

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 9 (1972)

Artikel: Das Zusammenwirken von Trägern verschiedener Biege- und
Schubsteifigkeit

Autor: Faltus, Frantisek

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-9566>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Das Zusammenwirken von Trägern verschiedener Biege- und Schubsteifigkeit

Interaction between Girders of Different Flexural and Shear Stiffness

Interaction entre poutres à différentes rigidités de flexion et de cisaillement

FRANTIŠEK FALTUS

Professor an der Technischen Hochschule
in Prag, CSSR

Dieser Beitrag zu Thema IIb des Einführungsberichtes soll daran erinnern, dass bei der Berechnung des Zusammenwirkens verschiedener Arten aussteifender Verbände eine gewisse Vorsicht geboten ist. Gewöhnlich werden die angreifenden Kräfte einfach im Verhältnis der Steifigkeit auf die einzelnen Verbände verteilt, wobei die Steifigkeit als die Belastung zur Erzeugung der Durchbiegung "Eins" aufgefasst wird. Ist z.B. ein Stahlskelettbau/ Fig. 1/ mit zwei Fachwerkwänden A₁, A₂ und einem Betonkern B gegen Windbelastung gestützt und setzt man die Geschosdecken als

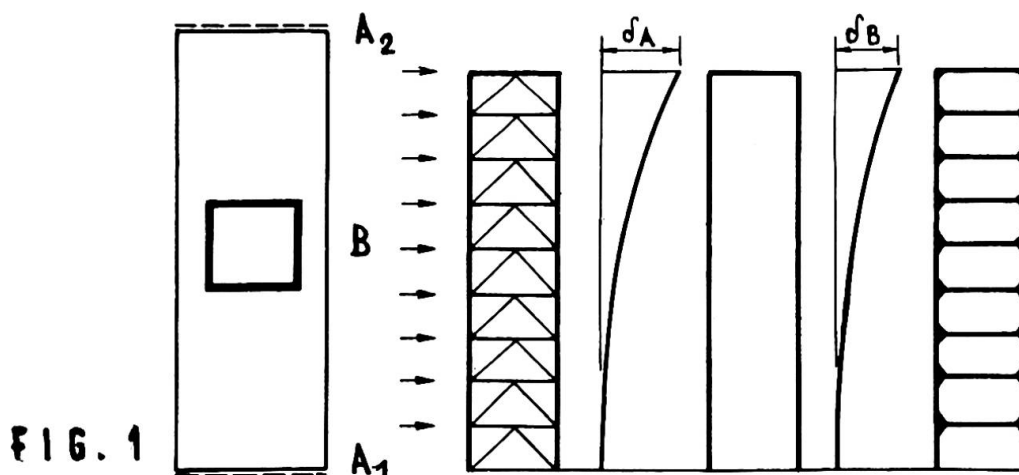


FIG. 1

starr voraus, so rechnet man oft einfach wie folgt: Es sei δ_A die Durchbiegung des Verbandes A, bzw. δ_B des Verbandes B unter Belastung $w=1$, dann weist man von der Gesamtbelastung W den Verbänden A den Anteil $w_A = W \delta_B / (\delta_A + 2\delta_B)$ und dem Verband B den Anteil $w_B = W \delta_A / (\delta_A + 2\delta_B)$ zu. Dieser Vorgang ist nur richtig, wenn die Biegelinien beider Verbände affin sind, denn nur dann werden die Belastungen w_A und w_B nicht nur an den Trägerenden, sondern auch in jedem Stockwerk gleiche Durchbiegungen erzeugen. Sind die Biegelinien nicht affin,

müssen in den einzelnen Geschosshöhen weitere Reaktionskräfte wirken, welche den Ausgleich der Form erzwingen, wie z.B. ausführlich in [1] gezeigt wurde. Bei vielgeschossigen Bauten können wir statt mit einer diskreten, mit einer kontinuierlichen Verteilung der Reaktionskräfte, also mit den Differentialgleichungen der Biegelinien rechnen.

Untersuchen wir als einfaches Beispiel den Fall zweier Kragträger mit über die ganze Länge l konstanten Querschnitten nach Fig. 2. Die Steifigkeitsverhältnisse sollen durch folgende Werte gegeben sein.

$$\text{Die Biegesteifigkeit: } \varepsilon_1 = \frac{E_0 J_0}{E_1 J_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{E_0 J_0}{E_2 J_2}$$

$$\text{Die Schubsteifigkeit: } \beta_1 = \frac{E_0 J_0}{G_1 \omega_1 F_1 l^2}, \quad \beta_2 = \frac{E_0 J_0}{G_2 \omega_2 F_2 l^2}$$

Der Wert $E_0 I_0$ bezieht sich auf einen beliebigen Vergleichsträger, die Indizes 1 und 2 bezeichnen Träger 1 und 2. Für einen Rechteckquerschnitt ist $\omega = 5/6$, für einen Vollwandträger $\omega = 1$, wenn F die Stehblechfläche bedeutet. Für Fachwerkträger ist F die Fläche des Stehbleches eines gedachten Vollwandträgers gleicher Schubverformung wie die vorhandene Ausfachung. Das Verhalten der Träger charakterisieren die Werte

$$\alpha^2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad \text{und} \quad \delta_1 = \frac{\varepsilon_2 \beta_1 - \varepsilon_1 \beta_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\beta_1 + \beta_2)}$$

Die für die Berechnung massgebenden Grössen bewegen sich in praktischen Fällen etwa in folgenden Grenzen, wenn h die Trägerhöhe und l die Kraglänge bedeuten:

