

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 9 (1972)

**Artikel:** Experimentelle und theoretische Untersuchung des Trag- und  
Stabilitätsverhaltens einschaliger räumlicher Gelenknetzwerke im  
elastischen Bereich

**Autor:** Matthees, W. / Wegener, P.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-9593>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### IIIb

#### **Experimentelle und theoretische Untersuchung des Trag- und Stabilitätsverhaltens einschaliger räumlicher Gelenknetzwerke im elastischen Bereich**

Experimental and Theoretical Investigation of the Behaviour of Capacity and Stability of Single Shell Articulated Networks in the Elastic Range

Etude expérimentale et théorique du comportement en charge et de la stabilité de treillis spaciaux articulés en régime élastique

W. MATTHEES                      P. WEGENER  
Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)  
Berlin, BRD

#### 1. EINLEITUNG

Für die theoretische Untersuchung des Tragverhaltens einschaliger räumlicher Netzwerke wird vereinfachend angenommen, daß alle Stäbe gelenkig miteinander verbunden sind, daß das Netzsystem kinematisch stabil ist, (d.h. also alle Knoten unverschieblich gehalten sind, solange die Stäbe als längsstarr vorausgesetzt werden) und daß Belastungen nur als Einzellasten in den Knoten angreifen.

Zur Bestimmung der Stabkräfte und Verformungen wird außerdem angenommen, daß die entstehenden Knotenwege klein im Vergleich zu den Stablängen sind (Theorie 1. Ordnung). Das statische Verhalten hängt dann ausschließlich von den Stablängssteifigkeiten ab.

Für die Stabilitätsuntersuchung wird die Berechnung des verformten Systems näherungsweise ersetzt durch das iterative Verfahren der fiktiven Kräfte [3].

Durch Vergleich der rechnerischen Lösung mit experimentellen Untersuchungsergebnissen an Netzwerken, die die obengenannten Voraussetzungen nicht ideal erfüllen, wird die Anwendbarkeit der vereinfachenden Rechenannahmen auf solche Systeme kontrolliert.

#### 2. AUFBAU UND GEOMETRIE DER UNTERSUCHTEN NETZWERKE

Die einschaligen Netzwerke bestehen aus dünnwandigen Stahlrohren ( $EF \approx 4 \cdot 10^6$  kp,  $EW \approx 4 \cdot 10^6$  kp.cm), die in den Knotenpunkten durch besondere Knotenstücke zentrisch miteinander verschraubt sind. Beide Netzsysteme sind hochgradig statisch unbestimmt.

NETZSYSTEM I ist eine kinematisch stabile Kuppel, deren 73 Knoten auf der Oberfläche einer Halbkugel liegen [6]. Die 192 Stabelemente erzeugen ein ungleichschenkliges Dreiecksnetz, dessen Maschen um jeden Knoten räumliche Sechsecke bilden (Fig. 2). Da weder bevorzugte Stabrichtungen noch wesentliche Steifigkeitsunterschiede im Netz bestehen, könnte das statische Verhalten aus dem Membranspannungszustand einer als Ersatzsystem gedachten Schale

abgeleitet werden [4]. Dies geschieht nachfolgend jedoch nicht.

NETZSYSTEM II bildet einen zeltförmigen Pyramidenstumpf aus 69 Knoten und 180 Stäben. Das Netz wird aus Dreiecken und Rechtecken erzeugt (Fig. 4 u. 5). Einige unbelastete "Nebenknoten" sind senkrecht zur Netzoberfläche kinematisch instabil, was jedoch auf die Stabilität des Haupttragsystems ohne Einfluß ist.

### 3. STATISCHE BERECHNUNG

Es ist Aufgabe der Elastizitätstheorie, Verschiebungen und Spannungen eines elastischen Systems infolge einer Belastung zu ermitteln [2]. Zur Verfügung stehen die Gleichgewichtsbedingungen am verformten System, das Elastizitätsgesetz und der geometrische Zusammenhang zwischen den Verschiebungs- und Verzerrungsgrößen. Während das Elastizitätsgesetz für metallische Werkstoffe ausreichend genau linear (Hooke) ist, sind die Verzerrungs- und Verschiebungsbeziehungen nicht linear. Deshalb braucht zwischen Belastung und Verschiebung grundsätzlich kein linearer Zusammenhang zu bestehen [1].

