

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 9 (1972)

Rubrik: Free discussion

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DISCUSSION LIBRE • FREIE DISKUSSION • FREE DISCUSSION

An Approximate Procedure for Probabilistic Limit Analysis

Une méthode approchée pour l'analyse limite probabiliste

Eine Näherungsmethode für wahrscheinliche Grenzwerte

GIULIANO AUGUSTI

Università di Firenze
Florence, Italy

In the final paragraph of their Introductory Report (Ref.1), Massonnet and Save underline the necessity of "making a considerable effort towards a better knowledge of the laws of material behaviour and of the ways of load application, in order not to lose in the uncertainty of the data all the advances achieved in the methods of calculation".

However, the data of any structural problem (loads, material characteristics, etc.) are, and indeed always will be by their very nature, uncertain: as a matter of fact, they are essentially random, like most physical quantities.

Therefore, it is my strong opinion that further "advances in the methods of calculation" are in danger of remaining pure academic exercises, unless this concept of unavoidable randomness is accepted and rationally taken into account. In other words, the engineering profession will have to be persuaded that certain answers to many problems can be given only by appropriate descriptions (in probabilistic terms) of the uncertainty.

Following this approach, as noted by Massonnet and Save themselves (Ref.1, p.3), the solution of a structural problem could be formulated as a problem of stochastic programming. Unfortunately, this technique appears to be too complicated to be at present acceptable as the basis for practical design procedures, notwithstanding some very recent promising results (Ref.2).

Because of these considerations, in collaboration with Dr. Baratta of the University of Naples, I have been engaged in the development of simpler techniques, based on a fully rigorous and exact theory, but at the same time able to give, by appropriate simplification of the numerical procedures, acceptable approximations of the complete (exact) probabilistic solution with a reasonable computational effort.

So far (Refs.3-8) our attention has been confined to structures that satisfy the basic hypotheses of limit analysis, as summarized in Ref.1, the only difference being that the limit moment M_p (or in general, the local yield strength) is, in each point of the structure, a random quantity with a

given probability distribution law. Consequently, if the load magnitude depends on one scalar parameter $P^{(*)}$, the overall strength of the structure is described by the probability distribution function of the limit (collapse) value of the load parameter, P_L ; i.e., by the function

$$F(P) = \text{Prob} (P_L \leq P) ; \quad 0 \leq P < \infty \quad (1)$$

The procedure that we have proposed consists in the determination of functions that bound $F(P)$ from above and below, thus allowing an evaluation of the degree of approximation achieved. To this aim, in Refs.3 and 4 two theorems have been demonstrated, which are the probabilistic analogues of the two bounding theorems of limit analysis (static theorem and kinematic theorem: cf. Ref.1, ineqs. 2 and 5 respectively).

The bounding theorems, whose practical relevance in classical limit analysis had been rather obscured in the last few years by the development of optimization techniques, regain thus their usefulness in probabilistic limit analysis, where the computational problems are still overwhelming.

In the formulation of the probabilistic theorems, auxiliary distribution functions are defined as follows:

a) let $F_\psi(P)$ be the probability that, investigating a number of stress fields in equilibrium with the loads measured by P , none of these fields is statically admissible (i.e. satisfies the yield condition throughout the structure);

b) let $F_\gamma(P)$ be the probability that, investigating a number of possible collapse mechanisms, at least in one case the loads measured by P are found kinematically sufficient (i.e., such that the power of the loads exceeds the dissipated plastic power).

It has then been proved that

$$F_\psi(P) \geq F(P) \geq F_\gamma(P) \quad (2)$$

for any function $F_\psi(P)$ and any function $F_\gamma(P)$.

It has also been shown that the average and the variance (dispersion) associated with the function $F(P)$ can be conveniently bounded when a function $F_\psi(P)$ and a function $F_\gamma(P)$ are known.

The ease of calculation of the bounding functions $F_\psi(P)$ and $F_\gamma(P)$ depends on the number and complexity of the investigated mechanisms and stress fields. Numerical examples have shown that even the crudest assumptions may yield technically relevant results (Refs.3-4); however, if the initial choices did not lead to acceptably close bounds, the process could be repeated with different assumptions. Some appropriate artifices to increase convergence have been proposed (Ref.5); in general it is worth underlining that an increase in the closeness of the bounding functions requires a great increase in the amount of computational work, often unwarranted by the present scarce knowledge of the input statistical properties.

Further current studies deal with the extension of our procedures to multi-parameter loading (Ref.6), in particular to variable repeated loads that may cause incremental collapse (Ref.7), and with the formulation of the static approach in very general terms (Ref.8).

(*) The same symbols as in Ref.1 (rather than those of Refs.3-8) are used, as far as possible, in this contribution.

For a comparison with works by other authors, it is interesting to remark that the presentation of ineqs.(2) as the basis of our treatment shows that the results obtained via the kinematic approach are inherently unsafe: in fact, unless all possible collapse mechanisms are taken into account, for any value of the load parameter P a probability of collapse $F_{\gamma}(P)$, smaller than the actual one $F(P)$, is calculated. However, all other works with similar aims that are known to the writer, have made exclusive use of the kinematic approach (cf. e.g. Refs.9-11): these works, explicitly or implicitly, rely on the fact that, in most if not all of the few examples of probabilistic limit analysis so far published, $F_{\gamma}(P)$ is a very close evaluation of the true distribution, even if not many mechanisms are investigated. Therefore, when by an appropriate truncation in the calculation of $F_{\gamma}(P)$, an upper bound to this distribution

$$F_{+}(P) > F_{\gamma}(P) \quad (3)$$

is obtained (Ref.9), it is quite likely that the true distribution has been bounded on both sides, i.e.

$$F_{+}(P) \geq F(P) \geq F_{\gamma}(P) \quad (4)$$

The present writer, however, thinks that the validity of ineq.(4), which is based on the closeness of $F_{\gamma}(P)$ and $F(P)$, should still be tested in many more examples before being taken for granted in general: it is worth underlining that the number of mechanisms which may contribute to the probability of collapse, is very large even for the simplest structure. For example, the portal frame investigated in Refs.3-4, where the possibility of plastic deformations is concentrated in 11 sections, has more than 200 significant mechanisms (Ref.8).

The only rigorously safe (upper) bound $F_{\psi}(P)$ to the true probability of collapse $F(P)$ is obtained via the static (equilibrium) approach, which has been proposed for the first time in Refs.3 and 4. It must, however, be admitted that in simple (perhaps unrealistic) examples the latter approach yields, with comparable amount of computations, a much worse approximation (albeit on the safe side) than the kinematic approach: on the other hand, the static approach appears to yield better to generalizations and extensions (Ref.8).