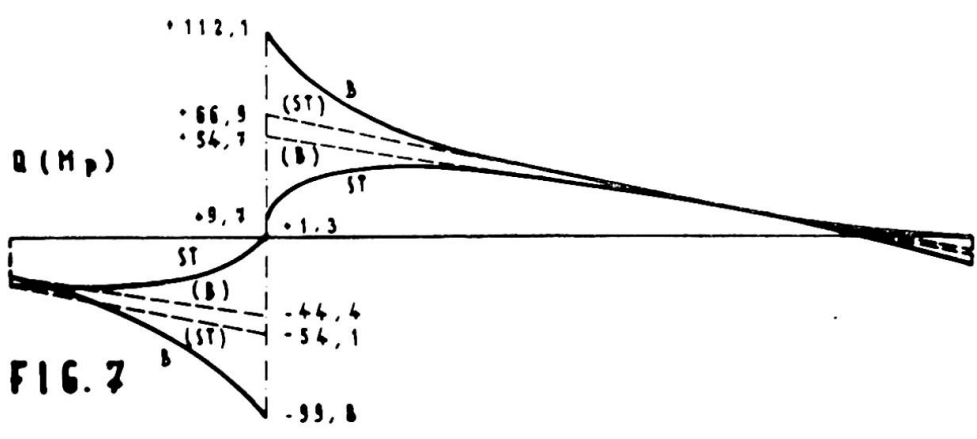
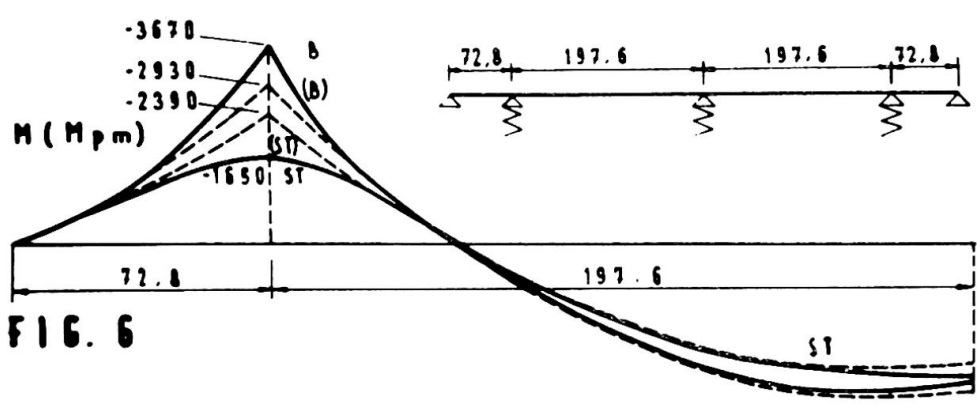
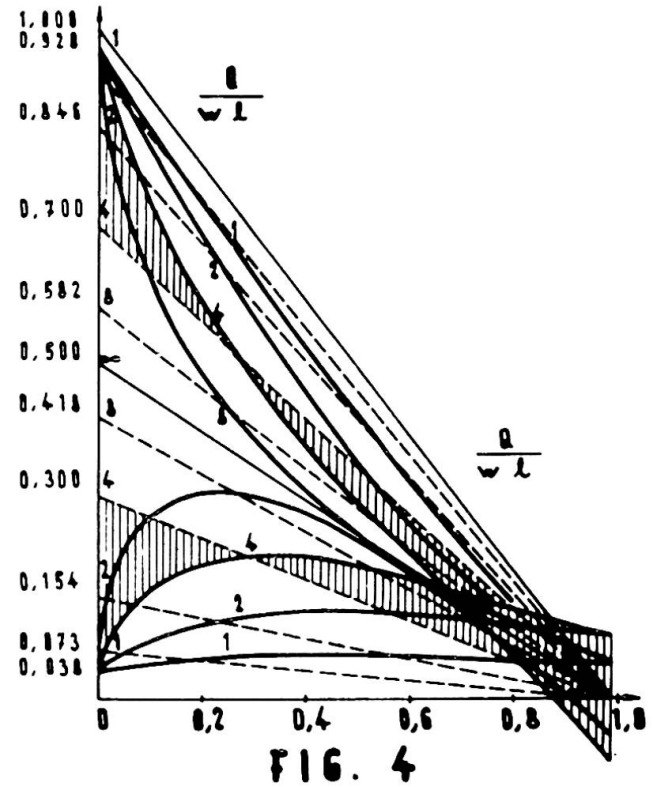
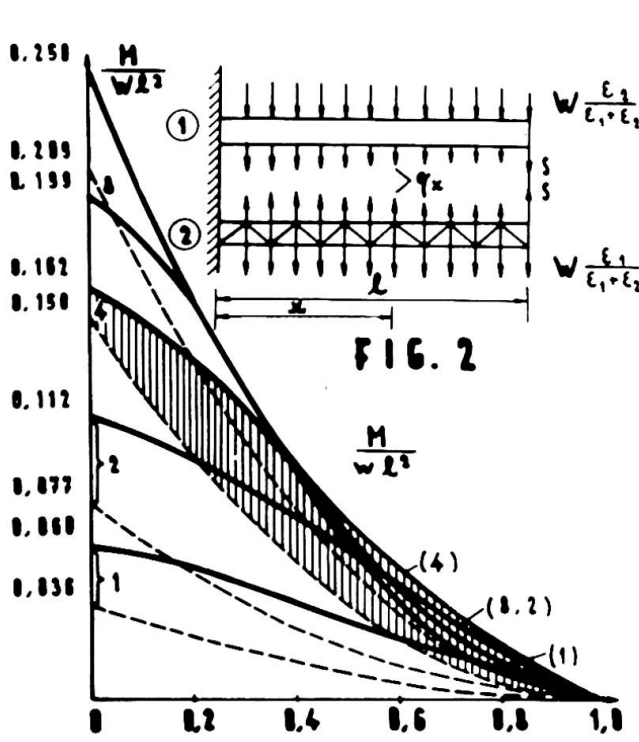
$$\begin{aligned} \text{für Rechteckquerschnitte } \beta &= 0,26 / \varepsilon h^2 / l^2, \\ \text{für Blechträger bis etwa } \beta &= 1,2 \varepsilon h^2 / l^2 \\ \text{für Fachwerkträger ist } \beta &\text{ bis etwa } 10 \varepsilon h^2 / l^2 \end{aligned}$$

Grosse Werte β erhalten wir bei Fachwerkträgern mit grossen Gurtflächen /schwerbelastete Säulen/ und leichter Ausfachung, welche nur auf die Windbelastung dimensioniert ist. Hiemit ergibt sich

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 : \varepsilon_2 &\text{ etwa } 0,5 \text{ bis } 5 \\ \alpha &\text{ etwa } (1 \text{ bis } 3) h / l \text{ und } |\delta_1| \text{ etwa } 0 \text{ bis } 1. \end{aligned}$$

Der Wert $\delta_1 = 0$ entspricht zwei ähnlichen Vollwand oder Fachwerkträgern, δ_1 wird gross beim Zusammenwirken von Vollwand- mit Fachwerkträgern. Die grössten Werte nimmt $|\delta_1|$ an, wenn einer der Träger ein Rahmenträger ist.

Aus der Differentialgleichung der Biegelinie mit Berücksichtigung der Querkräfte



$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M}{E J} + \frac{d Q}{G \omega F d x} = \epsilon (M + \beta \frac{d Q}{d x})$$

erhalten wir die Gleichung unseres Problem es mit

$$\frac{d^2 y_1}{d x^2} = \frac{d^2 y_2}{d x^2}$$

da die Biegelinien in ihrem ganzen Verlauf der Voraussetzung nach identisch sein sollen und daher auch ihre zweiten Ableitungen.

Wenn wir annehmen, dass sich die äussere Belastung auf die beiden Träger im Verhältniss der Biegesteifigkeiten verteilt,

$$w_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad w_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

ergibt sich die Differentialgleichung für die Reaktionskräfte q_x mit

$$q_x - \frac{l^2}{\alpha^2} q_x'' = 0$$

mit der Lösung für $\xi = \frac{x}{l}$

$$q_x = C_1 \cosh \alpha \xi + C_2 \sinh \alpha \xi .$$

Mit den Auflager- und Randbedingungen der Fig.2 ist

$$C_1 = - \frac{d w \alpha}{\cosh \alpha} \left(\sinh \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$C_2 = d x \alpha$$

$$q = \frac{d w \alpha}{\cosh \alpha} \left[\sinh \alpha (1 - \xi) + \frac{1}{\alpha} \cosh \alpha \xi \right]$$

$$M_{1x} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{w (1 - \xi)^2 l^2}{2} + \frac{l^2}{\alpha^2} (d w + C_1 \cosh \alpha \xi + C_2 \sinh \alpha \xi)$$

$$Q_{1x} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} w (1 - \xi) l - \frac{l}{\alpha} (C_1 \sinh \alpha \xi + C_2 \cosh \alpha \xi)$$

In den Fig. 3 und 4 sind der Verlauf der Momente und Querkräfte für einen der Praxis entnommenen Fall angegeben.

Es sei

$$1/E_0 J_0 = 1/E_1 J_1 = 1/E_2 J_2 = 1,4 \cdot 10^{-8} \quad [t, m]$$

$$\text{ALS O } \epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$$

und $\beta_1 = 40 \left(\frac{m}{l} \right)^2$, $\beta_2 = 1000 \left(\frac{m}{l} \right)^2$ entsprechend einer Betonwand von

11,3 m Breite und 25 cm Dicke, bzw. einem Fachwerkträger von 12m Breite und starken, für die Deckenbelastungen bemessenen Gurten und schwachen, nur der Winbelastung entsprechenden Diagonalen. Hieraus ergibt sich α zu

$$\alpha = \frac{l}{22,8} \quad [m]$$

Um den Einfluss verschiedener Schlankheiten zu zeigen, sind die Ergebnisse für $\alpha = 1, 2, 3, 8, \infty$, also für Höhen $l = 22, 8, 45, 4, 91, 2$ bzw. 182,4 m berechnet. Je grösser die Höhe, umso geringer wird der verhältnissmässige Einfluss der Schubverformung. Der Fall $\alpha = \infty$ entspricht einem Trägerpaar mit ähnlichen Biegeli-

nien. Der Wert δ ist in allen Fällen $\delta = -0,462$. Die in Fig. 3 bzw. 4 mit vollen Linien eingetragenen Werte von M bzw. Q entsprechen der genaueren Berechnung.

Verteilt man die Belastung W in erster Annäherung gemäss den Biegesteifigkeiten, entspräche dies hier einer gleichen Belastung beider Träger. Bei etwas genauerer Berechnung wird die Belastung in umgekehrtem Verhältnis der Durchbiegungen mit Einrechnung der Verformungen durch Querkräfte verteilt. Wir erhalten dann die gestrichelt eingezeichneten Werte. Auch hier sind die Unterschiede zu den Werten der genauen Berechnung noch verhältnismässig gross wie anschaulich die schraffierten Flächen für $\alpha = 4$, also für einen Bau von 91 m Höhe zeigen. Der schubsteife Betonkern übernimmt an der Einspannstelle fast die gesamte Querkraft. Die Unterschiede in der Verteilung der Momente ist zwar geringer, aber doch beachtenswert und zeigt, dass eine genauere Rechnung notwendig ist.

