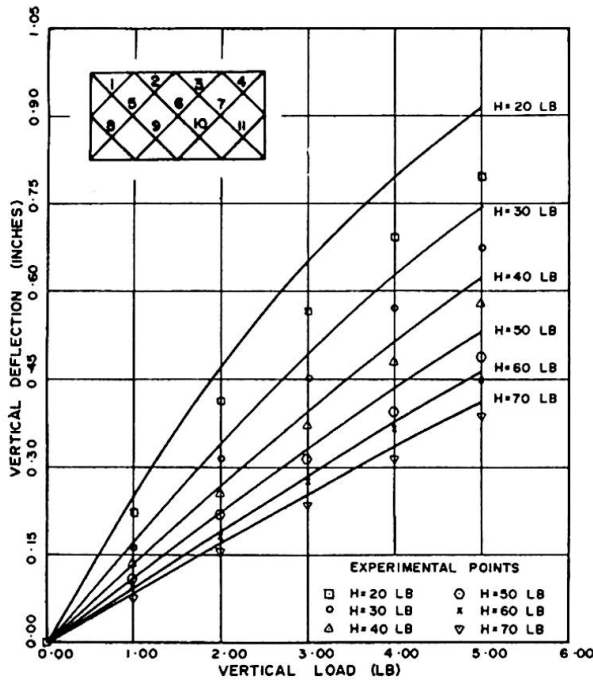


MAX. TENSION INCREMENT IN SINGLE ROOF MODEL
(UNIFORM LOAD OF 1 LB/JT + CONC. LOAD AT THE JT)
Fig. 4

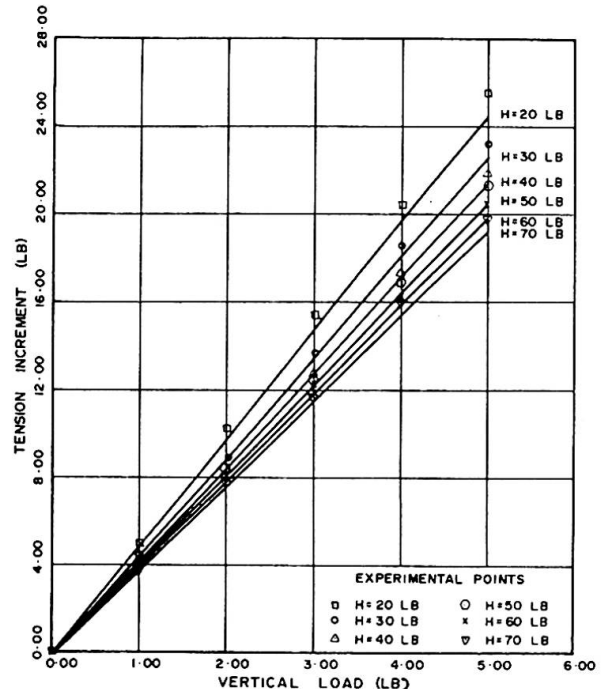
The linear and nonlinear theoretical solutions for the tension change in a prestressing cable of the single roof model and the corresponding experimental values are presented in Fig. 8. The experimental values are within 5% of the non-linear solution while the linear solution overestimates it by as much as 90%.

4. CONCLUDING REMARKS

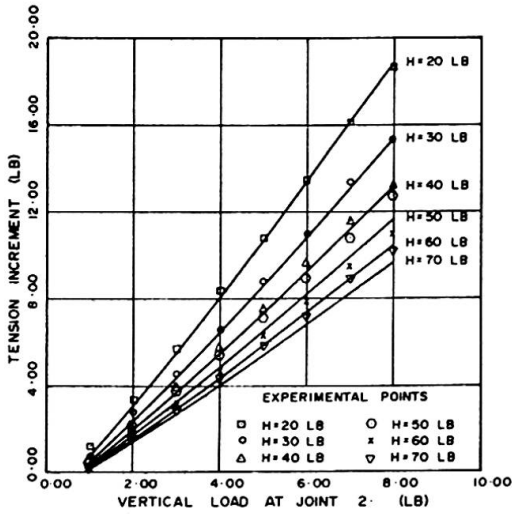
The equations and the method of solution developed in this study could be



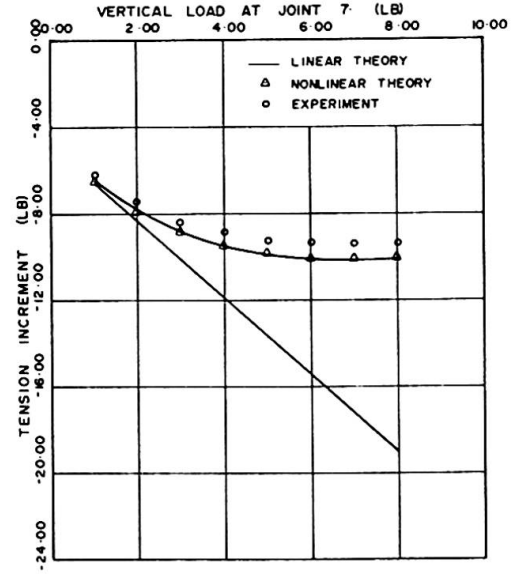
DEFLECTION AT JOINT 6 OF DOUBLE ROOF MODEL
(UNIFORM LOADING)
Fig. 5



MAX. TENSION INCREMENT IN DOUBLE ROOF MODEL
(UNIFORM LOADING)
Fig. 6



MAX. TENSION INCREMENT IN DOUBLE ROOF MODEL
(UNIFORM LOAD OF 1 LB/JT + CONC. LOAD AT THE JT)
Fig. 7



MAX. TENSION DECREMENT IN SINGLE ROOF MODEL
(H=20 LB. UNIFORM LOAD OF 1 LB/JT + CONC. LOAD AT JOINT 7)
Fig. 8

used to predict the nonlinear behaviour of hyperbolic paraboloid cable roofs with any degree of nonorthogonality. This is established by the good agreement between theory and experiment.

In a practical design, the choice of roof slope should not be based purely on aesthetic considerations. Careful attention should be given to strength and performance since the curvature considerably influences the behaviour of the roof. Noting the fact that the factor of safety against failure, based on a working load corresponding to the proportional limit, is excessively high for all slopes, it would seem advantageous to use a steep slope with an increased working load and smaller deflections in exchange for a reduced ultimate capacity.

BIBLIOGRAPHY

1. Esquillan, N. and Saillard, Y., eds.: "Hanging Roofs" - Proceedings of the IASS Colloquium on Hanging Roofs, Continuous Metallic Shell Roofs and Superficial Lattice Roofs. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1963.
2. Siev, A. and Eidelman, J.: "Shapes of Suspended Roofs". Hanging Roofs. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1963. 42-47.
3. Siev, A. and Eidelman, J.: "Stress Analysis of Prestressed Suspended Roofs". Proceedings of the ASCE, Journal of the Structural Division, August 1964, 103-121.
4. Siev, A.: "A General Analysis of Prestressed Nets". International Association for Bridge and Structural Engineering-Publications, 1963, 283-292.
5. Thornton, C. H. and Birnstiel, C.: "Three Dimensional Suspension Structures". Proceedings of the ASCE, Journal of the Structural Division, April 1967, 247-270.
6. Krishna, P. and Sparkes, S. R.: "An influence Coefficient Method for Prestensioned Cable Systems". Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London, Nov. 1968, 543-548.

7. Buchholdt, H. A.: "Deformation of Prestressed Cable-nets". Civil Engineering and Building Construction Series No. 38, Trondheim, 1966, 16 pp.
8. Bathish, G. N.: Membrane Analysis of Cable Roofs, Ph.D. Thesis, University of Pennsylvania, 1966.
9. Siev, A. "Prestressed Suspended Roofs Bounded by Main Cables". International Association for Bridge and Structural Engineering-Publication, 1967, 171-185.

SUMMARY

General equations describing the nonlinear behaviour of nonorthogonal cable networks, and their solution, are developed. The influence of initial cable tension, degree of cable nonorthogonality, and slope on deflection and load-carrying capacity of cable roofs are studied. The discrepancies in the linear solution of such structures are examined. The theoretical solution is verified by test results.

Computer Analysis and Model Experiment of Cable Structures

Analyse par ordinateur et expérience sur modèle d'une structure de câbles

Computer-Analyse und Modellversuch von Kabelstrukturen

YOSHIO NAMITA Dr.-Eng. Chief Research Engineer	TOHRU SHINKE Research Engineer Structural Eng. Laboratory, Kobe Steel, Ltd. Amagasaki, Japan	KUNIHIRO HIRONAKA M.-Eng. Research Engineer
---	--	--

1. Introduction

In this paper a computational method of two-dimensional cable structure is proposed, in which emphasis is laid on the problem of determination of structural member lengths. In construction of cable structures full knowledge about structural member forces under given loading conditions and especially, about the determination of correct length of each member is indispensable so that the completed structure forms strictly a shape of required geometry. When cable structures are constructed by connecting and tensioning many members with certain lengths (unstrained length), then their final shape should agree with those prescribed beforehand. Unsuitable choice of unstrained lengths of members makes it impossible to set up the desired structure, that there may be found many members left unstrained even in completed state.

From another point of view, we may say that the very problem is to know the completed shape and stress state of the cable structures when the structural members with certain lengths are assembled with some boundary members anchored with initial tension.

The authors report here on the nonlinear analysis of two-dimensional cable structure covering the above-mentioned problems, and on the experimental work which was done so as to certify the pertinency of the theory.

The theory is not limited to stress and deformation analysis of structures under given conditions (initial member forces and geometry), but makes it possible not only to clarify the stress and deformation states of cable structures but also to determine the correct unstrained lengths of members which are needed to set up the structure with desired geometry.

Computation starts from the estimate of pretension in each member utilizing the method of least squares, and then equilibrium state is determined by energy method. Computation is repeated, changing the values of pretention step by step, until the final shape of the structure is sufficiently conformed to prescribed one.

Laboratory experiment was made on a large-sized cable truss model of 23.6m length. In this kind of experiment the influence of errors upon displacement measurement should be strictly restricted to minimum, for deformation itself is the dominant factor to determine an equilibrium state. As the accuracy in setting-up and measurement of the model, however, is evidently restricted to a certain limit, relative errors should be made as small as possible by employing a large-sized model. Experimental results are shown and compared with theoretical values.

2. Statical Analysis

2-1. Basic Assumptions

Following assumptions are made in the analysis: (i) Stress-strain relationship of the material is linear. (ii) Bending stiffness of the member is neglected. (iii) Every loads act only at joints. The members are straight between the joints. (iv) Joints are considered to be frictionless hinges.

2-2. Estimate of Initial Tension by the Method of Least Square

Fig. 1 shows a joint j where N members are assembled. N member forces P_{jn} ($n=1\dots N$) and two external forces F_{jx} , F_{jy} act at this joint. Equilibrium conditions at joint j are written in the form

$$\begin{aligned} \sum P_{jn}(X_j - X_n)/L_{jn} &= F_{jx} \\ \sum P_{jn}(Y_j - Y_n)/L_{jn} &= F_{jy} \end{aligned} \quad (1)$$

When the structure is in equilibrium, Eq. (1) holds at all joints, i. e.

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (2)$$

where \mathbf{T} is an equilibrium matrix of order ($f \times m$) consisting of direction cosines of every members, \mathbf{P} is a ($m \times 1$) vector of every member forces and \mathbf{F} is a ($f \times 1$) vector of external forces. m and f mean the numbers of members and degrees of freedom respectively. We suppose here $f > m$, that is, the system to be treated is a structural mechanism, which is often the case in cable truss structures. In such cases Eq. (2) cannot be solved uniquely and the consideration of finite deformation is needed.

Now, Eq. (2) can be written in the form

$$\mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{P}_0 = \mathbf{F} + \mathbf{r} \quad (3)$$

where \mathbf{T}_0 is an equilibrium matrix which satisfies the prescribed configuration condition, \mathbf{P}_0 is an internal force vector which satisfies Eq. (2) approximately and \mathbf{r} is the vector of unbalanced forces at every joints. We now estimate the most probable values of \mathbf{P}_0 making unbalanced force vector \mathbf{r} minimum. The Euclidian norm of \mathbf{r} is

$$\|\mathbf{r}\|^2 = (\mathbf{T}_0 \mathbf{P}_0 - \mathbf{F})^T (\mathbf{T}_0 \mathbf{P}_0 - \mathbf{F}) = \mathbf{P}_0^T \mathbf{T}_0^T \mathbf{T}_0 \mathbf{P}_0 - 2 \mathbf{P}_0^T \mathbf{T}_0^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (4)$$

The necessary and sufficient condition to reduce $\|\mathbf{r}\|^2$ to minimum is obviously $\partial \|\mathbf{r}\|^2 / \partial P_{0j} = 0$, which gives the normal equations as follows,

$$\mathbf{T}_0^T \mathbf{T}_0 \mathbf{P}_0 = \mathbf{T}_0^T \mathbf{F} \quad (5)$$

Eq. (5) can be solved uniquely and gives the most probable values of member forces at the required state \mathbf{T}_0 , which are utilized as the initial values for finite deformation analysis which follows. It is not always easy to solve Eq. (5) directly with sufficient accuracy, since the calculation of inverse matrix $(\mathbf{T}_0^T \mathbf{T}_0)^{-1}$ is contained in its procedure. We adopted Golub's method (1) with successful results.

2-3. Finite Deformation Analysis by Energy Method

The approximate values of \mathbf{P}_0 have thus been obtained, but the unbalanced forces \mathbf{r} still exist at the joints. In order to make these unbalanced forces vanish finite deformation analysis is carried out utilizing the theory based upon the principle of minimum potential energy. Buchholdt's works ((2), (3)) with regard to this problem furnish us much information.

The total potential energy of the cable structure is shown as

$$W = \sum U_s - \mathbf{F}^T \mathbf{x} \quad (6)$$

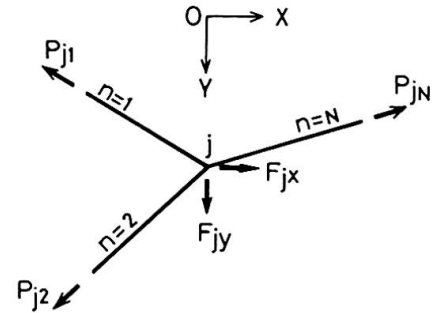


Fig. 1. Force system at a joint

where \mathbf{x} is the displacement vector of joints, and U_s is the strain energy of each member and is shown in the form

$$U_s = U_{jn} = \int_0^e P_{jn} de = (P_0 e + EAe^2 / 2L)_{jn} \tag{7}$$

where P_{0jn} , e_{jn} , $(EA)_{jn}$ and L_{jn} are initial tension, total elongation, extensional rigidity and final length of member \bar{jn} respectively, further,

$$e_{jn} = \frac{1}{L_{jn}} \left\{ \Delta X \cdot \Delta x + \Delta Y \cdot \Delta y + \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{2} \right\}_{jn} \tag{8}$$

where $\Delta X = X_n - X_j$, $\Delta x = x_n - x_j$ etc. (cf. Fig. 2)

The principle of minimum potential energy leads to the equilibrium conditions at every joints, i. e.

$$\nabla W = \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial y_1}, \dots \right\}_f = 0 \tag{9}$$

where

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_j} &= \sum_n \frac{\partial U_{jn}}{\partial e_{jn}} \cdot \frac{\partial e_{jn}}{\partial x_j} - F_{jx} \\ &= - \sum_n \frac{P_{jn}}{L_{jn}} (\Delta X + \Delta x) - F_{jx} \end{aligned} \tag{10}$$

In order to find the displacement vector \mathbf{x} which satisfies Eq. (9), the conjugate gradient method is used. Letting \mathbf{x}^r be the displacement vector at the r -th step of repeated calculation, \mathbf{x}^{r+1} at the $(r+1)$ -th step is obtained by the relation

$$\mathbf{x}^{r+1} = \mathbf{x}^r + S^r \mathbf{v}^r \tag{11}$$

where S^r is a line element along the descent vector \mathbf{v}^r to minimize W , that is, S^r minimizes

$$q(S^r) = W(\mathbf{x}^r + S^r \mathbf{v}^r) \tag{12}$$

Fletcher-Reeves method (1) is effective to find the value of descent vector \mathbf{v}^r . Its sequence of calculation is as follows:

(i) for $r=1$, put

$$\mathbf{v}^1 = \left\{ \dots (v_x^1)_j \dots \right\}_f = \left\{ \dots -\partial W / \partial x_j \dots \right\}_f \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \tag{13}$$

(\mathbf{x}^0 may be assumed to be zero vector.)

(ii) for $r=2 \sim (f+1)$ calculate

$$\mathbf{v}^r = -\mathbf{g}^r + \left[(\mathbf{g}^r)^T (\mathbf{g}^r) / (\mathbf{g}^{r-1})^T (\mathbf{g}^{r-1}) \right] \cdot \mathbf{v}^{r-1} \tag{14}$$

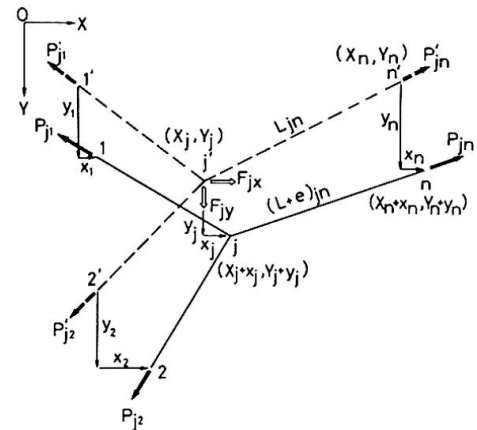
where

$$\mathbf{g}^r = \left\{ \dots (g_x^r)_j \dots \right\}_f = \left\{ \dots -\partial W / \partial x_j \dots \right\}_f \mathbf{x} = \mathbf{x}^r$$

(iii) for $r=f+2$ turn to (i).

2-4. Evaluation of Member Lengths

The main purpose of our analysis is to find the correct member lengths at unstrained state. Combining the method of analysis mentioned above, we can find the required unstrained lengths of every members. Assembling such members the structure having desired shape can be obtained. When the completed state of the structure is thus obtained, it is not difficult to analyse it under any additional loading condition. The flow diagram of analysis is shown in Fig. 3.



Initial State -----
 $\sum_n \frac{P_{jn}}{L_{jn}} (X_n - X_j) - F_{jx} \neq 0$
 Equilibrium State -----
 $\sum_n \frac{P_{jn}}{(L+e)_{jn}} (X_n + x_n - X_j - x_j) - F_{jx} = 0$

Fig. 2. Equilibrium at a joint

3. Model Experiment

Fig. 4 shows the cable truss model which is to be thought of as a model of catwalk for long-spanned suspension bridge (about 1,000m long) with scale 1:40. Pieces of piano wire cut in calculated unstrained lengths were assembled to form the cable truss, which was subjected to concentrated loads at every joints (corresponding to dead loads of prototype structure) and finally tensioned by pulling and anchoring the both ends of the lower chord member.

Table 1 shows the prescribed coordinates and concentrated vertical loads (dead loads) of every joints. A part of least square solution for member forces is shown in Table 2, which is used as input data for subsequent finite deformation analysis. By this analysis the joint coordinates are obtained as shown in Table 3 (X-coordinates omitted).

The theoretical values in Table 3 (Th.) seem to agree fairly well with the prescribed one in Table 1. From this result the unstrained lengths of members are determined, which makes it possible to set up the model in required geometry. The experimental values (Ex.) at the completed state of the model are also shown in Table 3. Differences between theoretical and experimental values are very small for the size of the model.

Table 4 shows the result with regard to member forces, and Fig. 5 shows deflection

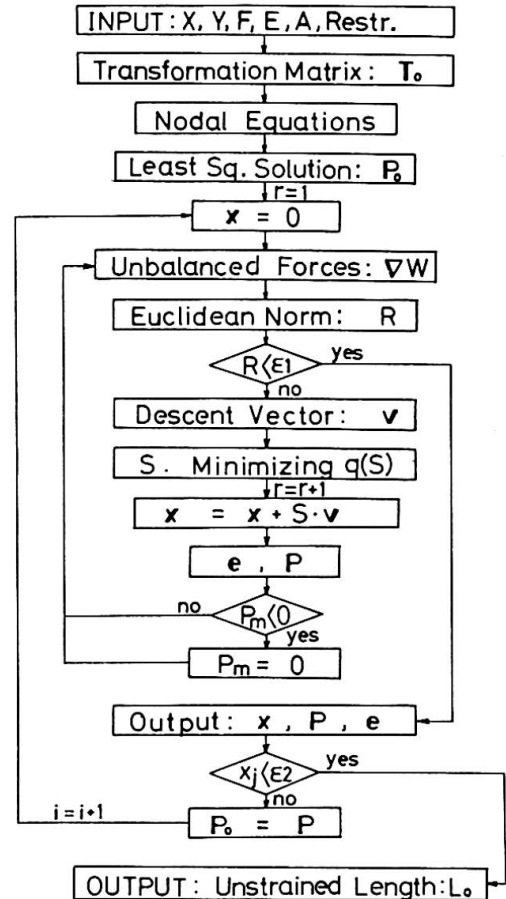


Fig. 3. Flow diagram of computation

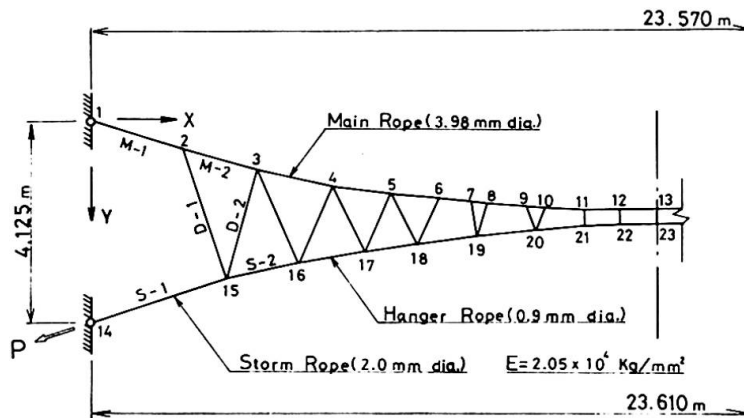


Fig. 4. Cable truss model

curves of cable truss due to additional concentrated load (live load) applied at the mid-span. In Figs. 6 and 7 the load vs. deflection curves and load vs. member force curves are shown respectively. Every experimental results seem to agree very well with theoretical values.

Main Rope			Storm Rope				
No. of Joint	Coordinates		Load (kg)	No. of Joint	Coordinates		Load (kg)
	X (mm)	Y (mm)			X (mm)	Y (mm)	
1	0	0	0	14	-20	4125	0
2	1930	605	26.9	15	2713	3374	4.4
3	3437	1001	23.7	16	4220	3046	3.0
4	5001	1341	21.0	17	5640	2792	2.6
5	6183	1550	16.9	18	6787	2625	2.4
6	7223	1702	12.8	19	8021	2485	2.5
7	7868	1780	7.1	20	9234	2385	2.2
8	8168	1812	9.0	21	10206	2333	1.7
9	9056	1893	9.3	22	10956	2309	1.6
10	9406	1918	8.6	23	11785	2300	1.6
11	10206	1963	11.6				
12	10956	1989	11.8				
13	11785	1999	12.4				

Table 1. Prescribed shape and loads for cable truss model

Member	P ₀ (kg)
M-1	799.4
3	775.4
5	764.4
7	762.5
10	760.1
12	759.0
S-1	207.4
3	206.9
6	204.6
9	204.1
D-1	13.0
4	3.8
7	4.1
10	4.3
13	5.7
15	2.9

Table 2. Least square solution

Main Rope				Storm Rope			
No. of Joint	Y-Coordinates		Diff.	No. of Joint	Y-Coordinates		Diff.
	Ex.	Th.			Ex.	Th.	
1	0	0	0	14	4125	4125	0
2	603	601	2	15	3371	3371	0
3	1000	998	2	16	3044	3044	0
4	1344	1340	4	17	2795	2791	4
5	1555	1550	5	18	2633	2625	8
6	1709	1702	7	19	2495	2486	9
7	1787	1782	5	20	2395	2388	7
8	1823	1814	9	21	2345	2337	6
9	1904	1895	9	22	2320	2314	6
10	1931	1921	10	23	2310	2305	5
11	1975	1968	7				
12	2000	1994	6				
13	2010	2004	6				

Ex=Experimental Value
Th=Theoretical Value
Diff.=Ex.-Th.
(Unit : mm)

Table 3. Joint coordinates of cable truss model

Main Rope				Storm Rope				Hanger Rope		
Mem-ber	Member Ex.	Force Th.	Ratio %	Mem-ber	Member Ex.	Force Th.	Ratio %	Mem-ber	Member Force	
									Ex.	Th.
M-1	799	800	99.9	S-1	200	196	102	D-1	15	11
2	779	787	99.0	2	205	195	105	2	5	5
3	776	778	99.7	3	210	194	108	3	12	7
4	772	771	100.1	4	198	195	102	4	5	4
5	773	766	101.0	5	205	194	106	5	10	6
6	768	766	100.3	6	204	194	105	6	5	3
7	759	763	99.0	7	203	195	104	7	10	5
8	—	763	—	8	206	194	106	8	10	5
9	707	760	93.0	9	204	194	105	9	10	5
10	713	760	94.0					10	10	3
11	753	759	99.0					11	10	5
12	738	759	97.0					12	5	3

(Unit : kg)

Table 4. Member forces of cable truss model

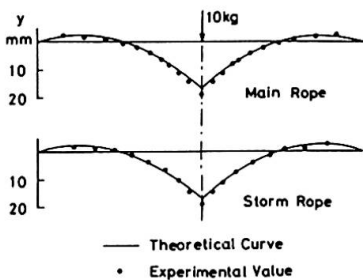


Fig. 5. Deflection curves due to load at mid-span

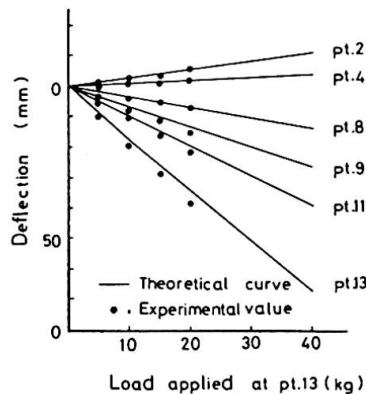


Fig. 6. Load vs. deflection curves

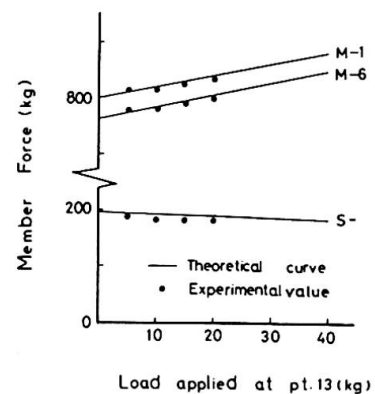


Fig. 7. Load vs. member force curves

4. Vibrational Analysis and Experiment

4-1. Method of Analysis

Equation of motion of the cable structure can be written in the form

$$M \ddot{x} + K x = F \tag{15}$$

where M and K mean mass and stiffness matrices respectively. Stiffness matrix K is the superposition of every member stiffness matrices $K_{jn} = [k_{ik}]_{jn}$ ($i, k=1 \dots 4$). k_{ik} are obtained by Castigliano's theorem, i. e.

$$k_{ik} = \partial^2 U_{jn} / \partial x_i \partial x_k \tag{16}$$

where U_{jn} is the strain energy of member \bar{jn} as given by Eqs. (7) and (8).

Frequency equation is

$$\det | M - \lambda K | = 0 \tag{17}$$

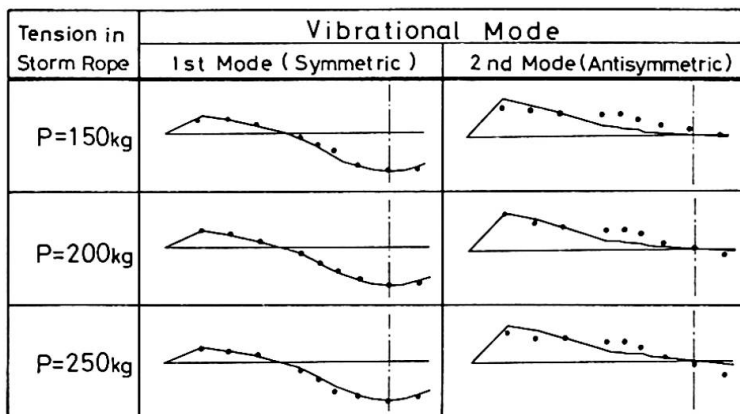
of which roots give natural frequencies of the structure. Householder's method was successfully used to give the roots of Eq. (17).

4-2. Experiment

Vibrational tests were carried out on the model structure. Natural frequencies and vibrational modes are obtained by giving harmonic excitation to the model. Results are shown in Fig. 8 with sufficient agreement between theory and experiment.

Acknowledgement

The authors are greatly indebted to Professor Dr. A. Nishimura (Kobe University) for his important advice and encouragement. Thanks are also due to Mr. Y. Nakajima, manager, department of construction, Kobe Steel, Ltd. for his cooperation.



P (kg)	Natural Frequency			
	1st		2nd	
	Ex.	Th.	Ex.	Th.
150	1.42	1.43	1.51	1.65
200	1.47	1.48	1.61	1.70
250	1.51	1.53	1.73	1.74

(Unit : sec⁻¹)

Fig. 8. Vibrational mode and natural frequency

References

- 1) Kowalik, J. and Osborne, M. R.: Methods for Unconstrained Optimization Problems, Elsevier, New York, 1968.
- 2) Buchholdt, H.A.: A nonlinear deformation theory applied to two dimensional pretensioned cable assemblies, Proc. of Instn. Civ. Engrs., Jan., 1969.
- 3) Buchholdt, H.A.: Pretensioned cable girders, Proc. of Instn. Civ. Engrs. May, 1970.
- 4) Ortega, J.: The Givens-Householder method for symmetric matrices, from "Mathematical Methods for Digital Computer" Vol. 2, John Wiley and Sons, New York, 1968.

Summary

A computational method of two-dimensional cable assembly is proposed, where emphasis is laid on the problem of determination of member lengths, so that the final shape of the structure satisfies the configuration condition prescribed beforehand. Experimental study was made on a large-sized model of a cable truss. The results of both statical and dynamical experiments showed good agreement with theoretical values.

Free Vibrations of Cable Networks Utilizing Analogous Membranes

Oscillisations libres de constructions en câbles par utilisation de membranes analogues

Freie Schwingungen von Kabelnetzwerken unter Anwendung analoger Membranen

SIDNEY SHORE

Professor of Civil Engineering
University of Pennsylvania
Philadelphia, Pennsylvania, USA

BHASKAR CHAUDHARI

Assistant Professor of Civil Technology
Lehigh County Community College
Schnecksville, Pennsylvania, USA

1. Introduction

The application of membrane theory for the static response of cable roof systems has been demonstrated by Shore and Bathish (1) and Schleyer (2). This paper considers an analogous membrane technique to study the free vibration of a certain class of cable systems. The major objective of this study is to present a simplified and accurate technique for predicting the natural frequencies of flat cable networks by utilizing an appropriate analogous membrane to mathematically model the discrete or cable system.

2. Assumptions and Limitations

The following assumptions are made: (1) the cables and the membrane obey Hooke's Law, (2) the cables and membrane have only extensional stiffness, (3) linear strain-displacement relationships only will be considered, (4) Poisson's effect in the membrane is neglected, (5) the cable and membrane tension everywhere is always greater than zero, (6) the mass of the cable system is concentrated at the nodes, (7) damping is negligible.

The following limitations apply to this study: (1) the cable system at $t = 0$ is flat and an orthogonal network with the cable intersections connected; (2) the boundary planform is rectangular; (3) only linear, free vibrations normal to the network are considered.

3. Governing Equations of Motion

A. Membrane:

The equations of motion for a flat, prestressed, homogeneous membrane of thickness, h , are (3)

$$Eh u_{xx} + F_x(t) = \rho h \ddot{u} \quad (1)$$

$$Eh v_{yy} + F_y(t) = \rho h \ddot{v} \quad (2)$$

$$Eh [u_{xx} w_x + v_{yy} w_y + (u_x + u_x^0) w_{xx} + (v_y + v_y^0) w_{yy}] + F_z(t) = \rho h \ddot{w} \quad (3)$$

where all symbols are defined in Section 7. Since the major interest is the free transverse vibrations of the system, then for the assumptions and limitations noted in Section 2, it is permissible to neglect in-plane displacements and inertia terms. Thus, equations (1), (2), and (3) reduce to the following single equation of free vibration:

$$u_x^0 w_{xx} + v_y^0 w_{yy} = \frac{\rho}{E} \ddot{w} \tag{4}$$

The following displacement function will be chosen to describe the free vibration of a rectangular membrane (see Figure 1):

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} f(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{5}$$

Note that the displacement function satisfies the boundary conditions at the edges of a rectangular membrane, that is,

$$w(0, y, t) = w(a, y, t) = w(x, 0, t) = w(x, b, t) = 0 \tag{6}$$

The initial conditions are taken as

$$w(x, y, 0) = \bar{w}(x, y), \dot{w}(x, y, 0) = 0 \tag{7}$$

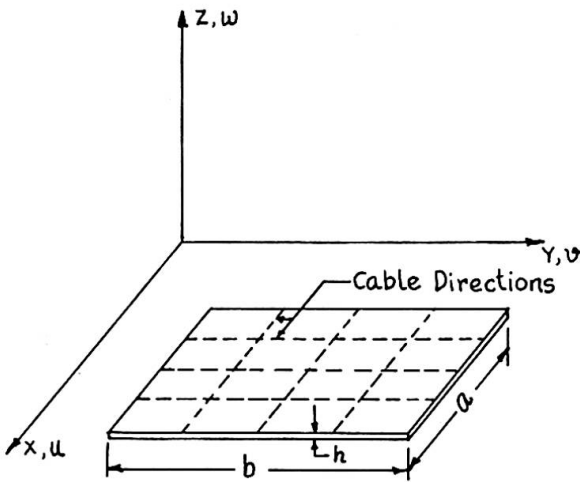


Figure 1

Substituting equation (5) into equation (4) leads to the well known equation of simple harmonic motion

$$\ddot{f}(t) + \omega_{mn}^2 f(t) = 0 \tag{8}$$

where ω_{mn} represents the frequency of free vibration in the mn-th mode written explicitly as

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^2}{\rho h} \left[U \left(\frac{m}{a} \right)^2 + V \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \tag{9}$$

where $U = Ehu_x^0$ and $V = Ehv_y^0$, the initial membrane tensions per unit length.