As a matter of fact, the determination of an $F_{\psi}(P)$ is immediate if the joint probability distribution of the local strengths is known. Therefore, if for instance the individual distributions of the local strengths are not the normal ones usually assumed in the demonstrative examples (but are statistically independent), each point of $F_{\psi}(P)$ is still given by a product of n terms (n being the number of elements into which the structure has been divided for the computations); on the contrary, each point of $F_{\gamma}(P)$ involves the calculation of an n -fold integral.

Lifting of the unrealistic assumption of statistical independence of the local strengths is a very complicated (and as yet, little investigated) problem, whose solution the writer thinks essential to increase the practical relevance of probabilistic structural analysis. However, once this problem is solved, the static approach guarantees that no new computational problems will be raised.

Finally, note that, differently from other authors (e.g. Refs.2, 12), we have separated the variables concerning strength (among which geometrical and other parameters could be included) from the variables concerning loads: each group of variables can be deterministic or stochastic. For example, if the strength variables are deterministic, all procedures reduce to the classical limit analysis, with all its properties, as explicitly pointed out in Ref.6.

REFERENCES

- 1) Ch. Massonnet, M. Save: "L'influence de la plasticité et de la viscosité sur la résistance et la déformation des constructions". A.I.P.C./I.A.B.S.E. 9th Congress; Introductory Report, 1971.
- 2) C. Gavarini, D. Veneziano: "Minimum weight limit design under uncertainty". Meccanica, AIMETA (in the press).
- 3) G. Augusti, A. Baratta: "Analisi limite di strutture con variazioni aleatorie di resistenza". 1st Italian Natl. Congr. Theor. & Applied Mechs. (AIMETA), Udine, 1971.
- 4) G. Augusti, A. Baratta: "Limit analysis of structures with stochastic strength variations". Journ. Structural Mechs., Vol.1, No.1, 1972.
- 5) A. Baratta: "An improvement in the static method for limit analysis of structures with stochastic strength variations". Journ. Structural Mechs. (in the press).
- 6) G. Augusti, A. Baratta: "Theory of probability and limit analysis of structures under multi-parameter loading". International Symposium on Foundations of Plasticity (A. Sawczuk, Editor); Wolters-Noordhoff, Groningen 1972.
- 7) A. Baratta, G. Augusti: "Shakedown of plastic structures with stochastic strengths (in preparation).
- 8) A. Baratta: "The static approach in probabilistic limit analysis" (in preparation).
- 9) C.A. Cornell: "Bounds on the reliability of structural systems". J. Struct. Div., ASCE, Vol.93, No. ST 1, 1967.
- 10) F. Moses, J.D. Stevenson: "Reliability-based structural design". J. Struct. Div., ASCE, Vol.96, No. ST 2, 1970.
- 11) J.D. Stevenson, F. Moses: "Reliability analysis of frame structures". J. Struct. Div., ASCE, Vol.96, No. ST 11, 1970.
- 12) C. Gavarini, D. Veneziano: "Sulla teoria probabilistica degli stati limite delle strutture". Giorn. Genio Civ., Vol.108, Nos.11-12, 1970.

**Fliessgelenklinien-Analyse der senkrechten und schiefen Platten-Balken-
Brückenkonstruktionen**

Yield-Line Analysis of Reinforced Concrete Right and Skew Beam-Slab
Bridge Structures

Analyse des lignes de rupture des poutres en té rectangulaires et obliques
de ponts en béton armé

TIBOR JÁVOR
Doc. Ing. CSc.
Bratislava, CSSR

Anknüpfend an die Abhandlungen von Prof. Freudenthal, die im Vorbericht zu dem I. Thema des Kongresses der IVBH veröffentlicht wurden, können wir feststellen, dass die Grenztragfähigkeit der Platten üblich hilfs der Kraft- oder kinematischen Methode gelöst wird. Indem die Kraftmethode bei der Grenztragfähigkeit von Platten in der Gleichheit der Innenkräftenmomente gegründet ist, bedingt die kinematische Methode eine Gleichheit zwischen der Virtualarbeit der Aussen- und Innenkräfte.

An der Tragfähigkeitsgrenze wandelt sich eine Platte in einen beweglichen Mechanismus um. Unter der Wirkung einer Auslenkraft biegt sich dieselbe um einen Betrag z.B. δ und die Kraft P_m leistet dabei eine Arbeit $P_m \cdot \delta$. Die einzelnen Plattenteile drehen sich gegeneinander in plastischen Zylindergelenken um die Winkel φ . Dieses Nachdrehen hindern die Grenzmomente $m_T \cdot r_i$, die in den Zylindergelenken wirken und dabei wird die Arbeit $m_T \cdot r_i \cdot \varphi$ geleistet.

Bekannt ist der Lösungsvorgang der senkrechten und schiefen isotropen oder ortotropen Platten in den Beiträgen von Johansen, Wood, Jones, Sobotka, Nagaraja, Sawczuk und Jaeger u.A. Gelöst sind sowohl senkrechte durch einen Trägerrost gestützte Durchlaufplatten, wobei üblich der Fall gelöst wird, wo die

Grenztragfähigkeit der Platte etwas früher als die der stützenden Rippen ausgeschöpft wird. Weniger vollkommen sind die Beiträge zur Lösung der Platten-Rost-, der sogenannten Platten-Balken-Brückenkonstruktionen, schieffen, oder gekrümmten im Grundriss.

Bei allen Lösungen der Platten-Balkensysteme hilfs der Fließgelenklinien-Analyse /Bruchlinien-/ erhebt sich die Frage des Beitrags der Zusammenwirkung der Platte mit den Balken, Abgrenzung einer Lösung des Falles als T-Querschnitt, oder einer Durchlaufplatte auf einem Trägerrost, als weichen /nachgiebigen/ Lagerung. Nur in wenigen Fällen wird die Torsionsteifigkeit der Träger als auch die Beiwirkung der Querträger anstands ihrer Torsionsteifigkeit bedacht. Dieses Problem erwies sich besonders bei schieffen Konstruktionen mit einer grösseren Anzahl von Trägern aktuell, da die Torsionsteifigkeitsfrage der Balken nicht mehr ausser Beachtung bleiben kann.

Wir beschäftigen uns mit senkrechten, schieffen und im Grundriss gekrümmten Platten-Balken-Strassenbrücken, die wir mittels verschiedener Lastsysteme bis zur Zerstörung geprüft hatten. Die Brücken wurden unter Kombination der Bruchlinientheorie und der Bruchgelenktheorie entworfen und die Ergebnisse hilfs der in der linearen Elastizität üblichen Theorie verglichen. Die im Massstab 1 : 4 hergestellten Modelle wurden auf entgegenstehenden Rändern frei gelagert unter Trägern und völlig frei unter den bleibenden zwei Rändern. Die Belastungsverteilung in den schieffen Ecken und in den Stützen wurde mittels Messdosen und Dehnungsmessstreifen nachgeprüft. Die untersuchten Modelle besaßen je 4 Hauptträger, die durch die obenliegende Stahlbetonplatte und Querträger über der Auflagerung verbunden waren. Die Messungen erfolgten sowohl in den Labors der University of Manitoba in Canada als auch der VÚIS in Bratislava, ČSSR.