Es sei hier noch an den in [1] und [2] genauer beschriebenen Fall der Berechnung der Fahrbahnkonstruktion der grossen Bogenbrücke über die Moldau bei Žďákov erinnert. Zur Erhöhung der seitlichen Stabilität des 330 m weit gespannten Stahlbogens [Fig. 5] wurde die Fahrbahnplatte als Durchlaufträger auf 5 Stützen ausgeführt und übernimmt so einen Grossteil der Windbelastung quer zur Brückenachse. Ursprünglich war geplant, den Fahrbahnrost aus zwei Fahrbahnhauptträgern mit horizontalem Fachwerkwindverband

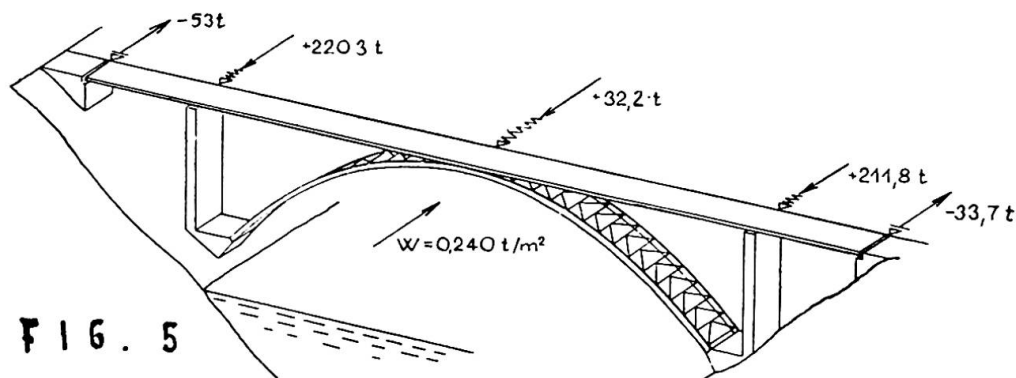


FIG. 5

und einer Betonplatte nur in Verbund mit den Querträgern auszuführen. In der Vorberechnung wurde die Belastung im umgekehrten Verhältnis der Durchbiegungen in Brückenmitte verteilt. Diese sind für eine Belastung 1 Mp/m und einen frei aufliegenden Träger von 190 m Spannweite aus Normal- und Querkräften

für die Betontafel $y = 0,244 + 0,002 = 0,246 \text{ m}$
 für die Stahlkonstruktion $y = 0,254 + 0,045 = 0,299 \text{ m}$

Die sich daraus ergebenden Momente und Querkräfte sind in Fig. 6 und 7 mit /B/ und /ST/ bezeichnet und gestrichelt eingetragen. Die genauere Berechnung, deren Ergebnis in Fig. 6 und 7 mit B und ST bezeichnet und mit vollen Linien eingetragen ist, ergab, dass in der Nähe der Auflagerraktionen die schubsteife Betonplatte fast die gesamten Querkräfte und einen Grossteil der Momente übernehmen müsste. Es wurde daher die Betonplatte auch in Verbund mit den Fahrbahnhauptträgern ausgeführt und der Fachwerk-

windverband weggelassen. Es entstand also ein Verbundträger von 541 m Länge mit einer durchlaufenden Betonplatte mit den stähler-
nen Fahrbahnhauptträgern als Gurten, welcher eine eindeutige Über-
tragung der Momente und Querkräfte sicherstellt.

Literatur: /1/ Faltus, Schindler: Der Einfluss der Schubverformung
biegesteifer Träger. Acta Technica ČSAV 1963,
Seite 27-62.
/2/ Faltus, Zeman: Die Bogenbrücke über die Moldau bei
Ždákov. Der Stahlbau 1968. Seite 332-339.

Zusammenfassung:

Es wird die genauere Berechnung des Zusammenwirkens zweier Träger
mit über die Länge konstanten Querschnitten angegeben und an zwei
Beispielen der Fehler gezeigt, zu welchem die Vernachlässigung
der Schubverformungen führen kann.