

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 9 (1972)

**Artikel:** Überkritisches Verhalten der Stabkonstruktionen

**Autor:** Szabó, J. / Gáspár, Zs.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-9545>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Ib

### Überkritisches Verhalten der Stabkonstruktionen

Post-Critical Behaviour of Structures

Comportement post-critique des structures

J. SZABÓ

Prof. Wissenschaftlicher Mitarbeiter  
Technische Universität  
Budapest, Ungarn

Zs. GÁSPÁR

Wissenschaftlicher Mitarbeiter  
Technische Universität  
Budapest, Ungarn

#### 1. Einleitung

Die auch für grosse Verschiebungen gültige Zustandsänderungs-Differentialgleichung der aus endlichen Stabelementen bestehenden Stabkonstruktionen besitzt die folgende Form /s. [1] /

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{s}}) & \underline{\underline{G}}^*(\underline{\underline{u}}) \\ \underline{\underline{G}}(\underline{\underline{u}}) & \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{s}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\underline{\underline{u}}}{dt} \\ \frac{d\underline{\underline{s}}}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d\underline{\underline{q}}}{dt} \\ \frac{d\underline{\underline{t}}}{dt} \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}} \quad (1)$$

Dabei bedeuten

$$D_{jk} = \frac{\partial G_{ij}}{\partial u_k} s_i ,$$

- $\underline{\underline{G}}$  die geometrische Matrix der Stabkonstruktion,  
 $\underline{\underline{G}}^*$  die Transponierte von  $\underline{\underline{G}}$ ,  
 $\underline{\underline{F}}$  die Nachgiebigkeits-Matrix der Stabkonstruktion,  
 $\underline{\underline{u}}$  der Vektor der unabhängigen Verschiebungskomponenten der Knotenpunkte,  
 $\underline{\underline{s}}$  der Vektor der inneren Kräfte und Momente,  
 $\underline{\underline{q}}$  der Vektor der auf die Knotenpunkte wirkenden äusseren Kräfte und Momente  
 $\underline{\underline{t}}$  der Vektor der vorgeschriebenen Relativverschiebungen der Stäbe.

Diese Gleichung auf eine einparametrische Last angewandt, lässt sich die die indifferente Last bestimmende Differentialgleichung ableiten, die im allgemeinen Falle nach einem auf die Lösung eines

Eigenwertproblems beruhenden Iterationsverfahren ausgerechnet wird. Der postkritische Zustand lässt sich nach einer modifizierten Variante des für grosse Verschiebungen ausgearbeiteten Verfahrens errechnen. Die für die einzelnen Fälle ausgearbeiteten Aufgaben wurden derart gewählt, dass die analytische Lösung bekannt sei, so konnte das allgemeine Verfahren kontrolliert werden. Es wurden ebene Aufgaben gelöst und damit nicht die numerischen Schwierigkeiten vorherrschen, wurde die Anzahl der Stabelemente nicht hoch gewählt.

## 2. Das Modell der Stabkonstruktion

Die Stabkonstruktion kann aus elastischen Elementen oder aus starren Elementen mit elastischen Gelenken aufgebaut werden. Die geometrische Matrix  $\underline{\underline{G}}$  der Stabkonstruktion aus elastischen Elementen erhält man aus der Matrix

$$\underline{\underline{G}}_0 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_{ij} \end{bmatrix} , \quad (2)$$

indem die bei der Kopplung der Stabelemente zu den gleichen Verschiebungskomponenten gehörenden Spalten summiert, sodann die zu den vorgeschriebenen Verschiebungskomponenten gehörenden Spalten getrennt werden. Übrigens

$$\underline{\underline{G}}_{ij} = \begin{cases} -\underline{\underline{T}}_{jv} & \text{wenn der Anfangspunkt des j-ten Stabelements der i-te Knotenpunkt ist,} \\ \underline{\underline{T}}_{jv} \quad \underline{\underline{T}}_{jk}^* \quad \underline{\underline{B}}_j \quad \underline{\underline{T}}_{jk} & \text{wenn der Endpunkt des j-ten Stabelements der i-te Knotenpunkt ist,} \\ 0 & \text{wenn die obigen Bedingungen nicht erfüllt sind.} \end{cases}$$