Die Fließgelenklinien-Verläufe an der Oberfläche der Modelle sind charakteristisch und allgemein erwartet. Bemerkenswert ist der Verlauf der Spiralarisse an den durch eine einsame Last exzentrisch belasteten Trägern. Ihr Verlauf ist von der Torsionfestigkeit sowohl der Hauptträger, als auch

der Querträger auf beiden Enden abhängig. Der Fließlinienverlauf bei vorgespannten Modellen ist von den nicht vorgespannten kaum unterschiedlich. Die Träger der vorgespannten Modelle verhielten sich jedoch als Querschnitte typisch vorgespannte mit einer geringen Anzahl von Biegrissen, wobei die Zerstörung durch eine Schubbelastung erfolgte.

Die in Bratislava erfolgten Dehnungsmessungen wurden vollautomatisiert u.zw. mittels der Messzentrale MBM 5000 an das Lochstanzengerät ADDO geschaltet, das direkt mit dem Rechenautomaten PDP 8 verbunden war. Die Messergebnisse wurden auf dem Rechenautomat sofort ausgewertet und in Tabellenform verarbeitet. So gewonnen wir bereits die Beträge der Hauptspannungen, der Höchst. Schubspannungen, die Richtungen der Hauptspannungsachsen usw. Die Ergebnisse der Versuche wurden mit der theoretischen Analyse verglichen. Die Abschlüsse zeigen, dass die Kombinationsmethode der Bruchlinien und der Bruchgelenke für Platten mit zwei Hauptträger gültig ist. Für den Entwurf von Platten-Balken-Konstruktionen mit drei oder mehreren Trägern empfehlen wir eine neue Verwendung der Fließgelenklinientheorie, u.zw. in zwei Schritten: Der erste liegt in der Bestimmung der Querverteilung der Belastung mittels der klassischen Theorie, die bei Trägerrösten oder Waagerechten Rahmen verwendet wird, wobei die Berücksichtigung der verschiedenen Torsionsteifigkeiten bei einzelnen Trägern des Rostes von grosser Wichtigkeit ist. Der zweite Schritt liegt in der Untersuchung der einzelnen Platten zwischen der Balken mittels der Fließgelenklinientheorie und zwar unter Belastung mittels zwei Lastengruppen. Die Erste Gruppe bilden Lasten die die Platte direkt belasten, die zweite Gruppe wird durch Trägerwirkungen gebildet, d.h. durch den Einfluss verschiedener geradliniger Belastungen oder Momente die aus der Berechnung der Querverteilung der Belastung längs einzelner Träger erworben wurden. Die Träger werden dann auf der Tragfähigkeitsgrenze zugleich mit der Platte beurteilt u.zw. durch Einführung der Momenten- Durchbiegungs- und Torsionskapazität in Bruchgelenken der Träger und Torsionskapazität in Gelenken der End-Querträger.

Die derart erworbenen Momente an der Tragfähigkeitsgrenze berücksichtigen wir bei dem Bewehrungsentwurf der Träger, die durch kombinierte Belastung mittels einer Schiefen Durchbiegung und Torsion beansprucht sind. Die Lagerung der vorgespannten und nicht vorgespannten Hauptbewehrung als auch der Schubkraftbewehrung in Beziehung zu verschiedenen Arten besonders von Kastenträgern untersuchten wir im Rahmen einer umfangreichen Forschung an Gips- und Betonmodellen, als auch durch Messungen an Baustellen. Diese Fragen beeinflussen demnächst sowohl die richtige Beurteilung der Lastkraftverteilung am Trägerrost oder Platten-Balkensystem, beeinflussen also den gesamten Lösungsvorgang ganz vom Anfang.

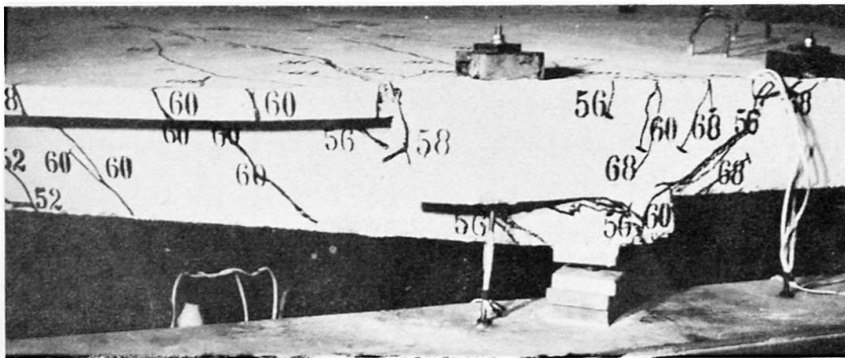


Abb.1. Der Verlauf der Risse im stumpfen Ecke des Stahlbetonmodells der Platten-Balkenbrücke.

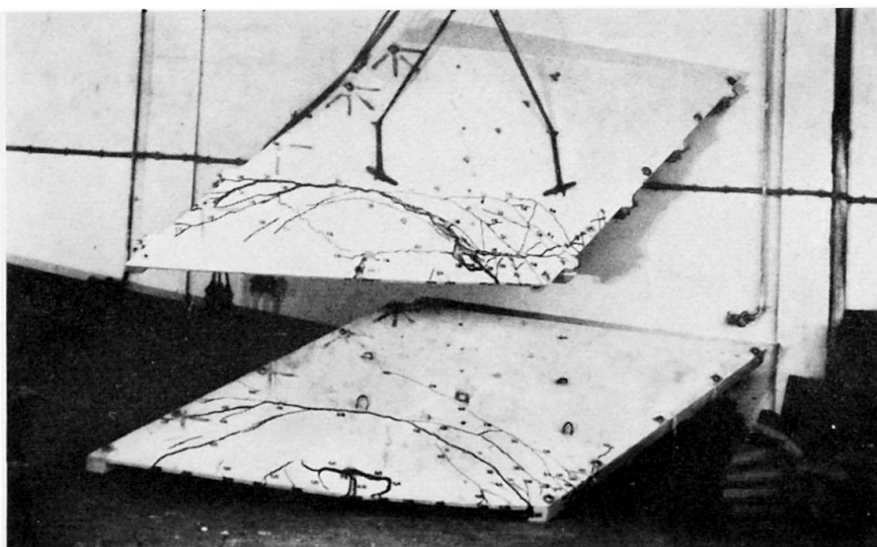


Abb.2. Die Fließgelenklinien an der Oberfläche der Stahlbeton /unten/ und der vorgespannten /oben/ Platten-Balken-Brückenmodelle.