B. Discrete Cable Network

For a prestressed cable network, the equations of motion of a typical joint based on the assumptions of Section 2 are (3)

$$T_{jq} \frac{\xi_q - \xi_j}{x_q - x_j} + T_{jr} \frac{\xi_r - \xi_j}{x_r - x_j} + T_{js} \frac{\xi_s - \xi_j}{y_s - y_j} + T_{jt} \frac{\xi_t - \xi_j}{y_t - y_j} + F_{\xi}^j(t) = m_j \ddot{\xi} \tag{10}$$

$$T_{jq} \frac{\eta_q - \eta_j}{x_q - x_j} + T_{jr} \frac{\eta_r - \eta_j}{x_r - x_j} + T_{js} \frac{\eta_s - \eta_j}{y_s - y_j} + T_{jt} \frac{\eta_t - \eta_j}{y_t - y_j} + F_{\eta}^j(t) = m_j \ddot{\eta} \tag{11}$$

$$T_{jq} \frac{\zeta_q - \zeta_j}{x_q - x_j} + T_{jr} \frac{\zeta_r - \zeta_j}{x_r - x_j} + T_{js} \frac{\zeta_s - \zeta_j}{y_s - y_j} + T_{jt} \frac{\zeta_t - \zeta_j}{y_t - y_j} + F_{\zeta}^j(t) = m_j \ddot{\zeta} \tag{12}$$

If the same assumptions and limitations are imposed on the cable network as for the membrane, then the equations of free vibration reduce to one per node. Therefore, if there are N nodes in the network the governing equations of free transverse vibrations are (See Figure 2)

$$\sum_{j=1}^N T_{jq} \frac{\zeta_q - \zeta_j}{x_q - x_j} + T_{jr} \frac{\zeta_r - \zeta_j}{x_r - x_j} + T_{js} \frac{\zeta_s - \zeta_j}{y_s - y_j} + T_{jt} \frac{\zeta_t - \zeta_j}{y_t - y_s} = m_j \ddot{\zeta} \tag{13}$$

If the network is flat, $T_{jq} = T_{jr} = X$, $T_{js} = T_{jt} = Y$; for equally spaced cables in the x-direction $(x_q - x_j) = (x_r - x_j) = d_x$; for equally spaced cables in the y-direction, $(x_s - x_j) = (x_t - x_j) = d_y$. Now equation (8) can be written in the following simplified matrix form

$$[M]\{\ddot{\xi}\} + [K]\{\xi\} = 0 \tag{14}$$

where

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & m_j & \dots & \\ & & & & & \dots & m_n \\ 0 & & & & & & \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} (\frac{2X}{d_x} + \frac{2Y}{d_y}) & (-\frac{X}{d_x}) & \dots & \\ (-\frac{X}{d_x}) & (\frac{2X}{d_x} + \frac{2Y}{d_y}) & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \tag{15}$$

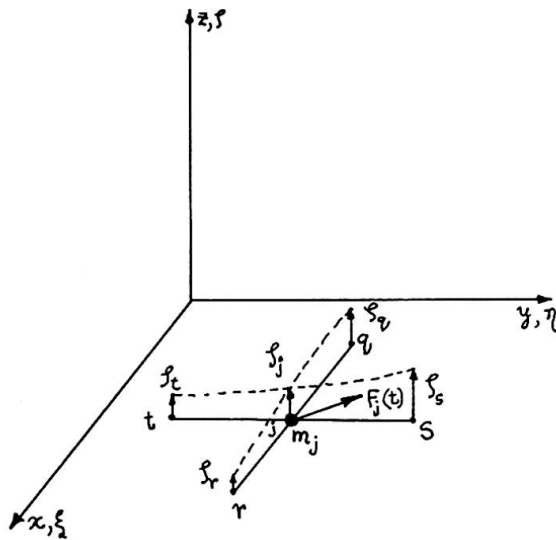


Figure 2

If simple harmonic vibration of the cable network is assumed, the k-th mode response is $\zeta_{jk} = Z_{jk} \sin(\Omega_k t + \alpha)$. Placing this function into equation (14) leads to the characteristic value problem of determining the eigenvalues or frequencies Ω_k^2 , and the corresponding eigenvectors or mode shapes $\{\zeta_k\}$ of the following matrix

$$[M]^{-1}[K] - \Omega_k^2 [I] = 0 \tag{16}$$

4. Membrane Analogy

Equation (9) represents the frequency equation of free vibration of a flat rectangular membrane of thickness h , uniform mass distribution, and initial pretensions U and V ;

equation (16) represents the matrix whose eigenvalues are the frequencies of free vibration of a flat cable network with cable spacings of d_x and d_y and initial cable tensions X and Y , and concentrated masses at the network nodes. Thus, for this study the discrete cable network is completely defined once the appropriate nodal masses are determined. Although it is recognized that the nodal mass can be frequently dependent, it is assumed that they are determined on the basis of tributary lengths or areas of cables and/or network coverings (with extensional stiffness only).

To determine the membrane parameters to replace the discrete network, the following equivalences are made:

$$a_C = a_M = a; \quad b_C = b_M = b \tag{17}$$

$$\rho_C = \rho_M = \rho \tag{18}$$

$$\rho_C (A_x a + A_y b) = \rho_M abh; \quad h = \frac{A_x}{b} + \frac{A_y}{a} \tag{19}$$

$$U = \frac{X}{a}; \quad V = \frac{Y}{b} \tag{20}$$

5. Example

To demonstrate the usefulness of an analogous membrane to predict the frequencies of free vibration of discrete cable networks, consider a 120" x 240" rectangular cable system. The data pertaining to the cable system, as well as the analogous membrane parameters, are shown in Fig. 3. Note that the parameters

relating to the membrane do not change and equation (9) is used to predict as many frequencies as is desired. The total cable areas and weight, and total pretensions in the x and y directions remain constant but the span to cable spacing ratio, R, is varied as the number of cables is varied. Thus, the magnitude of each nodal mass, each cable area, and each cable tension vary with R. For each R value, the appropriate [M] and [K] matrix is calculated and the eigenvalues, Ω , obtained on the basis of equation (16) using an IBM 360/65 computer. Table 1 summarizes the results of these calculations for R = 3, 4, 5, 6, that is, two, three, four and five cables in both the x and y directions.

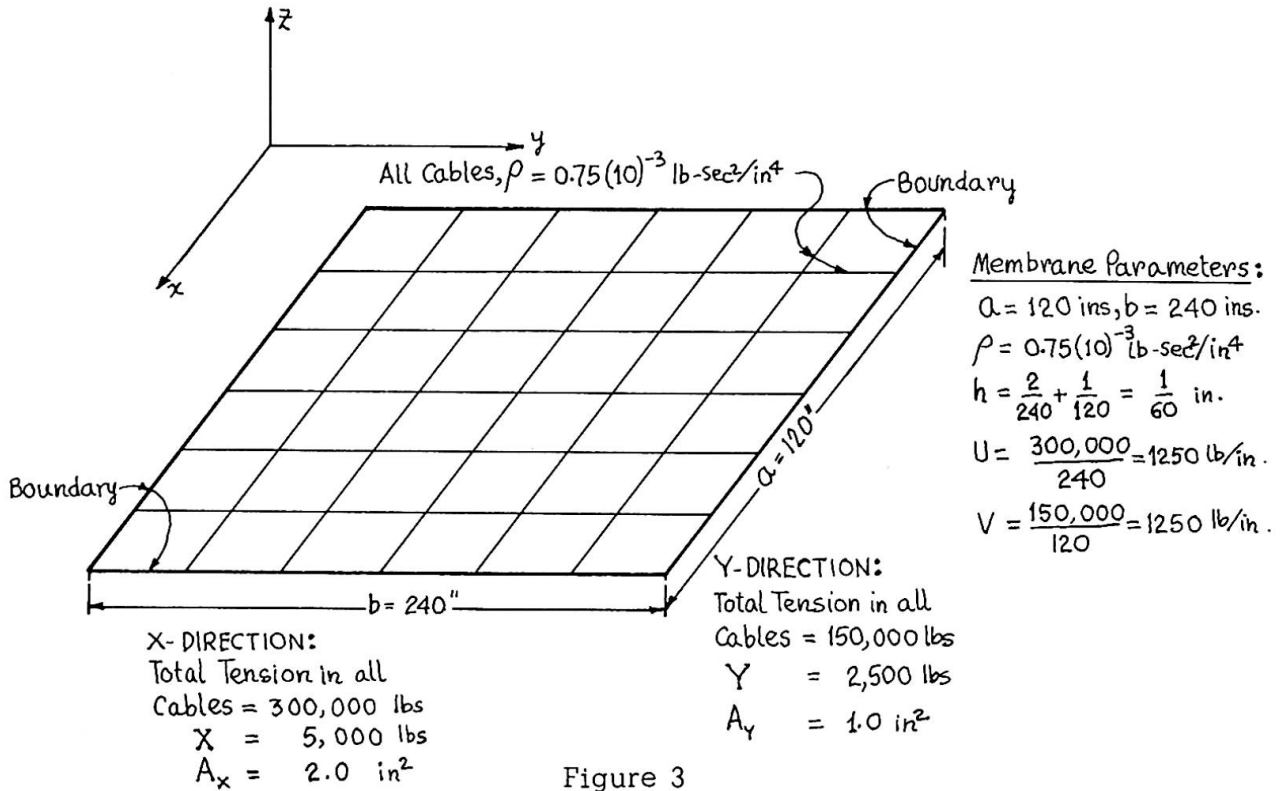


Figure 3

From the results shown in Table 1, errors in the form $(\omega - \Omega)/\omega$ as a function of R are plotted in Fig. 4. Note that the extrapolations in this figure used a least square polynomial approximation.

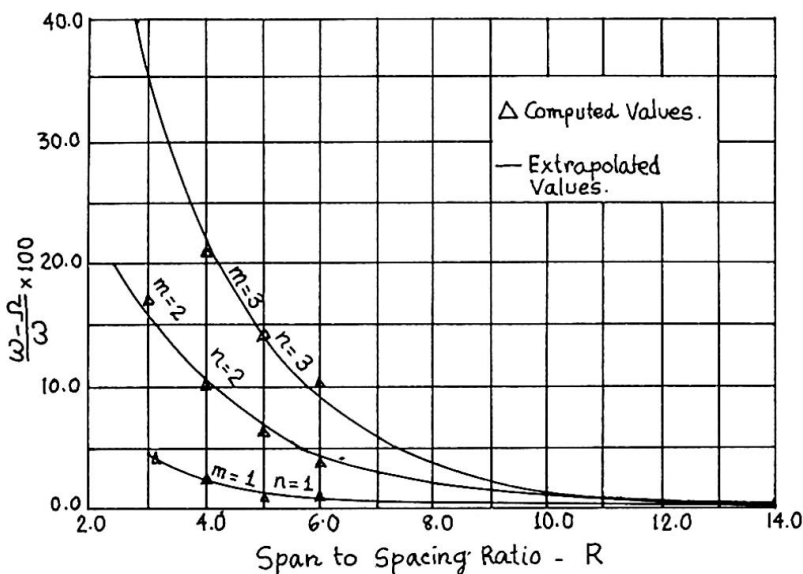


Figure 4

Since the percentage error for a particular span to spacing ratio increases for higher modes or natural frequencies, and the cable networks used in practice are expected to have span to spacing ratios of more than 10, a plot of percentage error against the frequency numbers in ascending order for a span to spacing ratio of 10 is shown in Fig. 5.

Since the errors in the natural frequencies, using a membrane obtained by uniformly distributing the mass of the cables over the area of the network, are known, it is now

TABLE 1

Frequency No.	Mode Shape		Frequency CPS Membrane	Discrete System – Frequency CPS			
	m	n		2 Cables	3 Cables	4 Cables	5 Cables
ω_1	1	1	290.0	278.0	284.0	287.0	288.0
ω_2	1	2	369.5	329.5	345.5	354.0	358.0
ω_3	2	1	537.5	448.0	486.5	505.0	513.5
ω_4	2	2	584.5	482.5	524.5	546.0	556.0
ω_5	1	3	470.0	---	398.0	422.5	436.0
ω_6	3	1	794.0	---	626.0	685.0	715.0
ω_7	2	3	653.0	---	560.0	593.5	609.0
ω_8	3	2	826.0	---	656.0	715.0	745.0
ω_9	3	3	875.0	---	686.0	751.5	785.0
ω_{10}	1	4	584.0	---	---	471.0	501.0
ω_{11}	4	1	1050.0	---	---	800.5	870.0
ω_{12}	2	4	739.0	---	---	627.0	658.0
ω_{13}	4	2	1075.0	---	---	827.0	897.5
ω_{14}	3	4	941.0	---	---	779.0	825.0
ω_{15}	4	3	1115.0	---	---	858.0	930.0
ω_{16}	4	4	1068.0	---	---	882.5	962.5
ω_{17}	1	5	702.5	---	---	---	513.5
ω_{18}	5	1	1310.0	---	---	---	970.0
ω_{19}	2	5	835.0	---	---	---	691.0
ω_{20}	5	2	1330.0	---	---	---	986.0
ω_{21}	3	5	1018.0	---	---	---	851.0
ω_{22}	5	3	1361.0	---	---	---	993.0
ω_{23}	4	5	1228.0	---	---	---	1022.0
ω_{24}	5	4	1405.0	---	---	---	1052.0
ω_{25}	5	5	1460.0	---	---	---	1072.0

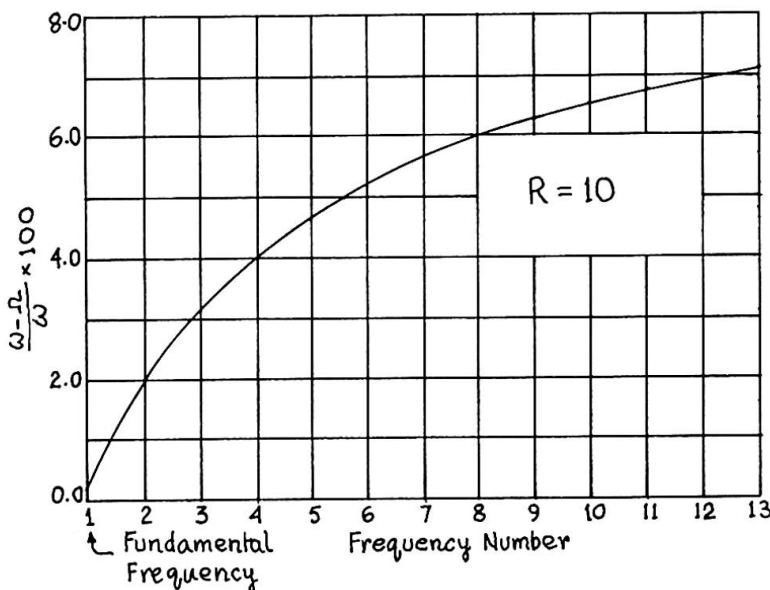


Figure 5

possible to adjust the mass distribution such that the error is minimized. This is accomplished by multiplying the natural frequency of the membrane in which the mass of cables is uniformly distributed, by a factor called the mass ratio, μ . For cable networks with span to spacing ratio greater than 10, the mass ratio for various frequencies is shown in Fig. 6.

6. Bibliography

1. Shore, S. and Bathish, G., "Membrane Analysis of Cable Roofs", *Space Structures*, Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh, 1967, pp. 890-906.

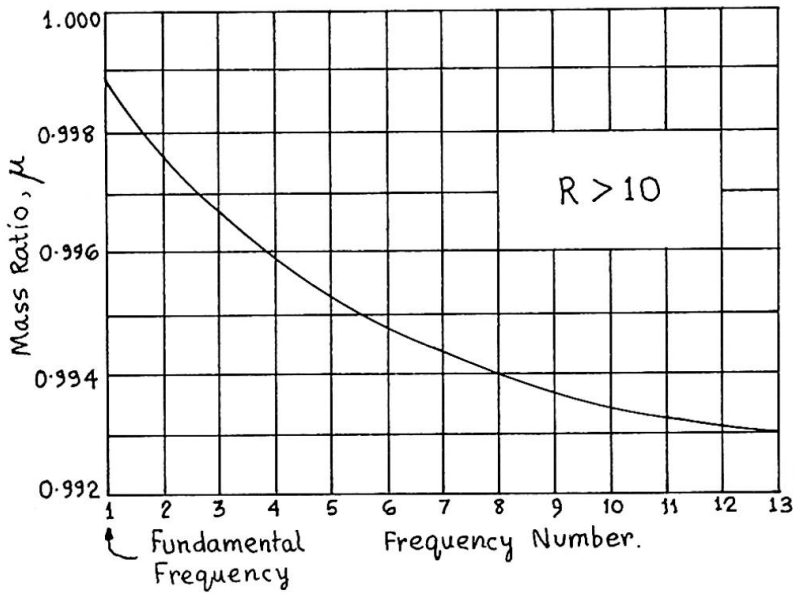


Figure 6

- b Length of rectangular boundary parallel to y axis, in.
- d_x Cable spacing parallel to x axis, in.
- d_y Cable spacing parallel to y axis, in.
- E Modulus of elasticity of membrane, lbs./in.²
- f(t) Time dependent function
- $F_i(t)$ Time dependent forcing function ($i = x, y, z$)
- h Membrane thickness, in.
- [I] Identity matrix
- [K] Stiffness matrix of cable network defined in equation (15)
- m_j Concentrated mass at node j, lb.sec.²/in.
- [M] Mass matrix of cable network defined in equation (15)
- R Ratio of network span to cable spacing (a/d_x or b/d_y)
- t Independent time variable
- T_{jk} Tension in cable segment jk, lbs.
- u Displacement of membrane parallel to x axis
- u_x^0 Initial strain in membrane parallel to x axis
- U Membrane tension per unit of length parallel to x axis, lbs./in.
- v Displacement of membrane parallel to y axis
- v_y^0 Initial strain in membrane parallel to y axis
- V Membrane tension per unit length parallel to y axis, lbs./in.
- w Displacement of membrane parallel to z axis
- $\bar{w}(x, y)$ Initial shape of membrane at $t = 0$
- x, y, z Orthogonal cartesian coordinates
- X Tension in cable parallel to x axis, lbs.
- Y Tension in cable parallel to y axis, lbs.
- ω_{mn} Frequency of free vibration of the membrane in the mn-th mode, cps
- Ω_k Frequency of free vibration of cable network in the k-th mode, cps
- ρ Mass density, lbs.sec.²/in.⁴
- ξ, η, ζ Components of nodal displacements in the cable network parallel to the x, y, and z axes respectively.
- μ Ratio of mass of membrane obtained by uniform distribution of mass of cable system to modified mass of membrane to be used.
- Derivative with respect to time variable t.

2. Schleyer, F., "Die Berechnung Von Seilnetzen", Hanging Roofs, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1963, pp. 48-55.
3. Shore, S., and Chaudhari, B., "Dynamic Response of Cable Systems", Graduate Division of Civil Engineering Report, University of Pennsylvania, May 1970.

7. Symbols

- a Length of rectangular boundary parallel to x axis, in.
- A_x Total area of cables parallel to x axis, in.²
- A_y Total area of cables parallel to y axis, in.²

Subscripts:

x, y Derivatives with respect to space variables x and y

C Cable network

M Membrane

8. Summary

It has been shown that an appropriate flat membrane can be used to predict the frequencies of free vibrations of a flat cable network. Thus, the much simpler frequency equation of a membrane permits the accurate determination of the natural frequencies for the cable network with span to spacing ratios greater than 10. This simplified procedure eliminates the determination of eigenvalues of large order matrices by relatively complex numerical methods or computer computations.

9. Acknowledgment

The research work reported in this paper was supported by a grant from the American Iron and Steel Institute.

Leere Seite
Blank page
Page vide

III b
Structures tridimensionnelles
Raumtragwerke
Space Structures

Leere Seite
Blank page
Page vide

Aus geraden Stäben erzeugte windschiefe Regelflächen als Tragwerke

Warped Ruled Surfaces Formed by Straight Members Serving as Structures

Réalisation de charpentes à surfaces réglées déjetées à l'aide de barres rectilignes

H. EGGER

Dr. techn.

Oesterreichischer Stahlbauverband

Wien, Oesterreich

F. RESINGER

o.Prof. Dr. techn.

Technische Hochschule

Graz, Oesterreich

1. ALLGEMEINES

Zu den windschiefen Regelflächen gehören u.a. Rotationshyperboloide und hyperbolische Paraboloid. Beide können aus zwei Scharen sich kreuzender Geraden gebildet (Bild 1) und daher durch gerade Stäbe zu Tragwerken realisiert werden.

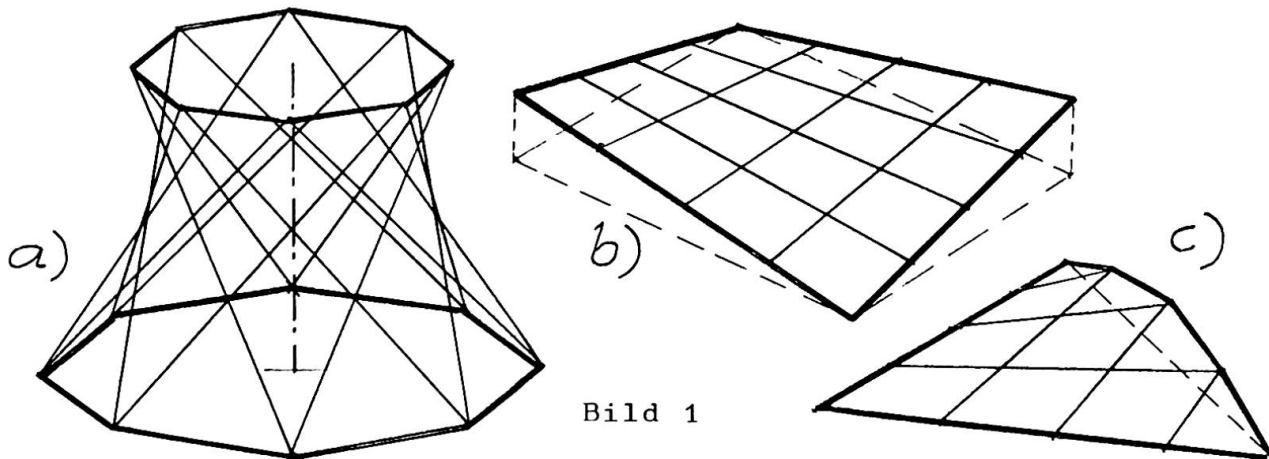


Bild 1

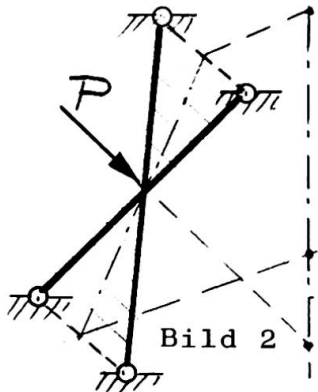
Für die praktische Ausführung ist es zweckmäßig, die Stäbe der beiden Scharen ohne Unterbrechung durchzuführen, wodurch sie in zwei verschiedenen benachbarten Flächen zu liegen kommen. An den Kreuzungsstellen werden die Stäbe durch aufgeklemmte Schellen miteinander verbunden. In diese Knoten werden in der Regel alle Bauwerkslasten eingeleitet. Die Stäbe beider Scharen enden meist in Randgliedern, die beim Rotationshyperboloid z.B. durch einen oberen Dachring und einen unteren Basisring, beim hyperbolischen Paraboloid durch gerade oder auch durch gekrümmte Randträger gebildet werden können. Diese Randglieder können beliebig gelagert sein.

Hinsichtlich der Lastabtragung sind diese Tragsysteme keine Schalen, sondern vielmehr hochgradig statisch unbestimmte räumliche Rahmentragwerke, deren biege- und torsionssteife Stäbe in den Knoten schubfest und gewöhnlich auch verdrehfest verbunden

sind. Bei beliebiger Belastung erhalten die Knoten räumliche Verformungen, und zwar im allgemeinen Verschiebungen in drei Achsrichtungen und Verdrehungen um diese Achsen. Über das Tragverhalten solcher Systeme soll im folgenden berichtet werden.

2. R O T A T I O N S H Y P E R B O L O I D

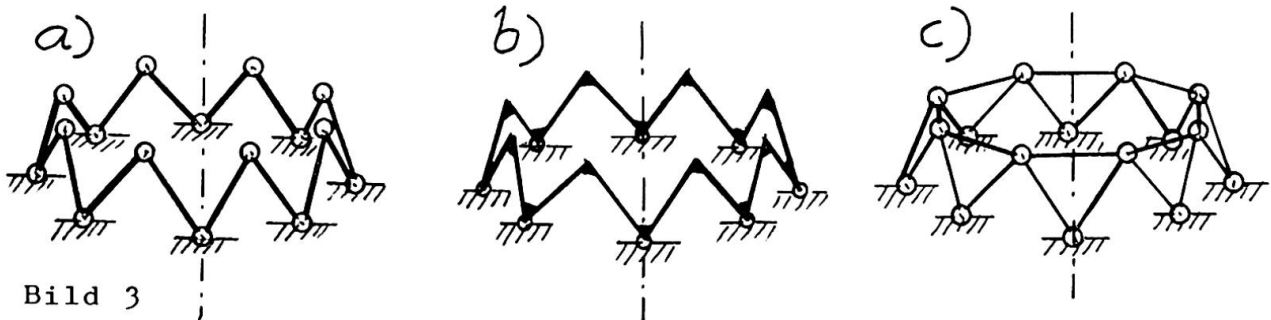
2.1. Überlegungen zur Tragwirkung



Bei rotationssymmetrischer Belastung tritt in jedem Knoten eine Last auf, die für das zugehörige Trägerkreuz (Bild 2) ebenfalls nur symmetrisch wirken kann. Bei Zerlegung dieser Last in eine Komponente in der Trägerkreuzebene und eine normal dazu erfolgt die Abtragung der ersten Lastkomponente vorwiegend durch Normalkräfte in den gekreuzten Stäben, die Aufnahme der zweiten Lastkomponente dagegen vorwiegend über Biegung des Trägerkreuzes.

Sind die Stäbe torsionssteif und auch in den Knoten verdrehfest verbunden, so wird die Lastabtragung nicht nur auf Biegung und Normalkräfte, sondern auch auf Torsion erfolgen.

Die verschiedenen Tragwirkungen lassen sich an den vereinfachten Systemen nach Bild 3 veranschaulichen:



Während man das gelenkige System (Bild 3a) widerstandslos nach innen stülpen kann, leistet das System mit in den Knoten voll verbundenen Stäben (Bild 3b) Widerstand gegen eine solche Verformung, und zwar durch die mobilisierte Biege- und Torsionssteifigkeit der Stäbe. Dasselbe gilt auch für das Gesamtsystem nach Bild 1a. Die biege- und drehsteife Verbindung der Stäbe führt daher zu einer Reduktion der Biegemomente auf Kosten von Torsionsmomenten.

Die günstigste Kraftaufnahme kann jedoch durch ein System nach Bild 3c erfolgen, bei dem für rotationssymmetrische Belastung die Abtragung der Kräfte nur durch Normalkräfte erfolgt. Auf das Gesamtsystem nach Bild 1a übertragen, wären zur Erzielung dieser Lastabtragungsart horizontale Stäbe zur Verbindung aller Kreuzungspunkte einzuführen. Es ergibt sich hiermit ein räumliches Fachwerk ("Stabschale"), das auch bei gelenkiger Verbindung aller Stäbe in den Knoten tragfähig ist. Dasselbe gilt für lotrechte Verbindungsstäbe zwischen allen Kreuzungspunkten.

Ordnet man neben dem Basisring und dem oberen Abschlußring nur einzelne horizontale Zwischenringe an, so ergeben auch diese bereits eine wirksame Stützung der sich kreuzenden Stäbe zwischen dem oberen und dem unteren Randring. Die fiktive, auf Biegung abtragende Stützweite der Träger wird hierdurch wesentlich reduziert.

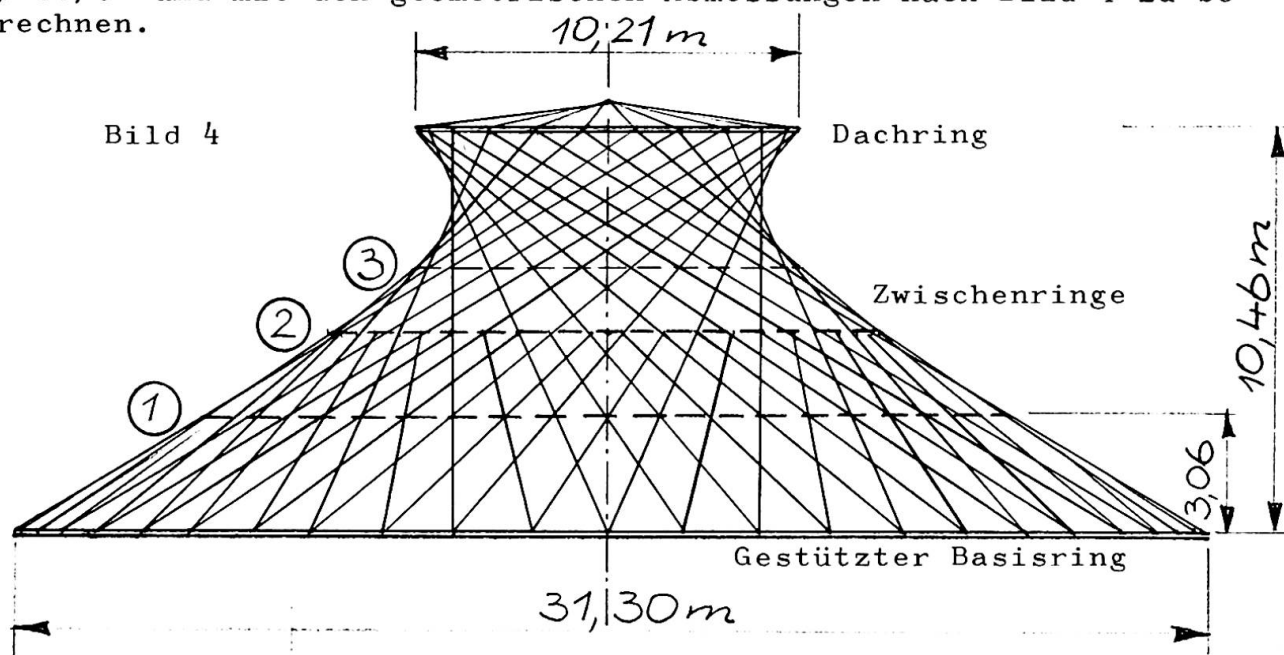
Durch zweckmäßige Anordnung nur weniger Zwischenringe besteht daher die Möglichkeit, die einzelnen für die Ausführung maßgebenden Schnittkräfte entsprechend zu regulieren.

Bei dem an der Basis gestützten Rotationshyperboloid werden durch die lotrechten Lasten in den Stäben Druckkräfte erzeugt, die wegen der auftretenden Biegeverformungen der Stäbe zusätzliche Biegemomente zur Folge haben. Es ist daher wichtig, bei solchen Systemen diesen Einfluß der Theorie II. Ordnung für die Bemessung zu berücksichtigen.

2.2. Anwendungsbeispiel

2.2.1 Angaben und Annahmen

Für einen Ausstellungspavillon war das Stabsystem eines an der Basis gestützten Rotationshyperboloides aus Aluminiumrohren $\varnothing 80/8$ und mit den geometrischen Abmessungen nach Bild 4 zu berechnen.



Die hier besprochene Schnittkraft- und Formänderungsermittlung für die rotationssymmetrische Belastung "Eigengewicht + Schnee" erfolgte für folgende Randbedingungen:

Basisring mit vorgegebenem Querschnitt und in der Meridian-tangente verschieblich;

Dachring mit vorgegebenem Querschnitt und rotationssymmetrisch verschieblich;

Stäbe im Basisring und im Dachring frei drehbar gelagert.

2.2.2 Durchführung der Berechnung

Die Programmierung des Problems erfolgte in Zusammenarbeit mit dem Rechenzentrum Graz durch Dipl.-Ing. Glänzer. Die Berechnung wurde auf einer Rechenanlage der Type UNIVAC 494 durchgeführt. Grundlage des Berechnungsverfahrens war die Deformationsmethode. Ermittelt wurden alle Schnittkräfte und Verformungen sowohl nach Theorie I. als auch II. Ordnung, insbesondere auch die Schermomente in den Schellen zur Ermittlung der erforderlichen Klemmkräfte für die Verbindung der Stäbe.

Die Untersuchung für die Theorie II. Ordnung wurde mit einem Laststeigerungsfaktor von 1,5 durchgeführt.

2.2.3. Hauptergebnisse

Theorie	ohne Zwischenringe	mit zwei Zwischenringen		mit drei Zwischenringen	
	I	I	II	I	II
Z	20,27	23,43	24,66	23,44	24,67
D	-	-8,71	-11,04	-8,82	-11,18
M _B	1,20	0,19	0,34	0,19	0,34
N	-2,49	-1,16	-1,24	-1,16	-1,24
M _T	0,055	0,009	0,016	0,008	0,015
M _S	-	-	0,280	-	0,036
v _Z	0,835	0,088	0,148	0,087	0,147
v _r	0,493	0,025	0,061	0,025	0,060

Dimensionen der Angaben : Mp, m

Z ... Zugkraft im Basisring,

D ... Normalkraft im unteren Zwischenring,

M_B ... größtes Biegemoment in den Stäben,

N^B ... zugehörige Normalkraft,

M_T ... zugehöriges Torsionsmoment,

M_S ... Schermoment in der Verbindungsschelle,
(wurde nur für Theorie II. Ordnung ermittelt)

v ... größte lotrechte Knotenverschiebung,

v^Z ... zugehörige Radialverschiebung (nach innen).

Für das Stabwerk ohne Zwischenringe wurden die Werte für die Theorie II. Ordnung zwar ermittelt, jedoch liefern sie keine brauchbare Aussage, da die Normalkräfte schon über der Knicklast des Stabes liegen. Bereits die Ergebnisse der Theorie I. Ordnung zeigen mit den zu großen Biegemomenten und Verformungen die Unbrauchbarkeit dieser Lösung.

Mit der Anordnung von zwei Zwischenringen ergeben sich Schnittkräfte, die mit der gewählten Rohrabmessung bereits aufnehmbar sind. Jedoch war im oberen Bereich das im Knoten auftretende Schermoment für die gewählten Schellen zu groß.

Der dritte Zwischenring ändert die maßgebenden Schnittkräfte und Verformungen, die im Bereich zwischen dem Basisring und dem ersten Zwischenring liegen, zwar nicht mehr, jedoch wird hiermit auch im oberen Bereich das Schermoment für die Ausführung in brauchbaren Grenzen gehalten.

Der Einfluß der Theorie II. Ordnung ist, wie die Gegenüberstellung zeigt, beachtenswert.

2.2.4 Stabilität der Zwischenringe

Die Zwischenringe werden für den Lastfall "Eigengewicht + Schnee" auf Druck beansprucht, weshalb eine gesonderte Stabilitätsberechnung des in den Stäben radial elastisch gebetteten Ringes durchzuführen war.

2.2.5 Näherungsberechnung

Auf Grund der in Abschnitt 2.1. geführten Überlegungen zur Tragwirkung ist eine Näherungsberechnung möglich, und zwar für die

Normalkräfte auf Grund einer Gleichgewichtsbetrachtung mit der oberhalb der betrachteten Stelle vorhandenen Gesamtlast und der gegebenen Flächenneigung, für das maßgebende Biegemoment des Stabes auf Grund der Betrachtung eines Durchlaufträgers über den Rand- und Zwischenringen. Dabei sind allerdings nur bei Anordnung von Zwischenringen brauchbare Werte zu erwarten, während diese Betrachtung für die Ausführung ohne Zwischenringe (frei aufliegende Träger zwischen den Randringen) zu große Werte liefert. Der Einfluß der Theorie II. Ordnung läßt sich mit den zuerst errechneten Normalkräften abschätzen. Für die Torsions- und Schermomente sind keine Anhaltspunkte für eine Näherung gegeben.

Die auf diese Weise für das System mit drei Zwischenringen und für den Lastfall "Eigengewicht + Schnee" durchgeführte Näherungsberechnung ergab folgende Werte:

Zug im Basisring:	25,7 Mp,
Druck im 1. Zwischenring:	12,5 Mp,
Größtes Biegemoment der Stäbe:	0,19 Mpm(I) und 0,40 Mpm(II),
Zugehörige Druckkraft:	1,90 Mp.

Es kann daher gesagt werden, daß eine so durchgeführte Näherungsberechnung für die Vorbemessung brauchbare Werte liefert.

3. H Y P E R B O L I S C H E S P A R A B O L O I D

3.1. Überlegungen zur Tragwirkung

Beim ebenen Rost mit biege- und torsionssteifer Knotenausbildung erfolgt die Abtragung von Lasten über Biegung und Torsion.

Beim räumlichen, zur Hyparfläche verwundenen Rost erfolgt diese über räumliche Biegung, Torsion und Normalkraftbeanspruchung der Stäbe. Die Reduktion einer Schnittbelastung auf Kosten einer anderen ist hier durch die Biege-, Torsions- und Dehnsteifigkeit gegeben. Das Reduktionsmaß, z.B. der Biegemomente auf Kosten der Torsionsmomente und Normalkräfte, richtet sich, sieht man von der Art der Lagerung an den Rändern und der Schellenausbildung ab, nach dem Verhältnis der Biege- zur Torsionssteifigkeit der Stäbe und nach dem Verwindungsgrad des Hyparrostes. Die Schere im Stabknoten kann entsprechend der konstruktiven Durchbildung der Schelle frei drehbar oder fest sein; dennoch überträgt sie Biege- und Torsionsmomente sowie Normalkräfte. Über diesen Einfluß wird gesondert berichtet.