In Matrix (2) gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}_{jk} &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_{jok} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{T}}_{jok} \end{bmatrix}, & \underline{\underline{T}}_{jv} &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_{jov} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{T}}_{jov} \end{bmatrix}, \\ \underline{\underline{B}}_j &= \begin{bmatrix} 1 & \xi_j & -\gamma_j \\ 1 & -\xi_j & \xi_j \\ 1 & \gamma_j & -\xi_j \\ 1 & & \\ & & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

wo durch die Orthogonalmatrizen  $\underline{\underline{T}}_{jok}$  bzw.  $\underline{\underline{T}}_{jov}$  der im Koordinatensystem  $x, y, z$  angegebene Vektor in das zum Anfangs- bzw. zum Endpunkt gehörende lokale Koordinatensystem  $\xi, \gamma, \zeta$  gedreht wird.

Die Bedeutung der Grössen in der Übertragungsmatrix  $\underline{\underline{B}}_j$  ist in Abb.1. zu sehen.

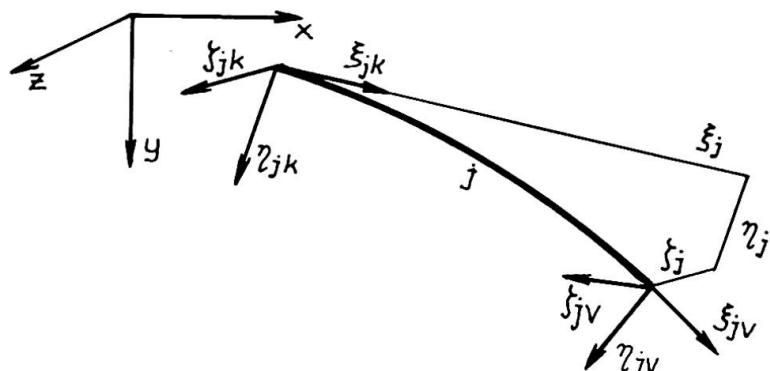


Abb. 1.

Die Nachgiebigkeitsmatrix  $\underline{\underline{F}}$  ist quasi-diagonal, die einzelnen Blöcke haben die Form

$$\underline{\underline{F}}_i = \underline{\underline{T}}_{iv} \underline{\underline{T}}_{ik}^* \underline{\underline{F}}_i \underline{\underline{T}}_{ik} \underline{\underline{T}}_{iv}^* \quad (4)$$

mit

$$\hat{\mathbb{F}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{EA} & & & & & \\ & \frac{\ell^3}{3EJ_\zeta} & & & & \frac{\ell^2}{2EJ_\zeta} \\ & & \frac{\ell^3}{3EJ_\eta} & & -\frac{\ell^2}{2EJ_\eta} & \\ & & & \frac{\ell}{EJ_\zeta} & \frac{\ell}{EJ_\eta} & \frac{\ell}{EJ_\zeta} \\ & -\frac{\ell^2}{2EJ_\eta} & & & & \\ & \frac{\ell^2}{2EJ_\zeta} & & & & \end{bmatrix}_i \quad (5)$$

Wird das Modell der Stabkonstruktion durch die Kopplung von starren Elementen mit elastischen Gelenken zusammengestellt, so sind die entsprechenden Achsen der zum Anfangs- bzw. zum Endpunkt gehörenden Koordinatensysteme zueinander parallel, daher erübrigt es sich, die dazugehörige Drehmatrix zu unterscheiden /d.h.  $\underline{\underline{T}}_{\text{iv}} = \underline{\underline{T}}_{ik} = \underline{\underline{T}}_i$ /. Wegen der Orthogonalität der Matrix  $\underline{\underline{T}}_i$

$$T_{ij} T_{ij}^* = E \quad (6)$$

vereinfachen sich die Beziehungen (2) und (4), und in Matrix (3) ist  $\xi_j = l_j$ ,  $\gamma_j = \xi_j = 0$ . Sind die elastischen Gelenke gewissen Beanspruchungen gegenüber starr, so ist die Matrix  $\underline{F}$  singulär, daher müssen die in der Arbeit [2] angegebenen Transformationen durchgeführt werden.