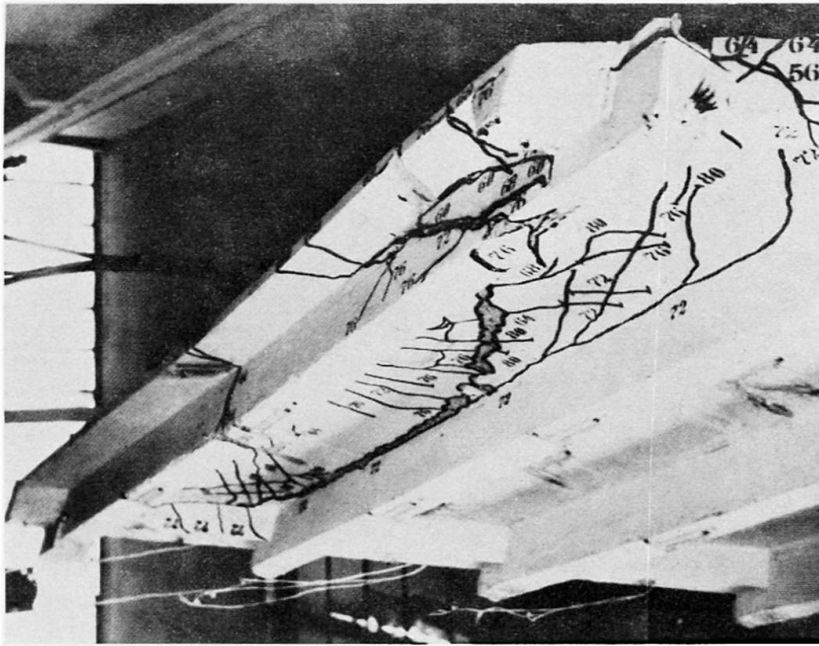


Abb.4. Ein vorgespanntes Modell der Platten-Balkenbrücke beim Versuch mit der Messzentrale MBM 5000.

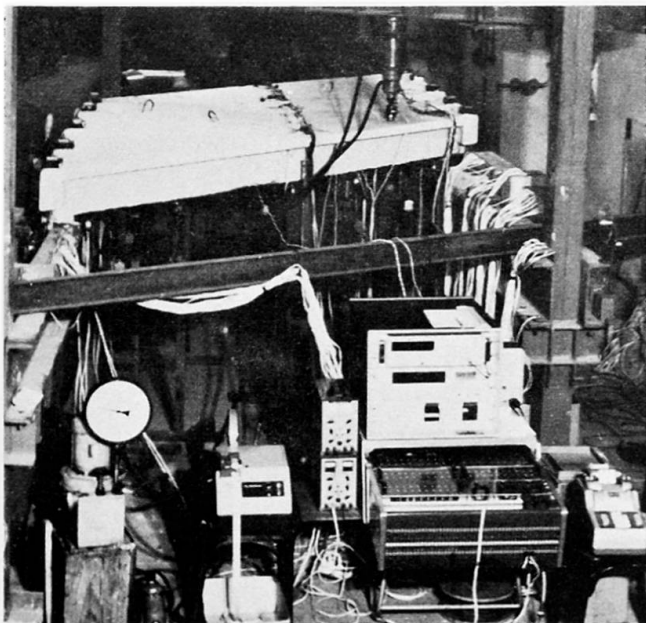


Abb.3. Die Träger des vorgespannten Modelles mit einer geringen Anzahl von Biegrissen, wobei die Zerstörung durch eine Schubbelastung erfolgte.

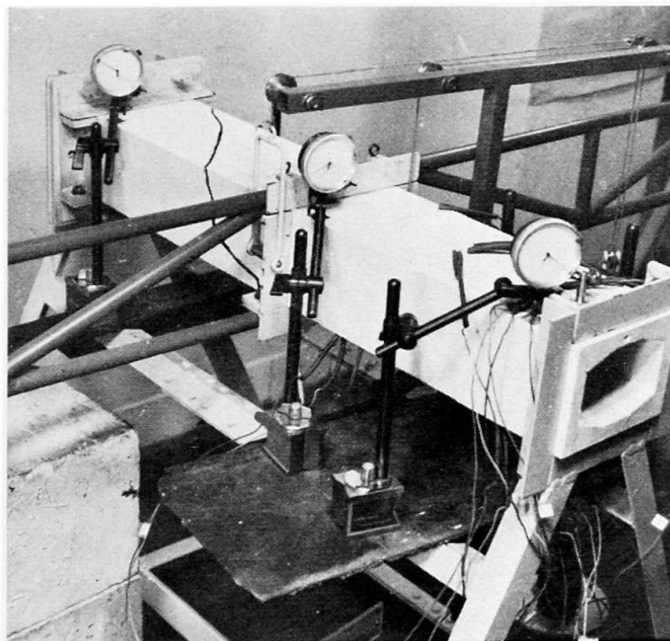


Abb.5. Die Schubkraftbevehrung- und die Torsionsteifigkeituntersuchungen mittels Gips-modellen.

ZUSAMMENFASSUNG

Plattenbalkenfahrbahnen von geraden, schiefen und gekrümmten Strassenbrücken mit I-Trägern wurden unter Belastung mit schweren Fahrzeugen bis zur Zerstörung geprüft. Für den Entwurf von Plattenbalken mit drei oder mehreren Trägern empfiehlt sich eine neue Anwendung der Fliessgelenklinientheorie. Aus den Versuchsergebnissen ist zu schliessen, dass die plastische Bruchmethode der Berechnung von Bauwerken mit Plattenbalken aus Stahlbeton ein einfaches Mittel zur Bestimmung der Festigkeit eines solchen Bauwerkes unter mehrfacher statischer Belastung bildet; vorausgesetzt, dass die Lastverteilung unter Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit der Träger richtig berechnet wird.

SUMMARY

Right, skew and curved beam-slab highway bridge decks were tested to destruction under a system of heavy wheel loads. For design of beam-slabs with three or more beams a new application of yield-line theory is recommended. From the results of tests presented, it would appear that the plastic collapse method of analysing reinforced concrete beam-slab structures is a reasonably simple mean of establishing the strength of such a structure under several static loading, if the load distribution is correctly calculated, taken into account the torsion rigidity of the beams.

RESUME

Des tabliers de ponts-routes à poutres en té droits, obliques et courbes ont été examinés jusqu'à la rupture sous des charges de véhicules lourds. Pour le projet de poutres en té avec trois ou plusieurs poutres, une nouvelle méthode par l'analyse des lignes de fluage est recommandée. Les résultats d'essais montrent que la méthode d'analyse limite plastique de structures à poutres en té en acier-béton constitue un moyen simple pour la détermination de la résistance d'une telle structure sous charges statiques multiples, si la distribution de la charge, compte tenu de la rigidité torsionnelle des poutres, est correctement calculée.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Prestressed Concrete Box Girders

Poutres en béton précontraint à section en forme de caisson

Vorgespannte Betonkastenträger

A. D. EDWARDSSenior Lecturer
Department of Civil Engineering
Imperial College
London, England**D. N. TRIKHA**Reader in Civil Engineering
University of Roorkee
IndiaIntroduction

The behaviour, in the post-cracking phase, of reinforced or prestressed concrete box girders subjected to eccentric loads is complex due to the anisotropy and non-linearity of the concrete, the non-linearity of the steel, and, not least, to the change of structural topology due to the initiation and propagation of cracks.

Experimental investigations of reinforced or prestressed concrete beams have been mostly restricted to the determination of crack widths and crack spacing, and to the establishment of empirical relations for the assessment of the ultimate load carrying capacity. Recently Ngo and Scordelis (1) have reported an elastic finite element analysis of reinforced concrete members in which the cracks must be prelocated on the basis of prior knowledge. A linear spring linkage was introduced to represent the bond between steel and concrete. Nilson (2) extended this approach by taking into account the non-linearity of the materials and by simulating the deterioration of bond by using non-linear springs. This approach, however, only allows development of cracks along pre-defined element boundaries and requires the preparation of new input data after each crack initiation. It does not consider directly the redistribution of stresses due to the energy released by cracking, nor does it consider box girders.

An automatic incremental iterative finite element procedure for the complete analysis of post-tensioned box girders (3) has been developed which takes account of many of the above problems. The three dimensional character of the girders is synthesised and structural actions such as shear lag, load diffusion, and distortion of the box are automatically included in the analysis. The effect of diaphragms of given shear and warping stiffness placed anywhere in the structure can be investigated. To prove the program, a series of twelve post-tensioned simply supported, but torsionally restrained, single cell box girders were tested to destruction under various midspan bending moment/torsion moment ratios (4). The strain distribution, first cracking load, crack pattern, deflection characteristics, and collapse load were compared with those predicted by the analysis.

Analytical Procedure

The flanges and webs of the box are represented, in the usual way, by finite elements lying in the appropriate planes and interconnected at their nodes. Rectangular and triangular membrane elements are used to idealise the concrete, and bar elements are used for the longitudinal, transverse, and shear reinforcement. The steel elements are connected to the adjacent concrete elements at the common nodes. Although the flexural stiffness of the elements forming the structure is neglected, the distortional stiffness of the box is simulated in the assembly of the structural stiffness, as explained later.

The structure is first analysed as an ordinary reinforced concrete one, the prestress being applied as external forces. The contribution of the prestressing steel to the overall stiffness is neglected since, at this stage, the steel is unbonded. For the subsequent application of external loads, the prestressing steel is assumed to be bonded to the concrete and the prestressing steel element stiffnesses are included in the overall structural stiffness matrix.

The external loads are applied in small steps, the element stiffnesses for each load increment being deduced from the state of strain at the end of the previous load step, and from the predicted strain increment for the current load step. The superposition of strains to obtain the total strain is carried out along fixed although arbitrary axes.

Material Properties

At the engineering level, concrete in its hardened state can be considered as having no directional dependence as regard its mechanical and physical properties. However, different strain levels are attained in the principal directions of an element after each increment of load. As a consequence, the instantaneous "elastic" constants in the two principal directions differ. The concrete is, therefore, treated as an isotropic material with the principal directions of elasticity coinciding with the principal directions of stress. In the absence of any quantitative evidence, it is assumed that the stress-strain relationship for concrete in a biaxial state of stress is the same in the two principal directions, and is identical to the one for uni-axial state of stress (5).

The stress-strain relationship for prestressing steel was obtained experimentally, and a third degree polynomial fitted to the results by linear regression analysis. For all other reinforcement, a single bi-linear law based on experimental results was adopted.

Diaphragms and Distortional Rigidity

The shear stiffness of a diaphragm is simulated by considering it to be an ordinary plane stress rectangular element connected at its nodes to the four corners of the box. Since the flexural stiffness of the elements is not included in the analysis, the warping restraint provided by the diaphragm is calculated on the basis of a square plate subjected to four self equilibrating corner loads. For the case of rectangular diaphragms, an equivalent square plate is adopted.

The distortional rigidity of the box is simulated by introducing imaginary diaphragms of appropriate shear stiffness at each mesh line.

Structural Stiffness

The stiffness of the structure is redefined at the beginning of each load increment to take into account the non-linearity of the materials and the

partial loss of stiffness of newly cracked elements.

Once the principal tensile stress in a concrete element exceeds the allowable tensile stress, a crack is assumed normal to its direction and passing through the centroid. The inclination of the crack remains fixed thereafter. The element after cracking cannot sustain stresses normal to the direction of the crack. For an element with two nodes common with a prestressing steel element, the loss of stiffness due to cracking is made gradual to correspond to the increasing deterioration of bond with load.

The forces released by cracking are redistributed using the stiffness of the elements corresponding to the tangent moduli of elasticity at the time of cracking. Normally, after the first redistribution of the release forces, a search is made for further cracking and the new release forces are applied with the next load increment. However, an option is retained in the program such that it is possible to carry on redistributing release forces until no further cracking takes place, or until less than a given number of elements crack.

The box girder is assumed to fail due to the deterioration of the structural stiffness matrix caused either by high compression in the concrete or by excessive cracking, or by "local" yielding of the steel. If the analysis fails by one of these causes, the load increment is reduced and a reanalysis carried out.

Comparison of Analytical and Test Results

The analytical results obtained for the girders of the previously mentioned test program were compared with the experimental results (6). The girders had spans of 4.57 m and 2.74 m and had various span/depth ratios. The mid-span bending moment/torsion moment ratios investigated were 0, 1.0, 1.5, 2.0 and ∞ . For the data reported here, the dimensions and reinforcement of the girders were as in fig. 1, the mid-span bending moment/torsion moment ratio for girder B6 was 1.0 and that for girder B7 was 2.0.

The analytical history of loading for girder B7 is given in table 1. The second load increment was made three times the size of the first load increment. The analysis failed at a downward web load of 60.0 kN plus the release forces due to 41 elements cracking. The failure was due to excessive steel strain. The downward web load was then reduced to 50.0 kN, and the release forces due to 41 elements that had previously cracked, but which had been carried forward to load stage V, were applied. This caused a further 30 elements to crack, and when the release forces corresponding to these were applied, the analysis again failed due to excessive steel strain. The downward web load was reduced to 45.0 kN and further iterations carried out with release forces due to cracking. The girder was subsequently analysed at smaller load increments in order to establish the first cracking load, and the deflection characteristics, more accurately.

Fig. 2 shows the analytical and experimental results obtained for the deflection at the point of application of the downward web load at mid-span for girders B6 and B7. It can be seen that reasonable agreement was obtained throughout the whole of the load history.

The first visual cracks in the test on girder B6 were recorded at a downward web load of 27.9 kN. In the analysis 2 elements cracked at 25.0 kN and a further 7 elements cracked at 30 kN.

The first visual cracks in the test on girder B7 were recorded at a downward web load of 21.9 kN. In the analysis 4 elements cracked at 20.0 kN and a further 26 cracked at 25.0 kN.

The 'safe' theoretical values for the downward web collapse load were 50.0 kN for girder B6 and 45.0 kN for girder B7. The corresponding collapse loads were 50.8 kN and 46.8 kN.

The predicted crack pattern for girder B7 is shown in the left hand half and the experimental crack pattern is shown in the right hand half of fig. 3. In the analytical crack pattern, the longitudinal cracks due to transverse bending are shown to extend for the full length of the beam. These cracks were not computed by the program and are only intended to show the expected position of the transverse bending cracks. It should be pointed out that the analytical crack pattern is only a reasonable representation of the cracks occurring in individual elements.

Conclusions

Comparison of analytical and experimental results shows that the method is capable of predicting deflections, crack patterns, first cracking loads and collapse loads with reasonable accuracy.

References

- 1) NGO, D., and SCORDELIS, A. C., Finite element analysis of reinforced concrete beams. Journal of American Concrete Institute, 1967, 64 (March) 152 - 163.
- 2) NILSON, A. H., Finite element analysis of reinforced concrete. Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, May 1967.
- 3) TRIKHA, D. N., An analytical and experimental investigation of post-tensioned single cell box girders. Ph.D. thesis, University of London, October, 1971.
- 4) TRIKHA, D. N., and EDWARDS, A. D., An experimental study of post-tensioned single cell box girders. Paper submitted to Journal of American Concrete Institute.
- 5) DESAYI, P., and KRISHNAN, S., Equation for the stress-strain curve of concrete. Journal of American Concrete Institute, 1964, 61 (March) 345 - 350.
- 6) TRIKHA, D. N., and EDWARDS, A. D., Analysis of concrete box girders before and after cracking. Paper submitted to Institution of Civil Engineers.

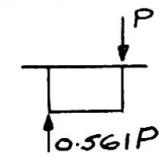
Load Stage	Increase in downward web load kN	Total downward web load P(kN) + (no. of cracked elements loading structure)	Distributed cracked elements. 1st iteration	Carried over cracked elements	Remarks
I	-	-	-	-	Prestress only
II	10.0	10.0	0	0	
III	30.0	40.0	104	67	
IV	10.0	50.0 + (67)	65	41	
V	10.0	60.0 + (41)			Steel strain > 0.015
IV(a)					
(i)	0.0	50.0 + (41)	-	30	
(ii)	0.0	50.0 + (30)	-	-	Steel strain > 0.015
IV(b)					
(i)	5.0	45.0 + (67)	-	56	
(ii)	0.0	45.0 + (56)	-	42	
(iii)	0.0	45.0 + (42)	-	31	
(iv)	0.0	45.0 + (31)	-	10	Time lapse

Table 1

History of loading (analysis) for Beam 7

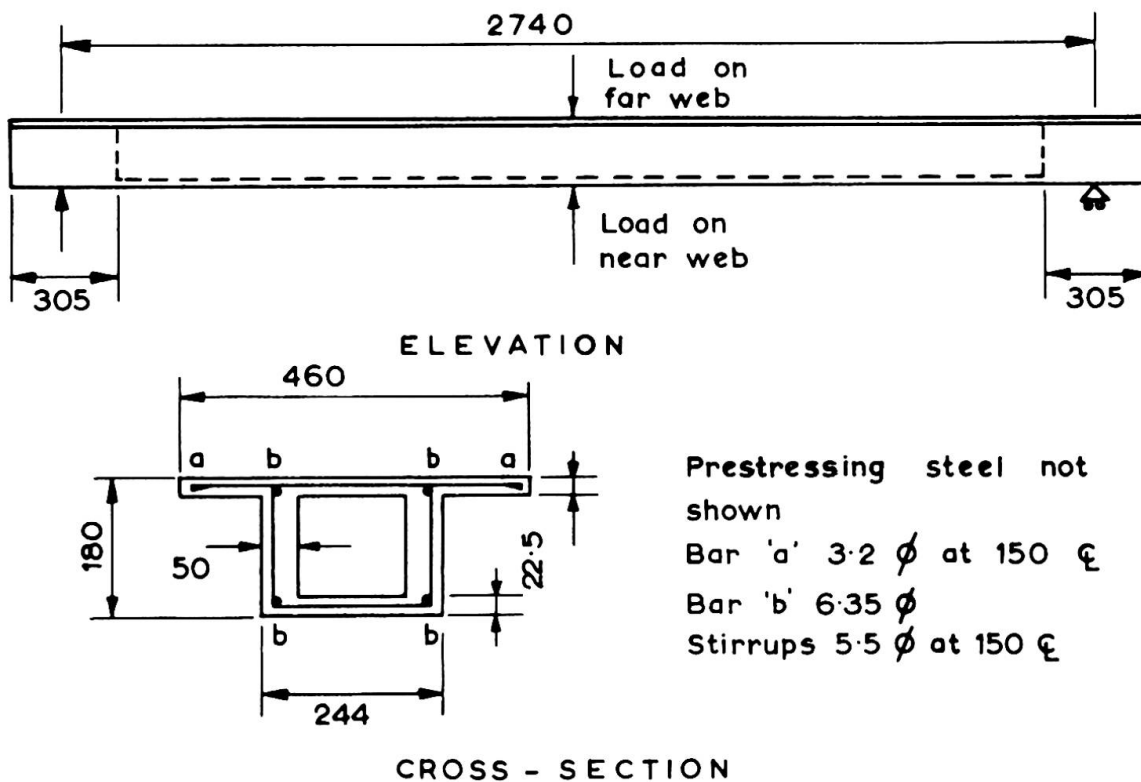


Fig. 1 Girder dimensions and reinforcement

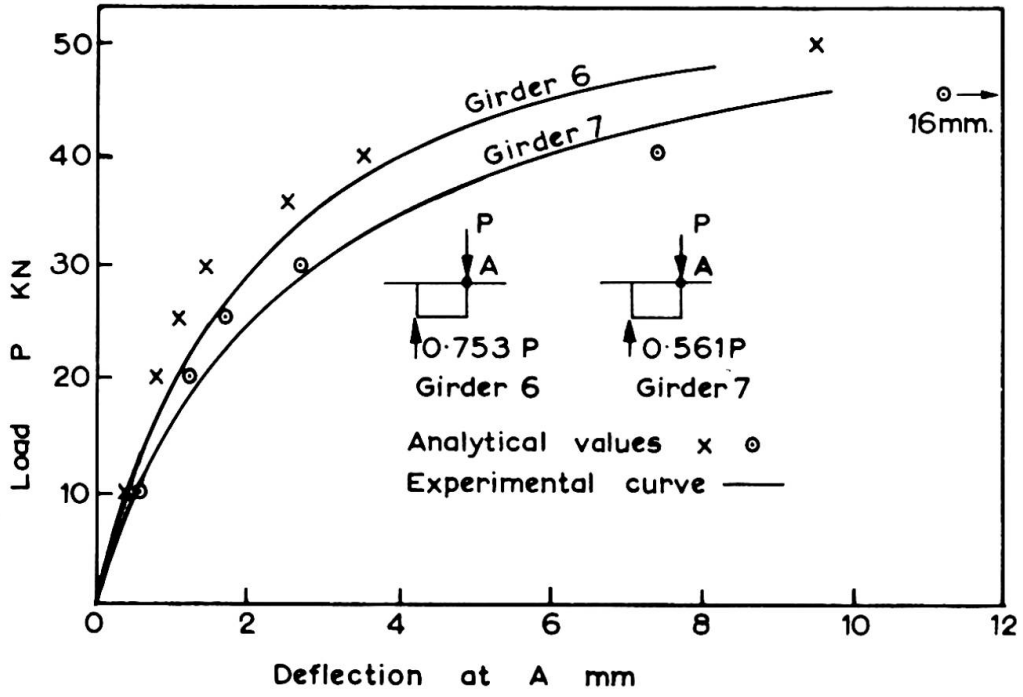


Fig. 2 Vertical deflection

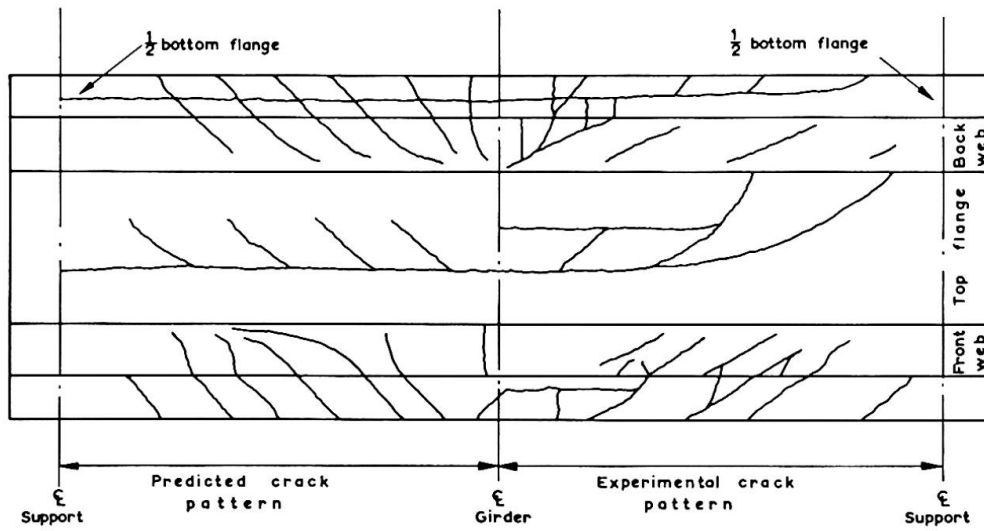


Fig. 3 Predicted and experimental crack patterns Girder B6

SUMMARY

An automatic incremental iterative finite element procedure for the analysis of post-tensioned box girders subject to combined bending and torsion in the un-cracked and post-cracking range is reported. The results of the analysis of two post-tensioned single cell box girders, each subjected to a different midspan bending moment/torsion moment ratio, are given, and compared with the experimental results obtained from the corresponding concrete model tests.

RESUME

Ce travail présente une méthode progressive d'analyse itérative automatique, basée sur les éléments finis, pour l'étude de poutres en caisson précontraintes soumises à la flexion et à la torsion dans le domaine non-fissuré et le domaine fissuré. On nous donne ici les résultats de l'analyse de deux poutres en caisson "post-tendues", soumises toutes deux, au milieu de la portée, à différents rapports moment de flexion/moment de torsion. Ces résultats théoriques sont comparés ensuite avec les résultats obtenus lors de tests sur des modèles correspondants en béton précontraint.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Beitrag wird ein Verfahren zur Berechnung von nachgespannten Kastenträgern unter kombinierter Biegung und Torsion im ungerissenen und gerissenen Zustand vorgestellt. Das iterative und automatisch wachsende Verfahren beruht auf endlichen Elementen. Die Rechenergebnisse von zwei nachgespannten, einzelligen Kastenträgern, von denen jeder in der Mitte durch ein anderes Verhältnis Biegemoment zu Torsionsmoment belastet ist, werden aufgezeigt und mit verschiedenen experimentellen Ergebnissen verglichen, die aus den entsprechenden Modellversuchen gewonnen werden.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Einfluss der Viskosität und Plastizität auf Verformung und Traglast

The Influence of Viscosity and Plasticity on the Deformation and the Ultimate Strength

Influence de la viscosité et de la plasticité sur la déformation et la charge ultime

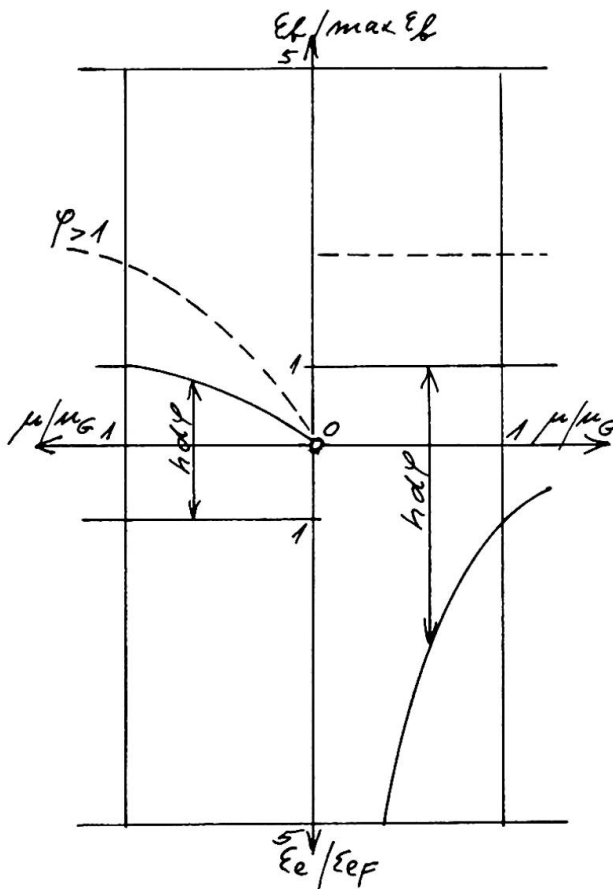
J. J. RIEVE
Dr.-Ing.
Düsseldorf, BRD

Der Einfluß der Viskosität und Plastizität auf die Verformung biegesteifer Stahlbetonstäbe läßt sich einfach und übersichtlich an der Figur 1 erörtern, bei der die Randzerrungen ϵ_b des Betons und ϵ_e des Stahles über die bezogene Bewehrung μ/μ_G aufgetragen sind ($\mu_G =$ Grenzbewehrung). Die Verformungen des biegesteifen Stahlbetonstabes ergeben sich aus der Summe der Zerrungen der Einzelbaustoffe, wobei der Einfluß der Einzelbaustoffe auf die Gesamtverdrehung $\epsilon_e + \epsilon_b = h d \varphi$ abhängt von der bezogenen Bewehrung μ/μ_G . Vereinfachend bleibe die Plastizität des Betons außen vor und es gilt dann: Viskosität gehört zum Beton und Plastizität zum Stahl. Die Waageachse der Fig. 1 trägt sowohl nach links wie auch nach rechts die bezogene Bewehrung μ/μ_G auf, nach oben die Betonstauchung ϵ_b des Druckrandes, nach unten die Stahlzerrung ϵ_e der Stahleinlagen. Links stellt den ν -fach Gebrauchs-, rechts den Bruchzustand dar. Links gilt: $\epsilon_e = \epsilon_{ef}$, für $\mu/\mu_G \approx 1$. Es gibt im Stahlbeton kein Mindestwertprinzip des Baustoffaufwandes, wie im Einführungsbericht [1] beschrieben; denn die Stahleinlagen sind stets ausgenutzt. Traglastverfahren bringen keine kleinere Stahlmenge als die Elastizitätstheorie, sondern nur eine andere Verteilung. Eine entscheidende Aussage der linken Seite liegt dort, wo sich zeigt, daß die Betonstauchung und damit auch Spannung mit zunehmendem μ/μ_G parabelförmig zunimmt bis zum Rechenwert, der für $\mu/\mu_G = 1$ erreicht wird. Stahlbetonstäbe können Zwang rissefrei über die Viskosität abbauen, aber nur bei $\mu/\mu_G \gg 0$ und großer Kriechzahl ρ . Rechts stehen die Bruchmomente, die ungefähr sich über die Waageachse und Lotachse gegen-

über dem Gebrauchszustand spiegeln. Wo links unten $\epsilon_e = \text{const}$, jetzt rechts oben $\epsilon_f = \text{const}$, wo links oben ϵ_f wächst mit μ/μ_G jetzt rechts unten ϵ_e wächst mit μ/μ_G . Dieser Anstieg kommt aus der plastischen Verzerrung der Stahleinlagen und bringt grobe Risse. Freudenthal [2] weist zurecht darauf hin, wie gefährlich diese Verformung ist. Sie tritt nur auf für $\mu/\mu_G \ll 1$. Fig. 1 zeigt: in einem Querschnitt kann man nicht beides haben: große Viskosität und große Plastizität. An der Stelle $\mu/\mu_G \sim 1$ hat ein Stahlbetonstab ohne Kriechen eine Verformmöglichkeit, die der eines Stahlstabes im elastischen Bereich entspricht. Darauf läßt sich keine Traglast aufbauen.

Viskosität des Betons tritt nur auf, wenn die ständigen Lasten oder Kräfte einen wesentlichen Teil der Gesamtlast oder Kraft ausmachen.

ν x Gebrauchszu- Bruchzustand
stand Betonrand



Stahlrand
Fig. 1

Damit gilt: eine rissefreie Umverteilung tritt nur für ständige Lasten, Schwinden und einsinniger Stützensenkung auf und das nur für $\mu/\mu_G \gg 0$ und $\varphi > 1$. Kurzzeitliche Temperaturschwankungen und Verkehrslasten arbeiten bei $\mu/\mu_G \sim 1$ am spröden Stab und bei $\mu/\mu_G \ll 1$ am plastischen Stahlstab mit reißendem Beton. Fig. 1 verdeutlicht, wie μ_G der ausschlaggebende Kennwert jeder Stahlbetonbemessung ist. Der Wert μ/μ_G ersetzt die im Einführungsbericht unter 3.1.3 mit a, b, c und d genannten Kriterien. In diesem Wert gehen die nur überschläglich bekannten Schwind- und Kriechzahlen ein. Damit bleibt die Bewehrungsgrenze überschläglich, damit aber auch die als Rechenwert gebrauchte Betonfestigkeit. Der Betonwürfel bedeutet

nicht annähernd so viel für die Bemessung, wie heute oftmals behauptet. Er liefert einen überschläglichen Rechenwert der Bemessung, der überhaupt nur gefragt ist, wenn stark bewehrt wird. Viel stärker als die Würfelfestigkeit an sich beeinflussen die viskosen Eigenschaften des Betons das Tragverhalten der Stahlbetonstäbe. Das Vorstehende gilt genauso für Spannbetonstäbe. Diese zeichnen sich dadurch aus, daß viel mehr Schnitte in die Randgebiete $\mu/\mu_G \geq 1$ fallen. Sie haben mehr viskose und weniger plastische Eigenschaften. Sie können damit Dauerlasten und Dauerzwänge rissfrei umverteilen, sind dafür aber bei Kurzlasten und Wechselzwängen spröde.

Für Beanspruchungen nahe der Bruchfestigkeit des Betons hat der Beton auch plastische Eigenschaften. Sie kommen aus der beginnenden Gefügezerstörung und dürfen nur dann auftreten, wenn Zwang abgebaut werden muß. Die Plastizität des Betons tritt nur auf für $\mu/\mu_G > \sim 1$.

Fig. 1 verdeutlicht wie eingeschränkt Traglastverfahren bei Stahl- und Spannbetonstäben anwendbar sind. Sie können allenfalls dazu verwandt werden, Dauerzwänge in ihrer Bedeutung herabzusetzen.

 (1) M. Save und Ch. Massonet im Einführungsbericht,
 S. 3 unten, S. 15.

(2) A.M. Freudenthal im Vorbericht, S. 31.

ZUSAMMENFASSUNG

Viskosität gehört zum Beton und Plastizität zum Stahl des Stahlbetonstabes. Beide treten je nach Wert μ/μ_G auf und nicht gleichzeitig in einem Schnitt. Die Rechnung kann für Dauerzwang die Viskosität nutzen, die Plastizität nur, wenn man sich mit groben Rissen abfindet.

SUMMARY

Viscosity belongs to concrete and plasticity to steel of the reinforced concrete bar. Both appear in accordance with the value μ/μ_G and not simultaneously in a section. The analysis can profit from the viscosity for continuous constraints, the plasticity only if one puts up with coarse cracks.

RESUME

Dans une poutre en béton armé, la viscosité est en rapport avec le béton et la plasticité avec l'acier. Ces deux phénomènes apparaissent selon la valeur du rapport μ/μ_G , mais pas simultanément dans la même section. Le calcul peut, pour des contraintes permanentes, utiliser la viscosité, la plasticité seulement dans le cas où l'on accepte de grosses fissures.