Auch hier ist, wie beim Rotationshyperboloid, wegen der auftretenden Druckkräfte in den Stäben der Einfluß der Theorie II. Ordnung bei der Schnittkraftermittlung zu berücksichtigen.

Bei den in der Praxis vorkommenden Verwindungsmaßen sind die Biegeanteile und damit die Verformungen der Stäbe groß. Es ist daher naheliegend, die Stäbe durch Spannseile in Richtung der Hauptkrümmungen zusätzlich zu stützen.

3.2. Konstruktionsvorschlag mit Stäben und Seilen

Ein Hyparrost aus geraden Stäben in Richtung der Erzeugenden und mit Seilen in Richtung der Hauptkrümmungen nach Bild 5 läßt sich, im Gegensatz zu einer möglichen Ausführung mit gespannten Seilen in Richtung der Erzeugenden, vorspannen, ohne daß das Randglied auf Biegung beansprucht wird, da die Spannkräfte als Druck direkt in die Stäbe eingeleitet werden. Durch die Verbindung der Stäbe mit den sich in den Knoten kreuzenden Seilen sind die gedrückten Stäbe in den Knoten gestützt und gegen Ausknicken gehalten.

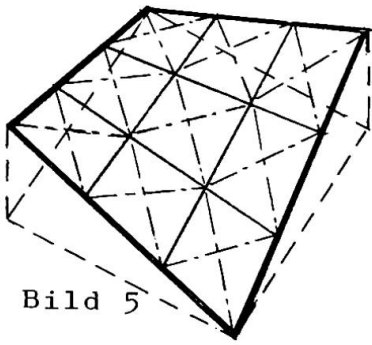


Bild 5

Bei diesem mit Spannseilen gestützten Hyperboloid werden die Knotenlasten vorwiegend durch das gespannte Seilwerk abgetragen und auch in die Randglieder als Normalkräfte eingeleitet. Dabei ist der Einfluß der Theorie II. Ordnung wegen der kleineren Verformungen wesentlich geringer. Bei der konstruktiven Durchbildung eines solchen Tragwerkes brauchen bei symmetrischer Ausführung und für symmetrische Belastung die Seile in den Knoten nicht geklemmt zu werden; jedoch bietet auch die bei Unsymmetrie notwendige Klemmung keine konstruktiven Schwierigkeiten.

Z U S A M M E N F A S S U N G

Rotationshyperboloide und hyperbolische Paraboloiden können aus geraden Stäben realisiert werden. Die Ausbildung der Knoten und die Anordnung zusätzlicher Stützelemente (Zwischenringe, Spannseile) beeinflussen die Verteilung der Schnittkräfte. Für ein konkretes Anwendungsbeispiel eines Hyperboloides werden die Schnittkräfte und Verformungen elektronisch berechnet. Die Ergebnisse zeigen die Notwendigkeit der Theorie II. Ordnung auf. Eine Näherungsberechnung ergibt brauchbare Werte für eine Vordimensionierung.

Etude d'une coupole en aluminium à une nappe à treillis avec des poutres de retombée

Untersuchung einschichtiger Aluminiumschalen

Study of a Single Layer Shell of Aluminium

RICHARD DZIEWOLSKI

Docteur-Ingénieur
Ingénieur-Conseil CICF
Architecte DPLG
France

I - INTRODUCTION ET DESCRIPTION DE LA STRUCTURE

Les structures spatiales en forme de coupole sont de plus en plus souvent utilisées dans l'architecture moderne, car elles permettent de couvrir le maximum de volume avec le minimum de surface, tout en assurant une bonne répartition des efforts dans l'espace (faibles moments fléchissants) et un agréable aspect esthétique. Ce type de structure a été adopté pour le projet de la patinoire à RENNES (France) et doit être, par la suite, fabriqué en série pour d'autres destinations (piscines, salles des sports, salle de spectacles, etc...)

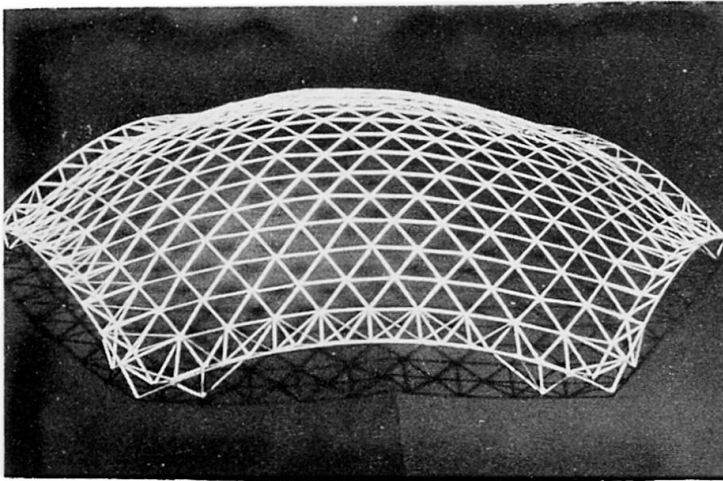


Fig. 1. Photo de la maquette

niun, renforcée aux extrémités par des poutres de retombée à trois membrures formant, en même temps, le chéneau (voir photo de la maquette fig. 1).

Les tubes seront assemblés sur le chantier par soudures, à l'aide d'éléments sphériques qui permettront le réglage de la longueur des barres (voir fig. 2).

Les calculs de la coupole ont été menés de la façon suivante :

- Détermination des efforts dans la nappe à treillis par la théorie de membrane et prédimensionnement des sections.
- Etude de la géométrie de la structure à l'aide du programme GEO.
- Détermination des composantes (P_x , P_y , P_z) des efforts de la neige et du vent à l'aide du programme FOCO.

Les études réalisées par l'auteur avec la collaboration de l'Aluminium Français, ont été menées dans trois directions :

- Recherche du système de la couverture (opaque et translucide),
- Recherche des noeuds d'assemblages,
- Mise au point des programmes de calculs électroniques permettant de raccourcir le délai de l'étude et de diminuer son prix.

La coupole sphérique, d'un rayon de 51,87 mètres, couvre un hexagone de 33,223 mètres de côté d'une portée maximale de 66,225 mètres. Elle est constituée d'une nappe tridirectionnelle à treillis tubulaire en alumi-

- Calcul des déformations, des réactions sur appuis, des efforts, des contraintes compte tenu du flambement, combinaisons des cas de charges, recherches des valeurs extrêmes des efforts et des contraintes, calcul du poids de la structure à l'aide du programme STROP.
- Etude de la stabilité des parois.

Les programmes de calcul électronique mis au point par le C.E.R.E.T. (B.E.T. de l'auteur) permettent d'arriver à une véritable automatisation des études. Il est, en effet, possible à un Ingénieur d'établir la note de calcul complète dans la journée : prédimensionnement, rédactions des bordereaux, perforation des cartes, vérification des résultats \approx 6 heures - calcul sur CD 6600, 120 secondes -

II - DESCRIPTION DES PROGRAMMES GEO ET FOCO

Le programme GEO permet, en partant du rayon de courbure, de la portée et du nombre de modules, de numérotter automatiquement les noeuds de la structure, calculer leurs coordonnées x, y, z , (pour la moitié de la structure), calculer les longueurs des barres, perforer les cartes des noeuds et des barres utilisables directement par le programme STROP.

Le programme FOCO calcule les composantes des forces P_x, P_y, P_z appliquées aux noeuds sous l'effet de la neige, du vent (portance et trainée) et perforer les cartes correspondantes.

En vertu du règlement français NV 65, les efforts du vent peuvent être décomposés en : une force de renversement T (répartie dissymétriquement sur les parois), une force de soulèvement U (répartie uniformément sur les parois), une pression ou dépression intérieure (voir fig. 3).

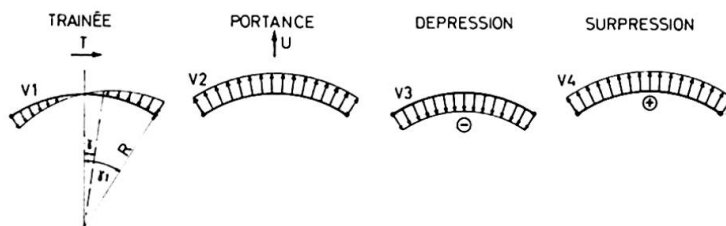


Fig.3. Pressions unitaires du vent sur la calotte sphérique.

En calculant les composantes T et U d'après les règles NV 65, nous pouvons en déduire les pressions unitaires :

Trainée :

$$V_1 = \frac{T \sin \gamma \cos \psi}{\frac{R^2 \pi}{3} [2 - \cos \gamma_1 (\sin^2 \gamma_1 + 2)]}$$

Portance :

$$V_2 = \frac{U}{\pi R^2 \sin^2 \gamma_1}$$

et les composantes P_x, P_y, P_z .

Les efforts dans les barres dus à la pression et à la dépression intérieures, peuvent être déterminés directement en majorant les efforts calculés sous l'effet de la portance par le coefficient dépendant du rapport V_3/V_2 ou V_4/V_2 .

III - DESCRIPTION DU PROGRAMME DE CALCUL DES STRUCTURES STROP.

Le programme STROP est composé de 3 sous-programmes : treillis, portiques, gril-lages. Cette division a été effectuée afin de diminuer le temps et le prix du calcul ainsi que de simplifier la rédaction des bordereaux des données pour les structures ne nécessitant pas le calcul par le programme spatial. Résultats fournis par le programme : déformations, efforts, contraintes compte tenu du flambement, combinaisons des différents cas de charges, extréma des efforts et des contraintes, optimisation des barres, dessins de la structure en axonométrie, diagramme des efforts. Un langage spécial d'introduction des données a été mis au point afin de faciliter et de diminuer le temps de la rédaction des bordereaux (voir fig. 4).

Le programme est basé sur la méthode des déformations.

En fonction du sous-programme utilisé, différentes formules (pour le calcul des éléments de la matrice de rigidité et pour le calcul des efforts dans les barres) ont été utilisées.

La matrice de rigidité, qui est une matrice bande symétrique, a été décomposée en produit de deux matrices triangulaires : supérieure S et inférieure L , donc faciles à

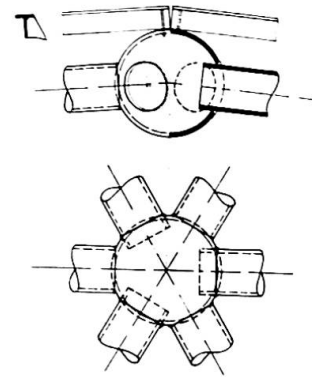


Fig.2. Noeud d'assemblage - Brevet A.F.

inverser.

$$K \cdot \Delta = L S \Delta$$

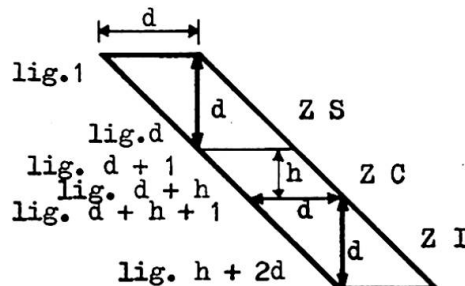
Les éléments u_{ij} des matrices L et S sont calculés à partir des éléments a_{ij} de la matrice de rigidité K (dont on stocke la partie triangulaire supérieure) en les mettant dans les cases de la matrice K_x (les éléments a_{ij} ainsi effacés ne servent pas pour le calcul des éléments u_{ij} suivants). Les éléments a_{ij} et u_{ij} sont stockés en mémoire de façon compacte (sous forme d'une table) et adressés par un indice unique. Un vecteur MK , conservé en permanence en mémoire centrale et contenant des nombres entiers, permet de calculer l'adresse effective en mémoire centrale d'un élément a_{ij} quelconque appartenant à la bande.

Dans le cas où la matrice K trop encombrante ne tient pas entièrement en mémoire centrale, on peut alors utiliser des mémoires périphériques pour le transit des éléments de K (ou U) en mémoire centrale.

Le nombre C des places de mémoire centrale disponible pour y stocker des tranches de la matrice K doit toutefois satisfaire à

$$C \geq d + 2d^2$$

$d = \max i - j$ étant la largeur de la matrice bande.



où ZS , ZC , ZI représentent respectivement 3 zones de mémoires de travail :
 Supérieure (d^2 mémoires)
 Centrale (d mémoires h lignes)
 Inférieure (d^2 mémoires)

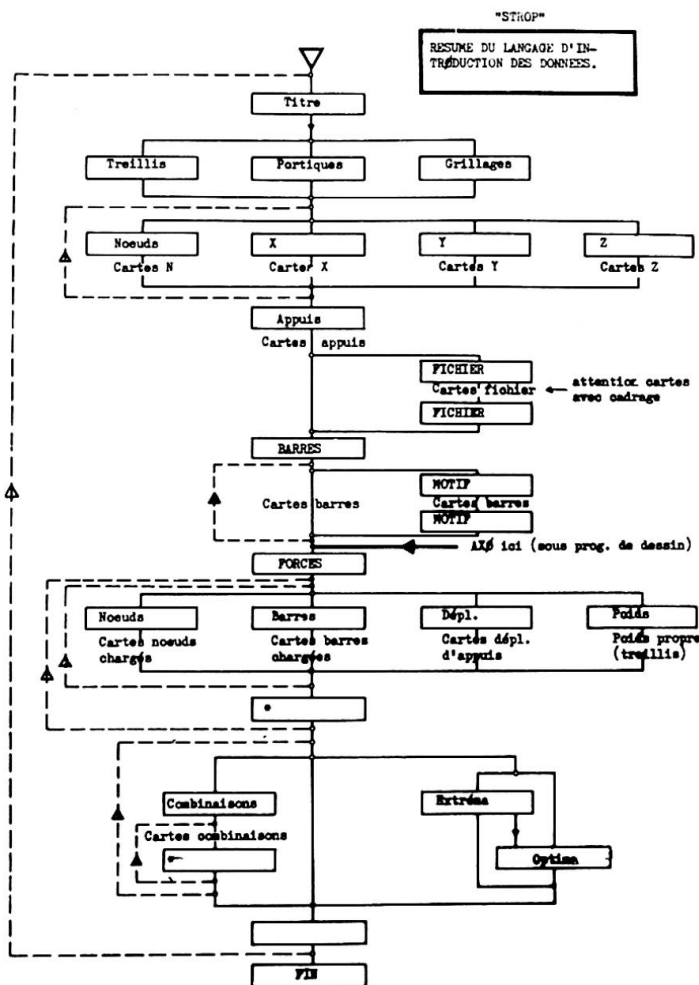
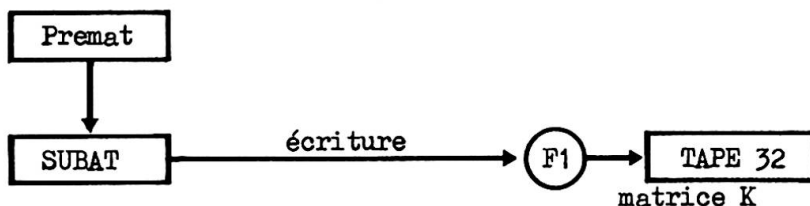


Fig.4. Résumé du langage d'introduction des données du programme STROP.

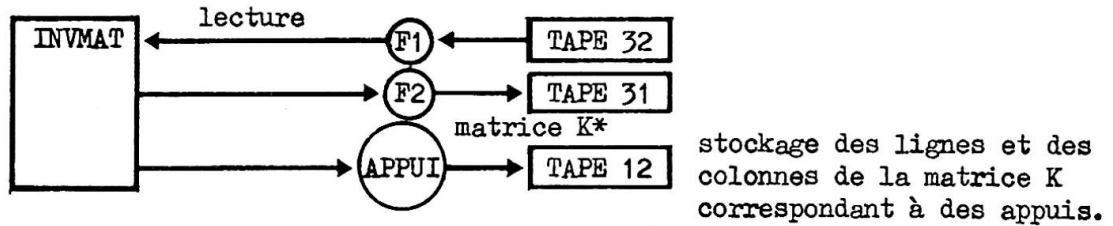
Phases de calcul

1. Calcul et écriture sur fichier des tranches ZS , ZC et ZI de la matrice K

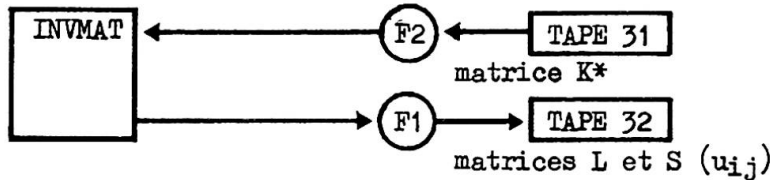


stockage de la matrice K par tranches lorsque celle-ci ne tient pas en mémoire centrale.

2. Ecriture sur fichier et mise à zéro des lignes et des colonnes correspondant à des appuis



3. Calcul par tranches dans la mémoire centrale des éléments u_{ij} des matrices triangulaires L et S, et écriture par tranches sur fichier.



$$u_{ii} = a_{ii} - \sum_{r=i-1}^1 u_{rr} (u_{ri})^2 \quad u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left[a_{ij} - \sum_{r=i-1}^1 u_{rr} u_{ri} u_{rj} \right]$$

4. Résolution par tranches du système $LY = P$

$$y_i = p_i - \sum_{r=i-1}^1 u_{ri} y_r \quad \text{en commençant par : } y_1 = p_1$$

5. Résolution par tranches du système $S\Delta = Y$

$$\Delta_i = \frac{1}{u_{ii}} \left[y_i - \sum_{r=i+1}^n u_{rr} u_{ri} \Delta_r \right] \quad \text{en commençant par : } \Delta_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$$

En connaissant pour chaque cas de charges les déplacements des noeuds, nous pouvons en déduire les forces dans les barres à l'aide des équations intrinsèques d'une barre i-j et par la suite les contraintes.

Différentes formules du coefficient de flambement sont utilisées en fonction du règlement du calcul et du matériau utilisé.

Pour le calcul de la coupole en aluminium, nous avons utilisé les formules du D.T.U., pour :

$$K = \left(0,5 + 0,5 \frac{\sigma_e}{\sigma_k} \right) + \sqrt{\left(0,5 + 0,5 \frac{\sigma_e}{\sigma_k} \right)^2 - 0,8 \frac{\sigma_e}{\sigma_k}}$$

ou σ_e - limite élastique σ_k - contrainte critique d'Euler

Pour les structures métalliques, le programme calcule le coefficient K par les formules de la Convention Européenne de CM en fonction du type de profil (courbes de flambement n° 1, 2 et 3).

En fin de calcul, on obtient un tableau de résultats indiquant pour chaque barre ij les efforts mini et maxi, les profils choisis, des sections brutes et nettes, le rayon de giration, la longueur de la barre, le coefficient de la longueur de flambement, le coefficient de sécurité, le coefficient de flambement, la contrainte extrême et le poids de la barre (voir fig. 5).

I	J	EFFORTS	EXTRÊMES	S	L	P	CODE	N	RHO	K	CCONTRAINTES				
50*	56 *	2981.2	11 15825.7	12 *	6.67	134.97	7.38	4	TUB76E2	.90	2.59	1.07 *	447	2373	2400 *
49-	53 *	-4325.9	9 3010.7	12 *	3.94	174.11	5.63	-1	TUB42E3	.90	1.39	1.89 *	-2079	764	2400 *
48-	52 *	-5398.3	11 2733.6	12 *	4.14	174.11	5.91	0	TUB48E2	.90	1.61	1.58 *	-2056	661	2400 *
51-	53 *	-1090.4	12 2261.1	12 *	1.78	142.99	2.08	-6	TUB26E2	.70	.87	1.94 *	-1189	1272	2400 *
50-	52 *	-2285.4	10 -1112.6	12 *	2.38	142.99	2.79	-5	TUB26E3	.70	.85	2.03 *	-1549	-949	2400 *
51-	55 *	2040.9	11 4196.3	12 *	1.78	142.99	2.08	-6	TUB26E2	.70	.87	1.94 *	1148	2360	2400 *
50-	54 *	-4369.2	7 773.9	12 *	3.07	142.99	3.59	-3	TUB33E3	.70	1.08	1.49 *	-2119	254	2400 *
53-	55 *	-1891.1	11 2744.0	12 *	1.78	110.00	1.60	-6	TUB26E2	.70	.87	1.42 *	-1512	1543	2400 *
52-	54 *	-1737.7	9 3399.5	12 *	1.78	110.00	1.60	-6	TUB26E2	.70	.87	1.42 *	-1389	1912	2400 *
53-	57 *	-1500.8	7 709.2	12 *	1.78	93.01	1.36	-6	TUB26E2	.70	.87	1.25 *	-1057	359	2400 *
52-	56 *	757.2	8 1505.1	12 *	1.78	93.01	1.36	-6	TUB26E2	.70	.87	1.25 *	426	847	2400 *

Fig.5. Exemple de résultats de calcul d'optimisation.

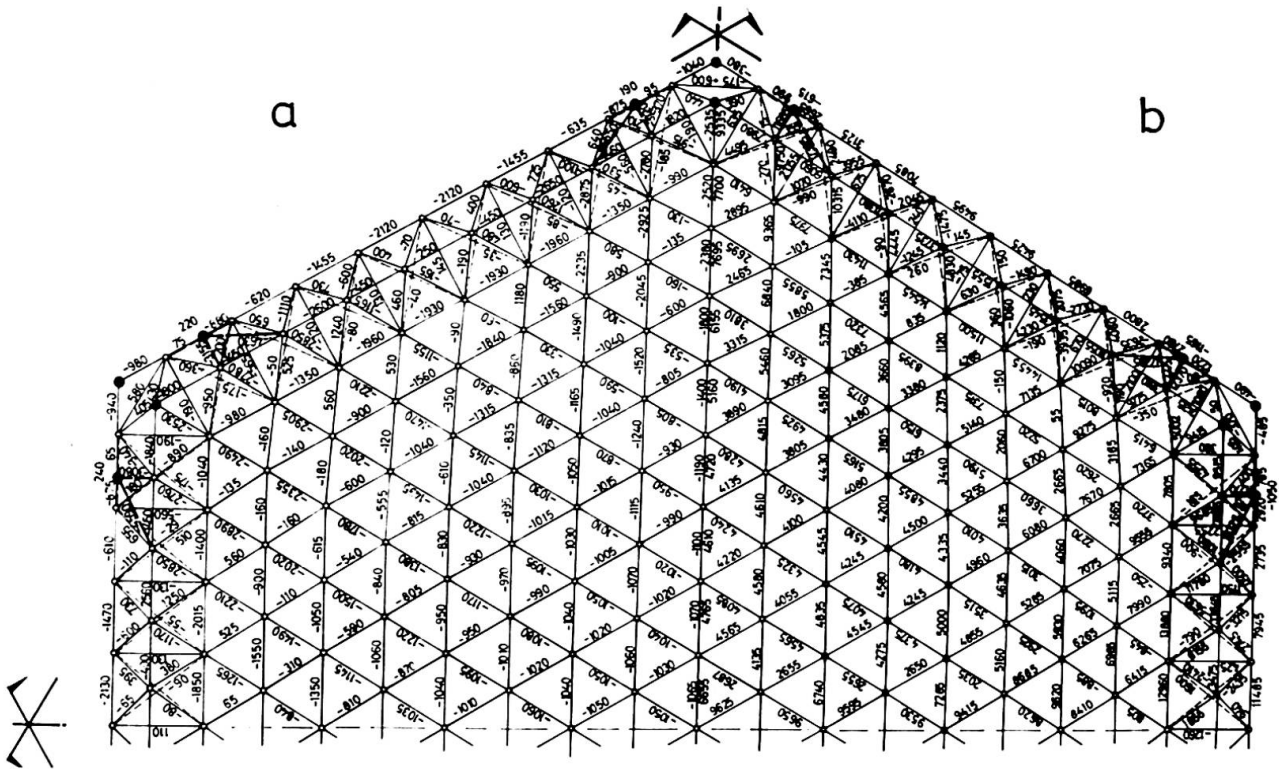


Fig. 6. Efforts dans les barres de la structure sous l'effet de la charge permanente (a) et du vent normal portance.(b).

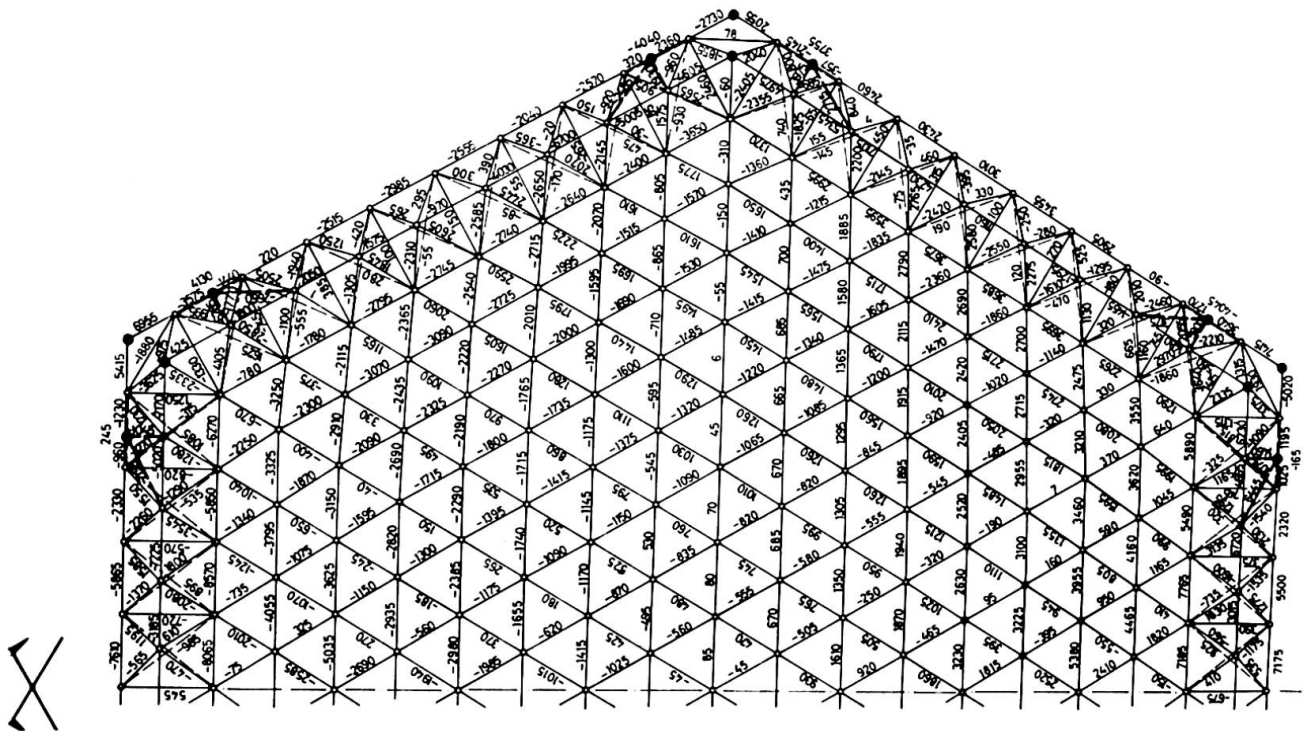


Fig. 7. Efforts dans les barres de la structure sous l'effet du vent normal trainée.

IV - RESULTATS DE CALCUL

Cinq différents cas de charges ont été étudiés :

1. charge permanente (fig. 6 a)
2. neige
3. vent normal portance (fig. 6 b)
4. vent normal trainée (fig. 7)
5. température

Les combinaisons des cas n° 3 et n° 4 ont permis de trouver les efforts sous l'effet du vent total normal

(portance + trainée + dépression)
(portance + trainée + surpression)

le vent total extrême étant égal à 1,75 fois le vent normal.

La vérification de la résistance des barres a été effectuée en considérant les combinaisons les plus défavorables des charges et surcharges majorées (suivant le règlement de calcul des constructions en aluminium DTU)

- 1,7 Neige normale + 1,5 (charge permanente ± température)
- 1,7 Vent normal, dépression + 1,5 (charge permanente ± température)
- 1,7 Vent normal, surpression + 1,5 (charge permanente ± température)
- 1,1 (Neige extrême + charge permanente ± température)
- 1,1 (Vent extrême dépression + charge permanente ± température)
- 1,1 (Vent extrême surpression + charge permanente ± température)
- 1,1 (0,5 . Neige extrême + vent extrême + charge permanente ± température)
- 1,6 (0,5 . Neige normale + vent normal dépression ± température).

Après la recherche de la combinaison la plus défavorable déterminée par le programme, nous avons obtenu le tableau de résultats présenté de la même façon que celui de la figure 5.

L'examen des contraintes extrêmes dans les barres et l'étude de la stabilité élastique des parois ont permis de choisir deux sortes de tubes : Ø 200, épaisseur 5 mm et Ø 200, épaisseur 4 mm répartis en fonction de la distribution des contraintes.

V - ETUDE DE LA STABILITE ELASTIQUE

La stabilité élastique des parois a été étudiée d'après les formules de K.P. BUCHERT (1) exposées dans sa contribution.

Charge critique -

$$P_{cr} = 0,366 E \left[\frac{t_m}{R} \right]^2 \left[\frac{t_B}{t_m} \right]^{3/2}$$

Epaisseur équivalente de membrure t_m

$$t_m = \frac{2 A}{\sqrt{3} L}$$

A, L, I représentent respectivement la section, la longueur et l'inertie des barres.

Epaisseur équivalente de flexion

$$t_B = \left[9 \sqrt{3} \frac{I}{L} \right]^{1/3}$$

L'étude des coupoles de ce type a permis de tirer les conclusions suivantes :

- Pour les rayons de sphères inférieurs à environ 55 m, les dimensions des barres dépendent essentiellement des efforts extrêmes.
- Pour les rayons supérieurs à 55 m, les barres sont dimensionnées en fonction de la stabilité élastique.

VI - BIBLIOGRAPHIE

K.P. BUCHERT - Buckling considerations in the design and construction of doubly curved space structures - Publication "Space Structures", éditée par R.M. DAVIES en 1966.

VII - RESUME

La présente contribution donne la description de la méthode de calcul et des programmes de calcul électronique utilisés, pour l'étude d'une structure spatiale en forme de coupole à une nappe.

Raumsysteme der Stahlkonstruktionen

Space Systems of the Steel Structures

Systèmes spatiaux des constructions en acier

FERDINAND LEDERER

Prof. Ing. Dr. Sc.

Brno, CSSR

Jede Baukonstruktion ist ein räumliches System, das fähig sein muß eine Belastung aller drei Richtungen im Raum zu übertragen, Oft aber, wenn es möglich ist, die Tragsysteme der Bauten zerlegt man in ebene Teilsysteme, und man löst diese für die Belastungsteile, welche in ihren Ebenen wirken.

Ein Representant der Art von aus Einzelkörper zusammengesetzten Raumsystemen ist die mehrgelenkige Kuppel, hier mit minimaler Zahl, also mit drei Körpern, welche in Abb.1 veranschaulicht ist. Diese Kuppel ist also viergelenkig, wobei das Scheitelgelenk zweifach ist, da dieses zweimal drei Freiheitsgrade im Raume beschrenkt. Dabei ist es nötig auf die Ausnahmefälle der Raumsysteme Acht zu geben.

Auf dem Gebiet der Raumfachwerksysteme, welche aus durch Pendelstäbe innerlich verbundenen Massenpunkten zusammengesetzt sind, stellt die Schwedlerkuppel einen klassischen Fall vor. Die Knotenpunkte liegen auf einer Rotationsfläche mit einer lotrechten Achse Z (Abb.2) und das System ist

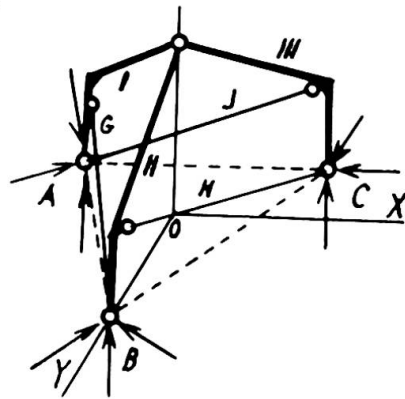


Abb.1

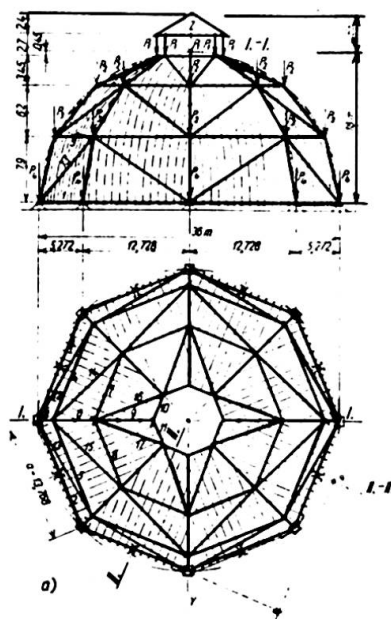


Abb.2

durch die in der Meridian- und Parallelenrichtung liegenden Stäbe gekennzeichnet. Dieses System ist dann das Grundsystem für viele Konstruktionen von Masten und Türmen, Gasbehältern und Kühlungstürmen, usw. (Abb. 2a, b, c). Das dreiwandige System eines Mastes nach Abb.3 weist die in gleicher Richtung laufenden Diagonalstäbe auf.

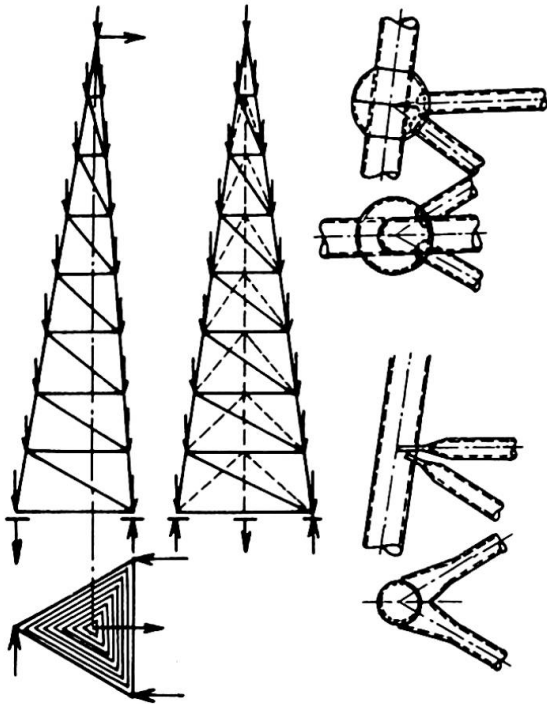


Abb.3

Eine andere Kuppelart ist die Föppelkuppel (Abb.4). Im allgemeinen genommen, sind diese Systeme über einem Paarpolygon Ausnahmefälle und sind für eine Konstruktion nicht geeignet; die Systeme über einem Unpaarpolygon sind starr und geeignet. Die Föppelkuppel gekennzeichnet sich dadurch, daß die Knotenpunkte in einem oberen Stockwerke gegen die in unterem Stockwerke um eine halbe Knotenentfernung versetzt sind. Das Stabnetz ist dann aus Dreiecken zusammengesetzt, wobei keines von diesen Dreiecken in derselben Ebene liegt /1/. Noch andere Kuppelarten werden hier nicht beschrieben werden.

Es ist zu bemerken, daß die Stabilität gegen den Durchschlag eines Knotenpunktes ins Innere der Kuppel durch die Beschränkung des Grundrißpolygones höchstens auf Zehneck (Neuneck) gegeben ist. Sonst ist es möglich diese Sicherheit gegen den Durchschlag zum Beispiel nach der Literatur /2/ prüfen.

Als wir vor 13 Jahren die Kuppel von der Art einer einschichtigen Gitterschale entwickelt haben (Abb.5), haben wir diese mit Hilfe eines Schalenkontinuums gelöst. Später haben wir festgestellt, daß sich, was die Knotenpunktelage anbelangt, diese Kuppel an den Typ der Föppelkuppel knüpft, was eine interessante Parallele bietet. Daher auch unsere spätere statische Lösung /3/. Dazu gehört eine sehr wichtige Frage der Stabilität gegen Beulung der Gitterfläche. /4/, /5/.