Nach dem Iterationsverfahren in [1] können die Verschiebungen und Beanspruchungen des Modells ermittelt werden. Um das Modell und den Algorithmus zu überprüfen, wurde das Problem in Abb.



Abb. 2.

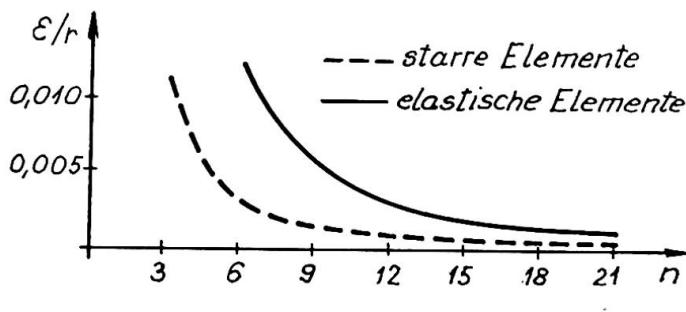


Abb. 3.

2. mit Hilfe beider Modelle gelöst. Die Angaben wurden so angesetzt, dass in der genauen Lösung, der Kragträger Viertelkreisform habe. Der spezifische Wert des Endpunktverschiebungsfehlers ist in Abb. 3. über der Elementenanzahl dargestellt /in der Abbildung bedeuten  $\varepsilon$  den Endpunktverschiebungsfehler und  $r$  den Kreisbogenhalbmesser./

### 3. Stabilitätsnachweis

Der kritische Parameter einer einparametrischen Last der Stabkonstruktion wurde nach der Arbeit [3] ermittelt. Wird als Last keine relative Verschiebung vorgeschrieben, so lautet bei einer Einparameterlast die Zustandsänderungs-Differentialgleichung (1)

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{s}}) & \underline{\underline{G}}^*(\underline{\underline{u}}) \\ \underline{\underline{G}}(\underline{\underline{u}}) & \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{s}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\underline{\underline{u}} \\ d\underline{\underline{s}} \end{bmatrix} + dR \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}} \quad (7)$$

wo

$$D_{jk} = \frac{\partial G_{ij}}{\partial u_k} s_i + R \frac{\partial f_j}{\partial u_k}$$

und

$$\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{f}}(\underline{\underline{u}})$$

$$\|\underline{\underline{f}}\| = \text{const}$$

eine eindeutige Funktion ist.

Beim Angriff der kritischen Last hat der homogene Teil der Differentialgleichung (7) auch eine von der trivialen verschiedene Lösung, die zum Eigenwertproblem

$$\left( \left[ \frac{\partial G^*}{\partial \underline{\underline{u}}} \underline{\underline{s}} \right] + R \frac{\partial \underline{\underline{f}}}{\partial \underline{\underline{u}}} - \underline{\underline{G}}^* \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{G}} \right) d\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{0}} \quad (8)$$

führt.

Da sowohl die Matrix  $\underline{\underline{G}}$  als auch die Vektoren  $\underline{f}$  und  $\underline{s}$  Funktionen von  $R$  sind, lässt sich das Eigenwertproblem nicht direkt bestimmen. Ist der zum Parameter  $R_i$  gehörende Zustandsvektor bekannt, werden die veränderlichen Größen des Eigenwertproblems (8) nach dem Verschiebungsvektor in eine Taylorsche Reihe entwickelt und nur deren erste zwei Glieder berücksichtigt, so erhält man das verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$(\underline{\underline{A}} + R \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{0}} \quad (9)$$

das bereits direkt gelöst werden kann, wo

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{D}}_1 + \underline{\underline{D}}_3 - R_i (\underline{\underline{D}}_2 + \underline{\underline{D}}_2^* + \underline{\underline{D}}_4)$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}}_2 + \underline{\underline{D}}_2^* + \underline{\underline{D}}_4 + \underline{\underline{D}}_5$$

$$\underline{\underline{D}}_1 = -\underline{\underline{G}}_i^* \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{G}}_i$$

$$\underline{\underline{D}}_2 = -\left( \frac{\partial \underline{\underline{G}}^*}{\partial \underline{\underline{u}}} \Big|_{\substack{\underline{\underline{u}}=\underline{\underline{u}}_i}} (\underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{f}}_i) \right) \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{G}}_i$$