Im Falle kleiner Verformungen linearisiert die klassische Elastizitätstheorie die nichtlinearen Beziehungen. Sie erfüllt die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System (Theorie 1. Ordnung). Zur Bestimmung der Stabkräfte und Verformungen wird dieser Weg auch hier unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen und der damit verbundenen Energiebetrachtung nach der Deformationsmethode für infinitesimale Knotenwege als ausreichend genau beschrieben.

Die Anwendung der Energiemethode für finitesimale Knotenwege bei der Untersuchung der Stabilität zur Ermittlung einer exakten Lösung stößt auf bislang ungelöste Schwierigkeiten, da bei der Integration des inneren elastischen Potentials von Knotenwegen abhängige, veränderliche Integrationsgrenzen entstehen. Die Stabilitätszustände können nur durch Näherungsverfahren, wie z.B. durch das wiederholte Anwenden der Energiemethode für infinitesimale Zustände iterativ ermittelt werden.

Hier soll aufbauend auf der einmalig infinitesimalen angewandten Energiemethode durch das iterative Verfahren der fiktiven Kräfte [3] eine Näherungslösung ermittelt werden.

#### 3.1. BERECHNUNG NACH DER THEORIE 1. ORDNUNG

Nach [5] lautet das elastische Potential der äußeren Knotenlasten

$$\Pi_a = - \mathbf{v}^T \mathbf{p} = - \mathbf{p}^T \mathbf{v} \quad (1)$$

wobei  $\mathbf{v}^T$  der transponierte Verschiebungsvektor und  $\mathbf{p}$  der Belastungsvektor für alle Knoten ist. Das Elastizitätsgesetz lautet

$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \Delta \quad (2)$$

wobei  $\mathbf{s}$  der Stabkraftvektor und  $\Delta$  der Stablängenänderungsvektor ist. Die quadratische Stabsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{D}$  enthält entsprechend der in  $\Delta$  gewählten Anordnung alle Stabsteifigkeiten  $EF/l$  ( $E$  = Elastizitätsmodul,  $F$  = Fläche,  $l$  = Länge). Die Matrix  $\mathbf{B}$  ist entsprechend dem Ordnungsschema von  $\Delta$  und  $\mathbf{v}$  aus den Stabeinheitsvektoren aufgebaut und stellt für kleine Verformungen den geometrischen Zusammenhang her

$$\Delta = \mathbf{B} \mathbf{v} \quad (3)$$

Das elastische Potential der inneren Kräfte lautet

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \Delta^T s$$

daraus folgt mit (2) und (3)

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \Delta^T D \Delta = \frac{1}{2} v^T B^T D B v$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} v^T K v \quad (4).$$

Die symmetrische Systemsteifigkeitsmatrix  $K = B^T D B$  läßt sich durch Minimierung der Knotennummerndifferenzen benachbarter Knoten als Bandmatrix darstellen. Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ist ein System dann im Gleichgewicht, wenn die erste Variation des Gesamtpotentials ein Minimum wird:

$$\delta \Pi = \delta (\Pi_a + \Pi_i) = \delta (-v^T p + \frac{1}{2} v^T K v) = 0 \quad (5)$$

Mit  $\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial v} \delta v = 0$  und  $\frac{\partial v}{\partial v} = I$ , wobei  $I$  die Einheitsmatrix darstellt folgt aus (5)

$$0 = -I p + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} (v^T K v) = -p + K v$$

$$\begin{aligned} p &= K v \\ v &= K^{-1} p \end{aligned} \quad (6)$$

Aus (2) und (3) folgen die Stabkräfte

$$s = D B v \quad (7)$$

Aus den Gleichungen (6) und (7), die mittels Computer ausgewertet werden, können die Knotenverschiebungen und Stabkräfte ermittelt werden.

Im SYSTEM II sind einige Knoten kinematisch instabil, was für die numerische Behandlung zur Folge hat, daß die Determinante der infinitesimalen hergeleiteten Formänderungsmatrix zu 0 wird. Betrachtet man dagegen das verformte System, verschwindet diese Unstetigkeitsstelle mit wachsender Belastung.

### 3.2. VERFAHREN DER FIKTIVEN KRÄFTE

Die Methode der fiktiven Kräfte hat gegenüber anderen Iterationsverfahren den Vorteil, eine Steifigkeitsmatrix nur einmal aufstellen und auflösen zu müssen. Zur näherungsweise Ermittlung der vollständigen Stabkräfte (Theorie 2. Ordnung) werden dann in den anschließenden Iterationszyklen, unter Beachtung der Maßgabe, daß nach wie vor die Steifigkeitsmatrix des unverformten Systems benutzt wird, diejenigen Kräfte dem System als äußere fiktive Belastung aufgeprägt, die zur Erzeugung des Gleichgewichts aus den Stabkräften des Ausgangssystems am finitesimal ausgelenkten System notwendig sind.

In Fig. 1 wird das durch die fiktiven Kräfte entstehende, in diesem Fall rückdrehende Kräftepaar für einen Zugstab dargestellt. Die Iteration ist gegebenenfalls durch Relaxation zu beschleunigen. Iterationsende wird erreicht bei

$$(\vartheta^N - \vartheta^{N-1})_{\max} = \epsilon, \text{ wobei } \epsilon \text{ eine gewählte Fehlerschranke ist.}$$

Vergleichswerte können näherungsweise bei Untersuchung eines Teilsystems als Durchschlagproblem nach [4] gefunden werden, vergleiche Kurve a in Fig. 3 und Fig. 6.

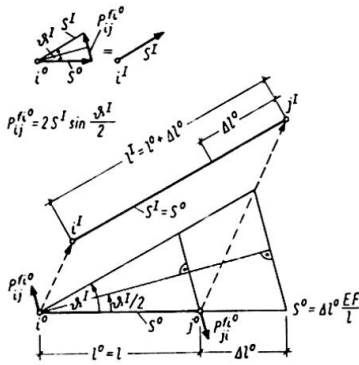


Fig. 1 Finitesimaler Verschiebungszustand mit fiktivem Gleichgewichtszustand im I. Iterationszyklus für einen Zugstab ( $S > 0$ )

#### 4. EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG

In jedes Netzsystem waren 23 bzw. 34 "geeichte", mit je 4 Dehnungsmeßstreifen versehene Meßstäbe eingebaut, so daß an ausgezeichneten Stellen die Stabdehnungen, Stabkräfte und Stabendmomente sowie der örtliche Fließbeginn infolge der Belastung bestimmt werden konnten. An jeweils 8 Knoten wurden die Knotenverschiebungen in 3 senkrecht zueinander stehenden Richtungen mit Hilfe von Potentiometerweggebern ermittelt. Die Belastung wurde durch hydraulische Zugpressen erzeugt, und über Zuggehänge senkrecht bzw. waagerecht zentrisch in die Knoten eingeleitet. Die Größe der Kräfte wurde durch Kraftmeßdosen gemessen. Alle Meßwerte wurden mit einer Vielstellenmeßanlage, die jede Meßstelle selbsttätig auswählte, auf Lochstreifen registriert und auf einer elektronischen Rechenanlage ausgewertet.

#### 5. ERGEBNISSE

##### 5.1. STABKRÄFTE UND VERFORMUNGEN

Die nach Gleichung (6) und (7) errechneten Stabkräfte und Knotenverschiebungen sind für einen "Einheitslastfall" am Netzsystem I in Fig. 2 und am Netzsystem II in Fig. 4 und Fig. 5 eingetragen. Die für denselben Lastfall im Versuch ermittelten Meßwerte sind den Rechenwerten in den gleichen Figuren gegenübergestellt. Wegen der rechnerisch nicht erfaßbaren geringen Nachgiebigkeiten in den Knotenverschraubungen sind die gemessenen Knotenwege etwas größer als die errechneten.