Ein weiterer Typ von Raumbachwerksystemen ist von Kristallpolyedern abgeleitet. Zu diesen kann man die wohlbekannt geodätische Kuppeln von R.B. FULLER zählen. Eine Übersicht über die Formen und konstruktive Gestaltung gibt unter anderem die Literatur /6/.

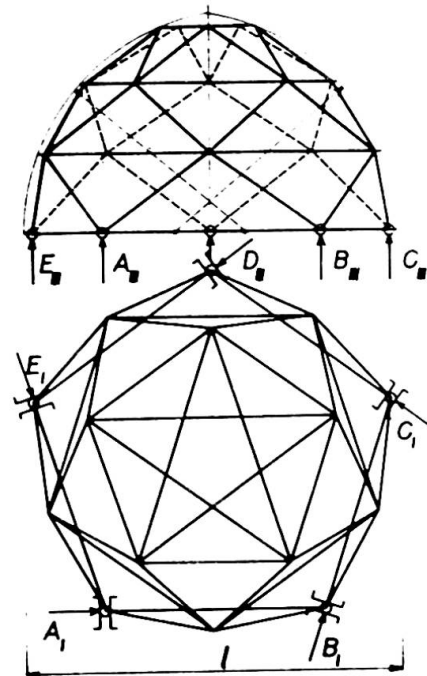


Abb.4

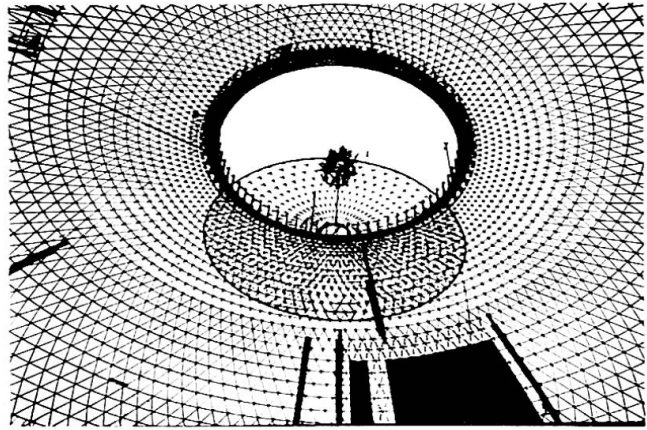
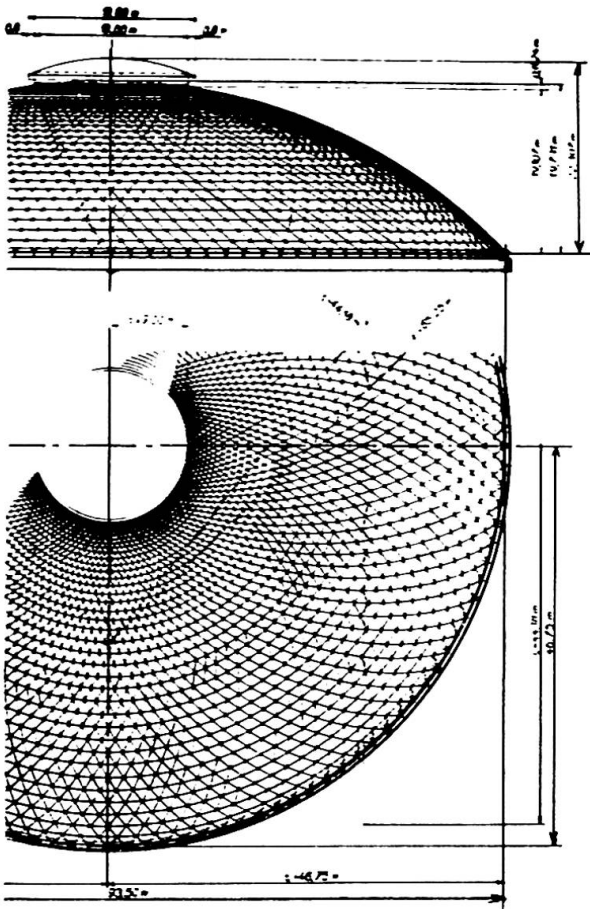


Abb.5

Eine andere Parallele können wir im Vergleich des Föppel'schen Tonnenflechtwerkes (Abb.6) mit einer Tonnenschale sehen, besonders, wenn diese mit Bogenrippen ausgesteift ist. Da man bei dem Flechtwerk eine gelenkige Knotenverbindung der Stäbe vorausgesetzt, können wir dessen Kräftespiel mit dem Membranspannungszustande vergleichen. Bei dem Tonnenflechtwerk können die Gleitlager an Fußgeraden beliebig schief sein;

die Lösung der Innenspankräfte ist auch in dem Fall möglich, wenn die Gleitlagerebenen senkrecht liegen, und die dazugehörigen Auflagerkräfte waagrecht sind. Wenn man diese entfernt, entsteht das freie Tonnenflechtwerk, welches nur an Stirn- oder Giebelbo-genwänden gelagert ist. Bei diesen ist der Membranzustand nicht mehr möglich, und das System kann nur dann als eine Konstruktion dienen, wenn die Meridian- oder Bogenstäbe nicht gelenkig, sondern durchlaufend biegestarr sind. Diese Bogenstäbe kann man als Aussteifungsrippen betrachten und nach Auslockerung vom ganzen System lösen. Auf eine als im Raum freie Bogenrippe greifen dann die Außenlasten P , die Querkräfte Q als Diagonalenkräftekomponenten und schließlich die waagrechten Auflagerkräfte den ent-

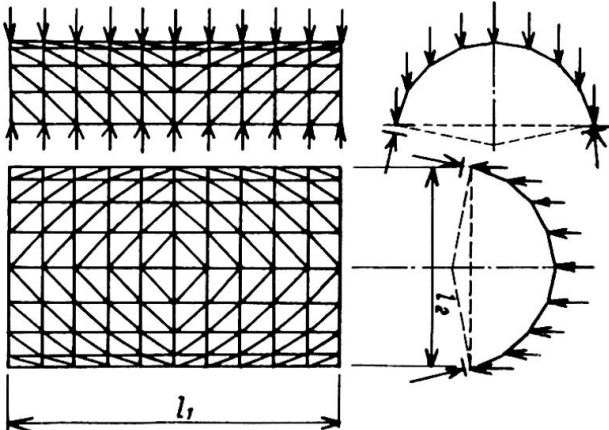


Abb.6

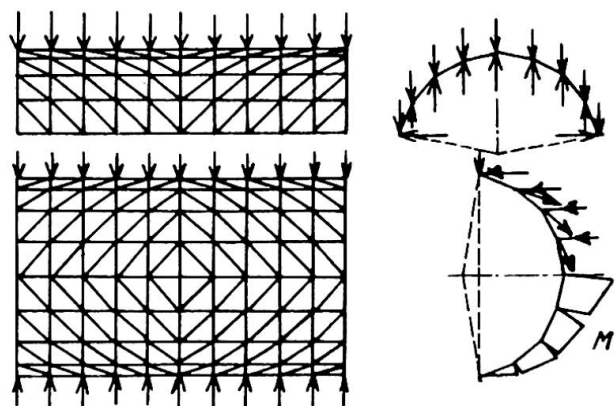


Abb.7

fernten lotrechten (nun fiktiven) Auflagern an. Die Biegemomente und Schubkräfte sind dann auf solchen im Raum im Gleichgewicht ruhenden Zustand leicht zu bestimmen /7/.

Weitere, in dieser Zeit sehr häufig verfolgte Konstruktionssysteme sind sogenannte Fachwerk- und Rostplatten. In Abb.8 ist eine zweiläufige Fachwerkplatte, in Abb.9 ist eine zweiläufige Rostplatte veranschaulicht.

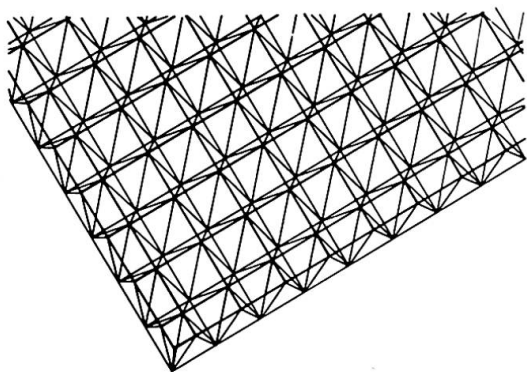


Abb.8

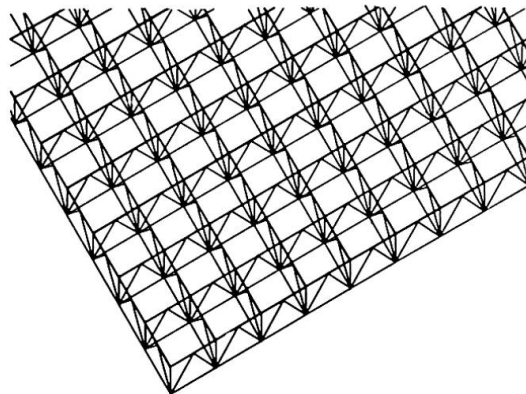


Abb.9

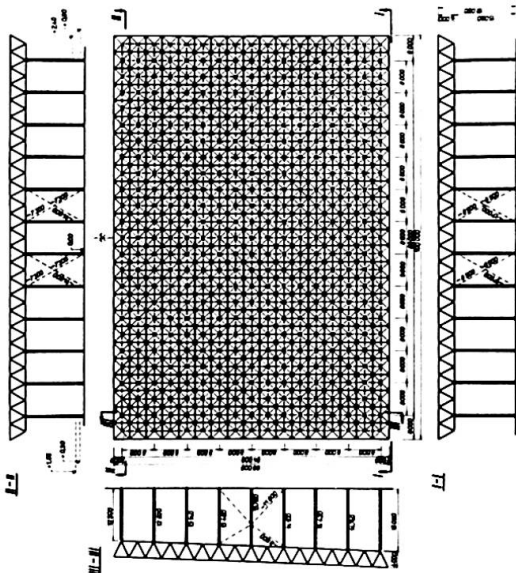


Abb.10

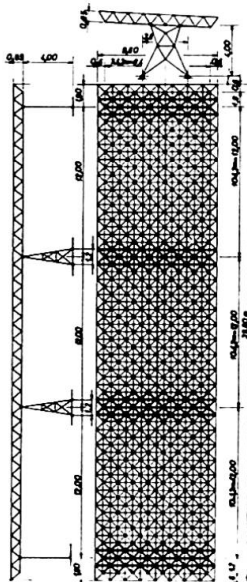


Abb.11

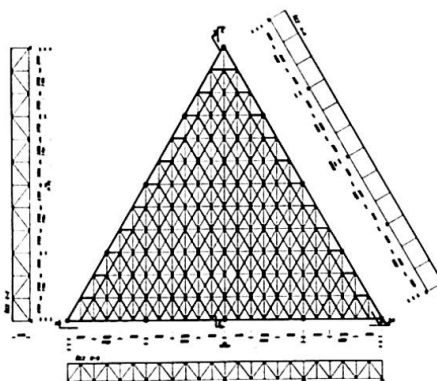


Abb.12

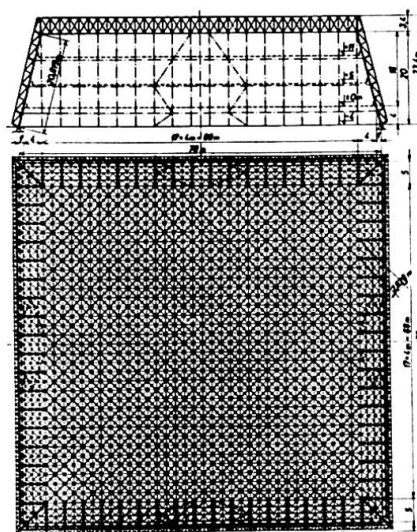


Abb.13

Die statische Lösung in strenger Form verfolgt das in die Verformungsform überführte Knotenpunktverfahren, welches für Digitalrechner programmiert worden ist, oder sonst nach der Methode der Kontinuumsanalogie durch Benützung der Theorie der dünnen Platte und durch Anwendung der Netzmethode /8/. Es folgen nun die Beispiele der Applikationen und Realisationen dieser Systeme. Als erste Realisation in der CSSR wurde das Dach des Winterstadions in Brno aufgebaut. Die größte von diesen zweiläufigen Fachwerkplatten mit quadratischem Konstruktionsnetz, welche aus Stahlrohrprofilen mit Hohlkugeln konstruiert worden sind, ist die Überdachung des Winterstadions in Olomouc; die Grundrißausmaße sind 68.100 m, die Konstruktionshöhe (Dicke) beträgt 4 m (Abb.10), /9/. Weitere Realisation stellt eine durchlaufende zweiläufige in

8 diskreten Punkten gestützte Fachwerkplatte vor (Abb.11). Quer über den Stützpunkten laufen die Verstärkungstreifen, welche bloß aus verstärkten Gurt- und Diagonalstäben bestehen, ohne daß die Struktur des Systems irgendwie geändert wurde. Eine weitere Überdachungskonstruktion dieser Art ist über dem Schwimmstadion in Brno (Architektonische Lösung des Baukomplexes O.OPLATEK aus Brno) erbaut, hier aber als eine Fachwerkplatte mit veränderlicher Konstruktionshöhe und mit ungleichen Rohrprofilen, so daß die Biegesteifigkeit des Ersatzkontinuums veränderlich ist. Ein zweiläufiges Rhombusnetz für eine Fachwerkplatte über einem Grundriß von einem gleichseitigen Dreieck, mit Einzelrandstützen ist in Abb.12 veranschaulicht. In Abb.13 ist noch eine Fachwerkplatte mit quadratischem Diagonalnetz gegeben. Andere Konstruktionen dieser Art wurden auch aus Winkelprofilen oder U-Profilen mit räumlichen Knotenblechen konstruiert.

Es wurden auch dreiläufige Rostplatten mit einem von gleichseitigen Dreiecken realisiert, welche ohne weiteres auch als eine Scheibe wirken können.

Die Fachwerk- und Rostplatten weisen verhältnismäßig geringes Stahlgewicht auf, jenach der Größe der Konstruktion und der Belastung; bei Dachkonstruktionen beträgt der Stahlverbrauch 20 bis 60 kg/m²,

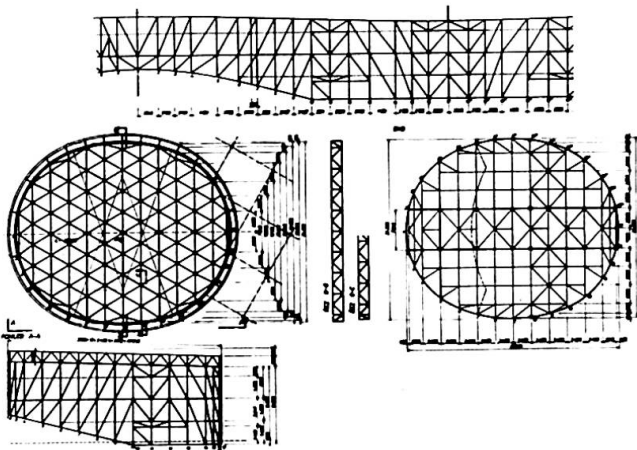


Abb.14

Manche von diese, aus Winkel- und andere Profilen konstruierten Systeme, können als Tragteil eines Raumsystems dienen. Als Beispiel für diese Ausnützung führen wir die Tragstahlkonstruktionen des Festivalskino in Karlovy Vary (Architektonische Lösung des Baukomplexes V. und. MACHONINS aus Praha) an, von welchen der große Ovalsaal 40,620 m lang und 34,290 m breit ist und auf die Länge von 23,760 m ausgekragt ist. Die Konstruktionshöhe beträgt 16,651 m (Abb.14). Blick auf die Montage dieser Konstruktion gibt Abb.15.



Abb.15

Diese Aufzählung von Raumkonstruktionen beschließen wir mit einer Rohrkonstruktion von konsolartiger Gestaltung, welche als Überdachung einer Tribüne des Fußballstadions in Trinec dient. (Architektonische Lösung des Sportanlagekomplexes KPÚ in Hradec Králové). (Abb.16). Es ist eine gemischte Rohr- und Profilekonstruktion, am Boden in Montageblöcke 12.18 m vollgeschweißt und mit leichten Autokranen montiert. Blick auf die zusammenmontierte Konstruktion gibt Abb.17.

Zum Schluß ist zu bemerken, daß, außer weiteren solchen

Raumsystemen, welche projektiert und realisiert worden sind und andere auch in der Weltliteratur beschrieben sind, zum Beispiel wieder in /6/, von anderen Autoren in der ČSSR, andere als aus vorgefertigten, unifizierten Teilen konstruierte Fachwerk- und Rostplatten entworfen und realisiert wurden. Wir haben nur die Möglichkeit hier im Kurzen einige Prinzipien und Typen der Raumsysteme anzuführen.

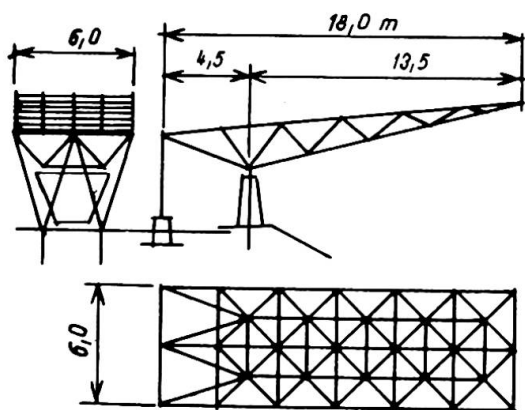


Abb.16

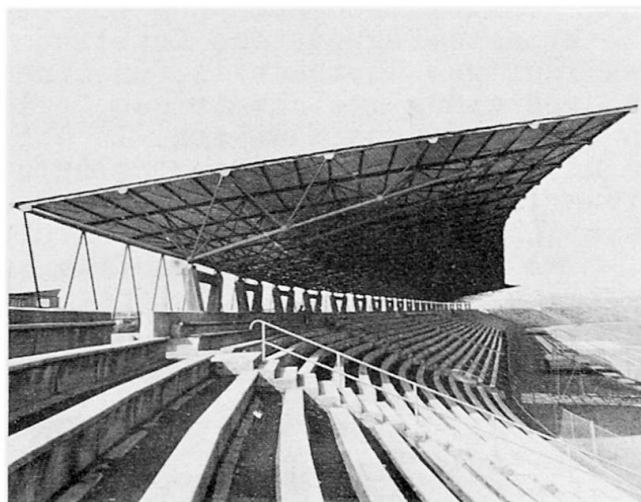


Abb.17

LITERATURVERZEICHNIS

- /1/ Lederer, F.: Statika II (SVTL Bratislava 1956)
- /2/ Klöppel, K - Ross, E.: Beitrag zum Durchschlagproblem dünnwandiger versteifter und unversteifter Kugelschalen für voll- und halbseitige Belastung (Der Stahlbau, Berlin 1956)
- /3/ Lederer, F.: Developments in Tubular Domes (Tubular Structures 3, London 1965)
- /4/ Wright, D.T.: Membrane Forces and Buckling in Recticulated Shels (Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, New York, February 1965)
- /5/ Lederer, F.: Diskussion zum Problem der Stabilität der Rotationsgitterschalen (Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, New York, Vol. 91. No. ST5, October 1965)
- /6/ Makowski, Z.S.: Räumliche Tragwerke aus Stahl (Verlag Stahleisen, m.b.H. Düsseldorf 1963)
- /7/ Lederer, F. und Kol.: Ocelové konstrukce pozemních staveb - Stahlkonstruktionen des Hochbaues (SNTL Praha 1971)
- /8/ Lederer, F.: Fachwerk- und Rostplatten (Werner-Verlag, Düsseldorf 1972)
- /9/ Lederer, F.: Steel Roofs of Winter Sports Stadia in Czechoslovakia - Stahldächer der Eisstadien in der Tschechoslowakei (European Civil Engineering / Europäischer Ingenierbau, Bratislava-Praha-Wien 1970/6)

ZUSAMMENFASSUNG

Es sind einige für Stahlkonstruktionen geeignete Grundtypen der konstruktiven Raumsysteme angeführt. Ferner wird auf einige Parallelen mit neu entwickelten Konstruktionssystemen hingewiesen und es wird eine Reihe von Realisationen der Raumkonstruktionen von verschiedener Form und Benützung angeführt.

Experimentelle und theoretische Untersuchung des Trag- und Stabilitätsverhaltens einschaliger räumlicher Gelenknetzwerke im elastischen Bereich

Experimental and Theoretical Investigation of the Behaviour of Capacity and Stability of Single Shell Articulated Networks in the Elastic Range

Etude expérimentale et théorique du comportement en charge et de la stabilité de treillis spaciaux articulés en régime élastique

W. MATTHEES P. WEGENER
 Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)
 Berlin, BRD

1. EINLEITUNG

Für die theoretische Untersuchung des Tragverhaltens einschaliger räumlicher Netzwerke wird vereinfachend angenommen, daß alle Stäbe gelenkig miteinander verbunden sind, daß das Netzsystem kinematisch stabil ist, (d.h. also alle Knoten unverschieblich gehalten sind, solange die Stäbe als längsstarr vorausgesetzt werden) und daß Belastungen nur als Einzellasten in den Knoten angreifen.

Zur Bestimmung der Stabkräfte und Verformungen wird außerdem angenommen, daß die entstehenden Knotenwege klein im Vergleich zu den Stablängen sind (Theorie 1. Ordnung). Das statische Verhalten hängt dann ausschließlich von den Stablängssteifigkeiten ab.

Für die Stabilitätsuntersuchung wird die Berechnung des verformten Systems näherungsweise ersetzt durch das iterative Verfahren der fiktiven Kräfte [3].

Durch Vergleich der rechnerischen Lösung mit experimentellen Untersuchungsergebnissen an Netzwerken, die die obengenannten Voraussetzungen nicht ideal erfüllen, wird die Anwendbarkeit der vereinfachenden Rechenannahmen auf solche Systeme kontrolliert.

2. AUFBAU UND GEOMETRIE DER UNTERSUCHTEN NETZWERKE

Die einschaligen Netzwerke bestehen aus dünnwandigen Stahlrohren ($EF \approx 4 \cdot 10^6$ kp, $EW \approx 4 \cdot 10^6$ kp.cm), die in den Knotenpunkten durch besondere Knotenstücke zentrisch miteinander verschraubt sind. Beide Netzsysteme sind hochgradig statisch unbestimmt.

NETZSYSTEM I ist eine kinematisch stabile Kuppel, deren 73 Knoten auf der Oberfläche einer Halbkugel liegen [6]. Die 192 Stabelemente erzeugen ein ungleichschenkliges Dreiecksnetz, dessen Maschen um jeden Knoten räumliche Sechsecke bilden (Fig. 2). Da weder bevorzugte Stabrichtungen noch wesentliche Steifigkeitsunterschiede im Netz bestehen, könnte das statische Verhalten aus dem Membranspannungszustand einer als Ersatzsystem gedachten Schale

abgeleitet werden [4]. Dies geschieht nachfolgend jedoch nicht.

NETZSYSTEM II bildet einen zeltförmigen Pyramidenstumpf aus 69 Knoten und 180 Stäben. Das Netz wird aus Dreiecken und Rechtecken erzeugt (Fig. 4 u. 5). Einige unbelastete "Nebenknoten" sind senkrecht zur Netzoberfläche kinematisch instabil, was jedoch auf die Stabilität des Haupttragsystems ohne Einfluß ist.

3. STATISCHE BERECHNUNG

Es ist Aufgabe der Elastizitätstheorie, Verschiebungen und Spannungen eines elastischen Systems infolge einer Belastung zu ermitteln [2]. Zur Verfügung stehen die Gleichgewichtsbedingungen am verformten System, das Elastizitätsgesetz und der geometrische Zusammenhang zwischen den Verschiebungs- und Verzerrungsgrößen. Während das Elastizitätsgesetz für metallische Werkstoffe ausreichend genau linear (Hooke) ist, sind die Verzerrungs- und Verschiebungsbeziehungen nicht linear. Deshalb braucht zwischen Belastung und Verschiebung grundsätzlich kein linearer Zusammenhang zu bestehen [1].

Im Falle kleiner Verformungen linearisiert die klassische Elastizitätstheorie die nichtlinearen Beziehungen. Sie erfüllt die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System (Theorie 1. Ordnung). Zur Bestimmung der Stabkräfte und Verformungen wird dieser Weg auch hier unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen und der damit verbundenen Energiebetrachtung nach der Deformationsmethode für infinitesimale Knotenwege als ausreichend genau beschrieben.

Die Anwendung der Energiemethode für finitesimale Knotenwege bei der Untersuchung der Stabilität zur Ermittlung einer exakten Lösung stößt auf bislang ungelöste Schwierigkeiten, da bei der Integration des inneren elastischen Potentials von Knotenwegen abhängige, veränderliche Integrationsgrenzen entstehen. Die Stabilitätszustände können nur durch Näherungsverfahren, wie z.B. durch das wiederholte Anwenden der Energiemethode für infinitesimale Zustände iterativ ermittelt werden.

Hier soll aufbauend auf der einmalig infinitesimalen angewandten Energiemethode durch das iterative Verfahren der fiktiven Kräfte [3] eine Näherungslösung ermittelt werden.

3.1. BERECHNUNG NACH DER THEORIE 1. ORDNUNG

Nach [5] lautet das elastische Potential der äußeren Knotenlasten

$$\Pi_a = -\mathbf{v}^T \mathbf{p} = -\mathbf{p}^T \mathbf{v} \quad (1)$$

wobei \mathbf{v}^T der transponierte Verschiebungsvektor und \mathbf{p} der Belastungsvektor für alle Knoten ist. Das Elastizitätsgesetz lautet

$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \Delta \quad (2)$$

wobei \mathbf{s} der Stabkraftvektor und Δ der Stablängenänderungsvektor ist. Die quadratische Stabsteifigkeitsmatrix \mathbf{D} enthält entsprechend der in Δ gewählten Anordnung alle Stabsteifigkeiten EF/l (E = Elastizitätsmodul, F = Fläche, l = Länge). Die Matrix \mathbf{B} ist entsprechend dem Ordnungsschema von Δ und \mathbf{v} aus den Stabeinheitsvektoren aufgebaut und stellt für kleine Verformungen den geometrischen Zusammenhang her

$$\Delta = \mathbf{B} \mathbf{v} \quad (3)$$

Das elastische Potential der inneren Kräfte lautet

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{s}$$

daraus folgt mit (2) und (3)

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{D} \Delta = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{v}$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} \quad (4).$$

Die symmetrische Systemsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$ läßt sich durch Minimierung der Knotennummerndifferenzen benachbarter Knoten als Bandmatrix darstellen. Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ist ein System dann im Gleichgewicht, wenn die erste Variation des Gesamtpotentials ein Minimum wird:

$$\delta \Pi = \delta (\Pi_a + \Pi_i) = \delta (-\mathbf{v}^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v}) = 0 \quad (5)$$

Mit $\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{v}} \delta \mathbf{v} = 0$ und $\frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{I}$, wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix darstellt folgt aus (5)

$$0 = -\mathbf{I} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v}) = -\mathbf{p} + \mathbf{K} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{K} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} \quad (6)$$

Aus (2) und (3) folgen die Stabkräfte

$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{v} \quad (7)$$

Aus den Gleichungen (6) und (7), die mittels Computer ausgewertet werden, können die Knotenverschiebungen und Stabkräfte ermittelt werden.

Im SYSTEM II sind einige Knoten kinematisch instabil, was für die numerische Behandlung zur Folge hat, daß die Determinante der infinitesimalen hergeleiteten Formänderungsmatrix zu 0 wird. Betrachtet man dagegen das verformte System, verschwindet diese Unstetigkeitsstelle mit wachsender Belastung.

3.2. VERFAHREN DER FIKTIVEN KRÄFTE

Die Methode der fiktiven Kräfte hat gegenüber anderen Iterationsverfahren den Vorteil, eine Steifigkeitsmatrix nur einmal aufstellen und auflösen zu müssen. Zur näherungsweise Ermittlung der vollständigen Stabkräfte (Theorie 2. Ordnung) werden dann in den anschließenden Iterationszyklen, unter Beachtung der Maßgabe, daß nach wie vor die Steifigkeitsmatrix des unverformten Systems benutzt wird, diejenigen Kräfte dem System als äußere fiktive Belastung aufgeprägt, die zur Erzeugung des Gleichgewichts aus den Stabkräften des Ausgangssystems am finitesimal ausgelenkten System notwendig sind.

In Fig. 1 wird das durch die fiktiven Kräfte entstehende, in diesem Fall rückdrehende Kräftepaar für einen Zugstab dargestellt. Die Iteration ist gegebenenfalls durch Relaxation zu beschleunigen. Iterationsende wird erreicht bei

$$(\vartheta^N - \vartheta^{N-1})_{\max} = \epsilon, \text{ wobei } \epsilon \text{ eine gewählte Fehlerschranke ist.}$$

Vergleichswerte können näherungsweise bei Untersuchung eines Teilsystems als Durchschlagproblem nach [4] gefunden werden, vergleiche Kurve a in Fig. 3 und Fig. 6.

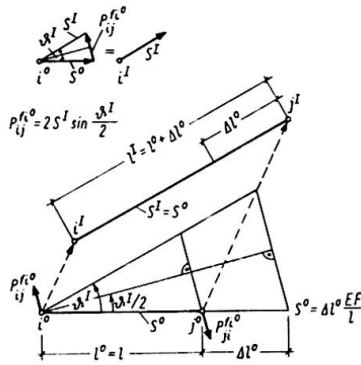


Fig. 1 Finitesimaler Verschiebungszustand mit fiktivem Gleichgewichtszustand im I. Iterationszyklus für einen Zugstab ($S > 0$)

4. EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG

In jedes Netzsystem waren 23 bzw. 34 "geeichte", mit je 4 Dehnungsmeßstreifen versehene Meßstäbe eingebaut, so daß an ausgezeichneten Stellen die Stabdehnungen, Stabkräfte und Stabendmomente sowie der örtliche Fließbeginn infolge der Belastung bestimmt werden konnten. An jeweils 8 Knoten wurden die Knotenverschiebungen in 3 senkrecht zueinander stehenden Richtungen mit Hilfe von Potentiometerweggebern ermittelt. Die Belastung wurde durch hydraulische Zugpressen erzeugt, und über Zuggehänge senkrecht bzw. waagrecht zentrisch in die Knoten eingeleitet. Die Größe der Kräfte wurde durch Kraftmeßdosen gemessen. Alle Meßwerte wurden mit einer Vielstellenmeßanlage, die jede Meßstelle selbsttätig auswählte, auf Lochstreifen registriert und auf einer elektronischen Rechenanlage ausgewertet.

5. ERGEBNISSE

5.1. STABKRÄFTE UND VERFORMUNGEN

Die nach Gleichung (6) und (7) errechneten Stabkräfte und Knotenverschiebungen sind für einen "Einheitslastfall" am Netzsystem I in Fig. 2 und am Netzsystem II in Fig. 4 und Fig. 5 eingetragen. Die für denselben Lastfall im Versuch ermittelten Meßwerte sind den Rechenwerten in den gleichen Figuren gegenübergestellt. Wegen der rechnerisch nicht erfaßbaren geringen Nachgiebigkeiten in den Knotenschraubungen sind die gemessenen Knotenwege etwas größer als die errechneten.

Die statisch interessierenden Lastfälle werden aus den Einheitslastfällen superponiert. Im Versuch wurde mit Hilfe von Lastgruppen die Zulässigkeit des Superpositionsverfahrens und damit die zugrundeliegende Annahme des linearen Zusammenhanges zwischen Last und Verformung kontrolliert. Eine Untersuchung des Zwängungszustandes infolge der Montage der Kuppel I ergab, daß die größte Stabkraft etwa bei 10% der rechnerisch zulässigen Stabkraft und die größte Randspannung bei etwa 40% der zulässigen Spannung lag.

5.2. TRAGVERHALTEN UND STABILITÄT

Zur Untersuchung des Tragverhaltens wurde Kuppel I in Punkt B durch eine senkrechte Einzellast und Kuppel II in Punkt K durch eine waagerechte Einzellast (Fig. 5) bis zum Bruch beansprucht. Die gemessenen Bruchlasten sind in Fig. 3 und Fig. 6 eingetragen. In beiden Fällen trat der Bruch schlagartig durch Einzelstabknicken ein. Die Bruchlasten der Netzstäbe lagen dabei etwas höher als die in Vorversuchen an entsprechenden gelenkig gelagerten Einzelstäben gemessenen Knicklasten (Eulerfall 2).

Fig. 4 Errechnete und gemessene Knotenwege

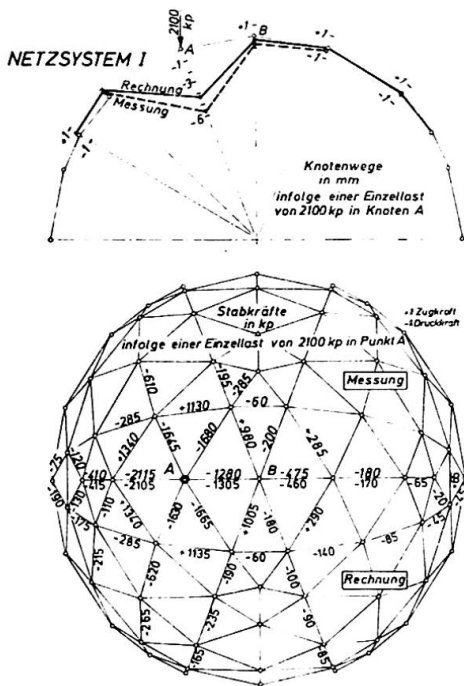


Fig. 2 Errechnete und gemessene Knotenwege (oben) und Stabkräfte (unten)

NETZSYSTEM I

Kraft-Wegdiagramm des Zenitknotens B in doppelt-logarithmischer Darstellung
 a) als Durchschlagproblem nach [4]
 b) rechnerisches System (Theorie 1. Ordnung)
 c) Versuch
 d) rechnerisches System (Verfahren der fiktiven Kräfte)

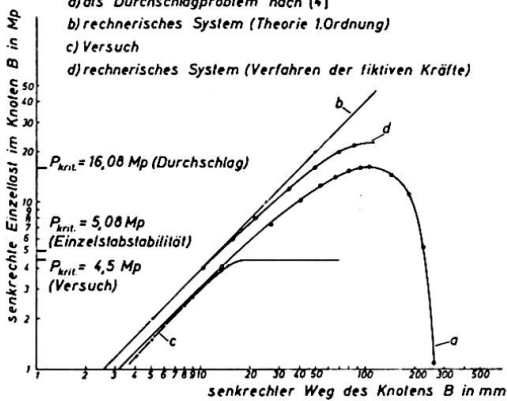


Fig. 3 Ergebnisse der Stabilitätsuntersuchung im Bereich des Knotens B

Fig. 6

Ergebnisse der Stabilitätsuntersuchung im Bereich des Knotens K

NETZSYSTEM II

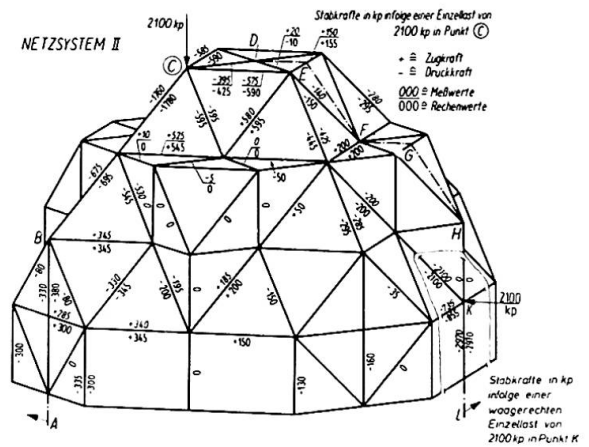
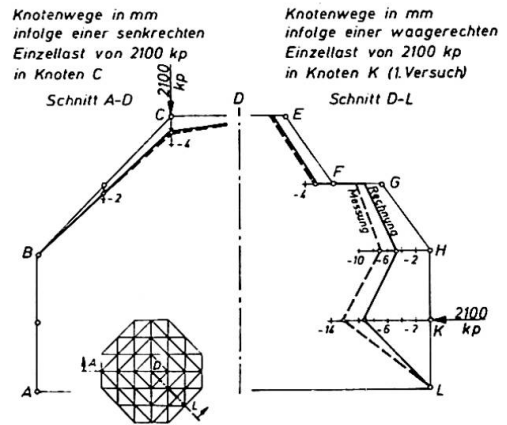
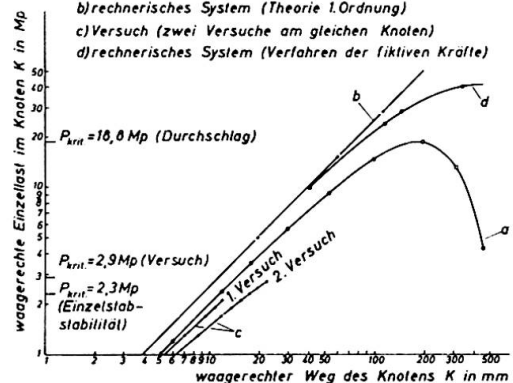


Fig. 5 Errechnete und gemessene Stabkräfte infolge einer senkrechten Einzellast in Punkt C bzw. infolge einer waagerechten Einzellast in Punkt K (Schnitt)

NETZSYSTEM II

Kraft-Wegdiagramm des Knotens K in doppelt-logarithmischer Darstellung
 a) als Durchschlagproblem nach [4]
 b) rechnerisches System (Theorie 1. Ordnung)
 c) Versuch (zwei Versuche am gleichen Knoten)
 d) rechnerisches System (Verfahren der fiktiven Kräfte)



Der Vergleich der rechnerischen Stabilitätsuntersuchung nach der Methode der fiktiven Kräfte ist als Kurve d und die Durchschlaguntersuchung nach [4] als Kurve a in Fig. 3 und Fig. 6 eingezeichnet. Es wird deutlich, daß bei den vorhandenen Steifigkeiten in jedem Fall Instabilität in Form von Einzelstabknicken und nicht als System-Instabilität auftritt. Durchschlagen als System-Instabilität würde erst bei sehr viel kleineren Steifigkeiten eintreten.