$$\underline{\underline{D}}_3 = \left[ \frac{\partial \underline{\underline{G}}^*}{\partial \underline{\underline{u}}} \Big|_{\substack{\underline{\underline{u}}=\underline{\underline{u}}_i}} \underline{\underline{s}}_i \right]$$

$$\underline{\underline{D}}_4 = -\left[ \frac{\partial \underline{\underline{G}}^*}{\partial \underline{\underline{u}}} \Big|_{\substack{\underline{\underline{u}}=\underline{\underline{u}}_i}} (\underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{G}}_i \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{f}}_i) \right]$$

$$\underline{\underline{D}}_5 = \left[ \frac{\partial \underline{\underline{f}}}{\partial \underline{\underline{u}}} \Big|_{\substack{\underline{\underline{u}}=\underline{\underline{u}}_i}} \right]$$

$$\underline{\underline{H}} = -\underline{\underline{D}}_1 - \underline{\underline{D}}_3 - R_i \underline{\underline{D}}_5$$

Ist der Wert  $|R - R_i|$  höher als ein vorgeschriebener Wert, so wird der Zustandsvektor für einen Parameterwert  $R_i$  bestimmt, der dem kritischen Parameterwert näher liegt und das Verfahren wird wiederholt.

Wenn beim Angriff der kritischen Last nur eine geringe oder gar keine Formänderung entsteht, so ist das Eigenwertproblem (9) nur einmal zu lösen und auch die Koeffizientenmatrizen werden aus weniger Gliedern bestehen.

Zur Überprüfung des Algorithmus wurde der Stabilitätsnachweis des Bogenträgers der Form einer Parabel zweiten Grades in Abb. 4 mit Hilfe eines Modells aus starren Elementen durchgeführt. Der Parameter der kritischen Last änderte sich in Abhängigkeit von der Teilungszahl nach Abb. 5.

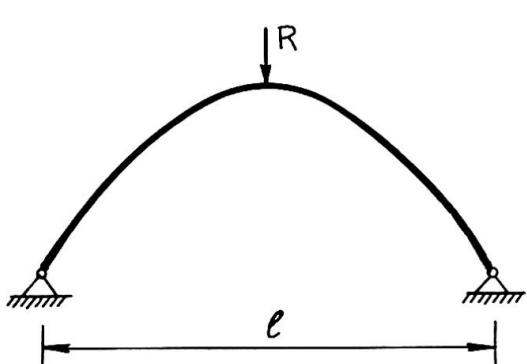


Abb.4.

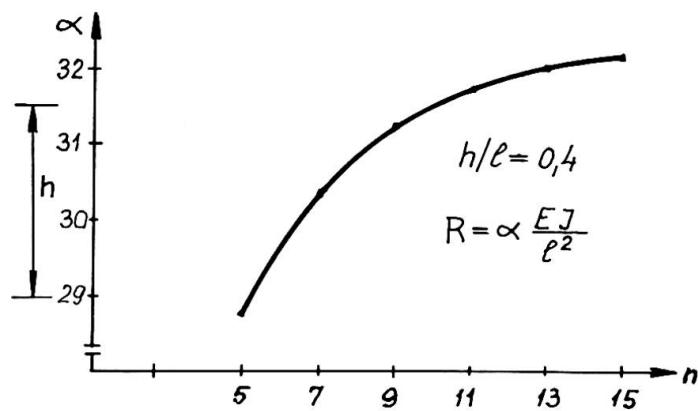


Abb.5.

#### 4. Postkritischer Zustand bei Stabilitätsverlust ohne Verzweigungspunkt

Die Zustandsänderungskurve des Problems in Abb.6. lässt sich auch in Umgebung des Durchschlagpunktes ohne Schwierigkeit auch auf analytischem Wege ermitteln /z.B. [4] und [5] /, wenn die Biegesteifigkeit der Stäbe im Vergleich zur Normalsteifigkeit genügend gross ist und der Durchschlag ohne Stabknickung erfolgt. Das Trägermodell wird aus 6 elastischen Stabelementen gleicher Länge aufgebaut. Jeder beliebige Punkt im Abschnitt AB der Zustandsänderungskurve in Abb.7. lässt sich mit Hilfe der obenerwähnten iterativen Lösung der Differentialgleichung (7) für grosse Verschiebungen ermitteln.