Die statisch interessierenden Lastfälle werden aus den Einheitslastfällen superponiert. Im Versuch wurde mit Hilfe von Lastgruppen die Zulässigkeit des Superpositionsverfahrens und damit die zugrundeliegende Annahme des linearen Zusammenhanges zwischen Last und Verformung kontrolliert. Eine Untersuchung des Zwängungszustandes infolge der Montage der Kuppel I ergab, daß die größte Stabkraft etwa bei 10% der rechnerisch zulässigen Stabkraft und die größte Randspannung bei etwa 40% der zulässigen Spannung lag.

##### 5.2. TRAGVERHALTEN UND STABILITÄT

Zur Untersuchung des Tragverhaltens wurde Kuppel I in Punkt B durch eine senkrechte Einzellast und Kuppel II in Punkt K durch eine waagerechte Einzellast (Fig. 5) bis zum Bruch beansprucht. Die gemessenen Bruchlasten sind in Fig. 3 und Fig. 6 eingetragen. In beiden Fällen trat der Bruch schlagartig durch Einzelstabknicken ein. Die Bruchlasten der Netzstäbe lagen dabei etwas höher als die in Vorversuchen an entsprechenden gelenkig gelagerten Einzelstäben gemessenen Knicklasten (Eulerfall 2).

Fig. 4  
Errechnete und gemessene Knoten-  
wege

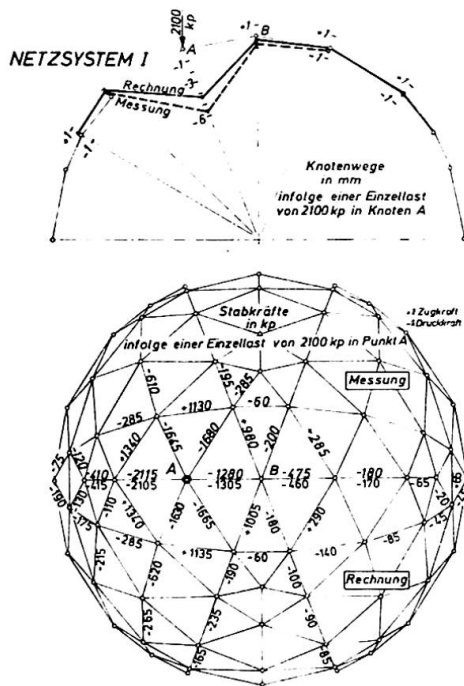


Fig. 2 Errechnete und gemessene  
Knotenwege (oben)  
und Stabkräfte (unten)

#### NETZSYSTEM I

Kraft-Wegdiagramm des Zenitknotens B  
in doppelt-logarithmischer Darstellung  
a) als Durchschlagproblem nach [4]  
b) rechnerisches System (Theorie 1. Ordnung)  
c) Versuch  
d) rechnerisches System (Verfahren der fiktiven Kräfte)

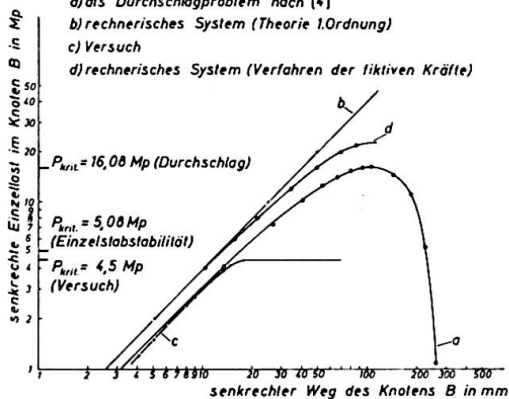


Fig. 3 Ergebnisse der Stabilitäts-  
untersuchung im Bereich des  
Knotens B

#### Fig. 6

Ergebnisse der Stabilitätsun-  
tersuchung im Bereich des  
Knotens K

#### NETZSYSTEM II

Knotenwege in mm  
infolge einer senkrechten  
Einzellast von 2100 kp  
in Knoten C