LITERATUR

- [1] Mises, R.v.:
Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie
Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. 3 (1923) S. 406-422
- [2] Kappus, R.:
Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen
Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. 19 (1939) S. 271-285,
S. 344-361
- [3] Teichmann, A.:
Statik der Baukonstruktionen
Sammlung Göschen 1958
- [4] Klöppel, K. und Schardt, R.:
Zur Berechnung von Netzkuppeln
Der Stahlbau 31 (1962) S. 129-136, 384
- [5] Bürgermeister, G. und Steup, H. und Kretzschmar, H.:
Stabilitätstheorie, Akademie-Verlag Berlin
Band I, 3. Auflage 1966; Band II, 1963
- [6] Versuchsbericht Az. 2.2/15 172 der Bundesanstalt für
Materialprüfung vom 9. 11. 1970

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird durch vergleichende Anwendung von Rechnung und Experiment das statische Verhalten, die Stabilität und das Bruchverhalten von gelenkfachwerkartig aufgebauten räumlichen Stabwerken untersucht. Als Untersuchungsbeispiel dienen zwei unterschiedliche Systeme von einschaligen Netzkuppeln, deren Stabelemente aus Rohrprofilen bestehen und in den Knotenpunkten durch Knotenstücke zentrisch miteinander verschraubt sind.

Optimum Design of Space Trusses

Projet optimum de treillis spatiaux

Optimaler Entwurf von Raumfachwerken

YASUHIRO HIRATA
Chief Research Engineer of Takenaka
Technical Research Laboratory

YUJI NAKAMURA
Manager Steel Structure Division
Nippon Kokan K.K. (Ph.D.)

HIDETAKE ANRAKU
Doctor Course Student of Tokyo University

MASATOSHI UEDA
Research Engineer of Takenaka Technical
Research Laboratory

Japan

1. Introduction

The analysis and optimum design of two types of simply supported, double layered space trusses, which are called Takenaka-truss in Japan, is reported herein. The design of the space trusses is usually carried out through the process shown in Figure 1.1. The design procedure developed here corresponds to the fundamental design stage, and this can be utilized to determine the optimum grid layout and the truss depth for the final design stage. Consequently, the accurate analysis and design procedure should be followed.

The approximate analysis is applied here to treat the following optimum design problem in a mathematically simplified form. And the results obtained by this method are verified, being compared with the accurate results by the stiffness matrix method.

The variables of the optimum design are not only section properties of members of space trusses, but also the depth of the trusses and the spacing. The objective function to be optimized is the cost of the space trusses. Which consists of the costs of members, joints and purlines. The applied design specification is the steel structural standard of Japan (1970) and the deflection limitations. The sequential unconstrained minimization technique is applied to the optimization technique.

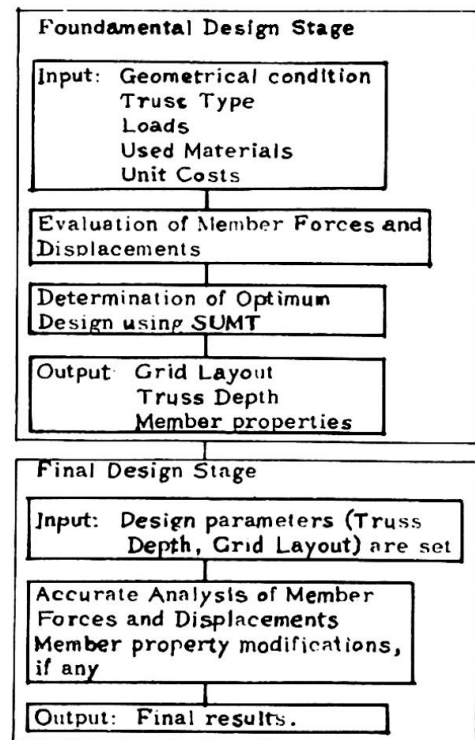


Figure 1.1 Design Process Flow Chart

2. Configuration of the Space Trusses

The two types of double layer grid trusses in this study are, Square Pyramid Truss (S.P. Truss) and Star Element Truss (S.E. Truss), which are quite similar each other. S.P. Truss has been utilized often recently, however, S.E. Truss has newly been developed. Both space trusses have diagonal top layer grids and normal lower layer grids, but the relative locations of top and lower chord are different, and the direction of latticed members are also different.

S.P. Truss is composed by arranging the inverted square pyramid elements as a chequered pattern and connecting the neighbouring pyramid apexes with lower layer members (see Figure 2.1). On the other hand, S.E. Truss is composed by star elements (see Figure 2.2).

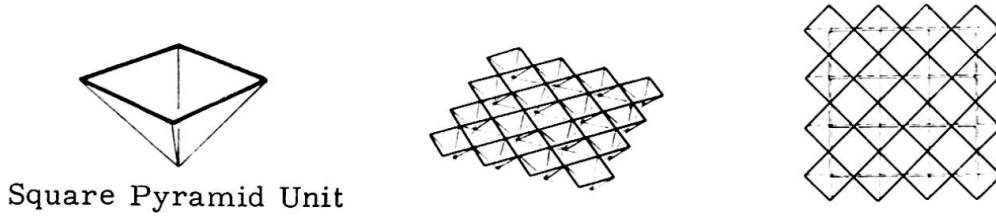


Figure 2.1 S.P. Truss

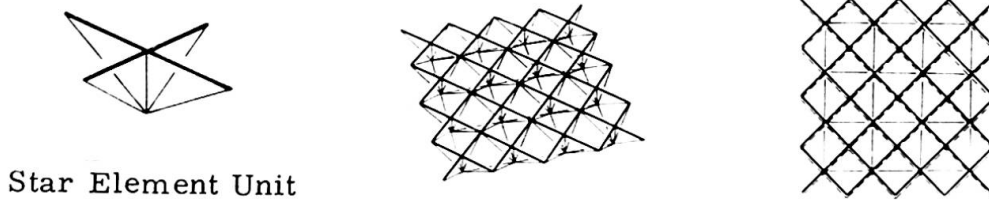


Figure 2.2 S.E. Truss

3. Evaluation of Displacements and Member Forces

The rigorous solutions for the axial forces of members and deflections of joints of space trusses under the imposed loading conditions may be obtained by deflection method using an electronic digital computer. In this optimization study, however, much simpler analysing methods are necessarily needed which lead to good approximate solutions and require short time and small core size in computation. One of the most successful ways which seems to satisfy these requirements is to find the equivalent solid plate that has nearly the same force and stiffness distributions.

The S.P. Truss has very small twisting rigidity around x and y axes (Figure 3.1), that is,

$$M_{xy} = 0 \quad . \quad (3.1)$$

From the wellknown equilibrium equation of solid plate and Equation (3.1) the following equation can be obtained.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (3.2)$$

where w shows the vertical displacement, P the load per unit area and D the rigidity per unit width of the plate. Solving the Equation (3.2) under the simple support boundary condition by using Fourier series, the displacement is

$$w = \frac{16P}{D\pi^6} \sum_{m=1,3,5..} \sum_{n=1,3,5..} \frac{1}{mn \left(\frac{m^4}{a^4} + \frac{n^4}{b^4} \right)} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.3)$$

On the contrary to the S. P. Truss, the S. E. Truss has small twisting rigidity around x' and y' axes,

$$M_{xy'} = 0 \quad (3.4)$$

Equation (3.4) is rewritten as

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{P}{4D} \quad (3.5)$$

The rigidity of plate D is expressed as

$$D = \frac{n \sqrt{2} A_u \cdot A_l}{\alpha \sqrt{2} A_u + A_l} \cdot E h^2, \quad (3.6)$$

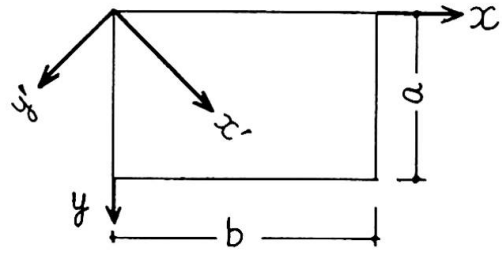


Figure 3.1
Co-ordinate Systems

where n is a number of blocks along the y direction. A_u and A_l are average sectional areas of upper and lower chords members respectively. Member forces are given in Table 3.1. The comparisons between rigorous solutions and plate solutions are shown in Figure 3.2 and 3.3.

In order to minimize the total cost of the space trusses exactly, each member and joint costs are individually to be taken into account, however, this is not practical actually to treat whole members and joints as variables of the objective function.

Table 3.1 Member Forces

Member	Sectional area	Direction	S. P. Truss		S. E. Truss	
			Member force	Member length	Member force	Member length
Upper chord member	A_{ue}	x'	$M_{x'} = M_{y'} = M$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{n} \frac{M_{x'}}{h}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{n}$
	A_{uc}	y'	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{n} \frac{M}{h}$		$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{n} \frac{M_{y'}}{h}$	
Lower chord member	A_{le}	x	$\frac{a}{n} \frac{M_x}{h}$	$\frac{a}{n}$	$M_x = M_y = M$	$\frac{a}{n}$
	A_{lc}	y	$\frac{a}{n} \frac{M_y}{h}$			
Latticed member	A_{wep}	x	$\frac{a}{n} Q_x \sqrt{1 + \frac{a^2}{4n^2 h^2}}$	$\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4n^2}}$	/	/
	A_{wem}	y	$\frac{a}{n} Q_y \sqrt{1 + \frac{a^2}{4n^2 h^2}}$			
	A_{wec}	x'				
	y'		$\frac{a}{n} Q_{y'} \sqrt{1 + \frac{a^2}{2n^2 h^2}}$			
Number of joints			$3 \frac{b}{a} n^2 + (\frac{b}{a} + 1) n$		$3 \frac{b}{a} n^2 + (\frac{b}{a} + 1) n + 1$	

Therefore some members and joints are to be chosen to represent the structure. Two members for each upper, lower and latticed chord members, and one joint are selected in this study.

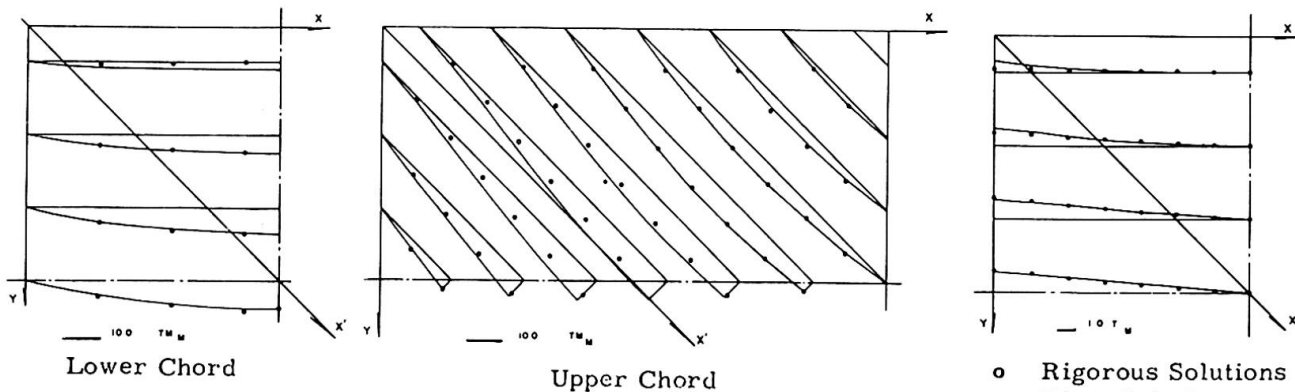


Figure 3.2

o Rigorous Solutions
— Plate Solutions
Figure 3.3

Comparison of Bending Moments Comparison of Shearing Forces

4. Optimum Design of Space Frames

4.1 Mathematical Model

Design variables are the sectional areas of members, A_{ue} , A_{uc} , A_{le} , A_{lc} , A_{wep} , A_{wem} , A_{wc} , the number of blocks, n , and the truss depth, h , which are described in the previous section.

The objective function f of the structure to be minimized is the total cost of steel skeletons.

$$f = \sum_{i=1}^m C_m \rho A_{m_i} l + \sum_{i=1}^n C_{mp} \rho A_{p_i} l + C_j \cdot N \quad , \quad (4.1)$$

where C_m , C_{mp} , C_j are the unit cost of members, purlins and joints; m , n , N are the number of members, purlins and joints, respectively.

Tubular sections and wide flange sections are used for the members of trusses, and purlins respectively. Empirical relationships between section properties are obtained by plotting section properties commercially provided.

(i) For steel tubes

$$I = (0.625 A)^{\frac{19}{8}} \quad . \quad (4.2)$$

(ii) For wide flange sections

$$A = 0.58 I^{\frac{2}{4}} \quad , \quad (4.3)$$

$$Z = 0.58 I^{\frac{3}{4}} \quad . \quad (4.4)$$

The diameter of the spherical joint is assumed three times of the diameter of the largest members and the thickness is assumed twice of that of the largest members.

Therefore, the objective function f of the structure for S. P. Truss,

$$\begin{aligned} f = \rho \left[\left\{ 2\sqrt{2}na \frac{5}{9} A_{ue} + 2\sqrt{2}na \frac{4}{9} A_{uc} + (2na \frac{5}{9} - 2a) A_{le} \right. \right. \\ \left. \left. + 2na \frac{4}{9} A_{lc} + na \sqrt{1 + \frac{4n^2 h^2}{a^2}} \cdot \frac{4}{9} (A_{wep} + A_{wem}) \right. \right. \\ \left. \left. + 2na \sqrt{1 + \frac{4n^2 h^2}{a^2}} \cdot \frac{5}{9} A_{wc} \right\} \cdot C_m + 0.58 \frac{1}{8} \left(\frac{1.5}{16} \right)^{\frac{2}{8}} \left(\frac{P a^5}{F l p^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{8}} \cdot \eta^{\frac{4}{8}} \cdot C_{mp} \right. \\ \left. + (3n^2 + 2n) \cdot C_5 \cdot A_{lc}^{\frac{27}{16}} \cdot C_j \right] \quad , \quad (4.5) \end{aligned}$$

where l_p is the spacing of purlins (cm), C_5 is the coefficients obtained by the relationship between member properties of tubular sections.

4.2 Sequential Unconstrained Minimization Technique

The optimum problem, mentioned in the previous section, may be obtained by several mathematical techniques. Here, the sequential unconstrained minimization technique developed by Davidon is adapted. The objective function to be minimized is converted to the following equation F ,

$$F = f + R_k \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 - \sigma_j} \quad , \quad (4.6)$$

therefore, the optimum design problem with constraints is changed to the unconstrained optimum design problem. The macro flow chart is shown in Fig. 4.1.

4.3 Parametric Study

Using the developed programming, a parametric study was carried out. The observed results tell the interesting behaviors of the optimum designs.

(i) Parameter: Span
 Constants given:

- $P = 200 \text{ kg/m}^2$
- $F = 2.4 \text{ t/cm}^2$
- $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
- $C_j = 308,000 \text{ yen (1,000 dollars)}$
- $C_m = 123,000 \text{ yen (400 dollars)}$
- $l_p = 180 \text{ cm}$

At the optimum design, all stresses of members are fully constrained, however, the deflection limitation $p = a/300$ does not dominate at all. The cost per unit area increases almost linearly with the span length of the whole structure. Span per depth is scattered between almost 8 - 12, which is coincident to the usually adapted value in the actual design. Moreover, the optimum number of blocks seems to be obtained so that the angle of the diagonal member is almost 45° (actually $42^\circ - 49^\circ$).

(ii) Parameter: Loading
 Constant given:

- Span length 72 meters, F , E , C_j , C_m , l_p are same as 4.1.

The cost per unit area increases almost linearly with loading amount.

The optimum designs of the S.E. Truss were almost same as those of the S.P. Truss when $C_j = 0$, that is, the weight is minimized, the results show almost same tendency. Moreover, almost the same results were obtained for the change to the purline spacing, too.

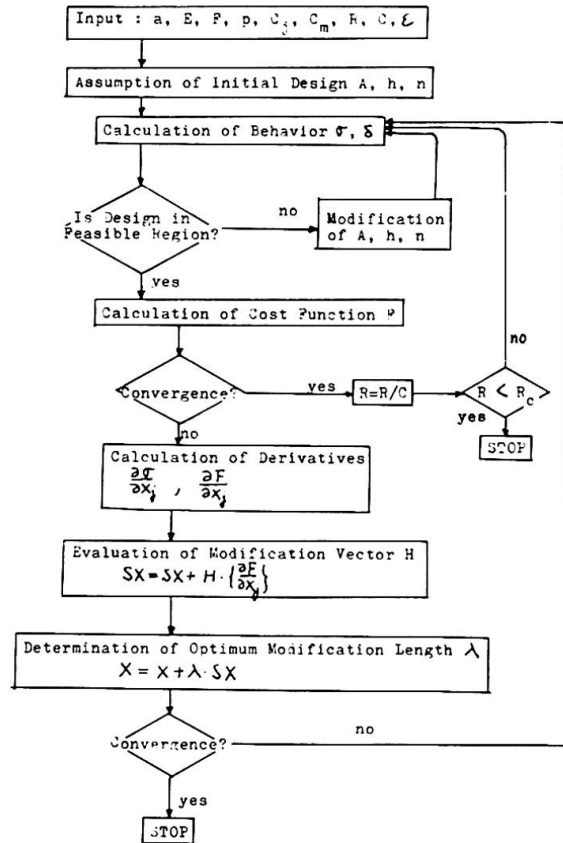


Figure 4.1

Macro Flow Chart of S.U.M.T.

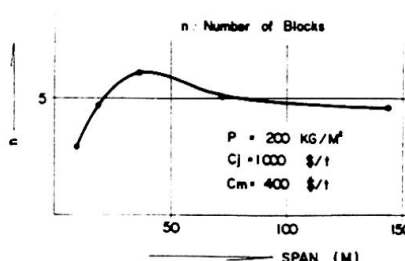
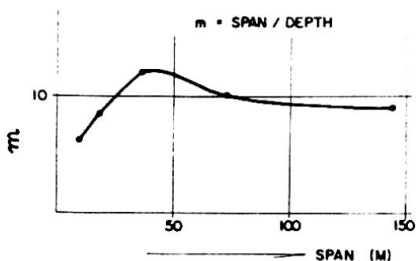
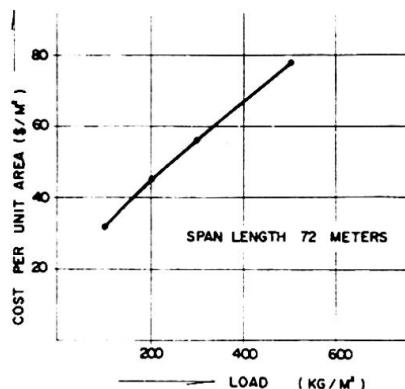
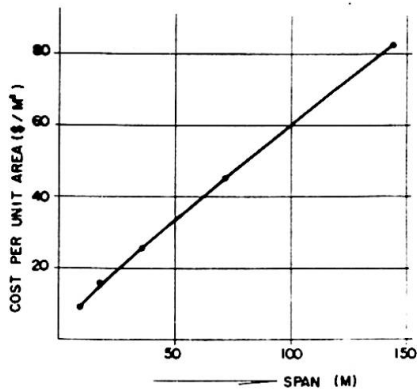


Figure 4.2 Results of Parametric Study

5. Conclusions

Through this study, the following conclusions have been attained.

- (1) Comparisons with the results obtained by the stiffness matrix method confirm the theoretical analysis presented.
- (2) The sequential unconstrained minimization technique works very effectively in the optimum design of the double layered space trusses, and shows good convergence. Computer time for one case is approximately two minutes using IBM 360/65.
- (3) Through a parametric study, structural characteristics of the Takenaka-truss have been obtained. The cost per unit area is almost proportional to the span.

The optimum ratio of the truss depth to the span is approximately 8 - 12. At the optimum design, the angle of the latticed members are approximately 45° . The results for S.P. Trusses and S.E. Trusses are almost same.

The optimum design with truss depth limitation, and the rectangular plan can be readily developed in the future.

Bibliography

1. Kato B. and Hirata Y. "The Analysis of a space truss composed of square pyramid units", Space Structure, pp201 - 212, September 1966.
2. Renton, J.D., "The Formal Derivation of Simple Analogies for Space Frames", IASS Pacific Symposium Report October 1971.
3. Geiger, D.H., "A cost evaluation of space trusses of large span", AISC Engineering journal April 1968.
4. Architectural Institute of Japan, "The steel structural design code", May 1970 (in Japanese).
5. Fiacco, A.V., McCormick, G.P., "Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques", 1968.

Acknowledgements

The authors wish to express their sincere thanks to Prof. Ben Kato, the University of Tokyo, for his continuous encouragement in developing of this paper. They are indebted to Miss Reiko Senda for her assistance for the programming.

Summary

The analysis and optimum design of simply supported, double layered space trusses is presented here. The approximate analysis using a transformation method to a continuous equivalent plate is good enough for design use. The optimum design by a sequential unconstrained minimization technique insures good convergence. Through a parametric study of approximately twenty cases, the structural characteristics of the Takenaka-truss have been studied.

The Influence of Member Quality on the Safety of Space Trusses

L'influence de la qualité des éléments sur la sécurité de treillis spatiaux

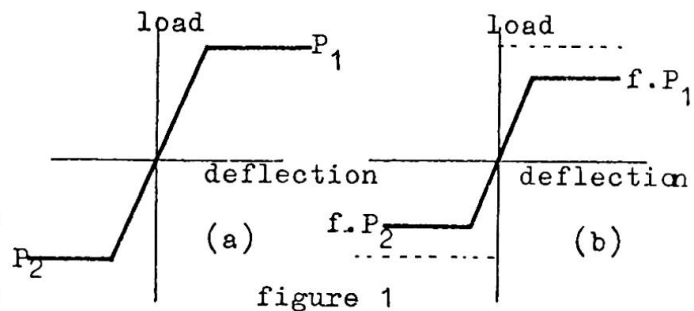
Einfluss der Qualität der Bauelemente auf die Sicherheit von Raumfachwerken

Ir. F.P. TOLMAN Ir. F.C. DE WITTE
 Institute TNO for Building Materials and Building Structures
 Rijswijk (Z.H.), Netherlands

1. INTRODUCTION

In this paper an answer is sought to the question "How does the admissible load of a double-layer grid change, when it contains a certain percentage of 'inferior' members"? In this context, 'inferior' means that for the load-deflection relation of the member concerned the valid situation is that of figure 1b, and not that of figure 1a.

It is assumed that such inferior members retain their stiffness, do not break and are distributed over the entire construction in a random manner.



In the research project, two approaches were used: (a) a Monte Carlo simulation programme based on the displacement method; (b) a theoretical approach based on probability calculus.

2. MONTE CARLO SIMULATION

Whereas for the double-layer grid not only the probability of collapse had to be determined but the probability distribution of collapse loads had also to be found, in order to compare it subsequently with the probability distribution obtained theoretically, it was decided to perform an analogous simulation. The variable was the location of inferior members (random), and our assumptions related to their number and degree of inferiority (= factor f in figure 1b). It was furthermore assumed that in respect of all the members f be equal.

To enable this analogous simulation to be performed, we designed a computer programme, based on the displacement method, which programme calculates the collapse load of a three-dimensional pin-jointed truss by an incremental method.

To make this programme useful for practice, i.e. to keep the calculation time for each collapse load low, we derived a modification algorithm which, with regard to a yielding or a buckling member, permitted the pertinent absence of stiffness to be accounted for in the load vector as an imaginary extra load (figure 2), and not in the stiffness matrix. This extra load, Δk , may be calculated from:

$$\begin{bmatrix} \Delta S^{-1} & -S^{-1} \\ & -m \cdot m \end{bmatrix} \cdot \Delta k = \underline{v} \quad \dots \quad (1)$$

where:

- ΔS = change in stiffness matrix because of yielding or buckling of a member (stiffness of the member)
- S = terms of original stiffness matrix belonging with collapsed member
- \underline{v} = previous displacement vector
- m = number of collapsed members.

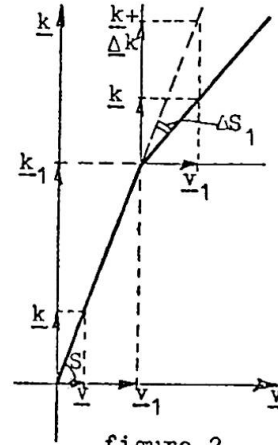


figure 2

From eq (1), we could easily find Δk , because $[\Delta S^{-1} - S^{-1}]$ represents a symmetric matrix (Maxwell). We only had to add one extra column to the matrix for each subsequent member collapsed.

For inversion of the new matrix, the inverse of the preceding one was used (bordering method [1]). Based on this algorithm [2], a very rapid computer programme was evolved. A double-layer grid with 682 elements and 211 Knots (about 600 equations with a half-bandwidth of 39) called for about one minute of calculation time on a CDC 6600 computer for each collapse load calculated (about 50 collapsed members), this is hardly more than a normal elastic calculation.

With the aid of this programme, we made calculations for some types of double-layer grids of various sizes, with various percentages of inferior members and different factors of weakening. The results have inter alia been used to verify whether a statistical approach of the problem was valid.

3. THEORETICAL DERIVATION

It was found possible to approach the problem theoretically, when the structure has one or more clearly discernible mechanisms of collapse in the very state of collapse. In the double-layer grid of figure 3, we distinguish two shear mechanisms and one yield mechanism. We assume that the members do not break and that their connections are stronger than the members themselves.

We now schematize the structure in its state of collapse as is shown in figure 4. The elements in a collapse mechanism we call "critical" elements. For each collapse mechanism, the probability g , that k critical, inferior members (or that k inferior, critical elements) are concerned is found from:

$$g(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{S-k}}{\binom{N}{S}} \quad \dots \quad (2)$$

where N is the number of elements, S the number of inferior, K that of critical elements, and $\binom{K}{k} = \frac{K!}{(K - k)! * k!}$

With each value of k belongs a collapse load, so that the pertinent probability distribution, i.e. the hypergeometric distribution, is at the same time the probability distribution of the collapse load of the mechanism considered.

When the number of critical members is small, over against the number of inferior ones, eq. may be approximated through a binominal distribution; with $P = \frac{K}{N}$ we then find:

$$g(k) = \binom{S}{k} (P)^k (1 - P)^{S - k} \dots\dots (3)$$

When $(N - K) > 50$ and $P < 0.2$, the binomial distribution changes to a Poisson distribution:

$$g(k) = \frac{\left(\frac{S \cdot K}{N}\right)^k}{k!} e^{-\left(\frac{S \cdot K}{N}\right)} \dots\dots (4)$$

And when $P > 0.1$ and $P(1 - P) K > 8$, the binomial distribution changes to the normal distribution:

$$\mu = \frac{S \cdot K}{N} \quad \text{and} \quad \sigma = \sqrt{P(1 - P)K} \dots\dots (5)$$

When, over against the number of critical members, that of the inferior ones is small, we find the same equations except that S and K change places.

Of these latter two distributions (4) and (5), the summated probabilities $g(1) + g(2) + \dots\dots + g(k)$ may be read from a table.

The procedure for calculating the sought probability of collapse may be itemised, with reference to figure 3, as follows:

1. For each individual mechanism of collapse, determine the collapse load; this load will then be in equilibrium with the total load bearing capacity of the critical members.

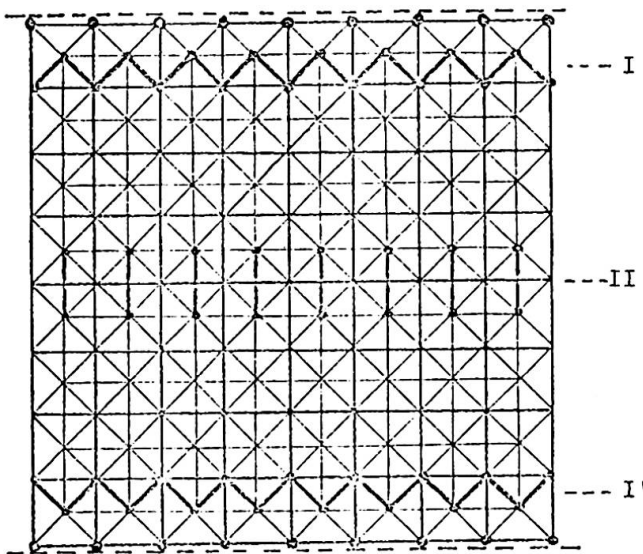
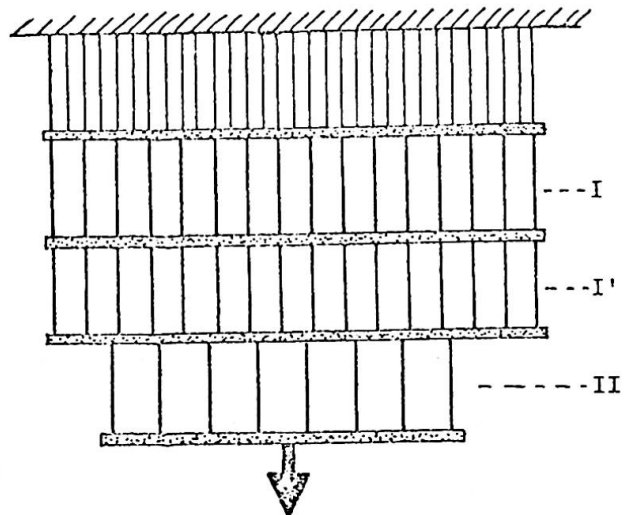


figure 3



load
figure 4

2. For each individual collapse mechanism, the lower bound of the probability distribution of the collapse load; all the inferior members are in the mechanism concerned (LB(1) and LB(2) in fig. 5). Primarily we had assumed the factor of weakening, f , to be equal for all the members. If for each collapse mechanism, in other words: for each type of member, this factor is the same then only the lower bound of the distribution is subject to change.
3. From the results found in 2, calculate the number of members that should be inferior, at least, in order to enable the finding of a contribution towards a probability of collapse, i.e. the number of intervals between $B_{collapse}$ and B_{use} ($B = \text{load}$) when the distance between $B_{collapse}$ and the lower bound is apportioned into as many intervals as there are members in the mechanism.
4. Calculate the probability of collapse for each individual mechanism. Figure 5 presents an elucidation. Beside the load-deflection diagram for the structure, it shows the probability distribution of the collapse load of the two mechanisms sketched. For each mechanism, the probability distribution equals the shaded area of the curve indicating the part of probability distribution that lies below the permissible load. The probabilities that either mechanism I or mechanism I' (cf figure 4) occurs are summated to $P_{(1)}$.

We now know the probabilities of occurrence for the individual mechanisms. We will next find the collapse probability, of the entire structure, if we may assume that the mechanisms do not affect one another, i.e. are stochastically independent, with the aid of:

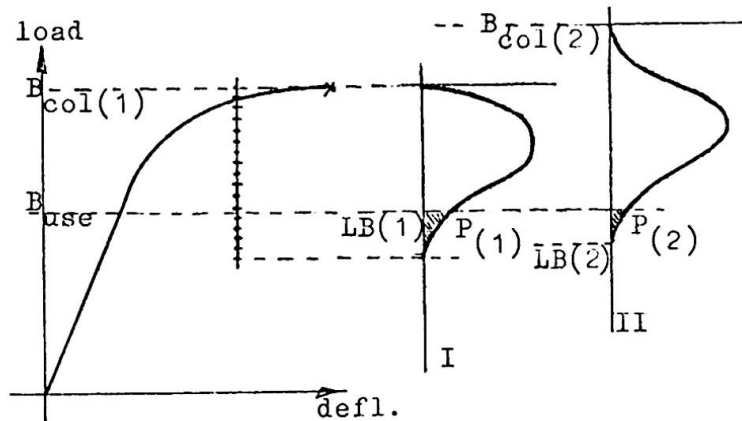


figure 5

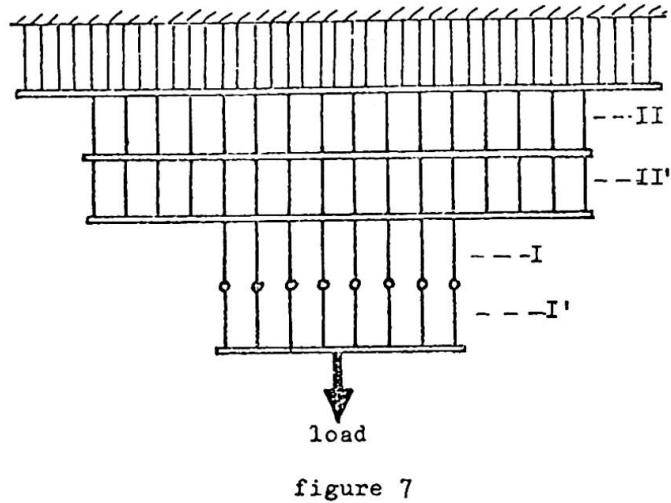
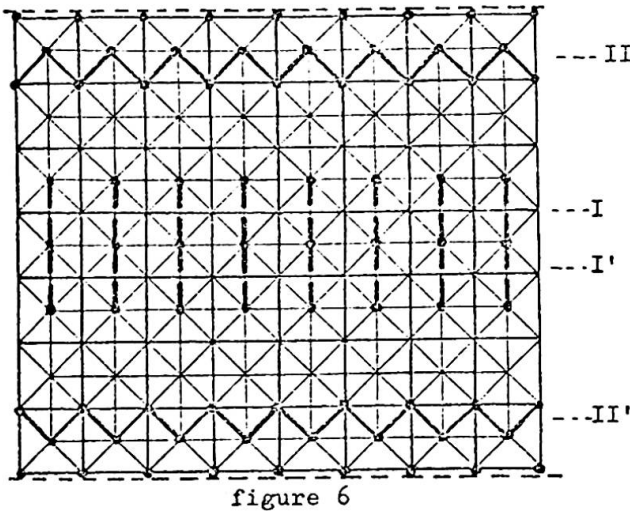
$$P_{(collapse)} = P_{(1)} + P_{(2)} - P_{(1)} \cdot P_{(2)} \quad \dots\dots (6)$$

where:

$$\begin{aligned} P_{(1)} &= \text{the collapse probability of mechanism 1;} \\ P_{(2)} &= \text{the collapse probability of mechanism 2;} \\ P_{(1)} \cdot P_{(2)} &= \text{the probability that mechanisms 1 and 2 occur} \\ &\quad \text{simultaneously.} \end{aligned}$$

When the number of inferior members is about equal to the number of members in each mechanism, the probability of simultaneous occurrence of several mechanisms is nil. Accordingly, $P_{(1)} \cdot P_{(2)}$ will be larger or smaller in dependence upon N , K and S .

It should be noted that eq. (6) applies to uncorrelated mechanisms only. However, different forms of correlation are possible. In fact, members may belong to several mechanisms of collapse at the same time; deformations arising from the collapse of members in one mechanism may affect another mechanism; members from adjacent mechanisms may influence each other, and so on. Of these forms of correlation we shall here discuss the last-mentioned one only.



When (cf figure 6) a member from mechanism I has collapsed, the adjacent member from mechanism I' is relieved and this remains whole.

For this structure, figure 7 then applies. The probability of collapse may be determined for the "complex" mechanism, cf I and I' in figure 7. For the example in figure 6, the collapse load of the non-weakened mechanism is 323 kgf/m². The permissible load is assumed to be 175 kgf/m². The number of members N = 448, K = 16 and; when we take f = 0.5 and S = 200, we find:

1. for the number of strings of members that must be inferior:

$$\frac{f \cdot x + 8 - x}{8} \cdot 323 = 175; \text{ so that } x = 8;$$

2. for the probability that there are 8,9 ...i...16 inferior members in the mechanism:

$$g(i) = \frac{\binom{K}{i} \binom{N - K}{S - i}}{\binom{N}{S}}$$

3. for the probability that 8 inferior strings of members occur for i inferior members:

$$h(i) = \frac{\binom{8}{i - 8} \cdot 2^{16 - i}}{\binom{16}{i}}$$

As a result, we find for the collapse probability of mechanism: I - I':

$$P_{(\text{collapse})} = \sum_{i=8}^{16} g(i) \cdot h(i) = 0.052$$

For a shear mechanism we thus find that at least eleven elements must be inferior: $g(11) + g(12) + \dots + g(16) = 0.042$

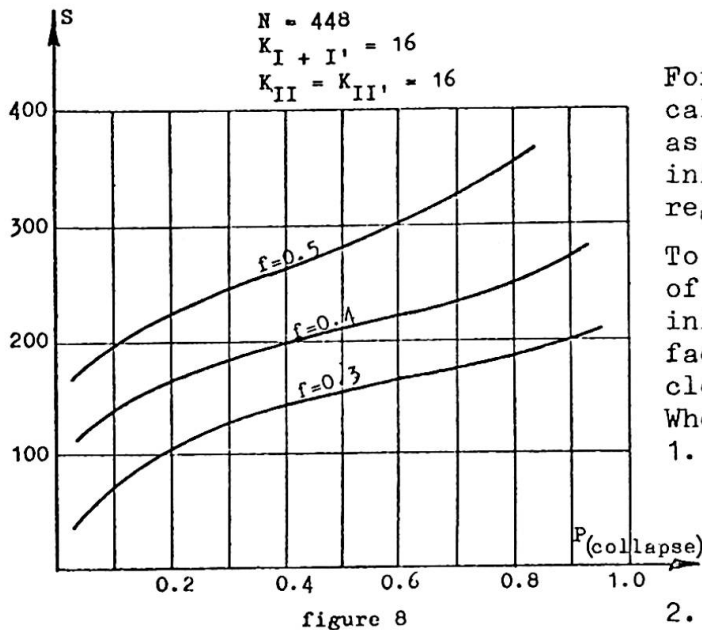
Assuming that the two shear mechanisms are independent, we find for the probability of collapse:

$$P_{(\text{collapse})} = 0.042 + 0.042 - 0.042 \cdot 0.042 = 0.082$$

Analogously, the combination of mechanisms I - I' and II - II' yields:

$$P_{(\text{collapse})} = 0.130$$

Using the Monte Carlo simulation programme, we found a collapse probability of 0.139, which - considering that only the major mechanisms had been concerned in the calculation - indicates that we found an acceptable answer.



For this trial structure, we finally calculated the collapse probabilities, as a function of the number of inferior members (cf figure 8), with regard to several factors of weakening.

To yield a reasonably high probability of collapse, either the number of inferior members must be large or the factor of weakness very low; this is clear from the curve.

Whereas:

1. At a constant percentage of inferior and critical members, the probability of collapse considerably reduces when the structure grows in size;
2. In practice, this type of grids is usually supported on four sides, so

that the number of critical members goes up and, consequently, the probability of collapse diminishes, we suggest that the following conclusion is appropriate.

4. CONCLUSION

Members with, for example, welding defects affect the safety of the investigated multiple statically indeterminate double-layer grids very slightly.

REFERENCES

- [1] V.N. Faddeeva
"Computational methods of linear algebra"
Dover Publications Inc. New York, 1959
- [2] F.P. Tolman and F.C. de Witte
"A modification algorithm for the non-linear analysis of space-trusses"
Report IBBC-TNO, BI-70-108/07.1.620
- [3] F.C. de Witte
"De invloed van ondeugdelijke staven op de veiligheid van vakwerkplaten" Report IBBC-TNO, BI-71-108/07.1.301

SUMMARY

Using an analogous Monte Carlo simulation programme that is based on the displacement method it is shown that a statistic prediction can be made about the probability that double-layer grids in which "inferior" members occur, for example due to welding defects, may collapse. For a trial structure is next calculated the probability of collapse with regard to several factors of weakening as a function of the number of inferior members used. It is found that, to yield a reasonably high probability of collapse, either the number of inferior members should be very large or the members very bad indeed.

III c
Coques métalliques
Stahl- und Leichtmetallschalen
Thin-Walled Metal Shells

Leere Seite
Blank page
Page vide

IIIc

Stability of Thin-Steel Hyperbolic Paraboloid Roofs

Stabilité de toitures minces en acier, de forme paraboloid hyperbolique

Stabilität dünner hyperbolischer Paraboloid-Stahldächer

PETER GERGELY
Structural Engineering
Cornell University
USA

Several types of roofs for a variety of structures may be built of thin-steel hyperbolic paraboloid (hypar) units. The basic unit of such roofs is composed of structural steel or thin-steel edge members and of a warped surface made of thin (light gage) steel panels [1]. Attractive roofs can be constructed by various combinations of these units. The resulting structure has high strength to weight ratio. Some aspects of metal hypar structures have been described by the theme reporter, Monsieur P. A. Lorin.

A remarkable example is shown in Fig. 1. This hangar,

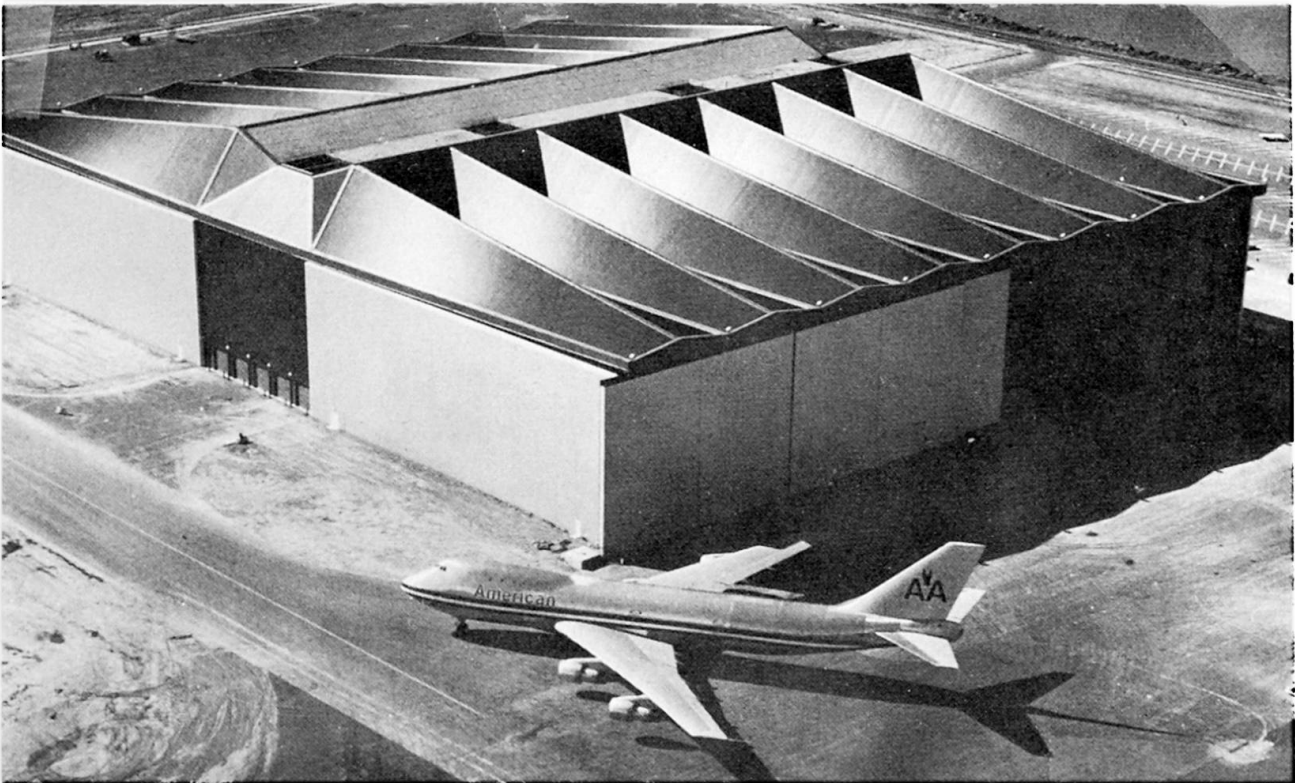


Fig. 1

designed by Lev Zetlin Associates, New York, N.Y., is covered by 230 ft (70 m) long and 56 ft (17 m) wide thin-steel hypar modules. The depth of these free cantilevers varies from 40 ft (12 m) to 4 ft (1.2 m) to accommodate the largest aircraft.

The key to the success of this type of structures lies in the well demonstrated fact [2, 3] that thin-steel diaphragms can resist in-plane shear forces quite well and that the forces in hypar shells are dominated by membrane shear forces.

Design Problems

The calculation of stresses in thin-steel hypars can usually be estimated using the simple membrane theory. This was demonstrated during an extensive analytical and experimental study at Cornell University. However, design is ordinarily controlled by stiffness (deflection and buckling) considerations.

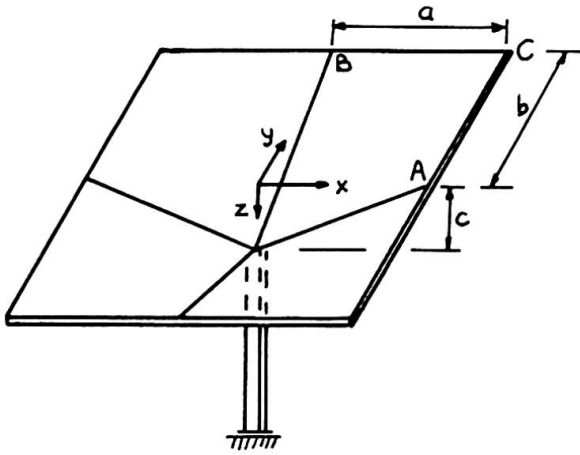


Fig. 2

most important type of instability is the subject of this contribution. Edge member buckling was found to be unimportant in well designed structures [3], and local buckling is discussed in detail in papers on diaphragm design.

Deflections and instability depend strongly on the effective shear rigidity of the deck. This quantity is influenced by several factors [2], primarily by the connections between the deck and the edge members and between the panels of the deck, in addition to the geometry of the deck deformations. Frequently two layers of decking, with the corrugations or deformations running in orthogonal directions, are used to increase stiffness and, in some cases, to decrease bending stresses. The second important factor is the curvature (loosely speaking the rise-span ratio) of the structure.

Shell Buckling

The buckling of thin-steel decks is caused by diagonal compressive stresses associated with membrane shear stresses. The situation is very similar to the behavior of thin webs or shear diaphragms. Whereas the stability of isotropic hypar shells with fully supported edges was evaluated explicitly in a classical paper by Reissner [4], the buckling of orthotropic shells is a much more complex matter because of the presence of several rigidities D_x , D_y , D_{xy} , and D_1 .

Deflections may be a problem at flat corners of several types of hypar roofs (such as at the outside corners of the inverted umbrella roof of Fig. 2), or at the center of shallow deck units.

Instability may develop in three ways: a) the deck may buckle under the membrane shear forces, b) the compression edge members may buckle due to the nonconservative force system transmitted by the membrane shear [1], and c) local buckling of the deck may occur. The first and

Considering the importance of shell buckling in the design of thin-steel hypar structures, the question was approached from several directions. An experimental study consisted of small and medium-scale model tests. Two analytical methods were developed: a rigorous analysis based on the finite element technique, and an approximate analysis using energy methods.

Experimental Investigation

Several tests were performed on small scale, 12 in. by 12 in. (30 cm by 30 cm) umbrella type hypars with sinusoidal corrugated decking [1]. However, it was difficult to assess the basic properties of the deck, connections, and edge members, and therefore these tests resulted in little quantitative data.

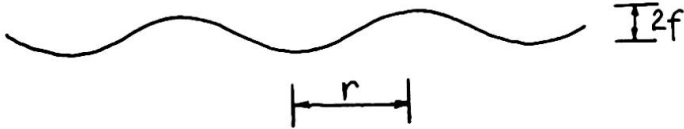


Fig. 3

which $f = 0.25$ in. (6,4 mm) and $r = 1.33$ in. (3,4 cm). The edge members were structural tubing. The decks were attached with #8x5/8 in. self-tapping screws at 2-2/3 in. (6,8 cm) spacing. The models were placed upside down, and the extension of the columns were secured to the floor. The loading was applied with air pressure in rubberized canvas bags. The buckled shell in one of the tests is shown in Fig. 4.

Four medium-scale, 12 ft by 12 ft (3,65 m by 3,65 m) umbrella type hypars were tested. The decking consisted of one or two layers of standard corrugated sheets (Fig. 3), for

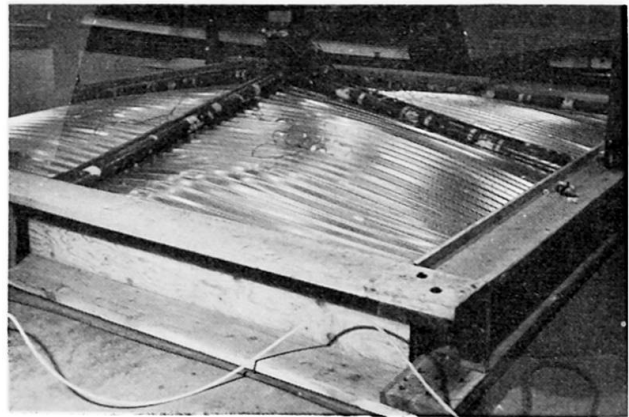


Fig. 4

Finite Element Analysis

The analysis of hypars is a highly complex subject. A number of approaches were based on shallow shell theories to evaluate bending effects and buckling. Often finite-difference solutions have been used. The difficulty with these approaches is the proper consideration of complex boundary conditions, especially in the case of thin-steel structures.

The finite element technique offers a method that can include a number of variables, such as orthotropy, edge member bending in two directions, the eccentricity of connection between the deck and the edge members, local loads, and various support conditions, in a systematic fashion. Two finite element solutions were developed by Banavalkar [3] as part of the present investigation: one used flat rectangular elements, the other employed curved shell elements rectangular in plan. The former is a special case of the latter.

The displacement fields for the curved elements were assumed to be linear for u and v , and the cross product of Hermitian polynomials for w . Linear strain-displacement relationships were utilized. The third strain component is

$$\gamma_{xy} = u_y + v_x - \frac{2c}{ab} w \tag{1}$$

since the equation of the surface is

$$z = \frac{c}{ab} xy \quad (2)$$

The total strain energy is caused by membrane stresses, shell bending, and edge member bending, twisting, axial straining, and warping. The displacement fields for the edge members were linear for axial displacements, and nonlinear cubic for transverse and twist displacements. The possibility of relative displacements at the connection between the deck and the edge members was considered in the analysis.

In the instability analysis, the change of potential energy caused by membrane forces was accounted for. This resulted in the following form of the stiffness equation

$$\{P\} = \left[[K] + [N] \right] \{D\} = [K_{eff}] \{D\} \quad (3)$$

where $[K]$ is the master stiffness matrix, $[N]$ is the incremental stiffness matrix that is equal to the second derivative of the potential energy of the membrane forces, and $\{P\}$ and $\{D\}$ are the load and displacement vectors, respectively. The matrix $[N]$ depends on the in-plane forces, and therefore also on the normal displacements.

In the present investigation a load incrementation method was used instead of a direct eigenvalue evaluation. The load-deflection curve exhibits a rapid change in slope at instability. In each load step the in-plane forces N_x , N_y , and N_{xy} were evaluated from $\{D\}$ using a linear analysis. The new stiffness matrix $[K_{eff}]$ in Eq. (3) was used in subsequent iterations. This procedure was repeated at each load level. The analysis was verified by comparisons with Reissner's approach for the isotropic, fully supported case, and with other finite element studies.

Example

A hyper roof is composed of four units and is supported by four 10 in. (25,4 cm) square tubular columns (Fig. 5). It covers an area of 60 ft by 60 ft (18,3 m by 18,3 m). The low points A, B,

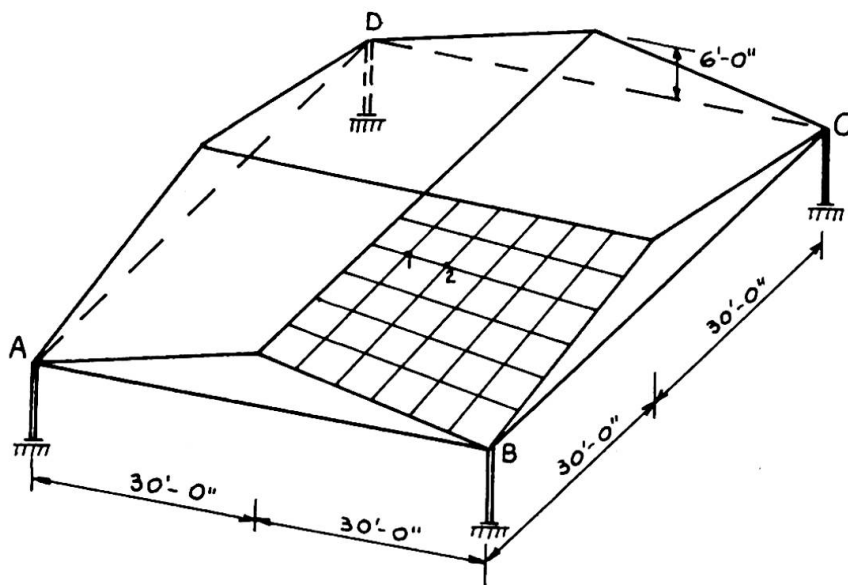


Fig. 5

C, D are connected with 3 in. (7,6 cm) diameter rods along the perimeter. The top horizontal edge members are W30X99 and the sloping outside members are W18X64. The deck is connected eccentrically to the horizontal edge members. The deck is made of two corrugated layers (Fig. 3) with thicknesses of $h = 0.0747$ in. (1,9 mm), and $f = 0.375$ in. (9,5

mm), $r = 1.5$ in. (3,8 cm). The effective shear stiffness of the units was estimated from flat shear tests to be $0.10Gh$.

Deck buckling analysis was carried out by specifying several load steps and three iterations at each load level. The deflections at two selected points (Fig. 5) are plotted in Fig. 6. It is seen that buckling occurs at a load of about 65 psf (320 kg/m^2).

The buckling analysis predicted about 60 psf (295 kg/m^2) critical load for the experiment of Fig. 4; the measured value was about 75 psf (370 kg/m^2). It is suspected that the actual shear rigidity was greater than the value assumed in the analysis.

Analyses indicate that prebuckling deflections and the bending stiffness of edge members have little effect on instability, but the axial stiffness of edge members does influence it somewhat. The deck buckling load of hypars with two layers is ordinarily at least three times greater than that of similar structures with single layers of decking.

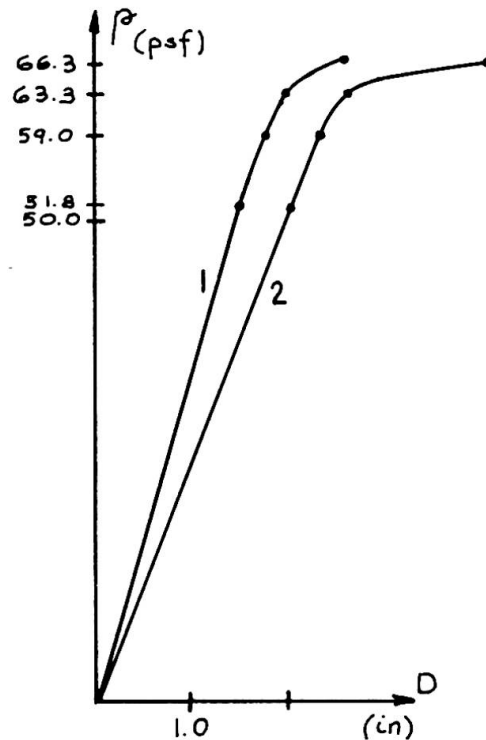


Fig. 6

Energy Analysis

The finite element instability analysis involves considerable computer expense. In order to aid in preliminary designs, an approximate deck buckling analysis was also developed.

The potential energy V of an orthotropic shell is [3, 5]

$$V = \frac{1}{2} \int_0^B \int_0^A [D_x w_{xx}^2 + 2D_1 w_{xx} w_{yy} + D_y w_{yy}^2 + 4D_{xy} w_{xy}^2 + 4G_{eff} h(c/ab)^2 w^2 + 2N_{xy} w_x w_y] dx dy \quad (4)$$

where the subscripts denote partial derivatives and $N_{xy} = pab/2c$ is the membrane shear force in the shell under uniform loading p . The assumed deflected shape was

$$w = \sin \frac{\pi y}{b} \sin \left[\frac{n\pi}{a} (x - sy) \right] \quad (5)$$

where s is the tangent of the angle of the buckles measured from the y axis, and n is the number of buckled waves. This displacement function gave good results in the buckling analysis of flat shear diaphragms.

The substitution of w into Eq. (4) yields

$$P_{cr} = \frac{c}{abs} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 [D_x \beta^2 + 2D_1 (1 + \beta^2 s^2) + D_y (1/\beta^2 + \beta^2 s^4 + 6s^2 + 4D_{xy} (1 + \beta^2 s^2) + \bar{G}/\beta^2] \quad (6)$$

where

$$\beta = \frac{nb}{a} \quad \text{and} \quad \bar{G} = \frac{4G_{eff}h}{\pi^4} \left(\frac{bc}{a}\right)^2$$

This expression has to be minimized with respect to s and n . The buckled shape for a hypar unit with single layer of corrugated sheet decking is shown in Fig. 7.

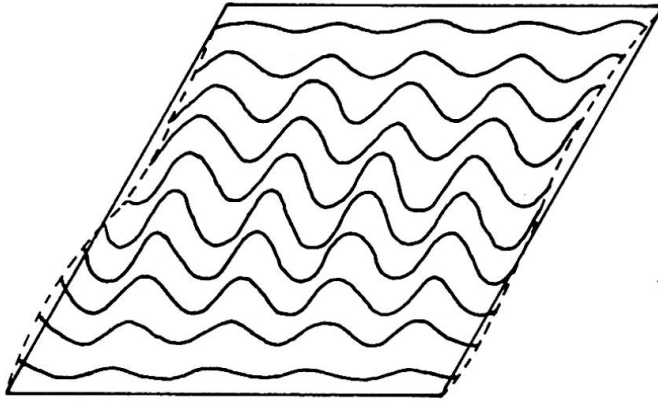


Fig. 7

little expense. Comparative studies to determine the relative importance of variables indicate that the buckling load of single corrugated shells is roughly proportional to

$$\frac{\sqrt[3]{\alpha}}{b^2} \left(\frac{hc}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (7)$$

where α is a nondimensional shear rigidity factor $\alpha = G_{eff}/G$. The accuracy of the factor (7) is indicated in Fig. 8 for standard ($f = 0.25$ in. and $r = 1.33$ in.) and deep ($f = 0.375$ in. and $r = 1.50$ in.) corrugated decks. In the case of double layers, the factor (7) is approximately linear with h .

For single layer shells the bending rigidity in the strong direction (D_y) is, by far, the most important rigidity factor, and p_{cr} varies approximately as $\sqrt{D_y}$. For corrugated decks D_y is approximately equal to

$$D_y \approx \frac{Ef^2h}{3} \left(1.6 + \frac{f}{2r}\right) \quad (8)$$

The effect of D_x is much less, and the influence of D_{xy} and D_1 is negligible for corrugated shells, in fact, D_1 can be taken as zero. But, as mentioned previously, the most important variables affecting the behavior of thin-steel hypars are the curvature c/ab and the effective shear rigidity.

Computer-aided analyses gave results that agreed well with finite element calculations and with tests. For the aforementioned example the buckling load from the energy analysis is 51 psf (250 kg/m²) that occurs at 44.4 degrees and with three half sine waves.

The computer time involved in the search of the minimum of p_{cr} is very small and therefore numerous analyses can be performed with

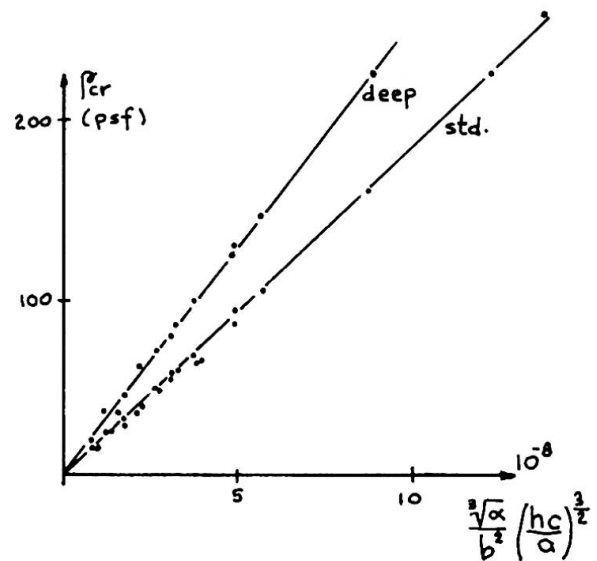


Fig. 8

The approximate buckling analysis and the simple membrane theory may be sufficient in the design of minor structures, such as roofs for service stations. However, in the final design of major structures more complex analyses, for example using the finite element method, must be used to calculate buckling loads, deflections, and stresses.

Acknowledgments

The investigation of thin-steel hypars at Cornell University was supported by the American Iron and Steel Institute. The project was under the general direction of Dr. George Winter. The contribution of Messrs. P. V. Banavalkar, J. E. Parker, A. Banerjee, and R. Muskat is gratefully acknowledged.

References

1. Gergely, P., and Parker, J. E., "Thin-Walled Steel Hyperbolic Paraboloid Structures," Eighth Congress, IABSE, Final Report, New York, 1968.
2. Luttrell, L. D., "Strength and Behavior of Light Gage Steel Shear Diaphragms," Cornell Engineering Research Bulletin, No. 67-1, Department of Structural Engineering, Cornell University, 1967.
3. Gergely, P., Banavalkar, P. V., and Parker, J. E., "The Analysis and Behavior of Thin-Steel Hyperbolic Paraboloid Shells," Report No. 338, Department of Structural Engineering, Cornell University, September 1971.
4. Reissner, E., "Some Aspects of the Theory of Thin Elastic Shells," Journal, Boston Society of Civil Engineers, Vol. XLIII, No. 2, April 1956.
5. Gergely, P., "Buckling of Orthotropic Hyperbolic Paraboloid Shells," Proc. Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, Vol. 98, No. ST1, January 1972.

Summary

The design of hypar shell roofs with thin-steel decking is often controlled by deflections and buckling. Finite element and approximate energy instability analyses are described that may be used by designers. Experiments confirmed the analytical approaches.

Leere Seite
Blank page
Page vide

**Weitgespannte Sandwichkuppel im Werkstoffverbundsystem
Stahlfeinblech-Polyurethanschaum**

Large Span Sandwich Dome in Composite Material System of Thin
Steel Plate and Polyurethan Solid Foam

Coupole de grande portée en construction sandwich tôle d'acier –
mousse de polyuréthane

OTTO JUNGBLUTH

Professor Dr.-Ing.
Bochum, BRD

1. Leichte Flächentragwerke

Bei Flächentragwerken des konstruktiven Ingenieurbaus wird das Verhältnis Konstruktions-Eigengewicht zur Gesamtbelastung mit wachsender Spannweite immer ungünstiger. Um den Nachteil des hohen Konstruktionseigengewichtes bei weitgespannten Flächentragwerken zu vermeiden, verfolgt man neuerdings zwei Wege:

1. Auflösung des Flächentragwerks in zugbeanspruchte Seil- und Seilnetztragwerke
2. Flächentragwerke aus leichten Werkstoffen, z. B. verstärkten Kunststoffen.

Der erste Weg hat den Nachteil, daß das Seilwerk - weil im engeren Sinn eigentlich kein Flächentragwerk - doch zusätzlich mit kleineren Flächenträgern eingedeckt werden muß, und daß der konstruktive Aufwand des Verbundes zwischen Seilwerk und Dachhaut hohe Kosten verursacht.

Der zweite Weg der ausschließlichen Verwendung von Kunststoffen läßt trotz der möglichen Verstärkung mit Fasereinlagen wegen der ungünstig wirkenden Langzeitbeanspruchung keine großen Spannweiten zu. Außerdem ist das zusätzliche Aufbringen von Dämmschichten schwierig und wirtschaftlich kaum vertretbar.

Deshalb verfolgt der Verfasser seit über 10 Jahren einen dritten Weg, nämlich das Ausnützen des günstigen Festigkeits-Gewichts-Verhältnisses von Stahlfeinblechdeckschichten und deren Stabilisierung durch eine gleichzeitig als Wärmedämmung wirkende Kunststoff-Kernschicht. [1]

Über das günstige Tragverhalten von Sandwichflächentragwerken des Werkstoffverbundsystems Stahlfeinblech-Polyurethanschaum und über die Planung einer 15 m weit gespannten Sandwichkuppel wurde bereits während des VIII. Kongresses in New York 1968 berichtet. [2]

Inzwischen wurde diese Kuppel ausgeführt und im Jahre 1970 der Fachwelt vorgestellt.

2. Werkstoffverbundsystem Stahl/Polyurethan

Der Grund, daß Stahlbleche trotz ihrer hohen Festigkeit bisher nur in wenigen Fällen - eigentlich nur in zwei - als Flächentragwerke eingesetzt wurden, nämlich als Tankdächer im Behälterbau und als Stahlfahrbahn im Großbrückenbau, liegt in der aufwendigen Aussteifung gegen Instabilitäten. So beträgt der Gewichts-

wand für Steifen im Verhältnis zum Blech

- im Brückenbau ca. 25 - 30 %
- im Behälterbau ca. 30 - 40 %

Der Ersatz der diskontinuierlichen Steifen durch die kontinuierliche Bettung des Bleches mit Hilfe der Dämmschicht und die Verwendung des selbstklebenden, selbstreagierenden Polyurethan-Gemisches als Hartschaum-Stüttschicht sind als der entscheidende Durchbruch zu einer wirtschaftlichen Sandwich-Flächentragwerktechnik im Hochbau anzusehen. [3]

Die erfolgreiche und sichere Anwendung des Sandwichsystems Stahl/Polyurethan (FEPUR) ist aber an eine entscheidende Bedingung, die nicht unbedingt eine Einschränkung bedeuten muß, gebunden. Auch Polyurethanhartschaum ist als Kunststoff eine organische Substanz, die bei entsprechend hoher Langzeitbeanspruchung zum Kriechen neigt. Es ist deshalb wichtig, zwei Wirkungen der Sandwichkernschicht zu unterscheiden:

1. für ebene Sandwichflächentragwerke vorzugsweise eine Schubübertragung zwischen den beiden Deckschichten,
2. für profilierte und gewölbte Sandwichflächentragwerke vorwiegend eine Stabilisierung der beiden Deckschichten.

Wie auch Versuche inzwischen bestätigt haben, ist die abträgliche Kriechneigung des Polyurethan-Hartschaums bei Langzeitbeanspruchung nur im ersten Fall zu beobachten. Deshalb kommen ebene FEPUR-Sandwichflächentragwerke nur für gering beanspruchte Wandelemente, z. B. für Hallenbeplankungen, in Frage. Für höher beanspruchte Dachtragwerke kann die Kriechneigung des Kunststoffschlams durch eine Konstruktionsform nach Fall 2 ausgeschlossen werden.

Um die Vermeidung der Kriechwirkung bei profilierten und gewölbten Sandwichflächentragwerken im praktischen Langzeit-Großversuch zu beweisen, wurde die Sandwichkuppel Hannover nach Vorschlag des Verfassers von den Firmen Hoesch (Stahl) und Bayer (Polyurethan) errichtet.

Als Werkstoffe wurden verwendet:

Stahlfeinblech der Güte St 37 mit einer Streckgrenze $\sigma_s = 24 \text{ kp/mm}^2$,
25 μ feuerverzinkt und kunststoffbeschichtet

Polyurethan mit den Komponenten des Schäumgemisches:

a) Polyol FWFA (Bayer)	100 Gew. teile
b) Polyol TM (Bayer)	1 " "
c) Isocyanat 44 V (Bayer)	105 " "
d) Aktivator Desmorapid PP (Bayer)	2 " "
e) Treibmittel R 11 (Kali-Chemie)	30 " "
Fluortrichlormethan	

Sowohl aus freigeschäumtem Material als auch aus Versuchs-Sandwichelementen wurden Probekörper entnommen, deren Prüfung folgende Werkstoffkennwerte ergab

Raumgewicht	78 kg/ m^3	Würfel 10/10/10 cm
"	81 "	" 5/ 5/ 5 cm
Druckstabilität	5,1 "	" 5/ 5/ 5 cm
Zerreißfestigkeit	5,5 "	" 10/10/10 cm

Konturänderung bei 80°C 3 Stunden	0,0 %	Würfel 10/10/10 cm
Konturänderung bei -20°C 3 Stunden	0,0 %	" 10/10/10 cm

Die Haftfestigkeit des PU-Schaums am Stahlblech muß so groß sein, daß bei Zerreißversuchen an Probekörpern der Bruch im Schaumkern und nicht in der Haftpuge erfolgt.

3. Konstruktion

Das Kuppeltragwerk hat die in Bild 1 dargestellten Abmessungen. Die Kugel-

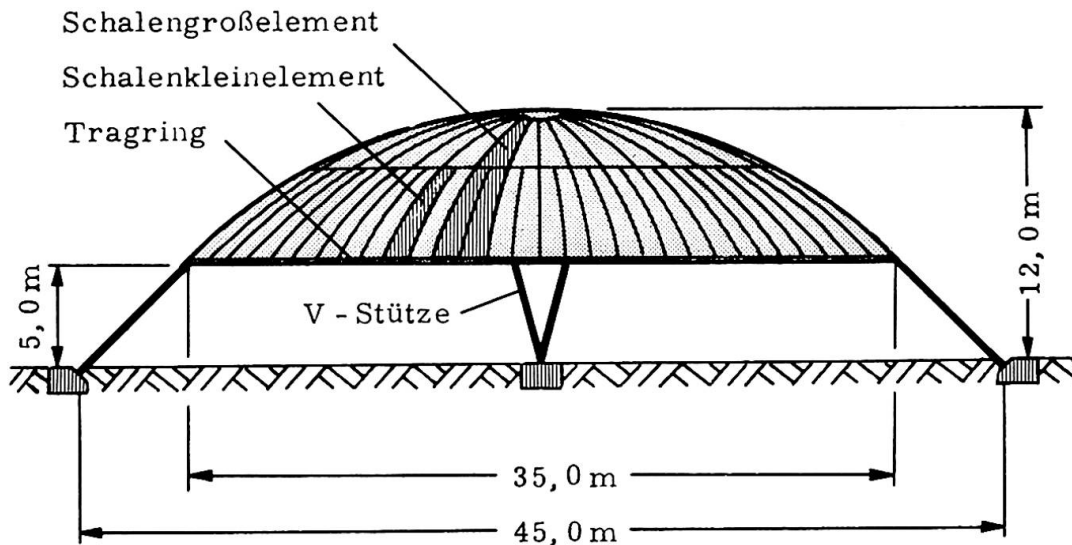
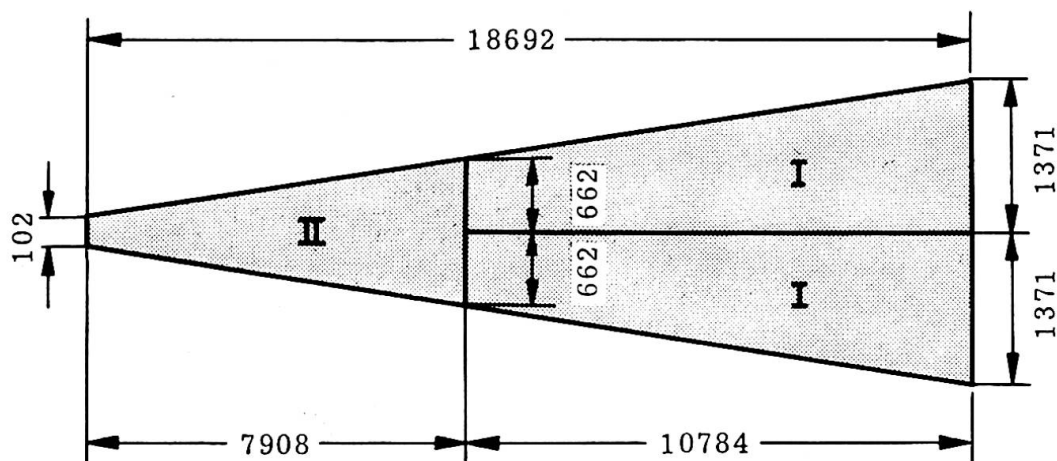


Bild 1

schale mit einem Krümmungsradius $R = 24,7 \text{ m}$ in Meridianrichtung besteht aus 40 Großsegmenten von je $18,69 \text{ m}$ Länge und einer Basisbreite von $2,74 \text{ m}$ am Fußring (Bild 2). Aus fertigungstechnischen Gründen sind die Großsegmente nur einfach, und zwar in Meridianrichtung gekrümmt.



Maße in mm

Bild 2

Die Gesamtdicke des Sandwich-Querschnitts beträgt 150 mm (Bild 3), die Stahldeckschichten sind je 1 mm dick und wurden nur an den Lasteinleitungsstellen der

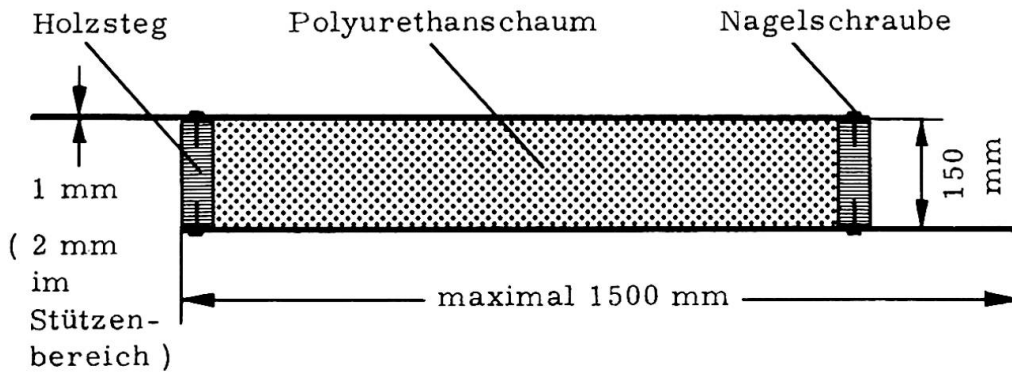
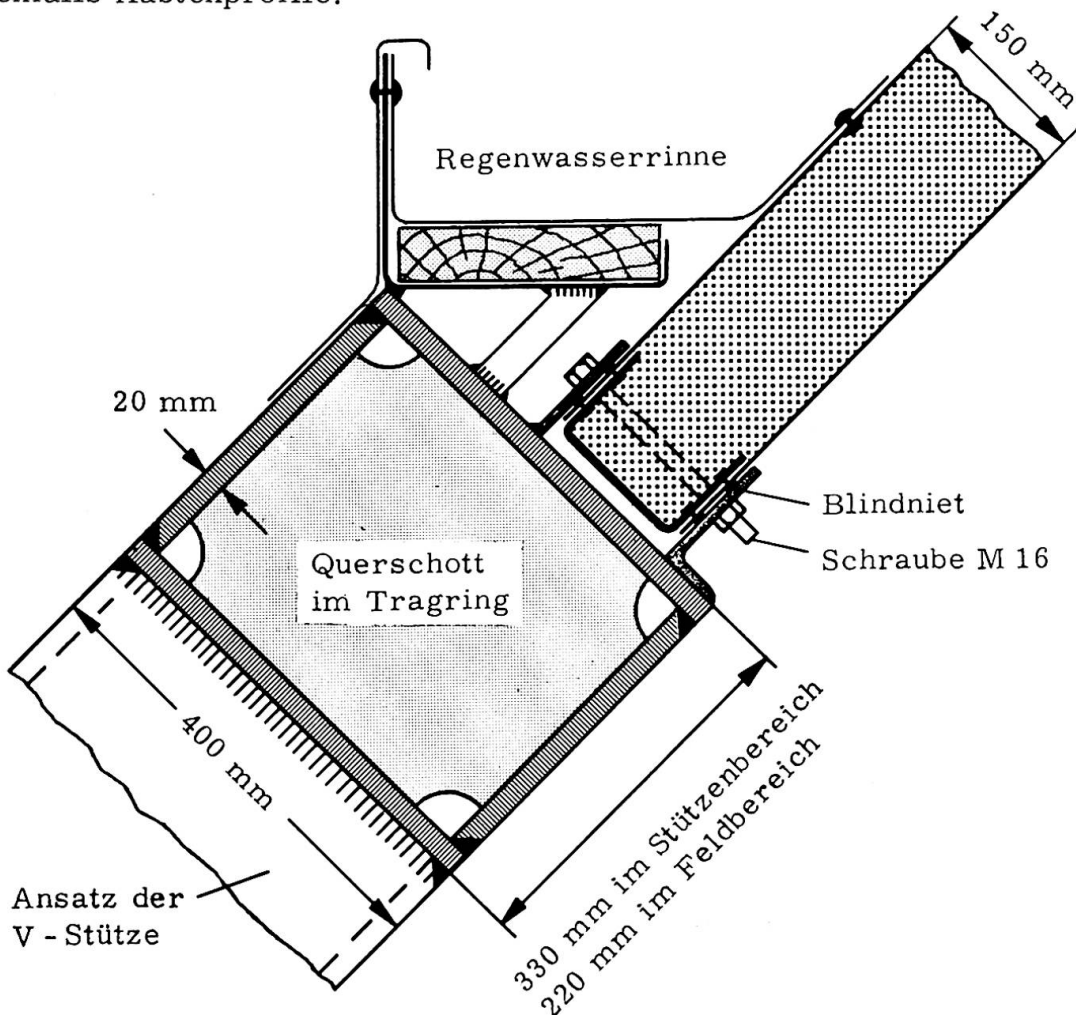


Bild 3

Stützen auf 2 mm verstärkt. Da Stahlblech in der gewählten Segment-Basisbreite nicht hergestellt wird, und da das Ausschäumen so großer Elemente in einer fast 19 m langen Form zu schwierig geworden wäre, wurde das Segment für die Herstellung nochmals in drei Schalenkleinelemente (Bild 2) unterteilt. Die seitlichen Längsränder wurden durch Holzstege abgeschottet, wobei der eine Längsrand jedes Deckblechs zur Schaffung einer Überlappverbindung um je 145 mm überstand. Die Verbindung der Stahlbleche mit den Holzstegen erfolgte mit Nagelschrauben, die Überlappverbindung von Deckblech zu Deckblech mit Blindnieten 4,8 mm ϕ . Der Abstand der Nagelschrauben variiert zwischen 70 mm im unteren und 180 mm im oberen Bereich der Kuppel.

Der Fußring, der die 40 Sandwichgroßsegmente an der Basis aufzunehmen hat, ist ein regelmäßiges Vierzigeck mit Kastenquerschnitt (Bild 4). Die vier V-Stützen sind ebenfalls Kastenprofile.



Ein Schalengroßsegment wiegt einschließlich der Verbindungsfugen 1045 kp, also rund 1 to. Die Leistungsfähigkeit des Werkstoffverbundsystems Stahl/Polyurethan wird am besten aus dem folgenden Vergleich von Kuppeln etwa gleicher Spannweite, aber aus verschiedenen Baustoffen und nach verschiedenen Bauweisen deutlich:

	<u>Eigengewicht</u>
Kuppel Petersdon Rom	$g = 2600 \text{ kp/m}^2$
Stahlbetonkuppel	$g = \text{ca. } 200 \text{ kp/m}^2$
Sandwichkuppel Hannover	$g = 30 \text{ kp/m}^2$

Hierbei ist noch zu beachten, daß in diesem geringen Gewicht des Sandwichtragwerks noch das Eigengewicht der Wärmedämmung des von keinem anderen Dämmwerkstoff übertroffenen Polyurethans ($\lambda = 0,002 \text{ kcal/m h } (^\circ)$) enthalten ist und der Witterungsschutz durch die Kunststoffbeschichtung des Stahlblechs.

Neben der hervorragenden Tragwirkung schließt das Sandwichsystem Stahl/Polyurethan (FEPUR) also noch die notwendigen bauphysikalischen Eigenschaften Wärmedämmung, Witterungsschutz und Dampfsperre sozusagen systemimmanent ein.

4. Berechnung

Der Berechnung lagen folgende Lastannahmen zu Grunde:

a) Eigengewicht

2 Stahlbleche à 1 mm:	$g = 2 \cdot 7,85 = 15,7 \text{ kp/m}^2$
15 cm Polyurethanschaum: ($\rho = 80 \text{ kp/m}^3$)	$g = 80 \cdot 0,15 = 12,0 \text{ kp/m}^2$
Holz-Randstege	$g = \sim 3 \text{ kp/m}^2$
	<hr style="width: 100%;"/> $g \approx 30 \text{ kp/m}^2$

b) Schnee

Vollast	$p_s = 70 \text{ kp/m}^2$
halbseitige Last	$p_s = 50 \text{ kp/m}^2$

c) Wind

Symmetrischer Sog	$p_w = - 95 \text{ kp/m}^2$
Antimetrischer Windanteil	$p_w = + 50 \text{ kp/m}^2$

Die Druck- und Sogverteilung der Windlasten wurde auf Grund von Windkanalversuchen am offenen und geschlossenen Modell ermittelt.

Die Standsicherheitsnachweise hatten folgendes Ergebnis:

4.1 Spannungsnachweis:

Die größte Spannung in den Stahldeckblechen der Sandwichschale im Bereich des Fußrings betrug:

$$\sigma_{\text{max}} = \pm 509 \text{ kp/cm}^2$$

=====

4.2 Stabilitätsnachweis Knittern der Deckschichten:

Nach [1] und [5] gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_{Ki} &= 0,8 \cdot \sqrt[3]{E^D E^K G^K} \\ &= 0,8 \cdot \sqrt[3]{2,1 \cdot 10^6 \cdot 70 \cdot 30} \\ &= 1300 \text{ kp/cm}^2 \\ &=====\end{aligned}$$

Fordert man eine zweifache Sicherheit, so ist eine Spannung von $\sigma = 650 \text{ kp/cm}^2$ für die Deckbleche zulässig. Im vorliegenden Fall wirkt sich außerdem noch die Zugspannung des zweiachsigen Spannungszustandes günstig, d.h. stabilisierend aus.

4.3 Nachweis der Gesamtstabilität

Bei der stark gewölbten Kuppel war ein Durchschlagen nicht zu erwarten, das ergaben auch die beiden Nachweise

a) nach [4]

$$p_D = c \cdot E \left(\frac{\sigma^2}{R} \right) = 3,77 \text{ Mp/m}^2$$

mit $p_{\text{vorh}} = 0,108$ wird

$$\nu_D = \frac{3,77}{0,108} = 35 \\ ===$$

b) nach [5] für weiche Kerne:

$$\nu_D = \frac{2 S}{R} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 1500}{24,70} = 4,05$$

$$\nu_D = \frac{4,05}{0,108} = 40 \\ ===$$

5. Fertigung und Montage

Für die Fertigung der Sandwich-Schalenelemente wurden zur abwechselnden Betriebsweise zwei gleiche Schäumvorrichtungen (Bild 5) gebaut, die so ausgelegt waren, daß sie den auftretenden Schäumdruck von etwa $p = 2 \text{ kp/cm}^2$ aufnehmen konnten. Die zugeschnittenen verzinkten und kunststoffbeschichteten Stahlbleche wurden in die Schäumform eingelegt und an den Rändern mit den Holzstegen durch die Nagelschrauben verbunden, so daß nach Schließen der Deckteile der Schäumform ein allseits geschlossener Hohlraum entstand, in den bei den oberen Schalenelementen (Typ I) durch ein und bei den unteren (Typ II) durch zwei Einfüll-Löcher das Polyurethankomponentengemisch eingespritzt werden konnte. Die Schäummaschine HK 1000 hat eine maximale Austrittsleistung von 190 kg/min. Für das größere untere Schalenelement (Typ II) mit einem Schaumkernvolumen von $1,46 \text{ m}^3$ betrug bei einer Austrittsleistung von 2,6 kg/sec die eingeschossene Menge 120 kg bei einer Einschußzeit von 46 Sekunden. Für das kleinere Firstschalenelement mit $0,72 \text{ m}^3$ Volumen wurde die erforderliche Menge des Polyurethangemisches von 60 kg in 23 Sekunden eingespritzt. Bei dem im Hinblick auf eine gleich-

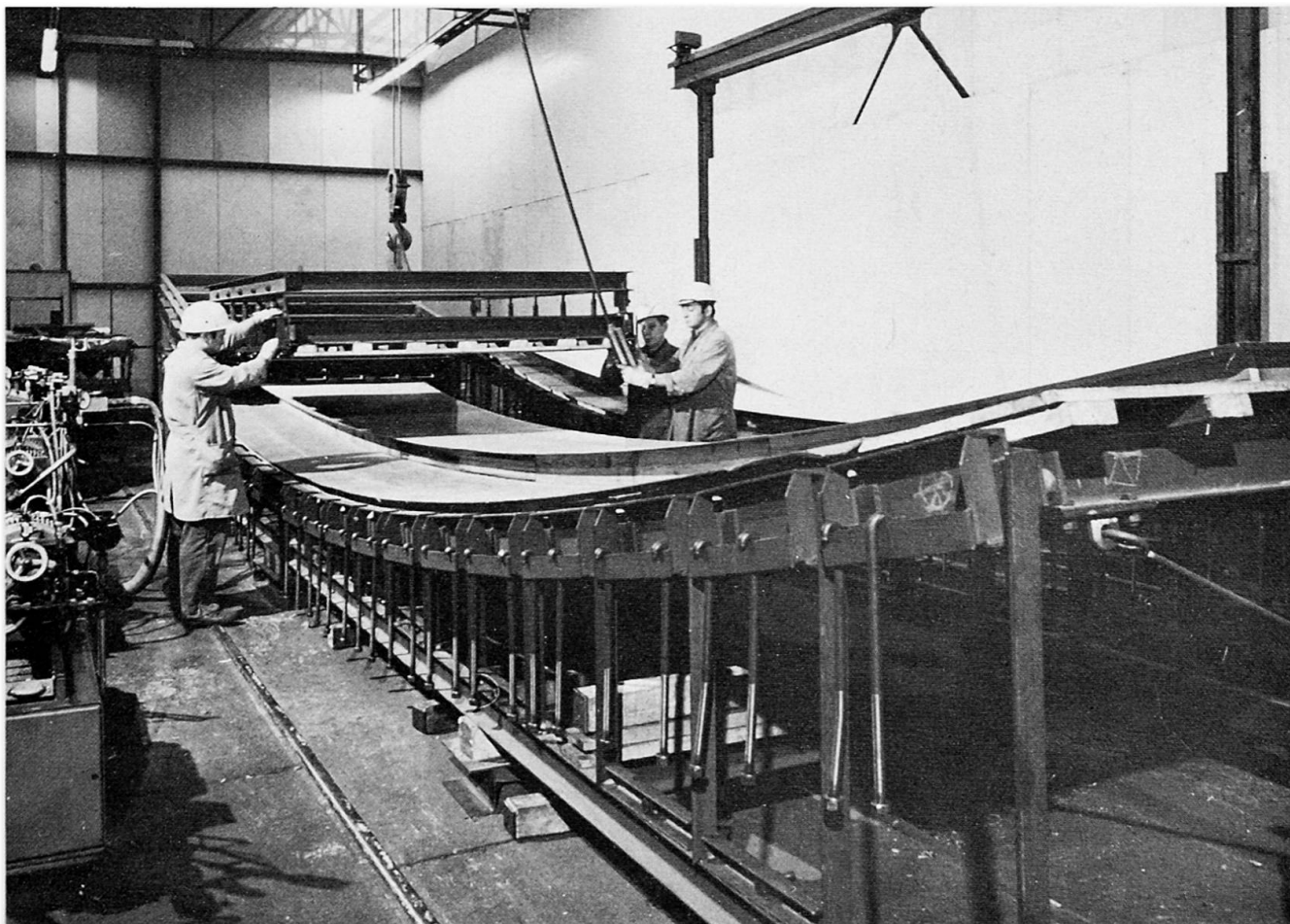


Bild 5

mäßige Schaumstruktur gewählten Verdichtungsgrad von $1:2$, d. h. dem Verhältnis von freiverschäumtem zu formverschäumtem Raumgewicht, baute sich ein Schäumdruck von ca. 2 kp/cm^2 auf. Die Aushärtezeit betrug in Anbetracht des großen Schaumvolumens und im Hinblick auf die noch geringen Erfahrungen bei der erstmalig in dieser Größe für "tragende Bauteile" angewandten FEPUR-Sandwichtechnik 3-5 Stunden. Auf Grund der gewonnenen Erfahrungen kann aber angenommen werden, daß bei so großen FEPUR-Sandwichelementen die Ausschaltzeit auf 1-2 Stunden gesenkt werden kann. Die in einer Versuchswerkstätte der Hoesch AG in Dortmund hergestellten Schalenkleinelemente wurden auf Tiefladern zur Baustelle der Messe Hannover gebracht, wo jeweils drei (Bild 2) in einer Halle zu einem Großsegment zusammengebaut wurden.

Zur Montage wurde zunächst ein Stahlrohr-Lehrgerüst errichtet und darauf die acht Teilstücke des Fußrings montiert und verschweißt, so daß anschließend die vier V-Stützen mit dem Fußring verschweißt werden konnten.

Die vierzig vormontierten Sandwich-Großsegmente von etwa 19 m Länge, 3 m Fußbreite und ca. 1 t Gewicht wurden mit einem Autokran auf den Fußring und das Lehrgerüst aufgelegt (Bild 6). Nach dem Ausrichten wurden die überlappenden Deckbleche mit Blindnieten und die Sandwich-Großelemente mit dem Fußring durch 5 Schrauben M 16 verbunden (Bild 7).

Die Meridianfugen der Großsegmente, die auch die Toleranzen aufzunehmen hatten und auf Grund der Kugelgeometrie zwischen 20 mm am oberen Ende - 85 mm in halber Höhe - und 20 mm am unteren Ende variieren, wurden anschließend mit einer kleineren Baustellenschäummaschine ausgeschäumt. Obwohl das Fugenschäu-

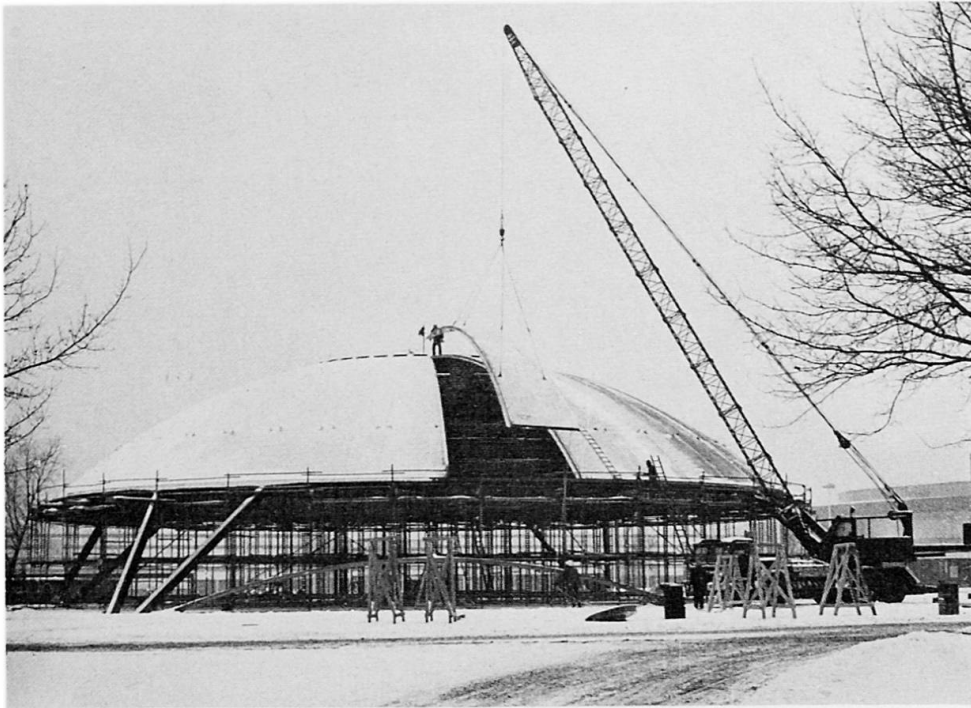


Bild 6

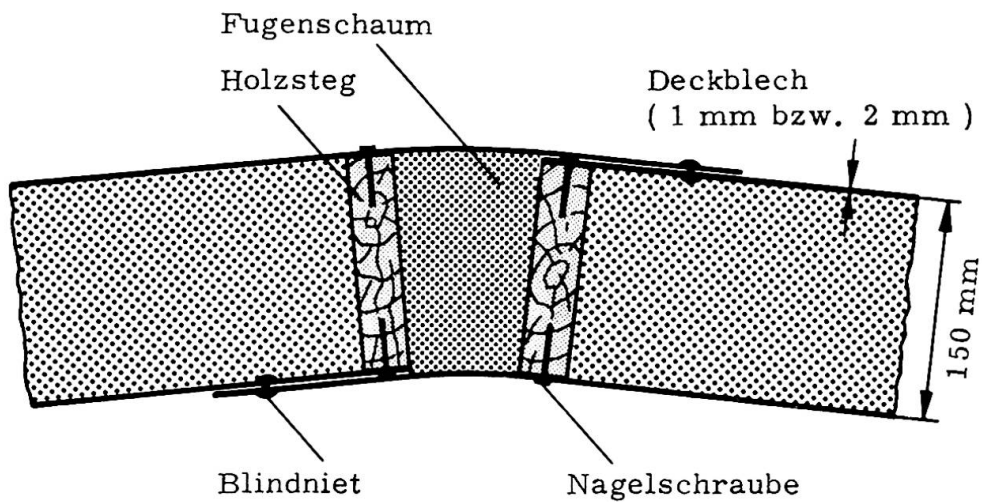


Bild 7

men im Winter durchgeführt wurde, konnte von der zunächst vorsichtshalber vorgesehenen Erwärmung der Fugen durch elektrische Heizmatten abgesehen werden, da sich zeigte, daß auch ohne diese Maßnahmen ein einwandfreier Haftverbund erreicht wurde.

Nach dem Ausschäumen der Fugen wurden Kuppel und Fußring vom Lehrgerüst freigesetzt (Bild 8).



Bild 8

6. Ausblick

Daß diese wohl erstmalig für eine "tragende Konstruktion" und noch dazu mit einer so großen Spannweite von 45 m errichtete Sandwichkugelschale aus 1 mm dickem Stahlblech und 150 mm dickem Polyurethan-Schaumkern eine sehr große Steifigkeit erzielte, zeigte sich bereits nach dem Freisetzen vom Montagegerüst, als eine Mittendurchsenkung von nur 5 mm gemessen wurde.

Aber würde diese Steifigkeit auch langfristig erhalten bleiben oder würden sich das Langzeitverhalten nachteilig beeinflussende Deformationen infolge Kriechen des Schaumkerns ergeben?

Seit der Nullmessung auf dem starren Gerüst am 10. 2. 1970 wurden bisher über einen Zeitraum von etwa 1 1/2 Jahren 20 über die Sandwichkugelschale verteilte Zielpunkte geodätisch vermessen. Die Verformungen der einzelnen zwanzig verteilten Meßpunkte liegen im Bereich weniger Millimeter oder Zehntelmillimeter. Unter ihnen haben einige der Meßpunkte infolge der Temperaturänderung der Jahreszeiten positive und negative Vorzeichen.

Ohne Berücksichtigung des Temperatureinflusses betrug die Höhenverschiebung des Kugelpols

	<u>Durchsenkung</u>	<u>Differenz</u>
10. 2. 70 (Nullmessung auf starrer Lagerung)	0	
13. 2. 70	- 4, 8	- 4, 8
27. 2. 70	- 6, 0	- 1, 2
14. 5. 70	- 7, 4	- 1, 4
26. 5. 71	- 5, 1	+ 2, 3

Dieses günstige Langzeitverhalten läßt erwarten, daß das neuartige Werkstoffverbundsystem Stahl/Polyurethan (FEPUR) im Konstruktionssystem der Sandwichtechnik zur Grundlage einer neuen Tragwerkstechnologie des konstruktiven Ingenieur-

baus werden wird. Voraussetzung ist allerdings, daß die Konstruktionsformen in Anpassung an dieses Werkstoffverbundsystem gestaltet werden.

Über bereits in der Entwicklung befindliche FEPUR-Sandwichbauteile für ein Fertigteilsystem und deren kontinuierlich-verfahrenstechnische Herstellung auf einer automatisierten Fertigungslinie wird zu gegebener Zeit berichtet.

Literaturhinweise

- 1 O. Jungbluth/H. Witte
"Das Verbundsystem Stahl/Kunststoff in der Sandwichtechnik"
HOESCH-Berichte aus Forschung und Entwicklung 3/68
- 2 O. Jungbluth
"Sandwichflächentragwerke im Stahlbau"
IVBH VIII. Kongreß New York, Schlußbericht Seite 333 - 343
- 3 O. Jungbluth
"Sandwichflächentragwerke im konstruktiven Ingenieurbau"
Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Düsseldorf, Vortrag N 208
- 4 K. Klöppel/O. Jungbluth
"Beitrag zum Durchschlagproblem dünnwandiger Kugelschalen. (Versuche und Bemessungsformeln"
DER STAHLBAU 1953, Seite 121-130
- 5 F. J. Plantema
"Sandwich Construction"
John Wiley Inc. New York, London, Sidney 1966

Zusammenfassung

Es wird die Konstruktion, Herstellung und Montage einer 45 m weitgespannten Sandwichkugelschale aus dem Werkstoff-Verbundsystem Stahl/Polyurethan beschrieben.

Das bisher über eineinhalb Jahre verfolgte günstige Langzeitverhalten der Sandwichkuppel läßt erwarten, daß dieser Werkstoffverbund von Stahl und Kunststoff in der Konstruktionsform der Sandwichtechnik eine neue leistungsfähige und wirtschaftliche Leichtbau-Tragwerkstechnologie begründet.

Cylindrical Shells Made of Corrugated Sheets

Coques cylindriques en tôles nervurées

Zylinderschalen aus gerippten Blechen

G. ABDEL-SAYED

Associate Professor

M.N. EL-ATROUZY

Research Assistant

Department of Civil Engineering

University of Windsor

Windsor, Ontario, Canada

INTRODUCTION

The advantages of using light gauge steel sheets in folded plate roofs has been established through studies and practical applications in both Canada and the U.S.A. It is also generally recognized that cylindrical shell roofs have better carrying characteristics, as they translate the applied loads into mainly membrane forces. Furthermore, corrugated sheets with cylindrical curvature are widely available and so far they are employed mainly in non-structural capacities.

This study is to establish methods of analysis and also economical applications of cylindrical shells made of corrugated sheets.

GOVERNING DIFFERENTIAL EQUATIONS

The shells are considered as being made of elastic orthotropic material in which the mechanical properties are equal to the average properties of the corrugated sheets. For the arc-and tangent-type of corrugation, Fig. 1, these properties are [1,3]:

$$D_{\phi} = \frac{\ell}{c} t E \quad (1a)$$

$$D_x = \frac{E}{6(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{f}\right)^2 t \quad (1b)$$

$$D_{x\phi} = \rho \frac{Et}{2(1+\mu)} \frac{c}{\ell} \quad (1c)$$

$$B_{\phi} = 0.522 E f^2 t \quad (1d)$$

$$B_x = \frac{c}{\ell} \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \quad (1e)$$

$$B_{x\phi} = \frac{\ell}{c} \frac{Et^3}{12(1+\mu)} \quad (1f)$$

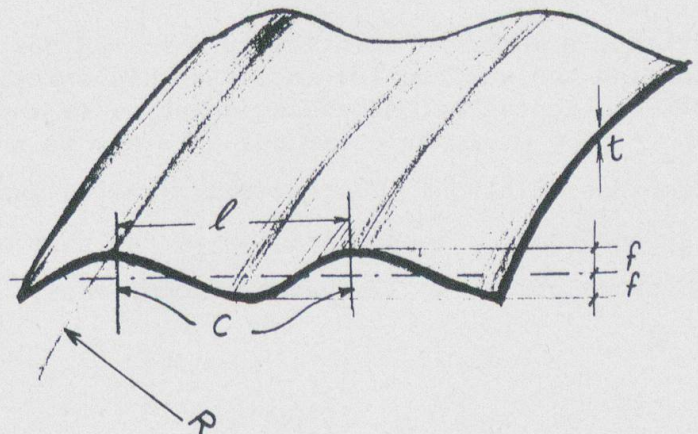


Fig. 1: Arc-and Tangent Corrugation

in which: D_x and D_{ϕ} = axial rigidity

in the x - and ϕ directions respectively;

$D_{x\phi}$ = shear rigidity in the $x\phi$ -plane; B_x and B_{ϕ} = bending rigidity in the xz - and ϕz -planes respectively; $B_{x\phi}$ = torsional rigidity; t = average thickness of the sheet;

c = corrugation pitch; ℓ = developed length of corrugation per pitch; f = half depth of corrugation; E = modulus of elasticity of steel; μ = Poisson's ratio; and ρ = a reduction factor to account for the effect of slip at sheet to sheet and sheet to frame connections [3].

The differential equations governing the behaviour of the shell are obtained by using the above mentioned properties together with the equilibrium conditions and geometric relationships of an infinitesimal element $dx.Rd\phi$. These equations are:

$$D_x \ddot{u} + \frac{B_x}{R} \ddot{w} + D_{x\phi} \left(\frac{\dot{u}}{R} + \frac{\dot{v}}{R} \right) + \frac{B_{x\phi}}{2R^3} \left(\frac{\dot{u}}{R} - \dot{w} \right) + p_x = 0 \quad (2a)$$

$$D_\phi (\ddot{v} - \dot{w}) + D_{x\phi} (R \dot{u}' + R^2 \ddot{v}) + \frac{3B_{x\phi}}{2} (\ddot{v} + \dot{w}') + p_\phi R^2 = 0 \quad (2b)$$

$$D_\phi (\dot{v} - w) - \frac{B_y}{R^2} (w + 2w + w) - (B_x R^2 \ddot{w} + B_x R \ddot{u}) - (2 B_{x\phi} \ddot{w} + B_{x\phi} \ddot{v}) - \frac{B_{x\phi}}{2R} \dot{u}' + \frac{B_{x\phi}}{2} \dot{v}' + p_z R^2 = 0 \quad (2c)$$

in which $(\dot{\quad}) = \frac{\partial(\quad)}{\partial\phi}$, $(\quad)' = \frac{\partial(\quad)}{\partial x}$; p_x , p_ϕ and p_z are the components of the surface (external) loading in the x -, ϕ - and z - directions respectively.

The system of equations, Eqs. 2a, b, c, is derived without approximation. It encounters a number of terms which have insignificant effect on the results in shallow and/or short shells. These terms may be neglected and the system of equations is simplified as follows:

$$D_x \ddot{u} + D_{x\phi} \left(\frac{\dot{u}}{R} + \frac{\dot{v}}{R} \right) + p_x = 0 \quad (3a)$$

$$D_\phi (\ddot{v} - \dot{w}) + D_{x\phi} (R \dot{u}' + R^2 \ddot{v}) + p_\phi R^2 = 0 \quad (3b)$$

$$D_\phi (\dot{v} - w) - (B_x R^2 \ddot{w} + 2B_{x\phi} \ddot{w} + \frac{B_\phi}{R} \ddot{w}) + p_z R^2 = 0 \quad (3c)$$

METHOD OF SOLUTION

First, a membrane solution is obtained for the governing differential equations considering the surface loading. In this solution the boundary conditions are not satisfied. Thereafter a bending solution of the equations with no surface loading, $p_x = p_\phi = p_z = 0$, is superimposed in order to satisfy the boundary conditions.

A - Membrane Solution: The external load is analysed in its three components p_x , p_ϕ and p_z . As an example, a snow loading in the form of a sine wave, with maximum intensity p at the crown of the shell, has the components:

$$p_x = 0 \quad (4a)$$

$$p_\phi = \frac{-4p}{n\pi} \cos(\phi_e - \phi) \sin(\phi_e - \phi) \cos \frac{\lambda x}{R} \quad (4b)$$

$$p_z = \frac{4p}{n\pi} \cos^2(\phi_e - \phi) \cos \frac{\lambda x}{R} \quad (4c)$$

in which $\lambda = \frac{\pi R}{L}$; L and R = the length and radius of curvature of the shell respectively; ϕ_e = half the central angle.

The membrane solution corresponding to the given snow loading is:

$$N_x = -\frac{12p}{R\pi k^2} \cos 2(\phi_e - \phi) \cos kx \quad (5a)$$

$$N_\phi = -\frac{4pR}{\pi} \cos^2(\phi_e - \phi) \cos kx \quad (5b)$$

$$N_{x\phi} = \frac{6pL}{\pi^2} \sin 2(\phi_e - \phi) \sin kx \quad (5c)$$

$$w = \frac{12p}{\pi} \left[\frac{1}{D_{x\phi} k^2} + \frac{4}{R^2 k^4 D_x} \right] \cos 2(\phi_e - \phi) \cos kx \quad (5d)$$

$$v = -\frac{6p}{\pi} \left[\frac{1}{D_{x\phi} k^2} + \frac{4}{R^2 k^4 D_x} \right] \sin 2(\phi_e - \phi) \cos kx \quad (5e)$$

$$u = -\frac{12p}{Rk^3 \pi D_x} \cos 2(\phi_e - \phi) \sin kx \quad (5f)$$

in which $k = \frac{\pi}{L}$.

B - Bending Solution: The bending solution can be assumed as follows:

$$w = E^* e^{m\phi} \cos \frac{\lambda x}{R}, \quad u = F^* e^{m\phi} \sin \frac{\lambda x}{R}, \quad v = G^* e^{m\phi} \cos \frac{\lambda x}{R} \quad (6a,b,c)$$

in which E^* , F^* and G^* are constants.