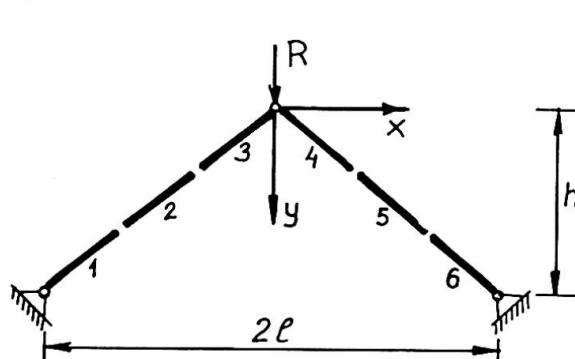


Abb.6.

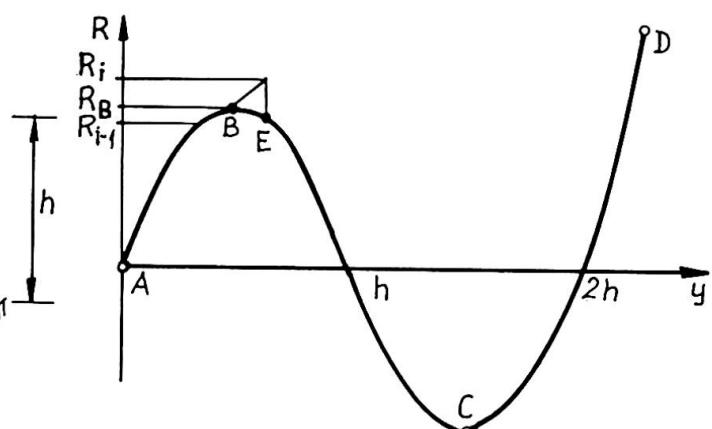


Abb.7.

Da der Wert  $R_B$  unbekannt ist und die Last stufenweise auf den Träger aufgebracht wird, kann es vorkommen, dass ein, zum Parameterwert  $R_i > R_B$  gehörender Zustandsvektor gesucht wird, der lediglich mit einer ganz anderen Geometrie des Trägers ausgeglichen werden kann, daher wird beim Iterationsverfahren die Fehlervektornorm die Laststufennorm wesentlich übersteigen und die Iteration nicht konvergieren. Dafür wird durch das folgende Verfahren Ab-

hilfe geschafft, das sich um die Konvergenz zu beschleunigen auch dann verwenden lässt, wenn einige – jedoch nicht genau bestimmte – Punkte der zum Parameter  $R$  gehörenden Zustandsänderungskurve ermittelt werden sollen.

Wird die Differentialgleichung (7) als Differenzgleichung auf die Laststufe angewandt, so kann in Kenntnis der erhaltenen geometrischen Lage und der inneren Kräfte, der Vektor der äusseren Kräfte, die ausgeglichen werden können, in der Form

$$\underline{\underline{q}}^{(1)} = - \underline{\underline{G}}^* \underline{\underline{s}}$$

errechnet werden. Der Parameter  $R$  wird derart gewählt, dass  $\|\underline{\underline{q}}^{(1)} - \underline{\underline{R}} \underline{\underline{f}}\|$  minimal sei. Dies wird durch den Parameter

$$R = \frac{\underline{\underline{q}}^{(1)*} \underline{\underline{f}}}{\underline{\underline{f}}^* \underline{\underline{f}}} \quad (10)$$

erfüllt. Wird der Parameter  $R$  jeweils so bestimmt, so erhält man den Punkt  $E$  in Abb.7. Soll der Parameter wieder vergrössert werden, so geht man auf der Zustandsänderungskurve nach Punkt  $B$  aus, der Parameter muss also auf dem labilen Abschnitt vermindert werden. Ob der so bestimmte Punkt auf dem labilen oder auf dem stabilen Zweig liegt, wird nach dem Energieprinzip festgestellt. Die Verschiebung unter Einwirkung des Lastzuwachses  $\Delta R \underline{\underline{f}} / \Delta R > 0$  ergibt sich mit der Genauigkeit der Theorie zweiter Ordnung zu

$$\Delta \underline{\underline{u}} = \Delta R \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{f}}$$

die Arbeit der Last  $\underline{\underline{R}} \underline{\underline{f}}$  beträgt bei dieser Verschiebung

$$L = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{f}}^* \Delta \underline{\underline{u}} .$$