Knotenwege in mm  
infolge einer waagerechten  
Einzellast von 2100 kp  
in Knoten K (1. Versuch)

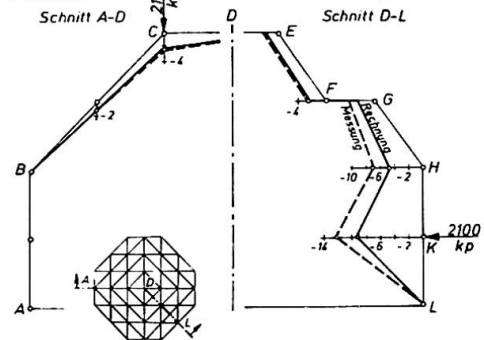
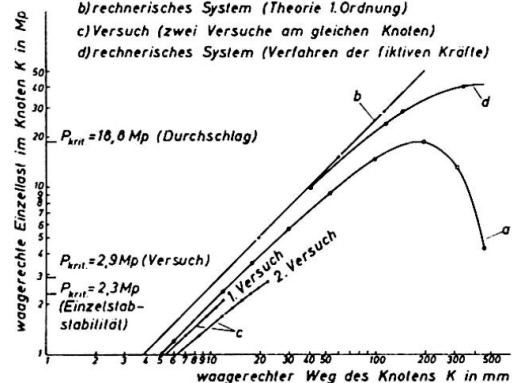


Fig. 5 Errechnete und gemessene  
Stabkräfte infolge einer senkrechten  
Einzellast in Punkt C  
bzw. infolge einer waagerechten  
Einzellast in Punkt K (Schnitt)

#### NETZSYSTEM II

Kraft-Wegdiagramm des Knotens K  
in doppelt-logarithmischer Darstellung

a) als Durchschlagproblem nach [4]  
b) rechnerisches System (Theorie 1. Ordnung)  
c) Versuch (zwei Versuche am gleichen Knoten)  
d) rechnerisches System (Verfahren der fiktiven Kräfte)





Der Vergleich der rechnerischen Stabilitätsuntersuchung nach der Methode der fiktiven Kräfte ist als Kurve d und die Durchschlaguntersuchung nach [4] als Kurve a in Fig. 3 und Fig. 6 eingezeichnet. Es wird deutlich, daß bei den vorhandenen Steifigkeiten in jedem Fall Instabilität in Form von Einzelstabknicken und nicht als System-Instabilität auftritt. Durchschlagen als System-Instabilität würde erst bei sehr viel kleineren Steifigkeiten eintreten.

#### LITERATUR

- [1] Mises, R.v.:  
Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie  
Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. 3 (1923) S. 406-422
- [2] Kappus, R.:  
Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen  
Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. 19 (1939) S. 271-285,  
S. 344-361
- [3] Teichmann, A.:  
Statik der Baukonstruktionen  
Sammlung Götschen 1958
- [4] Klöppel, K. und Schardt, R.:  
Zur Berechnung von Netzkuppeln  
Der Stahlbau 31 (1962) S. 129-136, 384
- [5] Bürgermeister, G. und Steup, H. und Kretzschmar, H.:  
Stabilitätstheorie, Akademie-Verlag Berlin  
Band I, 3. Auflage 1966; Band II, 1963
- [6] Versuchsbericht Az. 2.2/15 172 der Bundesanstalt für  
Materialprüfung vom 9. 11. 1970

#### ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird durch vergleichende Anwendung von Rechnung und Experiment das statische Verhalten, die Stabilität und das Bruchverhalten von gelenkfachwerkartig aufgebauten räumlichen Stabwerken untersucht. Als Untersuchungsbeispiel dienen zwei unterschiedliche Systeme von einschaligen Netzkuppeln, deren Stabelemente aus Rohrprofilen bestehen und in den Knotenpunkten durch Knotenstücke zentrisch miteinander verschraubt sind.