Eqs. 6a, b, c are substituted in the governing equations, Eqs. 2a, b, c, after replacing p_x , p_ϕ and p_z by zero. A non-trivial solution of the resulting homogeneous system of equations is governed by the following characteristic equation:

$$\begin{aligned} m^8 + m^6 \left[2 - \lambda^2 \left(\frac{D_x}{D_{x\phi}} + \frac{2B_{x\phi}}{B_\phi} \right) \right] + m^4 \left[\lambda^4 \left(\frac{D_x}{D_\phi} + \frac{2D_x B_{x\phi}}{B_\phi D_{x\phi}} + \frac{B_x}{B_\phi} \right) - \lambda^2 \left(\frac{2D_x}{D_{x\phi}} + \frac{2D_\phi B_x}{D_{x\phi} B_\phi} + 1 \right) \right] \\ + m^2 \left[-\lambda^6 \left(\frac{D_x B_x}{D_{x\phi} B_\phi} + \frac{2D_x B_{x\phi}}{D_\phi B_\phi} \right) + \lambda^4 \left(\frac{2D_x}{D_\phi} - \frac{2B_x}{B_\phi} + \frac{3D_x B_{x\phi}}{D_{x\phi} B_\phi} \right) - \lambda^2 \left(\frac{2B_{x\phi}}{B_\phi} + \frac{D_x}{D_{x\phi}} \right) \right] \\ + \left[\lambda^8 \left(\frac{D_x B_x}{D_\phi B_\phi} \right) + \lambda^4 \left(\frac{D_x R^2}{B_\phi} + \frac{3D_x B_{x\phi}}{2D_{x\phi} B_\phi} + \frac{D_x}{D_\phi} \right) \right] = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

A simplified characteristic equation can be obtained in a similar way by substituting Eqs. 6a, b, c in the simplified set of equations Eqs. 3a, b, c:

$$\begin{aligned} m^8 + m^6 \left[-\lambda^2 \left(\frac{D_x}{D_{x\phi}} + \frac{2B_{x\phi}}{B_\phi} \right) \right] + m^4 \left[\lambda^4 \left(\frac{D_x}{D_\phi} + \frac{2B_{x\phi} D_x}{B_\phi D_{x\phi}} + \frac{B_x}{B_\phi} \right) \right] \\ + m^2 \left[-\lambda^6 \left(\frac{2B_{x\phi} D_x}{B_\phi D_\phi} + \frac{B_x D_x}{B_\phi D_{x\phi}} \right) \right] + \left[\lambda^8 \left(\frac{D_x B_x}{D_\phi B_\phi} \right) + \lambda^4 \left(\frac{D_x R^2}{B_\phi} \right) \right] = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

If isotropic properties are considered for the shell, Eq. 7 and Eq. 8 yield the well known characteristic equations of Flügge and Donnell respectively.

The roots of either Eq. 7 or Eq. 8 can be written as follows:

$$m = \pm \alpha_1 \pm i\beta_1 \quad \text{and} \quad m = \pm \alpha_2 \pm i\beta_2 \quad (9)$$

and the deflection, w :

$$w = \{ e^{\alpha_1 \phi} [A_n \cos \beta_1 \phi + B_n \sin \beta_1 \phi] + e^{-\alpha_1 \phi} [C_n \cos \beta_1 \phi + D_n \sin \beta_1 \phi] + e^{\alpha_2 \phi} [E_n \cos \beta_2 \phi + F_n \sin \beta_2 \phi] + e^{-\alpha_2 \phi} [G_n \cos \beta_2 \phi + H_n \sin \beta_2 \phi] \} \cos \frac{\pi}{L} x \quad (10)$$

The values of a set of roots, Eq. 9, are considered to be exact when calculated from Eq. 7 and approximate when calculated from the simplified Eq. 8. The deviations between these sets of roots increase with the increase of the ratios L/R. The average error in the 8-roots is taken as a base to determine the ratio L/R within which the simplified system of equations can be used with a reasonable degree of accuracy in the final results. Fig. 2 shows the percentage of the error versus L/R. It also shows a similar curve for the percentage of errors in the 8-roots when using the simplified equations for concrete shells (Donnell equations of isotropic shells).

The simplified Donnell equations are generally accepted for isotropic shells when $L/R < 1.6$ [5]. Fig. 2 shows that for $L/R < 3.9$, the same degree of approximation is not exceeded by using the simplified equations, Eqs. 3a, b, c for shells made of corrugated sheets.

BOUNDARY CONDITIONS

Three practical types of shells are analysed:

I - shells with longitudinal stiffeners in the valleys only; II - shells with longitudinal stiffeners in valleys and crowns; III - half barrels supported along their four edges. Figs 3a, b, c show these three shells with the boundary conditions to each one of them.

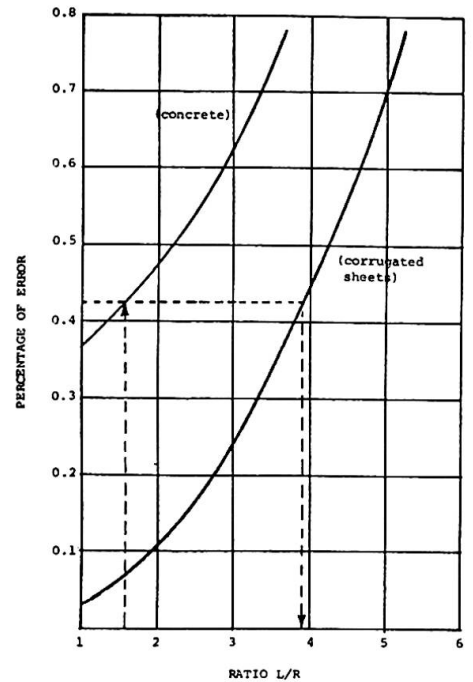
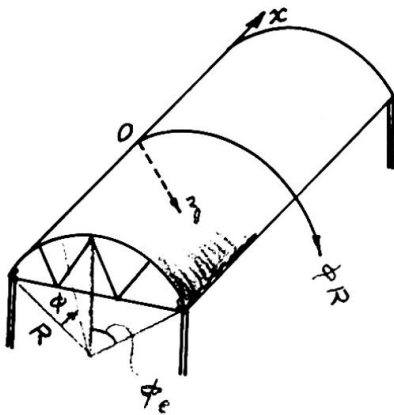


Fig. 2: Percentage of error in roots vs. the ratio L/R



SHELL I

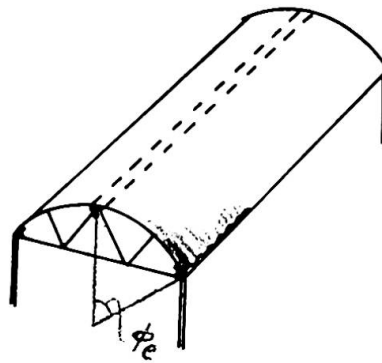
At $\phi = 0$ and $\phi = 2\phi_e$;

$M_\phi = 0$

$Q_\phi = 0$

$N_\phi = 0$

$\epsilon_{x,shell} = \epsilon_{x,stiffener}$



SHELL II

At $\phi = 0$, same as case I

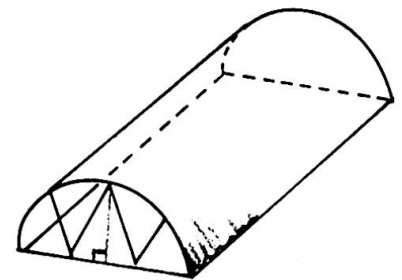
At $\phi = \phi_e$;

$Q_\phi = 0$

$\theta = 0$

$v = 0$

$\epsilon_{x,shell} = \epsilon_{x,stiffener}$



SHELL III

At $\phi = 0$ and $\phi = 2\phi_e$

$w = 0$

$M_\phi = 0$

$v = 0$

$\epsilon_x = 0$

Fig. 3: Types of Shells and Their Boundary Conditions

THEORETICAL RESULTS

The membrane and bending solutions are superimposed and the integration constants A_n, B_n, \dots of Eq. 10, are calculated for each type of shell satisfying the boundary conditions. In a similar way the displacements u and v are found and the components of internal forces are calculated and arranged in tables for practical use. These tables will be reported in reference [4].

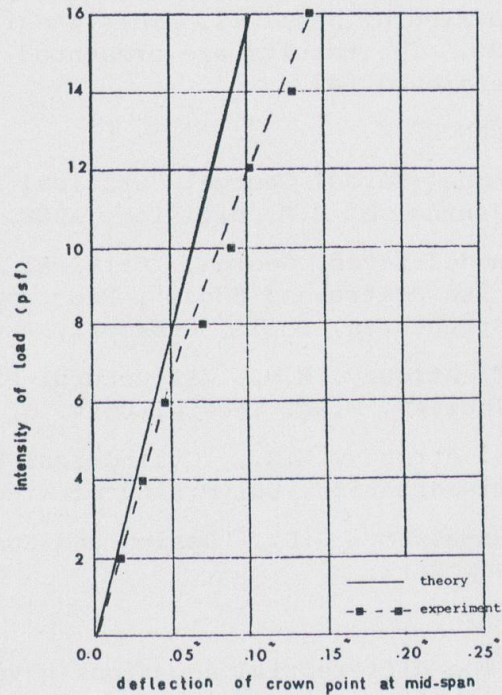
COMPARISON BETWEEN THEORETICAL AND EXPERIMENTAL RESULTS

An experimental program was undertaken with full scale tests for the shells I and II, Fig. 3a, b. The experimental results show good agreement with those obtained theoretically. Fig. 4a, b, c are taken as a sample from the experimental program given in reference [4].

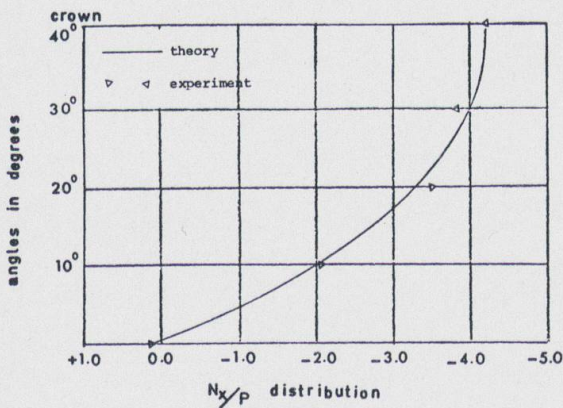
OBSERVATIONS AND CONCLUSIONS

1 - The theoretical analysis is verified experimentally. This proves that treating the corrugated sheets as orthotropic shells is a valid approach which adequately considers the main features of response of the shells.

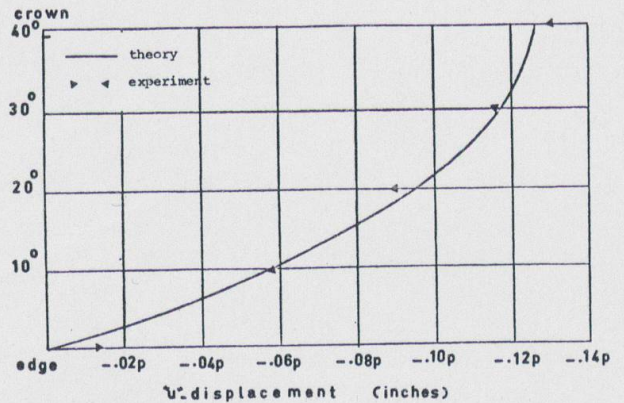
2 - Design formulas and tables are prepared for practical use [4]. These formulas are based on the simplified governing equations, Eqs. 3a, b, c, which yield results with sufficient degrees of accuracy for shells with



2 - COMPARISON BETWEEN THEORETICAL AND EXPERIMENTAL LOAD-DEFLECTION CURVES OF CROWN POINT AT MID-SPAN.



4a - COMPARISON BETWEEN THEORETICAL AND EXPERIMENTAL VALUES OF N_x -DISTRIBUTION AT MID-SPAN.



4b - COMPARISON BETWEEN THEORETICAL AND EXPERIMENTAL VALUES OF THE DISPLACEMENT u^* AT SUPPORT.

Fig. 4: Comparison Between Experimental and Theoretical Results

the ratio $L/R \leq 3.9$. Shells with higher L/R ratios are handled as follows: a - Shell I undergoes too large deflections and becomes of no practical use; b - Shell II can be analysed as a beam. This approach yields results that are reasonably in agreement with the present analysis when $L/R \approx 3.5$. Furthermore, the beam approach is expected to lead to better results for shells with higher ratios of L/R ; c - The analysis of Shell III with $L/R > 3.9$ requires the use of the exact equations, Eq. 2a, b, c. This problem is

now under investigations.

3 - The local shear buckling is a prime factor in determining the ultimate load that can be carried by Shell II. This shear buckling was examined theoretically and experimentally [1, 2]. The results are presented in tables to supplement the design ones referred to in reference [4].

REFERENCES

1. Abdel-Sayed, George, "Critical Shear Loading of Curved Panels of Corrugated Sheets", Journal of E.M. Division, ASCE, Dec. 1970, pp. 895-912.
2. Abdel-Sayed, George, "Critical Shear Loading of Curved Panels of Corrugated Sheets With Restrained Edges", Proc. of the 1st Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures, Rolla, Missouri, Aug. 1971, pp. 167-172.
3. El-Atrouzy, M.N., "Structural Properties of Corrugated Sheets Used in Cylindrical Shells", M.Sc. Thesis, Univ. of Windsor, Windsor, Ontario, 1969.
4. El-Atrouzy, M.N., "Cylindrical Shell Roofs made of Corrugated Sheets", Ph.D. Dissertation, University of Windsor, (to be submitted in Sept. 1972).
5. Ramaswamy, G.S., "Design and Construction of Concrete Shell Roofs", McGraw-Hill, New York.

SUMMARY

The differential equations governing the behaviour of shells made of corrugated sheets are established in an exact as well as in a simplified form. The simplified equations yield acceptable results when the ratio of length to radius of the shell is less than 3.9. Membrane and bending solutions are superimposed to satisfy the governing equations as well as the boundary conditions.

An experimental program verified the theoretical results and showed that treating the corrugated sheets as orthotropic shells is an acceptable approach.

Double-Layer Space Frame Shells

Coupole à deux nappes et à treillis

Zweischichtige schalenförmige Rahmen

A. DI TOMMASO

A. LA TEGOLA

Istituto di Tecnica delle Costruzioni

Facoltà di Ingegneria

University of Naples, Italy

Introduction: The double-layer reticulated shells are being used with increasing frequency to span large areas because they are less sensitive than single-layer shells to the progressive instability. The interest in prefabricated units for these double-layer shells is growing constantly. In the first section of this paper we present some types of prefabricated units of standard size and shape for these structures. In the second section we suggest a simple procedure for evaluating the collapse-load taking into account plasticity and post-buckling behaviour for reticulated structures. This evaluation is the main requirement for a minimum-weight design.

1,1) Units of standard size for double-layer reticulated shells

Let us think a plate subdivided in elementar cubes whose edges are equal to the plate thickness t (fig. 1A). This elementar cube can be divided in five tetrahedra (this is possible in two different ways). One of these tetrahedra is regular its edges measuring $t\sqrt{2}$, (fig. 1B). Let us consider, now, as first step, instead of each cube its fundamental tetrahedron defined by the condition that two connected tetrahedra have the upper (or lower) edge perpendicular each other. As second step we substitute to the compact tetrahedron a reticulated one consisting of six bars laying along the tetrahedron edges. In this manner we have a reticulated plate structure formed by reticulated tetrahedra. Now we note that if we eliminate from the reticulated tetrahedron two bars (those corresponding to the diagonals of opposite faces in the elementar cube) we obtain four bars in the position shown in fig. 1B. This is the standard unit, with rigid joints, that we call: "standard farfalla". In the fig. 1C we show the assembling of four standard units, while in the foto 1 (top-left) it appears a specimen in which have been assembled several units.

This "standard farfalla", with some small variations, can be utilized for generating several double-curved reticulated shells. A first solution can be obtained assembling two types of farfallas

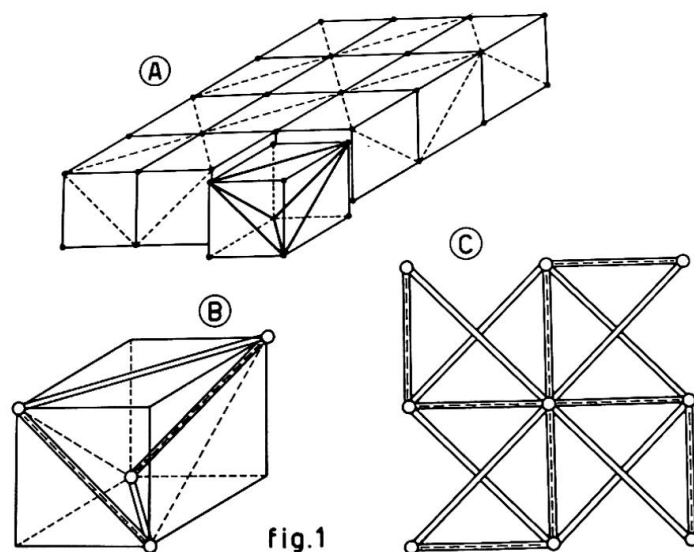


fig.1

one of which pass a bar shorter than the others, for generating double-layer cylindrical shells (foto 1 top-right).

The generation of a spherical double-curved shell starts from the truncated icosahedron inscript in a sphere (fig. 2a). This polihedron consists of 20 hexagons and 12 pentagons. Projecting the central points of these poligons on the spherical surface and connecting them with the vertexes of the corrispondent poligon, we obtain a triangulated net (fig. 2b) formed by 120+60 isosceles triangles of two types. Now we generate the double-layer spherical shell by four types of different farfallas (differents for side lenght), two of them having one side coincident with a side of two types of triangles. The other two are realized to complete the double-layer.

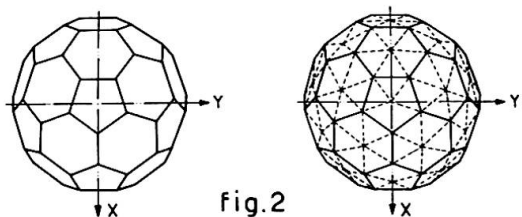
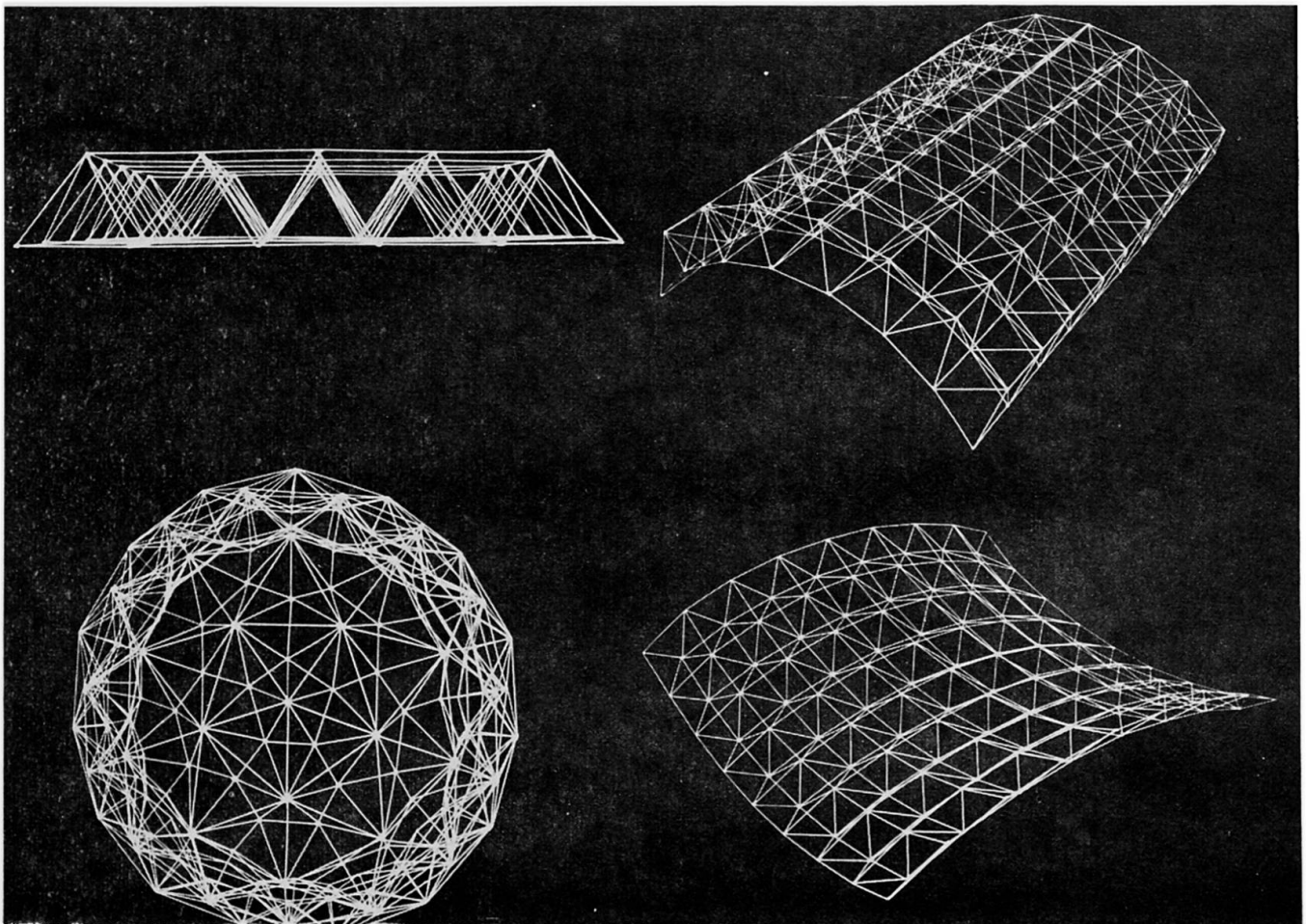
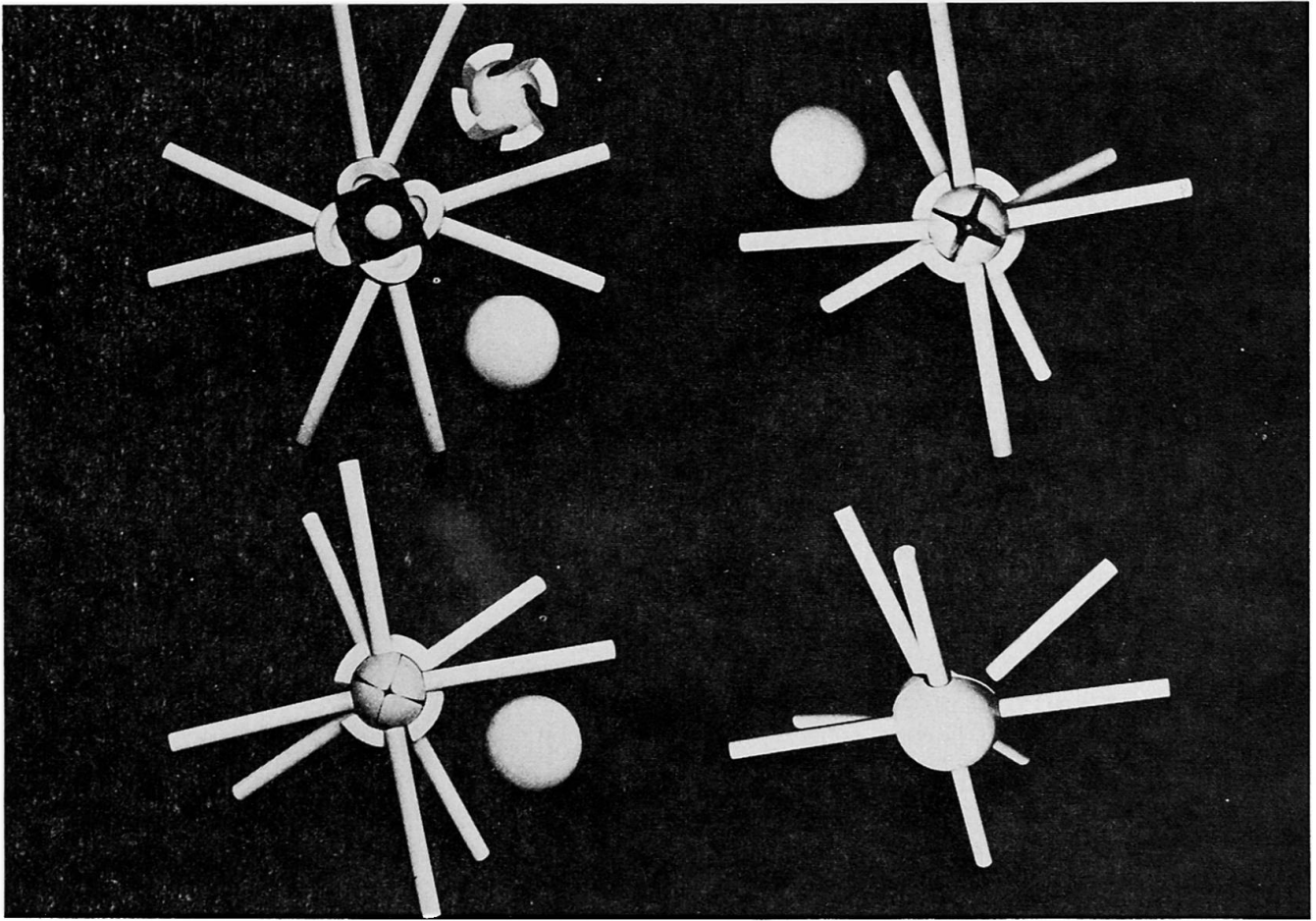


fig.2

A study for a connector of farfalla units is shown in foto 2.

II,1) Structural Analysis of reticulated structures

The main objective in the construction of reticulated structures is the employment of bars with equal section. The minimum-weight design requires the evaluation of the collapse load for a rational definition of the safety-factor. The procedures utilizing the limit-design teorems are unapplicable because these structures reach the collapse with bars in buckled configuration. Then the structural analysis must be conducted with "step by step" or "incremental" procedures. The relationship "axial force-elongation" $N-\epsilon$ (in tension and in compression) under the hypotesis of frictionless joints, represents tha basis for two approaches. The definition of this relationship is function of several parameters; this makes the practical application very arduous. For this reason it seems useful to define a simple $N-\epsilon$ law taking into account the plastic and unstable behaviour of bars.



11,2) A simple N-ε relationship

Under the following hypotheses it is possible to define a simple N-ε relationship:

- a) elastic-perfectly plastic behaviour of material,
- b) bending moment-curvature with bilateral law,
- c) yield function linearized,
- d) deformability of bars localized in the middle section.

These hypotheses assure a prudent evaluation of the ultimate load. Indicating with N_0 the limit axial force in tension and with M_0 the limit bending moment, the linearized yield function is expressed by:

$$\Psi(M, N) = \pm \frac{N}{N_0} \pm \frac{M}{M_0} - 1 = 0 \tag{1}$$

For the bars in compression the buckling axial load occurs for $N = N_{cr}$ in the elastic range that is before the bar reaches the limit axial force in compression $N = -N_0$. With the position $k = N/N_0$ and $k_{cr} = N_{cr}/N_0$ we have $-1 \leq k_{cr} \leq 0$, (fig. 3). For perfectly straight bars the lateral deflection of the middle section f will be zero before k reaches the condition $k/k_{cr} = 1$. According to the linear theory of stability and

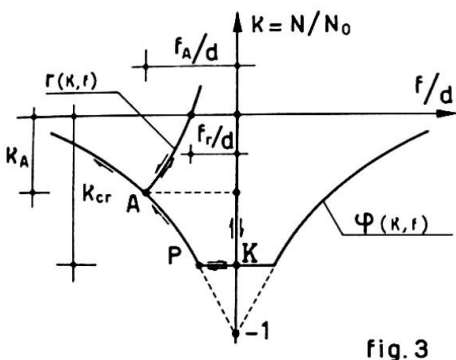
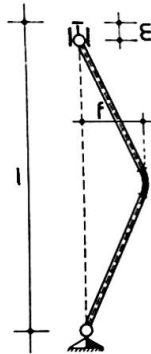


fig. 3



to elasto-plastic behaviour of material, the deflection f is indeterminate if $N = N_{cr}$ and $\Psi(M, N) = 0$. When $\Psi(M, N) = 0$ the deflection f is univocally determinate by (1) where we can consider $M = N f$. By putting $d = M_0/N_0$ the (1) can be written:

$$\Psi(k, f) = -k(1 \pm f/d) - 1 = 0 \tag{2}$$

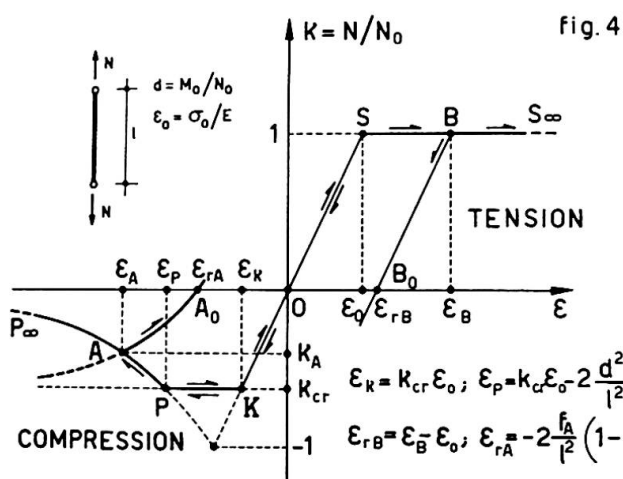
that in the $(k, f/d)$ plane represents

two branches of hyperbola (fig. 3).

Following the yield line $\Psi(k, f) = 0$, an increasing deflection f requires a reduction of $|N|$. Starting from a point A on the descending k - f/d branch, for a guided deflection, it is possible a decrease of the deflection's magnitude f ; the bar behaves elastically according to the law:

$$r(k, f) = \frac{k}{k_{cr}} + \left(1 - \frac{k_A}{k_{cr}}\right) \frac{f_A}{f} - 1 = 0 \tag{3}$$

where f_A/d and k_A are the coordinates of the point A from which started the unloading process. Considering $N = 0$ that is $k = 0$ in (3), we obtain a "residual deflection" $f_r = f_A (1 - k_A/k_{cr})$. The function $r(k, f)$ represents a set of equilateral hyperbolas depending upon point A parameters, whose asymptotes are $k = k_{cr}$ and $f/d = 0$. For $A \equiv P$ (fig. 3) the hyperbola degenerates in its asymptotes. The "total elongation" is composed by two parts, the first depending on the elastic axial deformation, the second ($\Delta l/l$) depending on the lateral deflection. The relationship $f - \Delta l$, under the previous hypotheses, is $\Delta l = 2 f^2/l^2$. In fig. 4 we show the diagrams and the equations of these relationships.



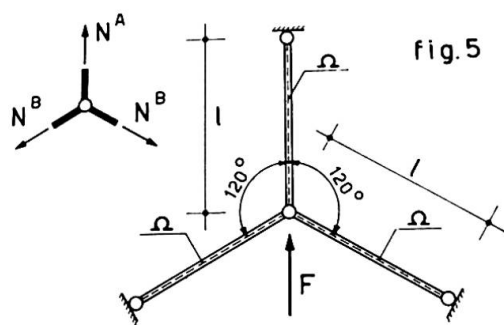
BRANCH	K	ε	LAW	BEHAVIOUR
TENSION A → B	0 < K < 1	0 < ε < ε ₀	ε = Kε ₀	ELASTIC
	K = 1	ε̇ = $\frac{\dot{K}}{N_0} > 0$	K̇ = 0	PLASTIC
TENSION B → ∞	K = 1	ε̇ < 0	K̇ = ε̇/ε ₀	ELASTIC
		0 < K < 1	ε _B < ε < ε _B	K = $\frac{ε - ε_{TB}}{ε_0}$
COMPRESSION ∞ → A	0 < K < 1	ε _K < ε < 0	ε = Kε ₀	ELASTIC
	K = K _{cr}	ε _P < ε < ε _K	K̇ = 0	ELASTIC (NEUTRAL EQ.)
	0 < K < K _{cr}	ε < ε _P	ε = Kε ₀ - 2 $\frac{d^2}{l^2} \left(1 + \frac{1}{K_{cr}}\right)^2$	PLASTIC (UNSTABLE EQ.)
		ε < 0	ε = Kε ₀ - 2 $\frac{d^2}{l^2} \left(1 + \frac{1}{K_{cr}}\right)^2$	ELASTIC
A → A ₀	0 < K < K _{cr}	ε > ε _A	ε = Kε ₀ + ε _{A} \left(1 - \frac{K}{K_{cr}}\right)}	ELASTIC (STABLE EQ.)

Then the structural analysis can be performed, for each load increment, by the definition of the corresponding behaviour of every bar depending on the position of the representative point in the diagram of fig. 4. This procedure, repeated for successive finite load increments, leads to the evaluation of the collapse-load.

11,3) Numerical example

To clarify the method proposed for the evaluation of the collapse-load for reticulated structures we consider here the simple example shown in fig. 5.

The equilibrium and compatibility equations are:



$$N^A - N^B - F = 0 \tag{4a}$$

$$\epsilon^A + 2 \epsilon^B = 0 \tag{4b}$$

In the elastic field the axial forces are: $N^A = -2F/3$; $N^B = F/3$. Being $|N^A| > |N^B|$ the load increment leads to point K (fig. 4) where is $\epsilon^A = k_{cr} \epsilon_0$. The corresponding value of the external force is $F_K = -1,5 k_{cr} N_0$. Further external

load increments will correspond to constant axial forces in the bar A (K P branch in fig. 4) while the representative point on the N- diagram will reach the point P for the bar A or the point S for the bar B.

In the case:

$$-2 \epsilon_0 \geq k_{cr} \epsilon_0 - 2 \frac{d^2}{l^2} \left(1 + \frac{1}{k_{cr}}\right)^2 \tag{5}$$

the point S will be reached before or simultaneously to the point P. Then the structure can't bear further load increments because beyond the point P and S the force in the tension bars remains constant while the force in the compressed bar must have a reduction (in absolute value). The limit load in this case is $F'_l = N_0 (1 - k_{cr})$.

In the other case, if the (5) is unsatisfied the compressed bar will reach the point P before the tension bars reach the point S. The internal force in the compressed bar must have a reduction in absolute value, while in the tension bars the force can have an increment as far as the point S will be reached. The compatibility equation (4b) allows to joint the deformation of the three bars, by putting $\epsilon^A = -2 \epsilon_0$ we obtain the axial force in the bar A while in tension bars the force is equal to N_0 . The limit load is:

$$F_{\ell}'' = N_0 - (-2 \epsilon_0) N^A \quad (6)$$

If the three bars have a tubular section whose diameter is D and tickness t , indicating with λ the slenderness, we have:

$$k_{cr} = - \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{1}{\epsilon_0} ; \quad \frac{\ell}{d} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \lambda \quad (7)$$

being $\lambda = \ell/\rho = 2 \sqrt{2} \ell/D$. Assuming $\epsilon_0 = 2 \times 10^{-3}$, $\lambda = 100$ we have:

$$F_k = 0,74 N_0 ; \quad F_{\ell}'' = 1,17 N_0 ; \quad F_{\ell}''/F_k \cong 1,59$$

where F_k is the external force corresponding to compressed member instability and F_{ℓ}'' is the collapse-load.

REFERENCES

- [1] CERADINI, G. Strutture reticolari iperstatiche
Costruzioni Metalliche n° 3, 1965
- [2] DE DONATO, O. Legami forze-elongazioni per aste compresse
in fase post-critica.
Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett. vol. 99, 1965
- [3] MAIER, G. Behaviour of elastic plastic trusses with
unstable bars. - Journal of the Engineering
Mechanics Division - ASCE vol. 93, 1966
- [4] DE DONATO, O. Legami forze-elongazioni per aste elasto-
plastiche compresse ad elongazione ^{de}crescente.
Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett. - vol. 100, 1966
- [5] MAIER, G. Elastic-plastic continua containing unstable
DRUCKER, D.C. elements obeying normality and convexity re-
lations. - Schweizerischen Bauzeitung -
vol. 84, n° 23, 1966

SUMMARY: In this paper we show a solution for the construction of double-layer space frame shells with simple prefabricated units of standard size and shape. Then a procedure is proposed for the evaluation of the actual safety-factor by means of the calculation of the collapse-load of these structures taking into account plasticity and local buckling of simple bars.