Ist  $L > 0$ , so ist das Vorzeichen für  $\Delta R$  gleich dem Vorzeichen von  $R$  zu wählen; ist  $L < 0$ , so wird für  $\Delta R$  das entgegengesetzte Vorzeichen wie das von  $R$  genommen. Kurz, gilt  $\underline{\underline{f}}^* \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{f}} > 0$ , so liegt der Punkt im stabilen, gilt  $\underline{\underline{f}}^* \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{f}} < 0$ , so liegt der Punkt im labilen Kurvenzweig. Im indifferenten Zustand ist die Matrix  $\underline{\underline{H}}$  singulär.

Der Konvergenzradius des Iterationsverfahrens ist dem Krümmungsradius der Zustandsänderungskurve proportional, so kann die Berechnung in jedem Schritt mit einer grossen Laststufe begonnen werden, nimmt jedoch die Fehlervektornorm innerhalb einiger Schritte nicht wesentlich ab, so muss die Schrittgrösse vermindert

werden. In Abb.7. wurde für  $h=0,375\ell$  der Kurvenabschnitt AD – bei in 40 Stufen aufgetragener Last – bestimmt.

### 5. Postkritischer Zustand nach dem Verzweigungspunkt

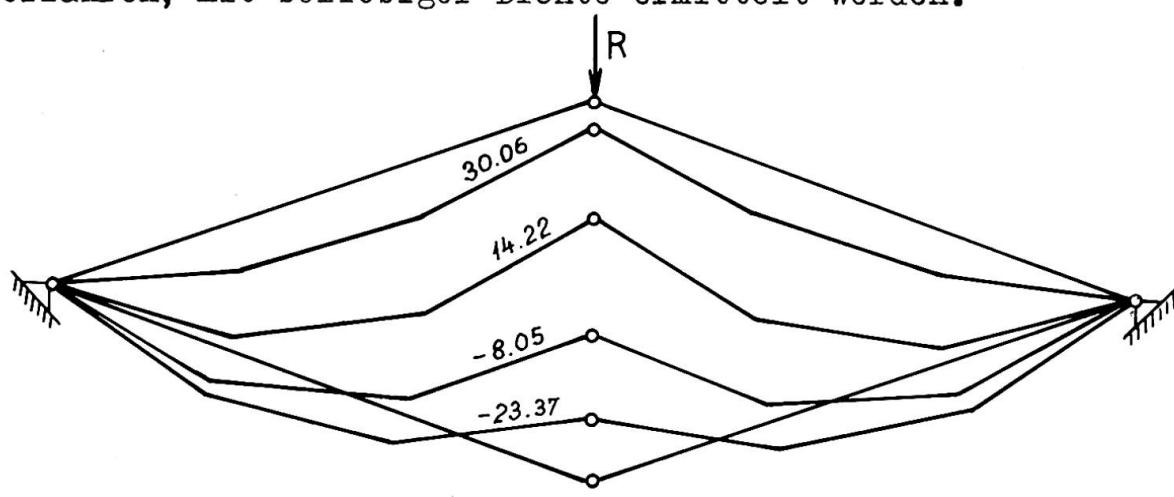
Wird das Modell des Trägers in Abb.6. nur aus durch biegungselastische Gelenke verbundenen Stabelementen aufgebaut, so kann der Durchschlag lediglich mit Knickung erfolgen.

Bei einer Last unter der kritischen, tritt keine Formänderung ein, so hat das Eigenwertproblem (9) die Form

$$(\underline{\underline{D}}_1 + R\underline{\underline{D}}_5)\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{0}}$$

Der kleinste Eigenwert gibt die erste kritische Last, durch den dazugehörigen Eigenvektor wird die Knickform von einem freien Parameter abgesehen bestimmt. Um die Punkte der zur Knickform gehörigen Zustandsänderungskurve nach dem Verzweigungspunkt zu bestimmen, muss auf dem Träger das Skalarfache der durch den Eigenvektor bestimmten Form erzeugt werden. Die richtige Annahme des Skalarparameters ist von grosser Wichtigkeit, da bei einem zu niedrigen Parameterwert, die Matrix  $\underline{\underline{H}}$  schlecht konditioniert /ill-conditioned/ ist, und das für die Elimination des Fehlervektors, zufolge der eingeschalteten endlichen Verschiebung, erforderliche Iterationsverfahren nicht konvergiert. Wird der Skalar zu hoch gewählt, so ist die Fehlervektornorm grösser als der Konvergenzradius.

Mit richtigen Werten gerechnet und durch die in Punkt 4 beschriebene Minimalisierung des Fehlervektors erhält man einen Punkt der Zustandsänderungskurve. Das Vorzeichen von  $\Delta R$ , wieder dementsprechend angenommen, ob der Punkt auf dem stabilen oder auf dem labilen Abschnitt liegt, können die Punkte der Zustandsänderungskurve nach dem für die grossen Verschiebungen gültigen Verfahren, mit beliebiger Dichte ermittelt werden.



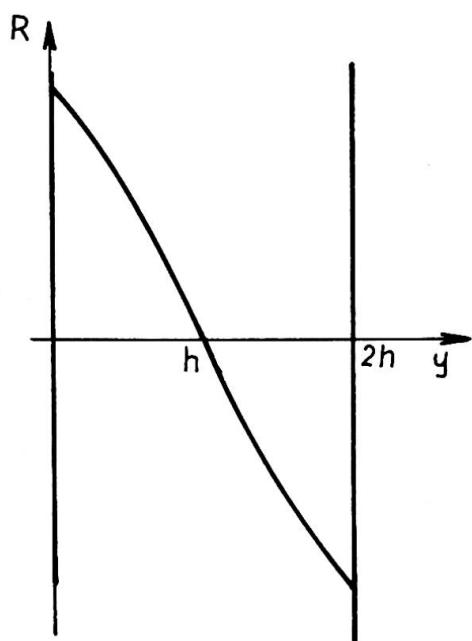


Abb.8. zeigt den Träger im ursprünglichen und im Endzustand, der nach einer, mit einem Eigenvektor der Norm 0,2 begonnenen Iteration berechnet wurde, weiterhin einige Zwischenzustände des Durchschlags, wobei die jeweiligen Größen der Ausgleichskraft angegeben sind. In Abb.9. ist die Größe der Ausgleichskraft in Abhängigkeit von der Verschiebung des Gelenks C dargestellt.

Abb.9.

#### Literatur

- [1] Szabó, J.-Rózsa, P.: Große Verschiebungen von Stabkonstruktionen. /Acta Technica Acad.Sc.Hungaricae, im Druck/.
- [2] Szabó, J.-Rózsa, P.: Die Matrizengleichung von Stabkonstruktionen. /Acta Technica Acad.Sc.Hungaricae, Tomus 71, Fasc.1-2. 1971. Budapest/.
- [3] Gáspár, Zs.: Stabilitätsprüfung von Stabkonstruktionen. /Acta Technica Acad.Sc.Hungaricae, im Druck/.
- [4] Falk, S.: Technische Mechanik, Dritter Band. /Springer-Verlag 1969. Berlin-Heidelberg-New York/.
- [5] Kollbrunner, C.F.-Meister, M.: Knicken, Biegedrillknicken, Kippen. /Springer-Verlag p.322 1961. Berlin-Göttingen-Heidelberg/.

#### Zusammenfassung

Durch die Lösung eines Eigenwertproblems, das aus der Zustandsänderungs-Differentialgleichung einer mit starren oder elastischen Stabelementen modellierten, durch einparametrische Belastung belasteten Stabkonstruktion folgt, lassen sich der Parameter der kritischen Last und das Affinbild der Knickform bestimmen. Die Punkte der Zustandsänderungskurve werden numerisch mit Hilfe eines konvergenten Iterationsverfahrens bestimmt.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide