

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 9 (1972)

Rubrik: Theme IIIb: Space structures

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

III b

Structures tridimensionnelles
Raumtragwerke
Space Structures

Leere Seite
Blank page
Page vide

Aus geraden Stäben erzeugte windschiefe Regelflächen als Tragwerke

Warped Ruled Surfaces Formed by Straight Members Serving as Structures

Réalisation de charpentes à surfaces réglées déjetées à l'aide de barres rectilignes

H. EGGER

Dr. techn.

Oesterreichischer Stahlbauverband
Wien, Oesterreich

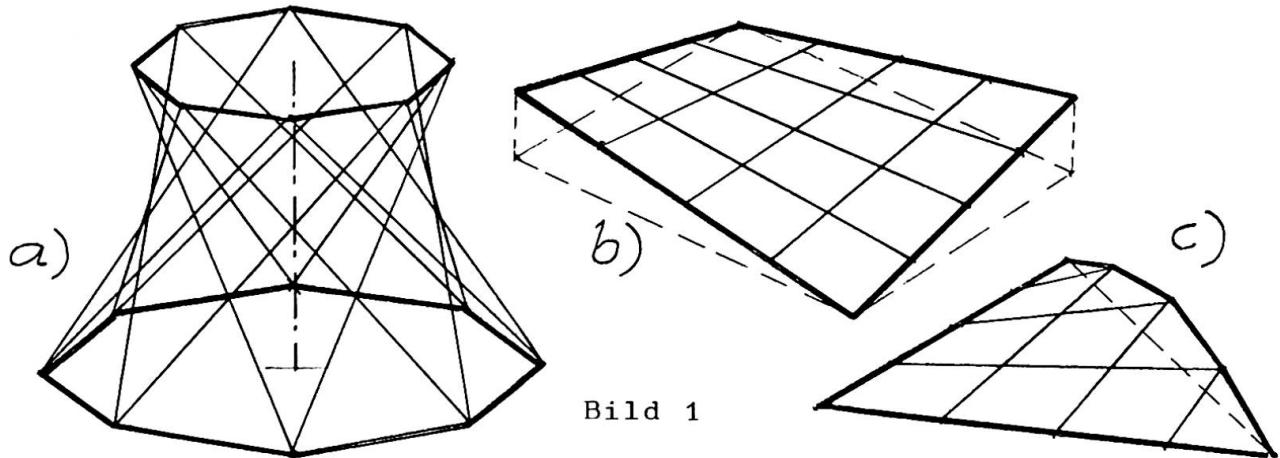
F. RESINGER

o.Prof. Dr. techn.

Technische Hochschule
Graz, Oesterreich

1. A L L G E M E I N E S

Zu den windschiefen Regelflächen gehören u.a. Rotationshyperboloide und hyperbolische Paraboloid. Beide können aus zwei Scharen sich kreuzender Geraden gebildet (Bild 1) und daher durch gerade Stäbe zu Tragwerken realisiert werden.



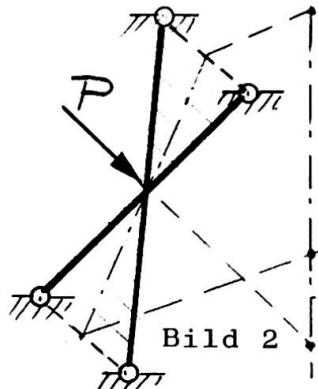
Für die praktische Ausführung ist es zweckmäßig, die Stäbe der beiden Scharen ohne Unterbrechung durchzuführen, wodurch sie in zwei verschiedenen benachbarten Flächen zu liegen kommen. An den Kreuzungsstellen werden die Stäbe durch aufgeklemmte Schellen miteinander verbunden. In diese Knoten werden in der Regel alle Bauwerkslasten eingeleitet. Die Stäbe beider Scharen enden meist in Randgliedern, die beim Rotationshyperboloid z.B. durch einen oberen Dachring und einen unteren Basisring, beim hyperbolischen Paraboloid durch gerade oder auch durch gekrümmte Randträger gebildet werden können. Diese Randglieder können beliebig gelagert sein.

Hinsichtlich der Lastabtragung sind diese Tragsysteme keine Schalen, sondern vielmehr hochgradig statisch unbestimmte räumliche Rahmentragwerke, deren biege- und torsionssteife Stäbe in den Knoten schubfest und gewöhnlich auch verdrehfest verbunden

sind. Bei beliebiger Belastung erhalten die Knoten räumliche Verformungen, und zwar im allgemeinen Verschiebungen in drei Achsrichtungen und Verdrehungen um diese Achsen. Über das Tragverhalten solcher Systeme soll im folgenden berichtet werden.

2. ROTATIONSHYPERBOLID

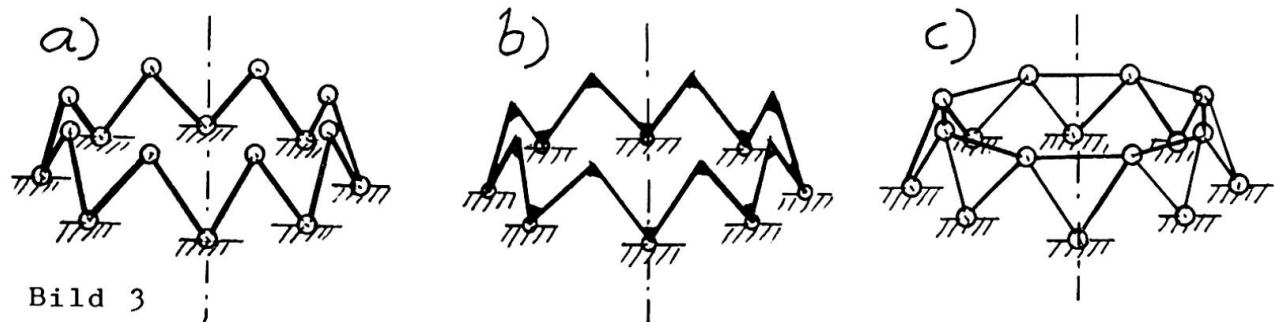
2.1. Überlegungen zur Tragwirkung



Bei rotationssymmetrischer Belastung tritt in jedem Knoten eine Last auf, die für das zugehörige Trägerkreuz (Bild 2) ebenfalls nur symmetrisch wirken kann. Bei Zerlegung dieser Last in eine Komponente in der Trägerkreuzebene und eine normal dazu erfolgt die Abtragung der ersten Lastkomponente vorwiegend durch Normalkräfte in den gekreuzten Stäben, die Aufnahme der zweiten Lastkomponente dagegen vorwiegend über Biegung des Trägerkreuzes.

Sind die Stäbe torsionssteif und auch in den Knoten verdrehfest verbunden, so wird die Lastabtragung nicht nur auf Biegung und Normalkräfte, sondern auch auf Torsion erfolgen.

Die verschiedenen Tragwirkungen lassen sich an den vereinfachten Systemen nach Bild 3 veranschaulichen:



Während man das gelenkige System (Bild 3a) widerstandslos nach innen stülpen kann, leistet das System mit in den Knoten voll verbundenen Stäben (Bild 3b) Widerstand gegen eine solche Verformung, und zwar durch die mobilisierte Biege- und Torsionssteifigkeit der Stäbe. Dasselbe gilt auch für das Gesamtsystem nach Bild 1a. Die biege- und drehsteife Verbindung der Stäbe führt daher zu einer Reduktion der Biegemomente auf Kosten von Torsionsmomenten.

Die günstigste Kraftaufnahme kann jedoch durch ein System nach Bild 3c erfolgen, bei dem für rotationssymmetrische Belastung die Abtragung der Kräfte nur durch Normalkräfte erfolgt. Auf das Gesamtsystem nach Bild 1a übertragen, wären zur Erzielung dieser Lastabtragungsart horizontale Stäbe zur Verbindung aller Kreuzungspunkte einzuführen. Es ergibt sich hiermit ein räumliches Fachwerk ("Stabschale"), das auch bei gelenkiger Verbindung aller Stäbe in den Knoten tragfähig ist. Dasselbe gilt für lotrechte Verbindungsstäbe zwischen allen Kreuzungspunkten.

Ordnet man neben dem Basisring und dem oberen Abschlußring nur einzelne horizontale Zwischenringe an, so ergeben auch diese bereits eine wirksame Stützung der sich kreuzenden Stäbe zwischen dem oberen und dem unteren Randring. Die fiktive, auf Biegung abtragende Stützweite der Träger wird hierdurch wesentlich reduziert.

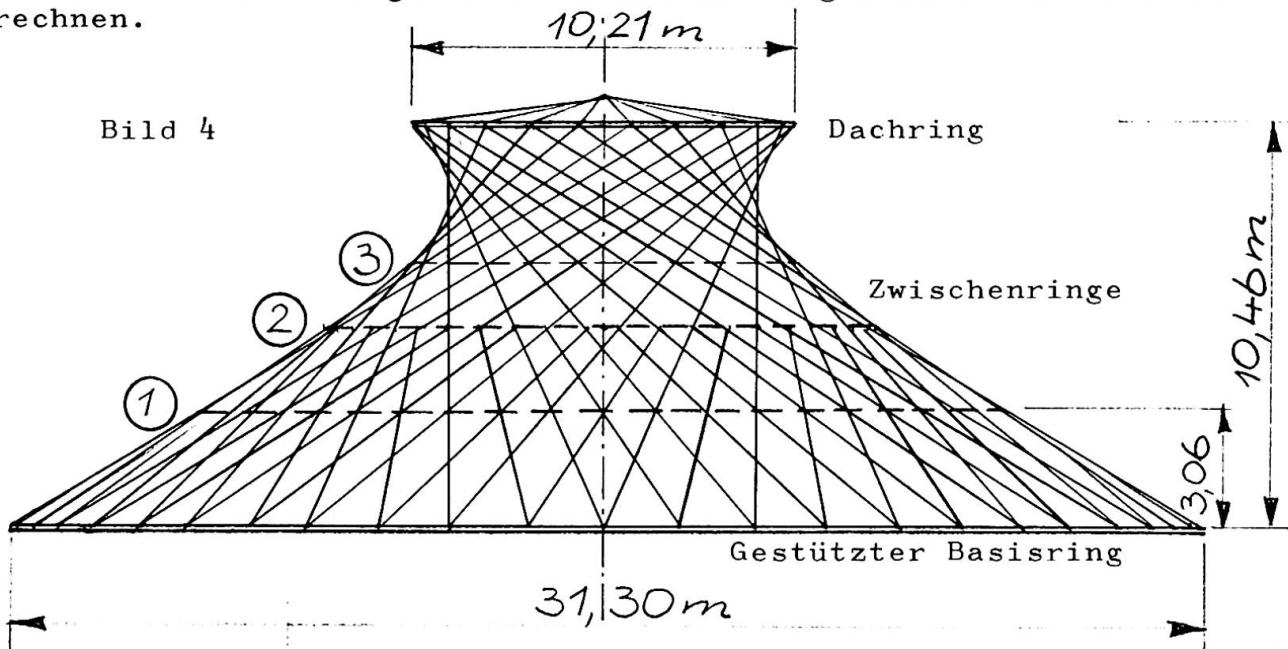
Durch zweckmäßige Anordnung nur weniger Zwischenringe besteht daher die Möglichkeit, die einzelnen für die Ausführung maßgebenden Schnittkräfte entsprechend zu regulieren.

Bei dem an der Basis gestützten Rotationshyperboloid werden durch die lotrechten Lasten in den Stäben Druckkräfte erzeugt, die wegen der auftretenden Biegeverformungen der Stäbe zusätzliche Biegemomente zur Folge haben. Es ist daher wichtig, bei solchen Systemen diesen Einfluß der Theorie II. Ordnung für die Bemessung zu berücksichtigen.

2.2. Anwendungsbeispiel

2.2.1 Angaben und Annahmen

Für einen Ausstellungspavillon war das Stabsystem eines an der Basis gestützten Rotationshyperboloides aus Aluminiumrohren $\varnothing 80/8$ und mit den geometrischen Abmessungen nach Bild 4 zu berechnen.



Die hier besprochene Schnittkraft- und Formänderungsermittlung für die rotationssymmetrische Belastung "Eigengewicht + Schnee" erfolgte für folgende Randbedingungen:

Basisring mit vorgegebenem Querschnitt und in der Meridian- tangente verschieblich;

Dachring mit vorgegebenem Querschnitt und rotationssymmetrisch verschieblich;

Stäbe im Basisring und im Dachring frei drehbar gelagert.

2.2.2 Durchführung der Berechnung

Die Programmierung des Problems erfolgte in Zusammenarbeit mit dem Rechenzentrum Graz durch Dipl.-Ing. Glänzer. Die Berechnung wurde auf einer Rechenanlage der Type UNIVAC 494 durchgeführt. Grundlage des Berechnungsverfahrens war die Deformationsmethode. Ermittelt wurden alle Schnittkräfte und Verformungen sowohl nach Theorie I. als auch II. Ordnung, insbesondere auch die Schermomente in den Schellen zur Ermittlung der erforderlichen Klemmkräfte für die Verbindung der Stäbe.

Die Untersuchung für die Theorie II. Ordnung wurde mit einem Laststeigerungsfaktor von 1,5 durchgeführt.

2.2.3. Hauptergebnisse

Theorie	ohne Zwischenringe	mit zwei Zwischenringen		mit drei Zwischenringen	
	I	I	II	I	II
Z	20,27	23,43	24,66	23,44	24,67
D	-	-8,71	-11,04	-8,82	-11,18
M_B	1,20	0,19	0,34	0,19	0,34
N	-2,49	-1,16	-1,24	-1,16	-1,24
M_T	0,055	0,009	0,016	0,008	0,015
M_S	-	-	0,280	-	0,036
v_z	0,835	0,088	0,148	0,087	0,147
v_r	0,493	0,025	0,061	0,025	0,060

Dimensionen der Angaben : Mp, m

Z ... Zugkraft im Basisring,

D ... Normalkraft im unteren Zwischenring,

M_B ... größtes Biegemoment in den Stäben,

N ... zugehörige Normalkraft,

M_T ... zugehöriges Torsionsmoment,

M_S ... Schermoment in der Verbindungsschelle,
(wurde nur für Theorie II. Ordnung ermittelt)

v_z ... größte lotrechte Knotenverschiebung,

v_r ... zugehörige Radialverschiebung (nach innen).

Für das Stabwerk ohne Zwischenringe wurden die Werte für die Theorie II. Ordnung zwar ermittelt, jedoch liefern sie keine brauchbare Aussage, da die Normalkräfte schon über der Knicklast des Stabes liegen. Bereits die Ergebnisse der Theorie I. Ordnung zeigen mit den zu großen Biegemomenten und Verformungen die Unbrauchbarkeit dieser Lösung.

Mit der Anordnung von zwei Zwischenringen ergeben sich Schnittkräfte, die mit der gewählten Rohrabmessung bereits aufnehmbar sind. Jedoch war im oberen Bereich das im Knoten auftretende Schermoment für die gewählten Schellen zu groß.

Der dritte Zwischenring ändert die maßgebenden Schnittkräfte und Verformungen, die im Bereich zwischen dem Basisring und dem ersten Zwischenring liegen, zwar nicht mehr, jedoch wird hiermit auch im oberen Bereich das Schermoment für die Ausführung in brauchbaren Grenzen gehalten.

Der Einfluß der Theorie II. Ordnung ist, wie die Gegenüberstellung zeigt, beachtenswert.

2.2.4 Stabilität der Zwischenringe

Die Zwischenringe werden für den Lastfall "Eigengewicht + Schnee" auf Druck beansprucht, weshalb eine gesonderte Stabilitätsberechnung des in den Stäben radial elastisch gebetteten Ringes durchzuführen war.

2.2.5 Näherungsberechnung

Auf Grund der in Abschnitt 2.1. geführten Überlegungen zur Tragwirkung ist eine Näherungsberechnung möglich, und zwar für die

Normalkräfte auf Grund einer Gleichgewichtsbetrachtung mit der oberhalb der betrachteten Stelle vorhandenen Gesamtlast und der gegebenen Flächenneigung, für das maßgebende Biegemoment des Stabes auf Grund der Betrachtung eines Durchlaufträgers über den Rand- und Zwischenringen. Dabei sind allerdings nur bei Anordnung von Zwischenringen brauchbare Werte zu erwarten, während diese Betrachtung für die Ausführung ohne Zwischenringe (frei aufliegende Träger zwischen den Randringen) zu große Werte liefert. Der Einfluß der Theorie II. Ordnung läßt sich mit den zuerst errechneten Normalkräften abschätzen. Für die Torsions- und Schermomente sind keine Anhaltspunkte für eine Näherung gegeben.

Die auf diese Weise für das System mit drei Zwischenringen und für den Lastfall "Eigengewicht + Schnee" durchgeführte Näherungsberechnung ergab folgende Werte:

Zug im Basisring:	25,7 Mp,
Druck im 1. Zwischenring:	12,5 Mp,
Größtes Biegemoment der Stäbe:	0,19 Mpm(I) und 0,40 Mpm(II),
Zugehörige Druckkraft:	1,90 Mp.

Es kann daher gesagt werden, daß eine so durchgeführte Näherungsberechnung für die Vorbemessung brauchbare Werte liefert.

3. H Y P E R B O L I S C H E S P A R A B O L O I D

3.1. Überlegungen zur Tragwirkung

Beim ebenen Rost mit biege- und torsionssteifer Knotenausbildung erfolgt die Abtragung von Lasten über Biegung und Torsion.

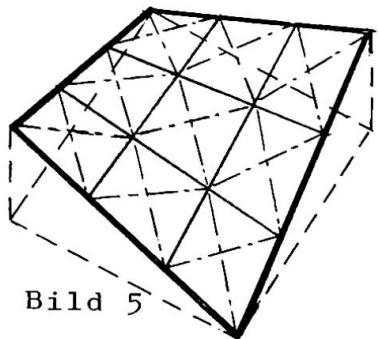
Beim räumlichen, zur Hyparfläche verwundenen Rost erfolgt diese über räumliche Biegung, Torsion und Normalkraftbeanspruchung der Stäbe. Die Reduktion einer Schnittbelastung auf Kosten einer anderen ist hier durch die Biege-, Torsions- und Dehnsteifigkeit gegeben. Das Reduktionsmaß, z.B. der Biegemomente auf Kosten der Torsionsmomente und Normalkräfte, richtet sich, sieht man von der Art der Lagerung an den Rändern und der Schellenausbildung ab, nach dem Verhältnis der Biege- zur Torsionssteifigkeit der Stäbe und nach dem Verwindungsgrad des Hyparrostes. Die Schere im Stabknoten kann entsprechend der konstruktiven Durchbildung der Schelle frei drehbar oder fest sein; dennoch überträgt sie Biege- und Torsionsmomente sowie Normalkräfte. Über diesen Einfluß wird gesondert berichtet.

Auch hier ist, wie beim Rotationshyperboloid, wegen der auftretenden Druckkräfte in den Stäben der Einfluß der Theorie II. Ordnung bei der Schnittkraftermittlung zu berücksichtigen.

Bei den in der Praxis vorkommenden Verwindungsmaßen sind die Biegeanteile und damit die Verformungen der Stäbe groß. Es ist daher naheliegend, die Stäbe durch Spannseile in Richtung der Hauptkrümmungen zusätzlich zu stützen.

3.2. Konstruktionsvorschlag mit Stäben und Seilen

Ein Hyparrost aus geraden Stäben in Richtung der Erzeugenden und mit Seilen in Richtung der Hauptkrümmungen nach Bild 5 läßt sich, im Gegensatz zu einer möglichen Ausführung mit gespannten Seilen in Richtung der Erzeugenden, vorspannen, ohne daß das Randglied auf Biegung beansprucht wird, da die Spannkkräfte als Druck direkt in die Stäbe eingeleitet werden. Durch die Verbindung der Stäbe mit den sich in den Knoten kreuzenden Seilen sind die gedrückten Stäbe in den Knoten gestützt und gegen Ausknicken gehalten.



Bei diesem mit Spannseilen gestützten Hyparrost werden die Knotenlasten vorwiegend durch das gespannte Seilwerk abgetragen und auch in die Randglieder als Normalkräfte eingeleitet. Dabei ist der Einfluß der Theorie II. Ordnung wegen der kleineren Verformungen wesentlich geringer. Bei der konstruktiven Durchbildung eines solchen Tragwerkes brauchen bei symmetrischer Ausführung und für symmetrische Belastung die Seile in den Knoten nicht geklemmt zu werden; jedoch bietet auch die bei Unsymmetrie notwendige Klemmung keine konstruktiven Schwierigkeiten.

Z U S A M M E N F A S S U N G

Rotationshyperboloide und hyperbolische Paraboloide können aus geraden Stäben realisiert werden. Die Ausbildung der Knoten und die Anordnung zusätzlicher Stützelemente (Zwischenringe, Spannseile) beeinflussen die Verteilung der Schnittkräfte. Für ein konkretes Anwendungsbeispiel eines Hyperboloides werden die Schnittkräfte und Verformungen elektronisch berechnet. Die Ergebnisse zeigen die Notwendigkeit der Theorie II. Ordnung auf. Eine Näherungsberechnung ergibt brauchbare Werte für eine Vordimensionierung.

Etude d'une coupole en aluminium à une nappe à treillis avec des poutres de retombée

Untersuchung einschichtiger Aluminiumschalen

Study of a Single Layer Shell of Aluminium

RICHARD DZIEWOLSKI

Docteur-Ingénieur
Ingénieur-Conseil CICF
Architecte DPLG
France

I - INTRODUCTION ET DESCRIPTION DE LA STRUCTURE

Les structures spatiales en forme de coupole sont de plus en plus souvent utilisées dans l'architecture moderne, car elles permettent de couvrir le maximum de volume avec le minimum de surface, tout en assurant une bonne répartition des efforts dans l'espace (faibles moments fléchissants) et un agréable aspect esthétique. Ce type de structure a été adopté pour le projet de la patinoire à RENNES (France) et doit être, par la suite, fabriqué en série pour d'autres destinations (piscines, salles des sports, salle de spectacles, etc...)

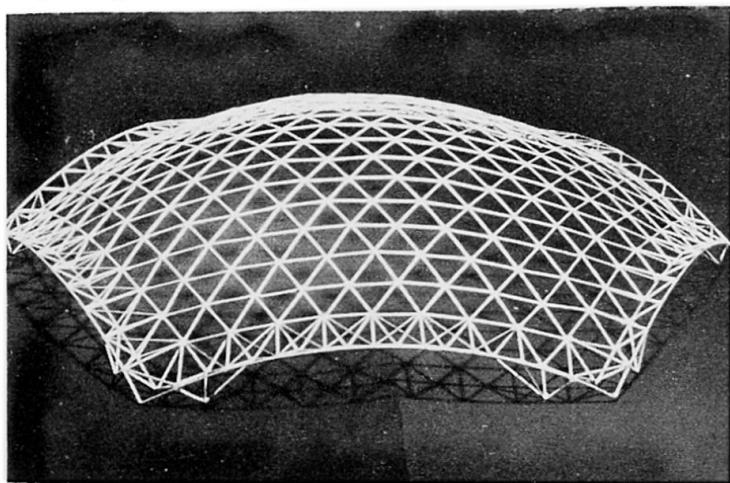


Fig. 1. Photo de la maquette

Le coupole sphérique, d'un rayon de 51,87 mètres, couvre un hexagone de 33,223 mètres de côté d'une portée maximale de 66,225 mètres. Elle est constituée d'une nappe tridirectionnelle à treillis tubulaire en aluminium, renforcée aux extrémités par des poutres de retombée à trois membrures formant, en même temps, le chéneau (voir photo de la maquette fig. 1).

Les tubes seront assemblés sur le chantier par soudures, à l'aide d'éléments sphériques qui permettront le réglage de la longueur des barres (voir fig. 2).

Les calculs de la coupole ont été menés de la façon suivante :

- Détermination des efforts dans la nappe à treillis par la théorie de membrane et prédimensionnement des sections.
- Etude de la géométrie de la structure à l'aide du programme GEO.
- Détermination des composantes (P_x , P_y , P_z) des efforts de la neige et du vent à l'aide du programme FOCOU.

Les études réalisées par l'auteur avec la collaboration de l'Aluminium Français, ont été menées dans trois directions :

- Recherche du système de la couverture (opaque et translucide),
- Recherche des noeuds d'assemblages,
- Mise au point des programmes de calculs électroniques permettant de raccourcir le délai de l'étude et de diminuer son prix.

La coupole sphérique, d'un rayon de 51,87 mètres, couvre un hexagone de 33,223 mètres de côté d'une portée maximale de 66,225 mètres. Elle est constituée d'une nappe tridirectionnelle à treillis tubulaire en aluminium, renforcée aux extrémités par des poutres de retombée à trois membrures formant, en même temps, le chéneau (voir photo de la maquette fig. 1).

- Calcul des déformations, des réactions sur appuis, des efforts, des contraintes compte tenu du flambement, combinaisons des cas de charges, recherches des valeurs extrêmes des efforts et des contraintes, calcul du poids de la structure à l'aide du programme STROP.

- Etude de la stabilité des parois.

Les programmes de calcul électronique mis au point par le C.E.R.E.T. (B.E.T. de l'auteur) permettent d'arriver à une véritable automatisation des études. Il est, en effet, possible à un Ingénieur d'établir la note de calcul complète dans la journée : prédimensionnement, rédactions des bordereaux, perforation des cartes, vérification des résultats \approx 6 heures - calcul sur CD 6600, 120 secondes -

II - DESCRIPTION DES PROGRAMMES GEO ET FOCOU

Le programme GEO permet, en partant du rayon de courbure, de la portée et du nombre de modules, de numérotier automatiquement les noeuds de la structure, calculer leurs coordonnées x, y, z, (pour la moitié de la structure), calculer les longueurs des barres, perforer les cartes des noeuds et des barres utilisables directement par le programme STROP.

Le programme FOCOU calcule les composantes des forces Px, Py, Pz appliquées aux noeuds sous l'effet de la neige, du vent (portance et trainée) et perfore les cartes correspondantes.

En vertu du règlement français NV 65, les efforts du vent peuvent être décomposés en : une force de renversement T (répartie dissymétriquement sur les parois), une force de soulèvement U (répartie uniformément sur les parois), une pression ou dépression intérieure (voir fig. 3).

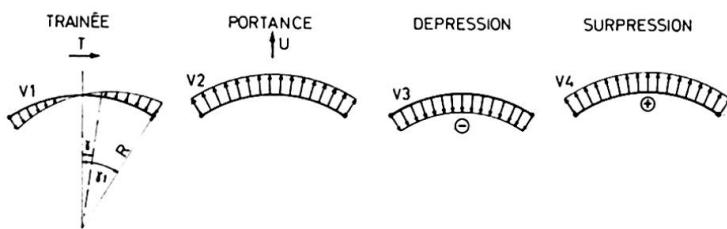


Fig.3. Pressions unitaires du vent sur la calotte sphérique.

En calculant les composantes T et U d'après les règles NV 65, nous pouvons en déduire les pressions unitaires :

Trainée :

$$V_1 = \frac{T \sin \gamma \cos \nu}{\frac{R^2 \pi}{3} [2 - \cos \gamma_1 (\sin^2 \gamma_1 + 2)]}$$

Portance :

$$V_2 = \frac{U}{\pi R^2 \sin^2 \gamma_1}$$

et les composantes Px, Py, Pz.

Les efforts dans les barres dus à la pression et à la dépression intérieures, peuvent être déterminés directement en majorant les efforts calculés sous l'effet de la portance par le coefficient dépendant du rapport V_3/V_2 ou V_4/V_2 .

III - DESCRIPTION DU PROGRAMME DE CALCUL DES STRUCTURES STROP.

Le programme STROP est composé de 3 sous-programmes : treillis, portiques, grilles. Cette division a été effectuée afin de diminuer le temps et le prix du calcul ainsi que de simplifier la rédaction des bordereaux des données pour les structures ne nécessitant pas le calcul par le programme spatial. Résultats fournis par le programme : déformations, efforts, contraintes compte tenu du flambement, combinaisons des différents cas de charges, extrêmes des efforts et des contraintes, optimisation des barres, dessins de la structure en axonométrie, diagramme des efforts. Un langage spécial d'introduction des données a été mis au point afin de faciliter et de diminuer le temps de la rédaction des bordereaux (voir fig. 4).

Le programme est basé sur la méthode des déformations.

En fonction du sous-programme utilisé, différentes formules (pour le calcul des éléments de la matrice de rigidité et pour le calcul des efforts dans les barres) ont été utilisées.

La matrice de rigidité, qui est une matrice bande symétrique, a été décomposée en produit de deux matrices triangulaires : supérieure S et inférieure L, donc faciles à

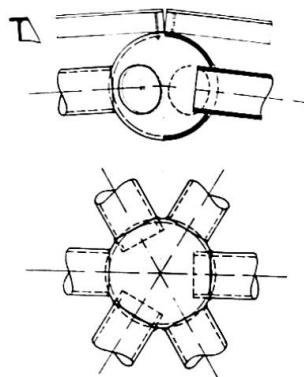


Fig.2. Nœud d'assemblage - Brevet A.F.

inverser.

$$K \cdot \Delta = L S \Delta$$

Les éléments u_{ij} des matrices L et S sont calculés à partir des éléments a_{ij} de la matrice de rigidité K (dont on stocke la partie triangulaire supérieure) en les mettant dans les cases de la matrice K_x (les éléments a_{ij} ainsi effacés ne servent pas pour le calcul des éléments u_{ij} suivants). Les éléments a_{ij} et u_{ij} sont stockés en mémoire de façon compacte (sous forme d'une table) et adressés par un indice unique. Un vecteur MK, conservé en permanence en mémoire centrale et contenant des nombres entiers, permet de calculer l'adresse effective en mémoire centrale d'un élément a_{ij} quelconque appartenant à la bande.

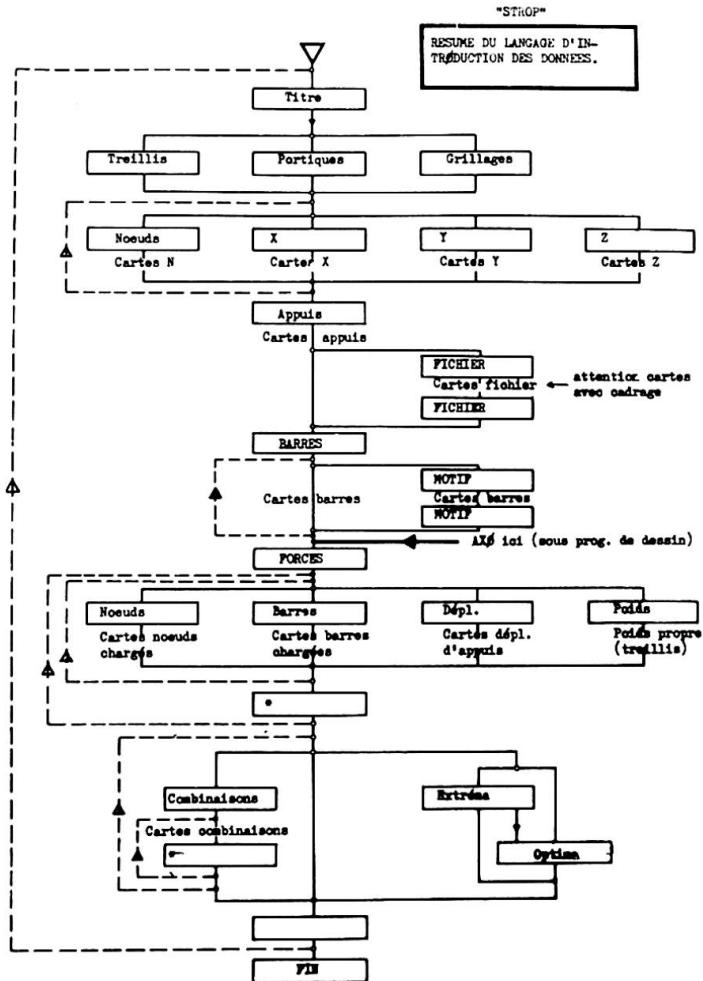
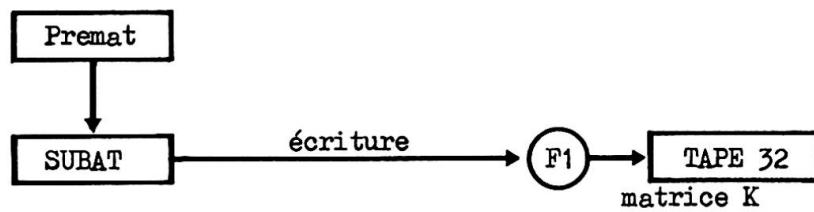


Fig.4. Résumé du langage d'introduction des données du programme STROP.

Phases de calcul

1. Calcul et écriture sur fichier des tranches ZS, ZC et ZI de la matrice K



stockage de la matrice K
par tranches lorsque celle-ci
ne tient pas en mémoire
centrale.

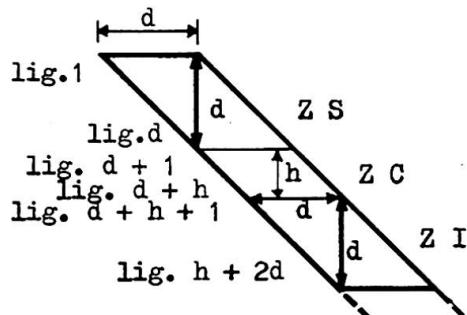
2. Ecriture sur fichier et mise à zéro des lignes et des colonnes correspondant à des appuis

Dans le cas où la matrice K trop encombrante ne tient pas entièrement en mémoire centrale, on peut alors utiliser des mémoires périphériques pour le transit des éléments de K (ou U) en mémoire centrale.

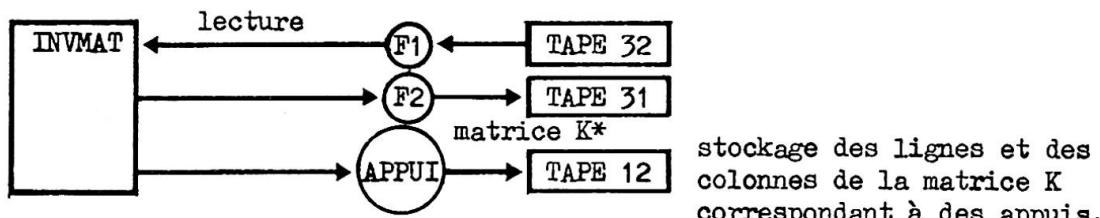
Le nombre C des places de mémoire centrale disponible pour y stocker des tranches de la matrice K doit toutefois satisfaire à

$$C \geq d^2 + 2d^2$$

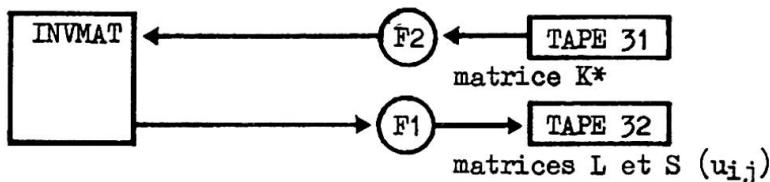
$d = \max i - j$ étant la largeur de la matrice bande.



où ZS, ZC, ZI représentent respectivement 3 zones de mémoires de travail :
Supérieure (d^2 mémoires)
Centrale (d mémoires h lignes)
Inférieure (d^2 mémoires)



3. Calcul par tranches dans la mémoire centrale des éléments u_{ij} des matrices triangulaires L et S , et écriture par tranches sur fichier.



$$u_{ii} = a_{ii} - \sum_{r=i-1}^1 u_{rr} (u_{ri})^2$$

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left[a_{ij} - \sum_{r=i-1}^1 u_{rr} u_{ri} u_{rj} \right]$$

4. Résolution par tranches du système $L Y = P$

$$y_i = p_i - \sum_{r=i-1}^1 u_{ri} y_r \quad \text{en commençant par :} \\ y_1 = p_1$$

5. Résolution par tranches du système $S \Delta = Y$

$$\Delta_i = \frac{1}{u_{ii}} \left[y_i - \sum_{r=i+1}^n u_{rr} u_{ri} \Delta_r \right] \quad \text{en commençant par :} \\ \Delta_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$$

En connaissant pour chaque cas de charges les déplacements des noeuds, nous pouvons en déduire les forces dans les barres à l'aide des équations intrinsèques d'une barre $i-j$ et par la suite les contraintes.

Différentes formules du coefficient de flambement sont utilisées en fonction du règlement du calcul et du matériau utilisé.

Pour le calcul de la coupole en aluminium, nous avons utilisé les formules du D.T.U., pour :

$$K = (0,5 + 0,5 \frac{\sigma_e}{\sigma_k}) + \sqrt{(0,5 + 0,5 \frac{\sigma_e}{\sigma_k})^2 - 0,8 \frac{\sigma_e}{\sigma_k}}$$

ou σ_e – limite élastique

σ_k – contrainte critique d'Euler

Pour les structures métalliques, le programme calcule le coefficient K par les formules de la Convention Européenne de CM en fonction du type de profil (courbes de flambement n° 1, 2 et 3).

En fin de calcul, on obtient un tableau de résultats indiquant pour chaque barre ij les efforts mini et maxi, les profils choisis, des sections brutes et nettes, le rayon de giration, la longueur de la barre, le coefficient de la longueur de flambement, le coefficient de sécurité, le coefficient de flambement, la contrainte extrême et le poids de la barre (voir fig. 5).

I	J	EFFORTS	EXTRÉMES	S	L	P	CODE	N	RHO	K	CCNTRAIETES						
• 50+	56	• 2961.2	11	15825.7	12	• 6.67	134.97	7.38	• 4	• TUB76E2	• .90	2.59	1.07	• 447	2373	2400	•
• 49-	53	• -4325.9	9	3010.7	12	• 3.94	174.11	5.63	• -1	• TUB42E3	• .90	1.39	1.89	• -2079	764	2400	•
• 48-	52	• -5398.3	11	2733.6	12	• 4.14	174.11	5.91	• 0	• TUB48E2	• .90	1.61	1.58	• -2056	661	2400	•
• 51-	53	• -1090.4	12	2261.1	12	• 1.78	142.99	2.08	• -6	• TUB26E2	• .70	.87	1.94	• -1189	1272	2400	•
• 50-	52	• -2285.4	10	-1112.6	12	• 2.38	142.99	2.79	• -5	• TUB26E3	• .70	.85	2.03	• -1949	-949	2400	•
• 51-	55	• 2040.9	11	4196.3	12	• 1.78	142.99	2.08	• -6	• TUB26E2	• .70	.87	1.94	• 1148	2360	2400	•
• 50-	54	• -4369.2	7	773.9	12	• 3.07	142.99	3.59	• -3	• TUB33E3	• .70	1.08	1.49	• -2119	254	2400	•
• 53-	55	• -1891.1	11	2744.0	12	• 1.78	110.00	1.60	• -6	• TUB26E2	• .70	.87	1.42	• -1512	1543	2400	•
• 52-	54	• -1737.7	9	3399.5	12	• 1.78	110.00	1.60	• -6	• TUB26E2	• .70	.87	1.42	• -1389	1912	2400	•
• 53-	57	• -1500.8	7	709.2	12	• 1.78	93.01	1.36	• -6	• TUB26E2	• .70	.87	1.25	• -1057	359	2400	•
• 52-	56	• 757.2	8	1505.1	12	• 1.78	93.01	1.36	• -6	• TUB26E2	• .70	.87	1.25	• 426	847	2400	•

Fig.5. Exemple de résultats de calcul d'optimisation.

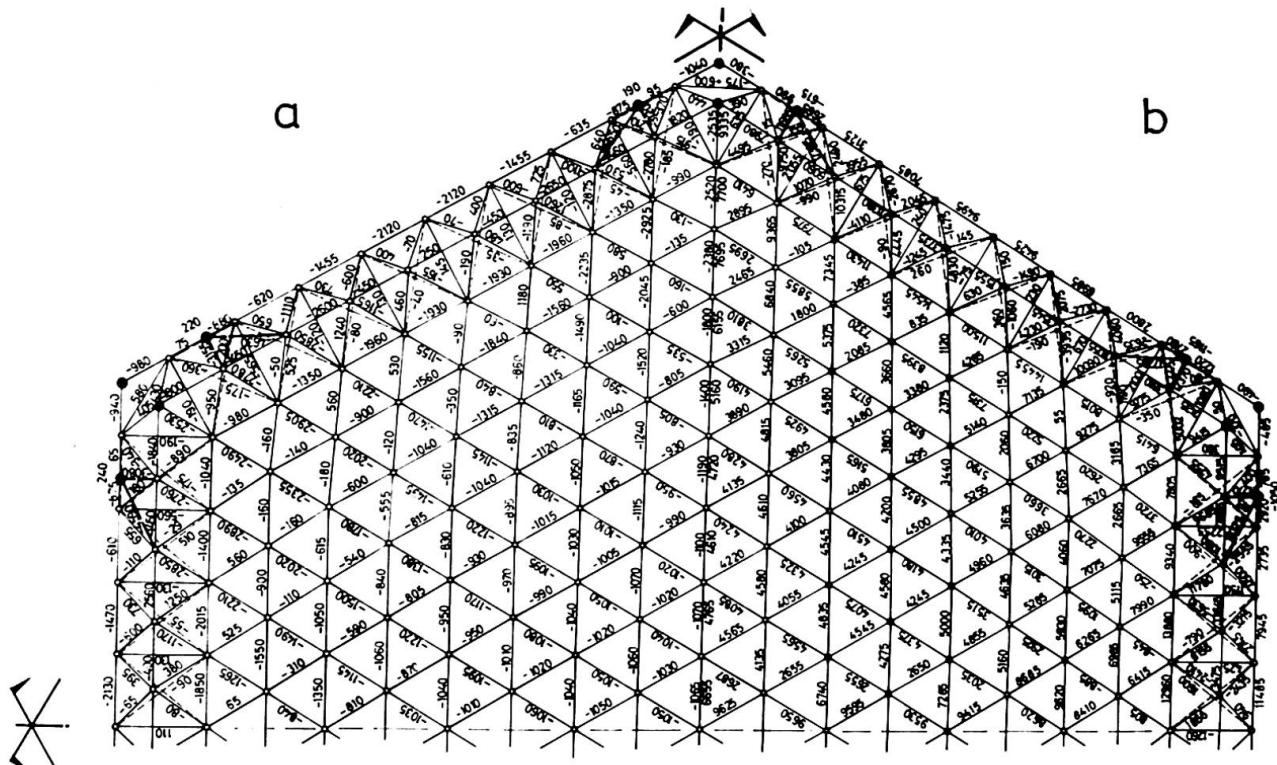


Fig. 6. Efforts dans les barres de la structure sous l'effet de la charge permanente (a) et du vent normal portance.(b).

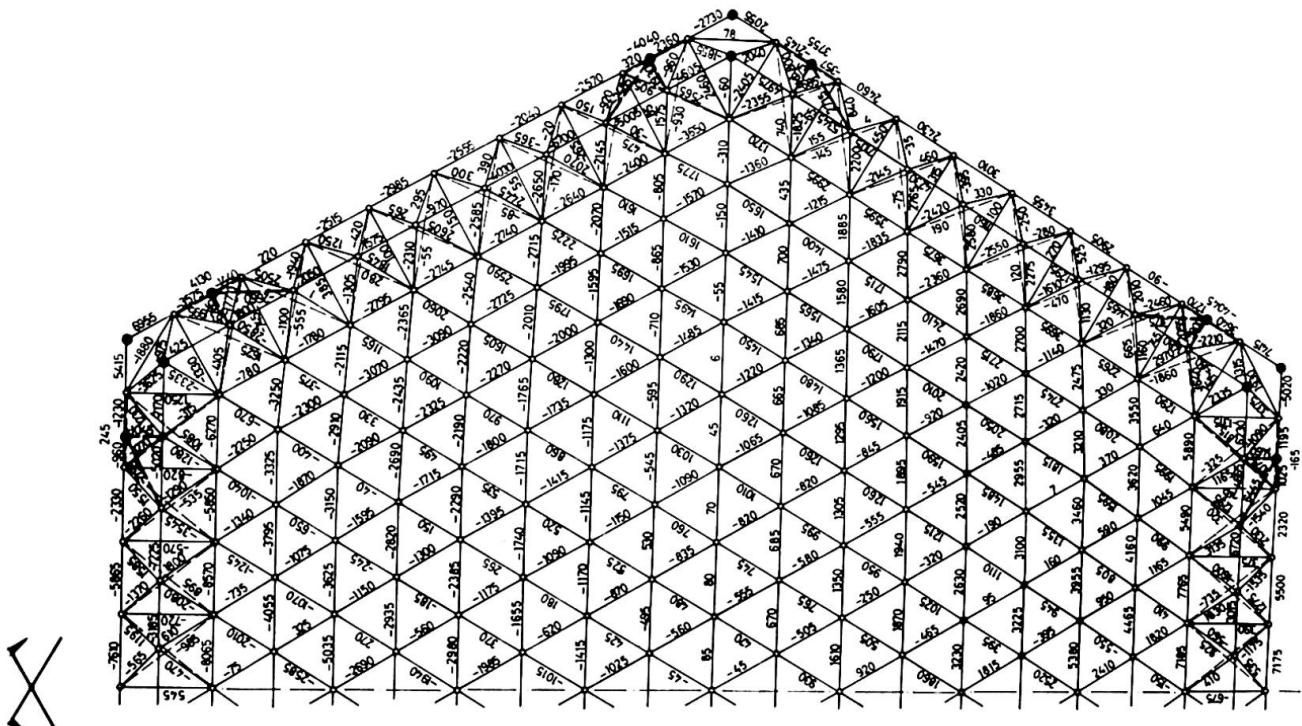


Fig. 7. Efforts dans les barres de la structure sous l'effet du vent normal trainée.

IV - RESULTATS DE CALCUL

Cinq différents cas de charges ont été étudiés :

1. charge permanente (fig. 6 a)
2. neige
3. vent normal portance (fig. 6 b)
4. vent normal trainée (fig. 7)
5. température

Les combinaisons des cas n° 3 et n° 4 ont permis de trouver les efforts sous l'effet du vent total normal (portance + trainée + dépression) (portance + trainée + surpression)

le vent total extrême étant égal à 1,75 fois le vent normal.

La vérification de la résistance des barres a été effectuée en considérant les combinaisons les plus défavorables des charges et surcharges majorées (suivant le règlement de calcul des constructions en aluminium DTU)

- 1,7 Neige normale + 1,5 (charge permanente ± température)
- 1,7 Vent normal, dépression + 1,5 (charge permanente ± température)
- 1,7 Vent normal, surpression + 1,5 (charge permanente ± température)
- 1,1 (Neige extrême + charge permanente ± température)
- 1,1 (Vent extrême dépression + charge permanente ± température)
- 1,1 (Vent extrême surpression + charge permanente ± température)
- 1,1 (0,5 • Neige extrême + vent extrême + charge permanente ± température)
- 1,6 (0,5 • Neige normale + vent normal dépression ± température).

Après la recherche de la combinaison la plus défavorable déterminée par le programme, nous avons obtenu le tableau de résultats présenté de la même façon que celui de la figure 5.

L'examen des contraintes extrêmes dans les barres et l'étude de la stabilité élastique des parois ont permis de choisir deux sortes de tubes : Ø 200, épaisseur 5 mm et Ø 200, épaisseur 4 mm répartis en fonction de la distribution des contraintes.

V - ETUDE DE LA STABILITE ELASTIQUE

La stabilité élastique des parois a été étudiée d'après les formules de K.P. BUCHERT (1) exposées dans sa contribution.

Charge critique -

$$P_{cr} = 0,366 E \left[\frac{t_m}{R} \right]^2 \left[\frac{t_B}{t_m} \right]^{3/2}$$

Epaisseur équivalente de membrure t_m

$$t_m = \frac{2 A}{\sqrt{3} L}$$

A, L, I représentent respectivement la section, la longueur et l'inertie des barres.

Epaisseur équivalente de flexion

$$t_B = \left[9 \sqrt{3} \frac{I}{L} \right]^{1/3}$$

L'étude des coupoles de ce type a permis de tirer les conclusions suivantes :

- Pour les rayons de sphères inférieurs à environ 55 m, les dimensions des barres dépendent essentiellement des efforts extrêmes.
- Pour les rayons supérieurs à 55 m, les barres sont dimensionnées en fonction de la stabilité élastique.

VI - BIBLIOGRAPHIE

K.P. BUCHERT - Buckling considerations in the design and construction of doubly curved space structures - Publication "Space Structures", éditée par R.M. DAVIES en 1966.

VII - RESUME

La présente contribution donne la description de la méthode de calcul et des programmes de calcul électronique utilisés, pour l'étude d'une structure spatiale en forme de coupole à une nappe.

Raumsysteme der Stahlkonstruktionen

Space Systems of the Steel Structures

Systèmes spatiaux des constructions en acier

FERDINAND LEDERER

Prof. Ing. Dr. Sc.

Brno, CSSR

Jede Baukonstruktion ist ein räumliches System, das fähig sein muß eine Belastung aller drei Richtungen im Raum zu übertragen. Oft aber, wenn es möglich ist, die Tragsysteme der Bauten zerlegt man in ebene Teilsysteme, und man löst diese für die Belastungsteile, welche in ihren Ebenen wirken.

Ein Repräsentant der Art von aus Einzelkörper zusammengesetzten Raumsystemen ist die mehrgelenkige Kuppel, hier mit minimaler Zahl, also mit drei Körpern, welche in Abb. 1 veranschaulicht ist. Diese Kuppel ist also viergelenkig, wobei das Scheitelgelenk zweifach ist, da dieses zweimal drei Freiheitsgrade im Raum beschränkt. Dabei ist es nötig auf die Ausnahmsfälle der Raumsysteme Acht zu geben.

Auf dem Gebiet der Raumfachwerksysteme, welche aus durch Pendelstäbe innerlich verbundenen Massenpunkten zusammengesetzt sind, stellt die Schwedlerkuppel einen klassischen Fall vor. Die Knotenpunkte liegen auf einer Rotationsfläche mit einer lotrechten Achse Z (Abb. 2) und das System ist

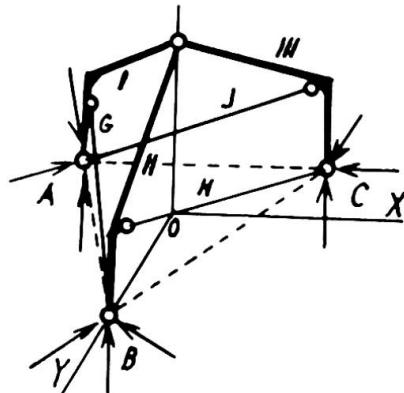


Abb. 1

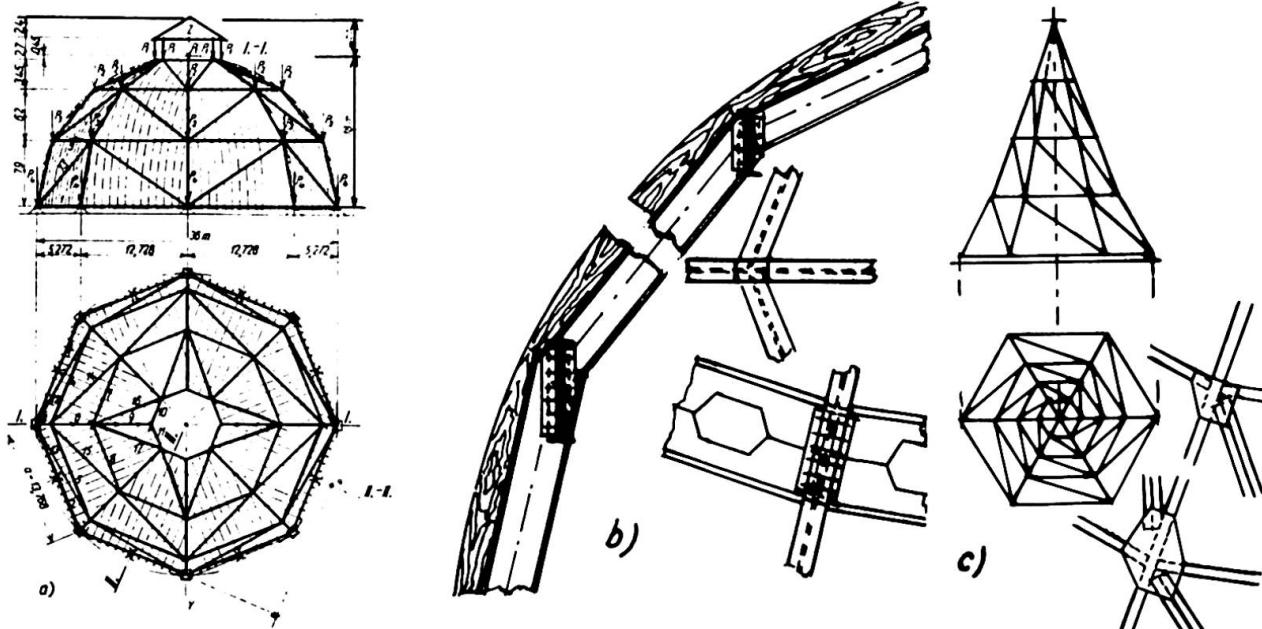


Abb. 2

durch die in der Meridian- und Parallelenrichtung liegenden Stäbe gekennzeichnet. Dieses System ist dann das Grundsystem für viele Konstruktionen von Masten und Türmen, Gasbehältern und Kühlungstürmen, usw. (Abb. 2a, b, c). Das dreiwandige System eines Mastes nach Abb. 3 weist die in gleicher Richtung laufenden Diagonalstäbe auf.

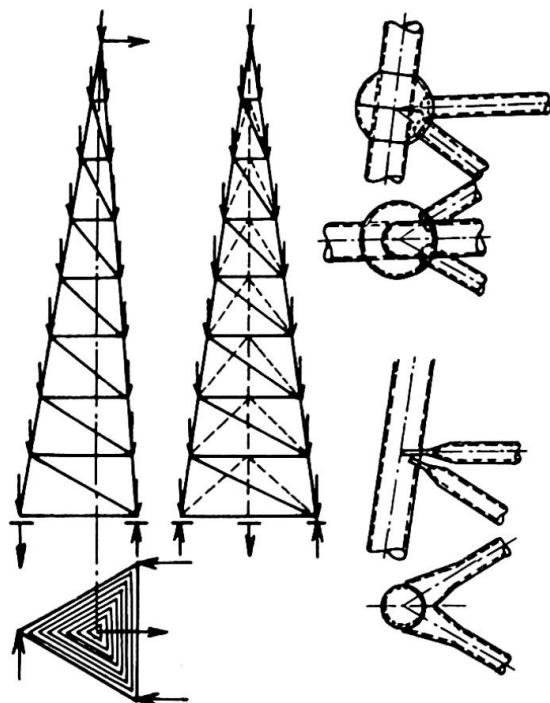


Abb.3

Eine andere Kuppelart ist die Föppelkuppel (Abb.4). Im allgemeinen genommen, sind diese Systeme über einem Paarpolygon Ausnahmsfälle und sind für eine Konstruktion nicht geeignet; die Systeme über einem Unpaarpolygon sind starr und geeignet. Die Föppelkuppel gekennzeichnet sich dadurch, daß die Knotenpunkte in einem oberen Stockwerke gegen die in unterem Stockwerke um eine halbe Knotenentfernung versetzt sind. Das Stabnetz ist dann aus Dreiecken zusammengesetzt, wobei keines von diesen Dreiecken in derselben Ebene liegt /1/. Noch andere Kuppelarten werden hier nicht beschrieben werden.

Es ist zu bemerken, daß die Stabilität gegen den Durchschlag eines Knotenpunktes ins Innere der Kuppel durch die Beschränkung des Grundrißpolygones höchstens auf Zehneck (Neuneck) gegeben ist. Sonst ist es möglich diese Sicherheit gegen den Durchschlag zum Beispiel nach der Literatur /2/ prüfen.

Als wir vor 13 Jahren die Kuppel von der Art einer einschichtigen Gitterschale entwickelt haben (Abb.5), haben wir diese mit Hilfe eines Schalenkontinuums gelöst. Später haben wir festgestellt, daß sich, was die Knotenpunktelage anbelangt, diese Kuppel an den Typ der Föppelkuppel knüpft, was eine interessante Parallele bietet. Daher auch unsere spätere statische Lösung /3/. Dazu gehört eine sehr wichtige Frage der Stabilität gegen Beulung der Gitterfläche. /4/, /5/.

Ein weiterer Typ von Raumfachwerksystemen ist von Kristallpolyedern abgeleitet. Zu diesen kann man die wohlbekannte geodätische Kuppeln von R.B. FULLER zählen. Eine Übersicht über die Formen und konstruktive Gestaltung gibt unter anderem die Literatur /6/.

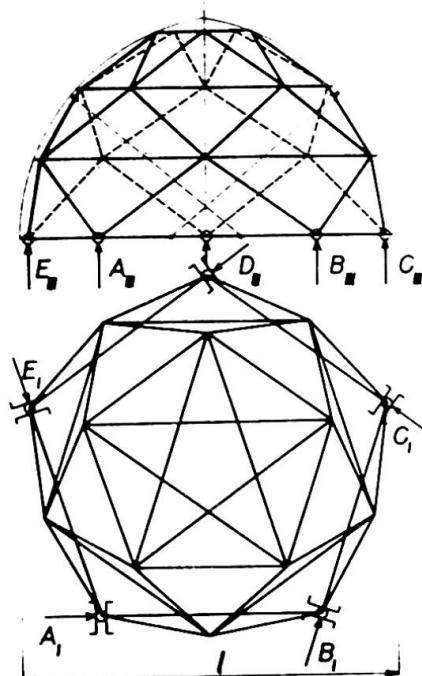


Abb.4

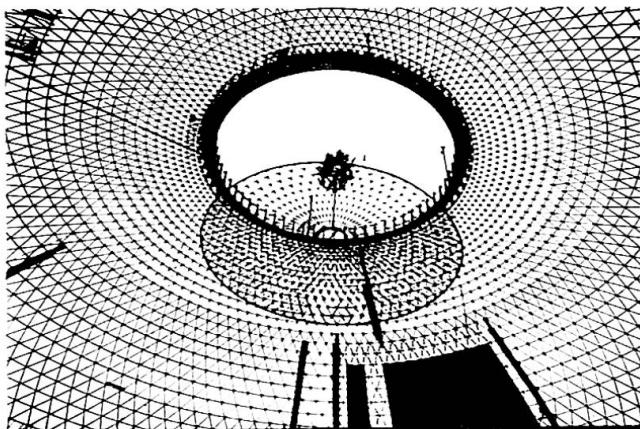
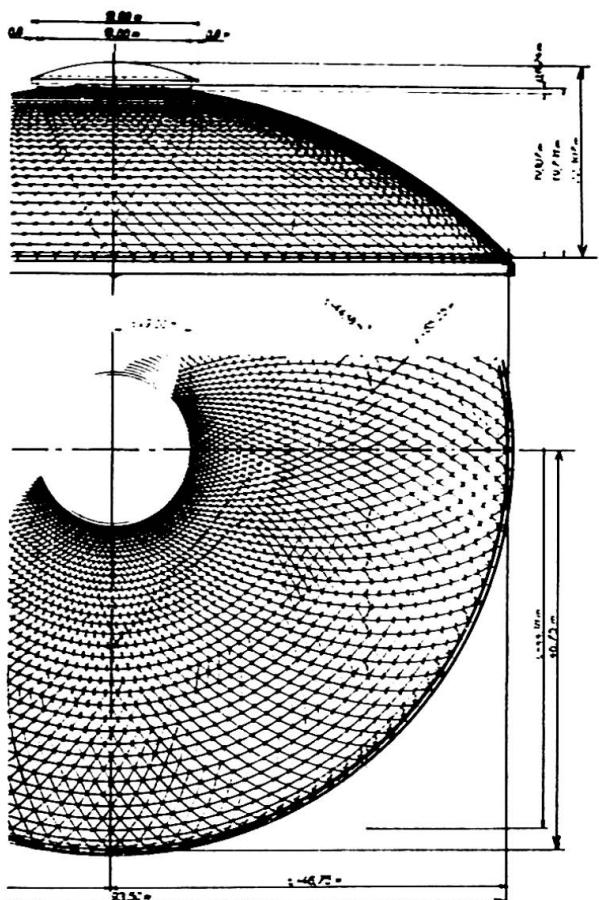


Abb.5

Eine andere Parallele können wir im Vergleich des Föppelschen Tonnenflechtwerkes (Abb.6) mit einer Tonnenschale sehen, besonders, wenn diese mit Bogenrippen ausgesteift ist. Da man bei dem Flechtwerk eine gelenkige Knotenverbindung der Stäbe vorausgesetzt, können wir dessen Kraftespiel mit dem Membranspannungszustand vergleichen. Bei dem Tonnenflechtwerk können die Gleitlager an Fußgeraden beliebig schief sein;

die Lösung der Innenspannkkräfte ist auch in dem Fall möglich, wenn die Gleitlagerebenen senkrecht liegen, und die dazugehörigen Auflagerkräfte waagrecht sind. Wenn man diese entfernt, entsteht das freie Tonnenflechtwerk, welches nur an Sirm- oder Giebelbögenwänden gelagert ist. Bei diesen ist der Membranzustand nicht mehr möglich, und das System kann nur dann als eine Konstruktion dienen, wenn die Meridian- oder Bogenstäbe nicht gelenkig, sondern durchlaufend biegstarr sind. Diese Bogenstäbe kann man als Aussteifungsrippen betrachten und nach Auslockerung vom ganzen System lösen. Auf eine als im Raum freie Bogenrippe greifen dann die Außenlasten P , die Querkräfte Q als Diagonalenkräftekomponenten und schließlich die waagrechten Auflagerkräfte den ent-

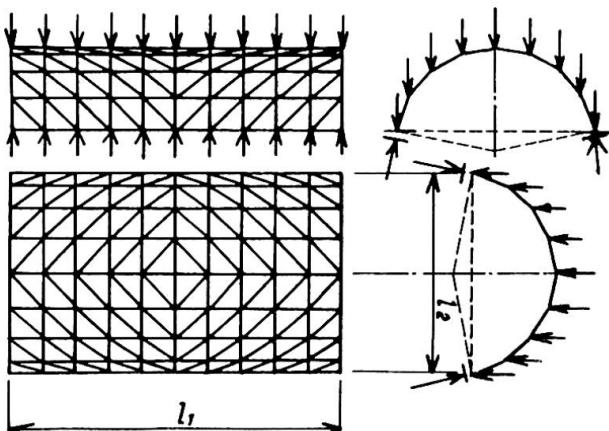


Abb.6

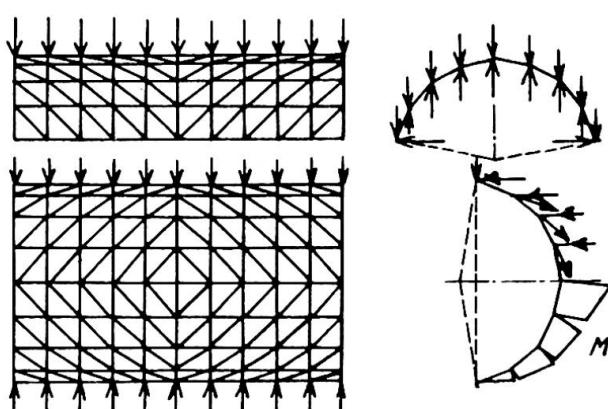


Abb.7

fernten lotrechten (nun fiktiven) Auflagern an. Die Biegmomente und Schubkräfte sind dann auf solchen im Raum im Gleichgewicht ruhenden Zustand leicht zu bestimmen /7/.

Weitere, in dieser Zeit sehr häufig verfolgte Konstruktionsysteme sind sogenannte Fachwerk- und Rostplatten. In Abb.8 ist eine zweiläufige Fachwerkplatte, in Abb.9 ist eine zweiläufige Rostplatte veranschaulicht.

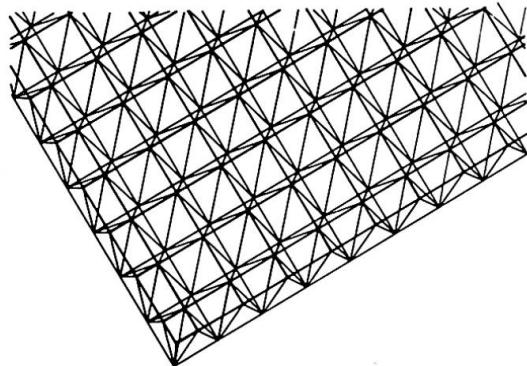


Abb.8

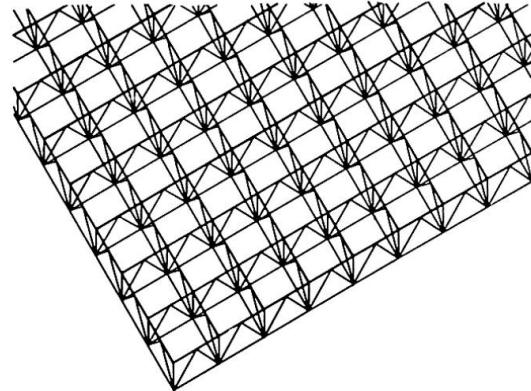


Abb.9

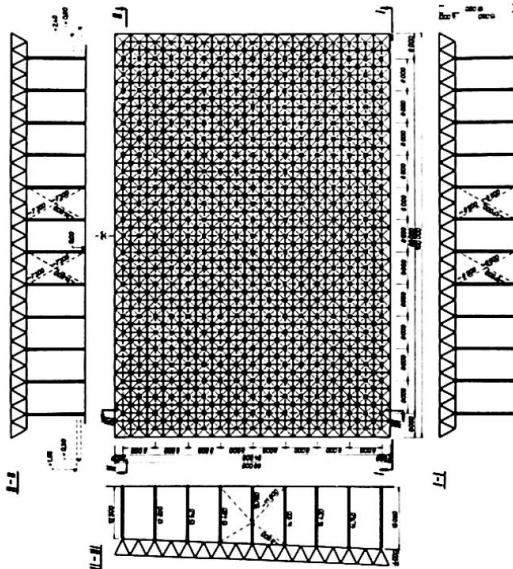


Abb.10

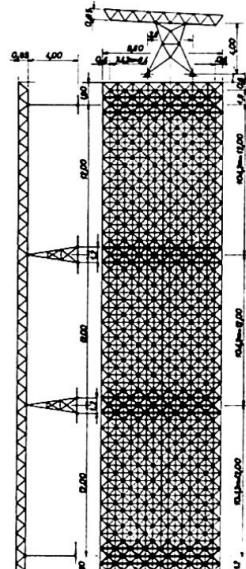


Abb.11

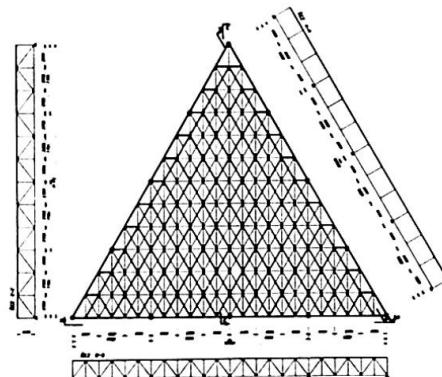


Abb.12

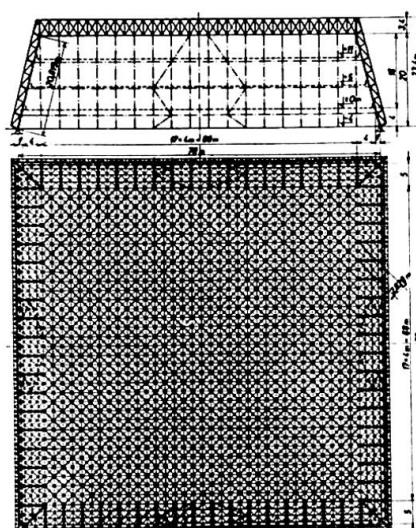


Abb.13

Die statische Lösung in strenger Form verfolgt das in die Verformungsform überführte Knotenpunktverfahren, welches für Digitalrechner programmiert worden ist, oder sonst nach der Methode der Kontinuumsanalogie durch Benutzung der Theorie der dünnen Platte und durch Anwendung der Netzmethode /8/. Es folgen nun die Beispiele der Applikationen und Realisationen dieser Systeme. Als erste Realisation in der ČSSR wurde das Dach des Winterstadions in Brno aufgebaut. Die größte von diesen zweiläufigen Fachwerkplatten mit quadratischem Konstruktionsnetz, welche aus Stahlrohrprofilen mit Hohlkugelknoten konstruiert worden sind, ist die Überdachung des Winterstadions in Olomouc; die Grundrissausmaße sind 68.100 m, die Konstruktionshöhe (Dicke) beträgt 4 m (Abb.10), /9/. Weitere Realisation stellt eine durchlaufende zweiläufige in

8 diskreten Punkten gestützte Fachwerkplatte vor (Abb.11). Quer über den Stützpunkten laufen die Verstärkungsstreifen, welche bloß aus verstärkten Gurt- und Diagonalstäben bestehen, ohne daß die Struktur des Systems irgendwie geändert wurde. Eine weitere Überdachungskonstruktion dieser Art ist über dem Schwimmstadion in Brno (Architektonische Lösung des Baukomplexes O.OPLATEK aus Brno) erbaut, hier aber als eine Fachwerkplatte mit veränderlicher Konstruktionshöhe und mit ungleichen Rohrprofilen, so daß die Biegsteifigkeit des Ersatzkontinuums veränderlich ist. Ein zweiläufiges Rhombusnetz für eine Fachwerkplatte über einem Grundriß von einem gleichseitigen Dreieck, mit Einzelrandstützen ist in Abb.12 veranschaulicht. In Abb.13 ist noch eine Fachwerkplatte mit quadratischem Diagonalnetz gegeben. Andere Konstruktionen dieser Art wurden auch aus Winkelprofilen oder U-Profilen mit räumlichen Knotenblechen konstruiert.

Es wurden auch dreiläufige Rostplatten mit einem von gleichseitigen Dreiecken realisiert, welche ohne weiteres auch als eine Scheibe wirken können.

Die Fachwerk- und Rostplatten weisen verhältnismäßig geringes Stahlgewicht auf, jenach der Größe der Konstruktion und der Belastung; bei Dachkonstruktionen beträgt der Stahlverbrauch 20 bis 60 kg/m²,

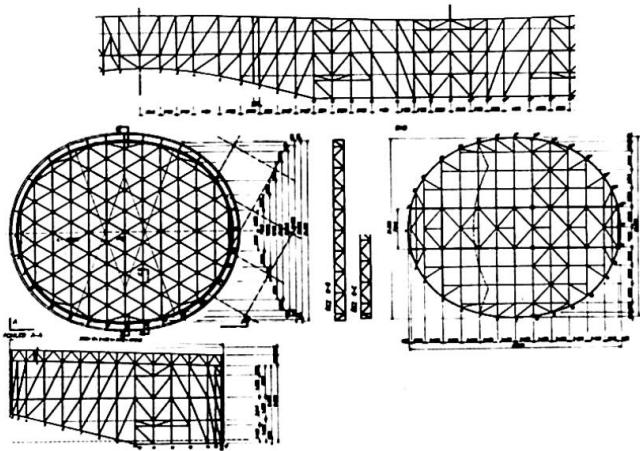


Abb.14

Manche von diese, aus Winkel- und andere Profilen konstruierten Systeme, können als Tragteil eines Raumsystems dienen. Als Beispiel für diese Ausnutzung führen wir die Tragstahlkonstruktionen des Festivalskino in Karlovy Vary (Architektonische Lösung des Baukomplexes V. und. MACHONINS aus Praha) an, von welchen der große Ovalsaal 40,620 m lang und 34,290 m breit ist und auf die Länge von 23,760 m ausgekragt ist. Die Konstruktionshöhe beträgt 16,651 m (Abb.14). Blick auf die Montage dieser Konstruktion gibt Abb.15.

Diese Aufzählung von Raumkonstruktionen beschließen wir mit einer Rohrkonstruktion von konsolartiger Gestaltung, welche als Überdachung einer Tribüne des Fußballstadions in Trinec dient. (Architektonische Lösung des Sportanlagekomplexes KPU in Hradec Králové). (Abb.16). Es ist eine gemischte Rohr- und Profilekonstruktion, am Boden in Montageblöcke 12.18 m vollgeschweißt und mit leichten Autokranen montiert. Blick auf die zusammenmontierte Konstruktion gibt Abb.17.

Zum Schluß ist zu bemerken, daß, außer weiteren solchen



Abb.15

Raumsystemen, welche projektiert und realisiert worden sind und andere auch in der Weltliteratur beschrieben sind, zum Beispiel wieder in /6/, von anderen Autoren in der ČSSR, andere als aus vorgefertigten, unifizierten Teilen konstruierte Fachwerk- und Rostplatten entworfen und realisiert wurden. Wir haben nur die Möglichkeit hier im Kurzen einige Prinzipien und Typen der Raumsysteme anzuführen.

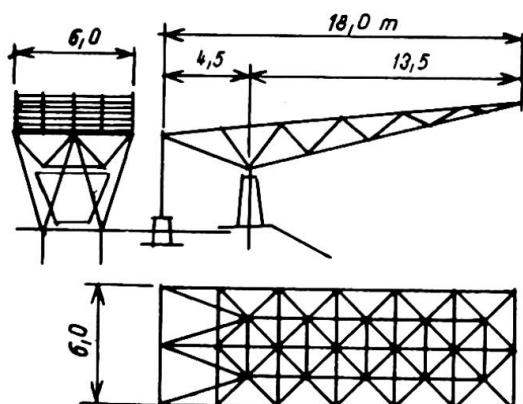


Abb.16

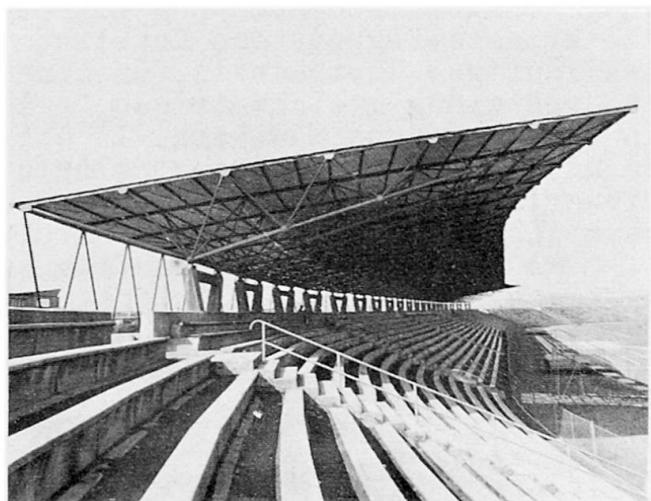


Abb.17

LITERATURVERZEICHNIS

- /1/ Lederer, F.: Statika II (SVTL Bratislava 1956)
- /2/ Klöppel, K - Ross, E.: Beitrag zum Durchschlagproblem dünnwandiger versteifter und unversteifter Kugelschalen für voll- und halbseitige Belastung (Der Stahlbau, Berlin 1956)
- /3/ Lederer, F.: Developments in Tubular Domes (Tubular Structures 3, London 1965)
- /4/ Wright, D.T.: Membrane Forces and Buckling in Reticulated Shells (Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, New York, February 1965)
- /5/ Lederer, F.: Diskussion zum Problem der Stabilität der Rottionsgitterschalen (Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, New York, Vol. 91. No. ST5, October 1965)
- /6/ Makowski, Z.S.: Räumliche Tragwerke aus Stahl (Verlag Stahl-eisen, m.b.H. Düsseldorf 1963)
- /7/ Lederer, F. und Kol.: Ocelové konstrukce pozemních staveb - Stahlkonstruktionen des Hochbaues (SNTL Praha 1971)
- /8/ Lederer, F.: Fachwerk- und Rostplatten (Werner-Verlag, Düsseldorf 1972)
- /9/ Lederer, F.: Steel Roofs of Winter Sports Stadia in Czechoslovakia - Stahldächer der Eisstadien in der Tschechoslowakei (European Civil Engineering / Europäischer Ingenierbau, Bratislava-Praha-Wien 1970/6)

ZUSAMMENFASSUNG

Es sind einige für Stahlkonstruktionen geeignete Grundtypen der konstruktiven Raumsysteme angeführt. Ferner wird auf einige Parallelen mit neu entwickelten Konstruktionssystemen hingewiesen und es wird eine Reihe von Realisationen der Raumkonstruktionen von verschiedener Form und Benutzung angeführt.

Experimentelle und theoretische Untersuchung des Trag- und Stabilitätsverhaltens einschaliger räumlicher Gelenknetzwerke im elastischen Bereich

Experimental and Theoretical Investigation of the Behaviour of Capacity and Stability of Single Shell Articulated Networks in the Elastic Range

Etude expérimentale et théorique du comportement en charge et de la stabilité de treillis spaciaux articulés en régime élastique

W. MATTHEES P. WEGENER
Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM)
Berlin, BRD

1. EINLEITUNG

Für die theoretische Untersuchung des Tragverhaltens einschaliger räumlicher Netzwerke wird vereinfachend angenommen, daß alle Stäbe gelenkig miteinander verbunden sind, daß das Netzsystem kinematisch stabil ist, (d.h. also alle Knoten unverschieblich gehalten sind, solange die Stäbe als längsstarr vorausgesetzt werden) und daß Belastungen nur als Einzellasten in den Knoten angreifen.

Zur Bestimmung der Stabkräfte und Verformungen wird außerdem angenommen, daß die entstehenden Knotenwege klein im Vergleich zu den Stablängen sind (Theorie 1. Ordnung). Das statische Verhalten hängt dann ausschließlich von den Stablängssteifigkeiten ab.

Für die Stabilitätsuntersuchung wird die Berechnung des verformten Systems näherungsweise ersetzt durch das iterative Verfahren der fiktiven Kräfte [3].

Durch Vergleich der rechnerischen Lösung mit experimentellen Untersuchungsergebnissen an Netzwerken, die die obengenannten Voraussetzungen nicht ideal erfüllen, wird die Anwendbarkeit der vereinfachenden Rechenannahmen auf solche Systeme kontrolliert.

2. AUFBAU UND GEOMETRIE DER UNTERSUCHTEN NETZWERKE

Die einschaligen Netzwerke bestehen aus dünnwandigen Stahlrohren ($EF \approx 4 \cdot 10^6$ kp, $EW \approx 4 \cdot 10^6$ kp.cm), die in den Knotenpunkten durch besondere Knotenstücke zentrisch miteinander verschraubt sind. Beide Netzsysteme sind hochgradig statisch unbestimmt.

NETZSYSTEM I ist eine kinematisch stabile Kuppel, deren 73 Knoten auf der Oberfläche einer Halbkugel liegen [6]. Die 192 Stabelemente erzeugen ein ungleich-schenkliges Dreiecksnetz, dessen Maschen um jeden Knoten räumliche Sechsecke bilden (Fig. 2). Da weder bevorzugte Stabrichtungen noch wesentliche Steifigkeitsunterschiede im Netz bestehen, könnte das statische Verhalten aus dem Membranspannungszustand einer als Ersatzsystem gedachten Schale

abgeleitet werden [4]. Dies geschieht nachfolgend jedoch nicht.

NETZSYSTEM II bildet einen zeltförmigen Pyramidenstumpf aus 69 Knoten und 180 Stäben. Das Netz wird aus Dreiecken und Rechtecken erzeugt (Fig. 4 u. 5). Einige unbelastete "Nebenknoten" sind senkrecht zur Netzoberfläche kinematisch instabil, was jedoch auf die Stabilität des Haupttragsystems ohne Einfluß ist.

3. STATISCHE BERECHNUNG

Es ist Aufgabe der Elastizitätstheorie, Verschiebungen und Spannungen eines elastischen Systems infolge einer Belastung zu ermitteln [2]. Zur Verfügung stehen die Gleichgewichtsbedingungen am verformten System, das Elastizitätsgesetz und der geometrische Zusammenhang zwischen den Verschiebungs- und Verzerrungsgrößen. Während das Elastizitätsgesetz für metallische Werkstoffe ausreichend genau linear (Hooke) ist, sind die Verzerrungs- und Verschiebungsbeziehungen nicht linear. Deshalb braucht zwischen Belastung und Verschiebung grundsätzlich kein linearer Zusammenhang zu bestehen [1].

Im Falle kleiner Verformungen linearisiert die klassische Elastizitätstheorie die nichtlinearen Beziehungen. Sie erfüllt die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System (Theorie 1. Ordnung). Zur Bestimmung der Stabkräfte und Verformungen wird dieser Weg auch hier unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen und der damit verbundenen Energiebetrachtung nach der Deformationsmethode für infinitesimale Knotenwege als ausreichend genau beschritten.

Die Anwendung der Energiemethode für infinitesimale Knotenwege bei der Untersuchung der Stabilität zur Ermittlung einer exakten Lösung stößt auf bislang ungelöste Schwierigkeiten, da bei der Integration des inneren elastischen Potentials von Knotenwegen abhängige, veränderliche Integrationsgrenzen entstehen. Die Stabilitätszustände können nur durch Näherungsverfahren, wie z.B. durch das wiederholte Anwenden der Energiemethode für infinitesimale Zustände iterativ ermittelt werden.

Hier soll aufbauend auf der einmalig infinitesimalen angewandten Energiemethode durch das iterative Verfahren der fiktiven Kräfte [3] eine Näherungslösung ermittelt werden.

3.1. BERECHNUNG NACH DER THEORIE 1. ORDNUNG

Nach [5] lautet das elastische Potential der äußeren Knotenlasten

$$\Pi_a = -v^T p = -p^T v \quad (1)$$

wobei v^T der transponierte Verschiebungsvektor und p der Belastungsvektor für alle Knoten ist. Das Elastizitätsgesetz lautet

$$s = D \Delta \quad (2)$$

wobei s der Stabkraftvektor und Δ der Stablängenänderungsvektor ist. Die quadratische Stabsteifigkeitsmatrix D enthält entsprechend der in Δ gewählten Anordnung alle Stabsteifigkeiten EF/l (E = Elastizitätsmodul, F = Fläche, l = Länge). Die Matrix B ist entsprechend dem Ordnungsschema von Δ und v aus den Stabeinheitsvektoren aufgebaut und stellt für kleine Verformungen den geometrischen Zusammenhang her

$$\Delta = B v \quad (3)$$

Das elastische Potential der inneren Kräfte lautet

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \Delta^T s$$

daraus folgt mit (2) und (3)

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \Delta^T D \Delta = \frac{1}{2} v^T B^T D B v$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} v^T K v \quad (4).$$

Die symmetrische Systemsteifigkeitsmatrix $K = B^T D B$ läßt sich durch Minimierung der Knotennummerndifferenzen benachbarter Knoten als Bandmatrix darstellen. Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ist ein System dann im Gleichgewicht, wenn die erste Variation des Gesamtpotentials ein Minimum wird:

$$\delta \Pi = \delta (\Pi_a + \Pi_i) = \delta (-v^T p + \frac{1}{2} v^T K v) = 0 \quad (5)$$

Mit $\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial v} \delta v = 0$ und $\frac{\partial v}{\partial v} = I$, wobei I die Einheitsmatrix darstellt folgt aus (5)

$$0 = -I p + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} (v^T K v) = -p + K v$$

$$\begin{aligned} p &= K v \\ v &= K^{-1} p \end{aligned} \quad (6)$$

Aus (2) und (3) folgen die Stabkräfte

$$s = D B v \quad (7)$$

Aus den Gleichungen (6) und (7), die mittels Computer ausgewertet werden, können die Knotenverschiebungen und Stabkräfte ermittelt werden.

Im SYSTEM II sind einige Knoten kinematisch instabil, was für die numerische Behandlung zur Folge hat, daß die Determinante der infinitesimalen hergeleiteten Formänderungsmatrix zu 0 wird. Betrachtet man dagegen das verformte System, verschwindet diese Unstetigkeitsstelle mit wachsender Belastung.

3.2. VERFAHREN DER FIKTIVEN KRÄFTE

Die Methode der fiktiven Kräfte hat gegenüber anderen Iterationsverfahren den Vorteil, eine Steifigkeitsmatrix nur einmal aufzustellen und auflösen zu müssen. Zur näherungsweisen Ermittlung der vollständigen Stabkräfte (Theorie 2. Ordnung) werden dann in den anschließenden Iterationszyklen, unter Beachtung der Maßgabe, daß nach wie vor die Steifigkeitsmatrix des unverformten Systems benutzt wird, diejenigen Kräfte dem System als äußere fiktive Belastung aufgeprägt, die zur Erzeugung des Gleichgewichts aus den Stabkräften des Ausgangssystems am finitesimal ausgelenkten System notwendig sind.

In Fig. 1 wird das durch die fiktiven Kräfte entstehende, in diesem Fall rückdrehende Kräftepaar für einen Zugstab dargestellt. Die Iteration ist gegebenenfalls durch Relaxation zu beschleunigen. Iterationsende wird erreicht bei

$$(\vartheta^N - \vartheta^{N-1})_{\max} = \epsilon, \text{ wobei } \epsilon \text{ eine gewählte Fehlerschranke ist.}$$

Vergleichswerte können näherungsweise bei Untersuchung eines Teilsystems als Durchschlagproblem nach [4] gefunden werden, vergleiche Kurve a in Fig. 3 und Fig. 6.

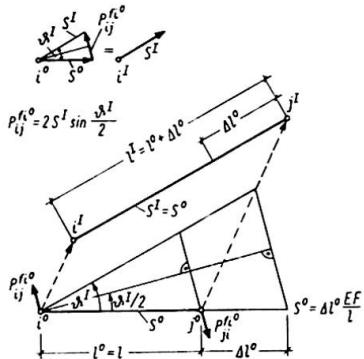


Fig. 1 Finitesimaler Verschiebungszustand mit fiktivem Gleichgewichtszustand im I. Iterationszyklus für einen Zugstab ($S > 0$)

4. EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG

In jedes Netzsystem waren 23 bzw. 34 "geeichte", mit je 4 Dehnungsmeßstreifen versehene Meßstäbe eingebaut, so daß an ausgezeichneten Stellen die Stabdehnungen, Stabkräfte und Stabendmomente sowie der örtliche Fließbeginn infolge der Belastung bestimmt werden konnten. An jeweils 8 Knoten wurden die Knotenverschiebungen in 3 senkrecht zueinander stehenden Richtungen mit Hilfe von Potentiometerweggebern ermittelt. Die Belastung wurde durch hydraulische Zugpressen erzeugt, und über Zuggehänge senkrecht bzw. waagerecht zentrisch in die Knoten eingeleitet. Die Größe der Kräfte wurde durch Kraftmeßdosen gemessen. Alle Meßwerte wurden mit einer Vielstellenmeßanlage, die jede Meßstelle selbsttätig anwählte, auf Lochstreifen registriert und auf einer elektronischen Rechenanlage ausgewertet.

5. ERGEBNISSE

5.1. STABKRÄFTE UND VERFORMUNGEN

Die nach Gleichung (6) und (7) errechneten Stabkräfte und Knotenverschiebungen sind für einen "Einheitslastfall" am Netzsystem I in Fig. 2 und am Netzsystem II in Fig. 4 und Fig. 5 eingetragen. Die für denselben Lastfall im Versuch ermittelten Meßwerte sind den Rechenwerten in den gleichen Figuren gegenübergestellt. Wegen der rechnerisch nicht erfaßbaren geringen Nachgiebigkeiten in den Knotenverschraubungen sind die gemessenen Knotenwege etwas größer als die errechneten.

Die statisch interessierenden Lastfälle werden aus den Einheitslastfällen superponiert. Im Versuch wurde mit Hilfe von Lastgruppen die Zulässigkeit des Superpositionsverfahrens und damit die zugrundeliegende Annahme des linearen Zusammenhangs zwischen Last und Verformung kontrolliert. Eine Untersuchung des Zwängungszustandes infolge der Montage der Kuppel I ergab, daß die größte Stabkraft etwa bei 10% der rechnerisch zulässigen Stabkraft und die größte Randspannung bei etwa 40% der zulässigen Spannung lag.

5.2. TRAGVERHALTEN UND STABILITÄT

Zur Untersuchung des Tragverhaltens wurde Kuppel I in Punkt B durch eine senkrechte Einzellast und Kuppel II in Punkt K durch eine waagerechte Einzellast (Fig. 5) bis zum Bruch beansprucht. Die gemessenen Bruchlasten sind in Fig. 3 und Fig. 6 eingetragen. In beiden Fällen trat der Bruch schlagartig durch Einzelstabknicken ein. Die Bruchlasten der Netzstäbe lagen dabei etwas höher als die in Vierversuchen an entsprechenden gelenkig gelagerten Einzelstäben gemessenen Knicklasten (Eulerfall 2).

Fig. 4
Errechnete und gemessene Knotenwege

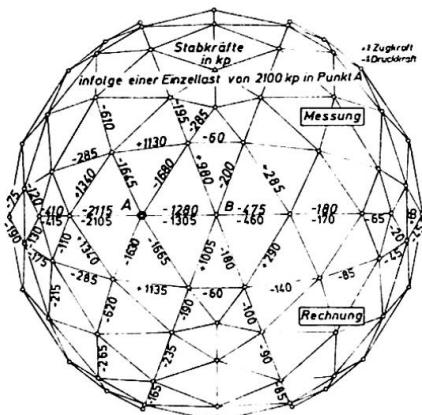
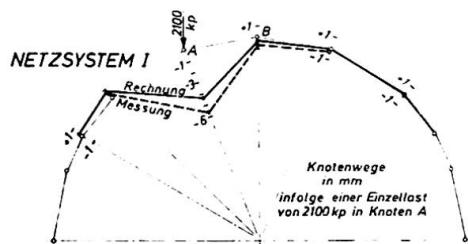


Fig. 2 Errechnete und gemessene Knotenwege (oben)
und Stabkräfte (unten)

NETZSYSTEM I

Kraft-Wegdiagramm des Zenitknotens B in doppelt-logarithmischer Darstellung

- a) als Durchschlagproblem nach [4]
- b) rechnerisches System (Theorie 1. Ordnung)
- c) Versuch
- d) rechnerisches System (Verfahren der fiktiven Kräfte)

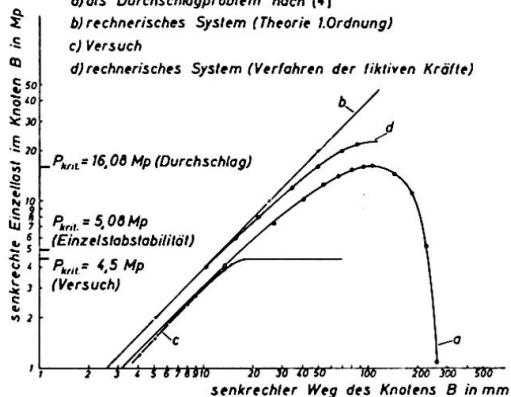


Fig. 3 Ergebnisse der Stabilitätsuntersuchung im Bereich des Knotens B

Fig. 6
Ergebnisse der Stabilitätsuntersuchung im Bereich des Knotens K

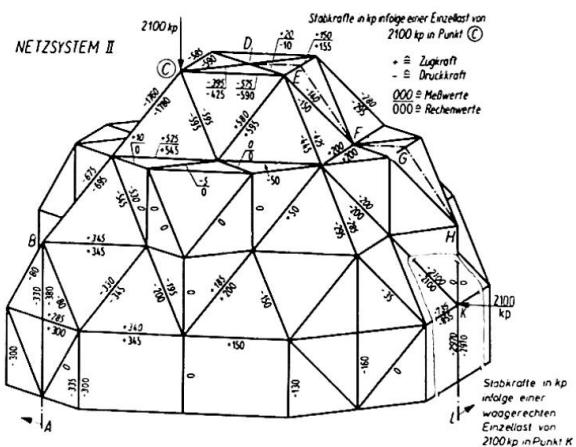
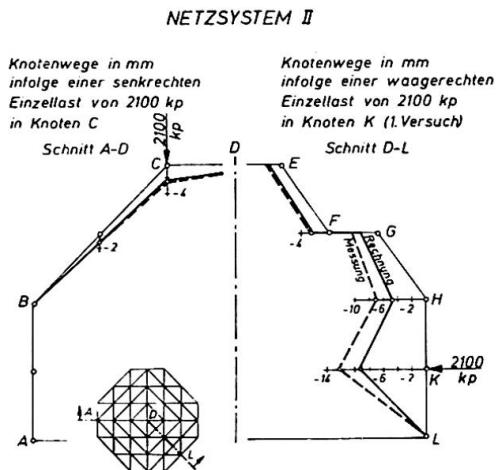
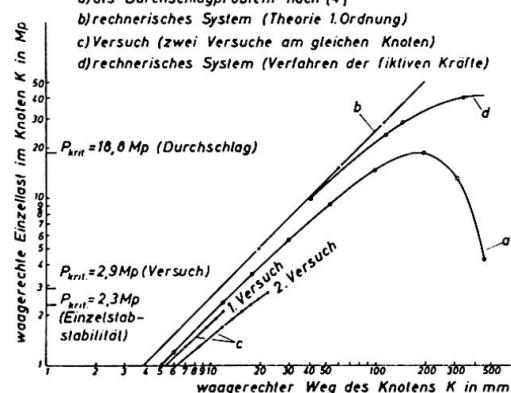


Fig. 5 Errechnete und gemessene Stabkräfte infolge einer senkrechten Einzellast in Punkt C bzw. infolge einer waagerechten Einzellast in Punkt K (Schnitt)

NETZSYSTEM II

Kraft-Wegdiagramm des Knotens K in doppelt-logarithmischer Darstellung

- a) als Durchschlagproblem nach [4]
- b) rechnerisches System (Theorie 1. Ordnung)
- c) Versuch (zwei Versuche am gleichen Knoten)
- d) rechnerisches System (Verfahren der fiktiven Kräfte)



Der Vergleich der rechnerischen Stabilitätsuntersuchung nach der Methode der fiktiven Kräfte ist als Kurve d und die Durchschlaguntersuchung nach [4] als Kurve a in Fig. 3 und Fig. 6 eingezeichnet. Es wird deutlich, daß bei den vorhandenen Steifigkeiten in jedem Fall Instabilität in Form von Einzelstabknicken und nicht als System-Instabilität auftritt. Durchschlagen als System-Instabilität würde erst bei sehr viel kleineren Steifigkeiten eintreten.

LITERATUR

- [1] Mises, R.v.:
Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie
Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. 3 (1923) S. 406-422
- [2] Kappus, R.:
Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen
Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. 19 (1939) S. 271-285,
S. 344-361
- [3] Teichmann, A.:
Statik der Baukonstruktionen
Sammlung Göschen 1958
- [4] Klöppel, K. und Schardt, R.:
Zur Berechnung von Netzkuppeln
Der Stahlbau 31 (1962) S. 129-136, 384
- [5] Bürgermeister, G. und Steup, H. und Kretzschmar, H.:
Stabilitätstheorie, Akademie-Verlag Berlin
Band I, 3. Auflage 1966; Band II, 1963
- [6] Versuchsbericht Az. 2.2/15 172 der Bundesanstalt für
Materialprüfung vom 9. 11. 1970

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird durch vergleichende Anwendung von Rechnung und Experiment das statische Verhalten, die Stabilität und das Bruchverhalten von gelenkfachwerkartig aufgebauten räumlichen Stabwerken untersucht. Als Untersuchungsbeispiel dienen zwei unterschiedliche Systeme von einschaligen Netzkuppeln, deren Stabelemente aus Rohrprofilen bestehen und in den Knotenpunkten durch Knotenstücke zentrisch miteinander verschraubt sind.

Optimum Design of Space Trusses

Projet optimum de treillis spatiaux

Optimaler Entwurf von Raumfachwerken

YASUHIRO HIRATA
Chief Research Engineer of Takenaka
Technical Research Laboratory

YUJI NAKAMURA
Manager Steel Structure Division
Nippon Kokan K.K. (Ph.D.)

HIDETAKE ANRAKU
Doctor Course Student of Tokyo University

MASATOSHI UEDA
Research Engineer of Takenaka Technical
Research Laboratory

Japan

1. Introduction

The analysis and optimum design of two types of simply supported, double layered space trusses, which are called Takenaka-truss in Japan, is reported herein. The design of the space trusses is usually carried out through the process shown in Figure 1.1. The design procedure developed here corresponds to the fundamental design stage, and this can be utilized to determine the optimum grid layout and the truss depth for the final design stage. Consequently, the accurate analysis and design procedure should be followed.

The approximate analysis is applied here to treat the following optimum design problem in a mathematically simplified form. And the results obtained by this method are verified, being compared with the accurate results by the stiffness matrix method.

The variables of the optimum design are not only section properties of members of space trusses, but also the depth of the trusses and the spacing. The objective function to be optimized is the cost of the space trusses. Which consists of the costs of members, joints and purlines. The applied design specification is the steel structural standard of Japan (1970) and the deflection limitations. The sequential unconstrained minimization technique is applied to the optimization technique.

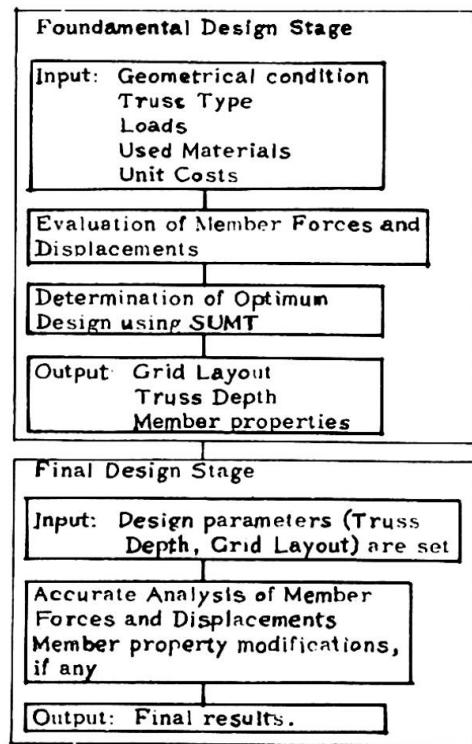


Figure 1.1 Design Process Flow Chart

2. Configuration of the Space Trusses

The two types of double layer grid trusses in this study are, Square Pyramid Truss (S.P. Truss) and Star Element Truss (S.E. Truss), which are quite similar each other. S.P. Truss has been utilized often recently, however, S.E. Truss has newly been developed. Both space trusses have diagonal top layer grids and normal lower layer grids, but the relative locations of top and lower chord are different, and the direction of latticed members are also different.

S.P. Truss is composed by arranging the inverted square pyramid elements as a chequered pattern and connecting the neighbouring pyramid apexes with lower layer members (see Figure 2.1). On the other hand, S.E. Truss is composed by star elements (see Figure 2.2).

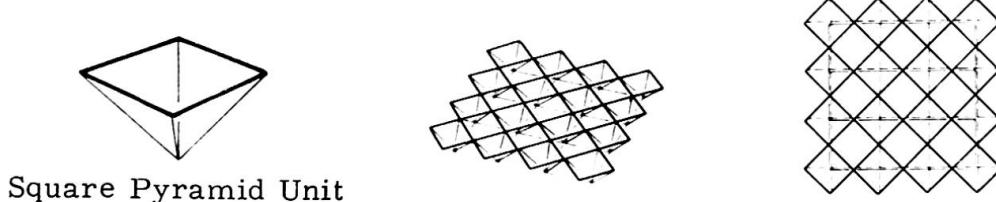


Figure 2.1 S.P. Truss

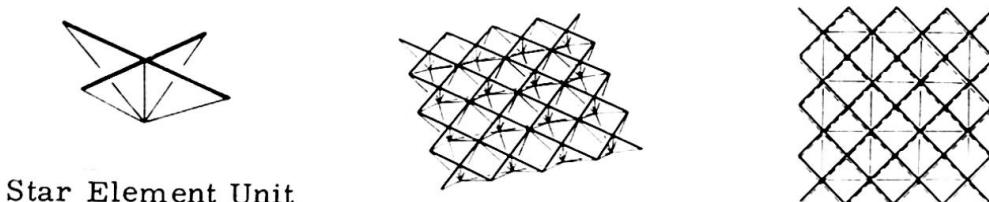


Figure 2.2 S.E. Truss

3. Evaluation of Displacements and Member Forces

The rigorous solutions for the axial forces of members and deflections of joints of space trusses under the imposed loading conditions may be obtained by deflection method using an electronic digital computer. In this optimization study, however, much simpler analysing methods are necessarily needed which lead to good approximate solutions and require short time and small core size in computation. One of the most successful ways which seems to satisfy these requirements is to find the equivalent solid plate that has nearly the same force and stiffness distributions.

The S.P. Truss has very small twisting rigidity around x and y axes (Figure 3.1), that is,

$$M_{xy} = 0 \quad . \quad (3.1)$$

From the wellknown equilibrium equation of solid plate and Equation (3.1) the following equation can be obtained.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{P}{D} \quad (3.2)$$

where w shows the vertical displacement, P the load per unit area and D the rigidity per unit width of the plate. Solving the Equation (3.2) under the simple support boundary condition by using Fourier series, the displacement is

$$w = \frac{16P}{D\pi^6} \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{mn \left(\frac{m^4}{a^4} + \frac{n^4}{b^4} \right)} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.3)$$

On the contrary to the S. P. Truss, the S. E. Truss has small twisting rigidity around x' and y' axies,

$$M_{xy'} = 0$$

Equation (3.4) is rewritten as

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{P}{4D} \quad (3.5)$$

The rigidity of plate D is expressed as

$$D = \frac{n \sqrt{2} A_u \cdot A_L}{a \sqrt{2} A_u + A_L} \cdot E h^2, \quad (3.6)$$

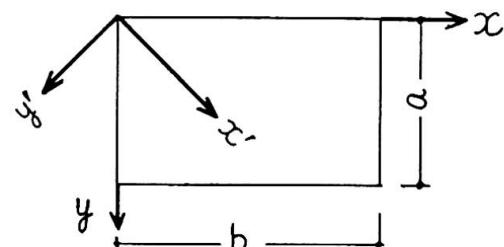


Figure 3.1
Co-ordinate Systems

where n is a number of blocks along the y direction. A_u and A_L are average sectional areas of upper and lower chords members respectively. Member forces are given in Table 3.1. The comparisons between rigorous solutions and plate solutions are shown in Figure 3.2 and 3.3.

In order to minimize the total cost of the space trusses exactly, each member and

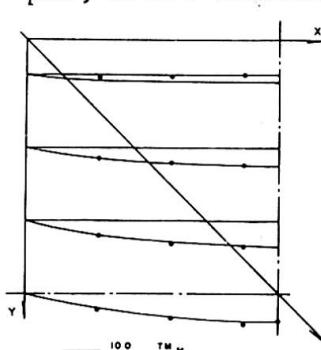
joint costs
are individual-

ly to be taken
into account,
however, this
is not practi-
cal actually
to treat whole
members and
joints as vari-
ables of the
objective func-
tion.

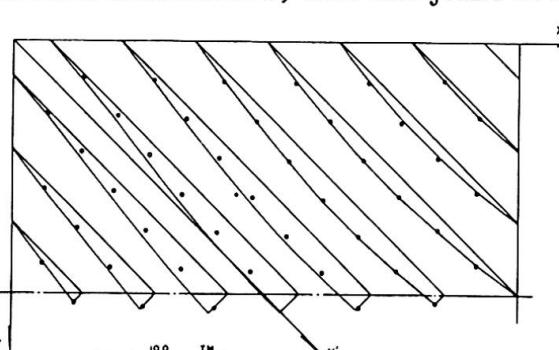
There-
fore some
members and
joints are to be
chosen to re-
present the
structure.
Two members
for each up-
per, lower and latticed chord members, and one joint are selected in this study.

Table 3.1 Member Forces

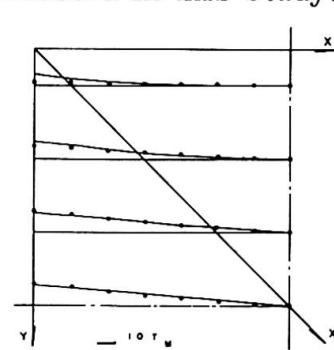
Member	Sectional area	Direction	S. P. Truss		S. E. Truss	
			Member force	Member length	Member force	Member length
Upper chord member	A_{ue}	x'	$M_{x'} = M_{y'} = M$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{n} M_{x'}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{n}$
	A_{uc}	y'	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{n} M$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{n} h$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{n} M_{y'}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{n} h$
Lower chord member	A_{le}	x	$\frac{a}{n} M_{x}$	$\frac{a}{n}$	$M_x = M_y = M$	$\frac{a}{n}$
	A_{lc}	y	$\frac{a}{n} M_{y}$	$\frac{a}{n} h$		
Latticed member	A_{wep}	x	$\frac{a}{n} Q_x \sqrt{1 + \frac{a^2}{4n^2h^2}}$	$\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4n^2}}$		
		y	$\frac{a}{n} Q_y \sqrt{1 + \frac{a^2}{4n^2h^2}}$			
	A_{wem}	x'			$\frac{a}{n} Q_{x'} \sqrt{1 + \frac{a^2}{2n^2h^2}}$	$\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2n^2}}$
		y'			$\frac{a}{n} Q_{y'} \sqrt{1 + \frac{a^2}{2n^2h^2}}$	$\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2n^2}}$
Number of joints			$3 \frac{b}{a} n^2 + (\frac{b}{a} + 1) n$		$3 \frac{b}{a} n^2 + (\frac{b}{a} + 1) n + 1$	



Lower Chord



Upper Chord



o Rigorous Solutions

— Plate Solutions

Figure 3.3

Comparison of Bending Moments Comparison of Shearing Forces

4. Optimum Design of Space Frames

4.1 Mathematical Model

Design variables are the sectional areas of members, A_{ue} , A_{uc} , A_{le} , A_{lc} , A_{wep} , A_{wem} , A_{wc} , the number of blocks, n , and the truss depth, h , which are described in the previous section.

The objective function f of the structure to be minimized is the total cost of steel skeletons.

$$f = \sum_{i=1}^m C_m p A_{mi} + \sum_{i=1}^n C_{mp} p A_{pi} + C_j \cdot N , \quad (4.1)$$

where C_m , C_{mp} , C_j are the unit cost of members, purlins and joints; m , n , N are the number of members, purlines and joints, respectively.

Tubular sections and wide flange sections are used for the members of trusses, and purlines respectively. Empirical relationships between section properties are obtained by plotting section properties commercially provided.

(i) For steel tubes

$$I = (0.625 A)^{\frac{19}{8}} . \quad (4.2)$$

(ii) For wide flange sections

$$A = 0.58 I^{\frac{2}{7}} , \quad (4.3)$$

$$Z = 0.58 I^{\frac{3}{7}} . \quad (4.4)$$

The diameter of the spherical joint is assumed three times of the diameter of the largest members and the thickness is assumed twice of that of the largest members.

Therefore, the objective function f of the structure for S.P. Truss,

$$\begin{aligned} f = p & \left[\left\{ 2\sqrt{2}na\frac{5}{q}A_{ue} + 2\sqrt{2}na\frac{4}{q}A_{uc} + (2na\frac{5}{q} - 2a)A_{le} \right. \right. \\ & + 2na\frac{4}{q}A_{lc} + na\sqrt{1 + \frac{4n^2h^2}{a^2}} \cdot \frac{4}{q}(A_{wep} + A_{wem}) \\ & \left. \left. + 2na\sqrt{1 + \frac{4n^2h^2}{a^2}} \cdot \frac{5}{q}A_{wc} \right\} \cdot C_m + 0.58^{\frac{1}{8}} \left(\frac{1.5}{16} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{p A^{\frac{5}{8}}}{F l_p^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{4}{3}} \cdot C_{mp} \right. \\ & \left. + (3n^2 + 2n) \cdot C_5 \cdot A_{lc}^{\frac{27}{16}} \cdot C_j \right] , \end{aligned} \quad (4.5)$$

where l_p is the spacing of purlines (cm), C_5 is the coefficients obtained by the relationship between member properties of tubular sections.

4.2 Sequential Unconstrained Minimization Technique

The optimum problem, mentioned in the previous section, may be obtained by several mathematical techniques. Here, the sequential unconstrained minimization technique developed by Davidon is adapted. The objective function to be minimized is converted to the following equation F ,

$$F = f + R \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 - \sigma_j} , \quad (4.6)$$

therefore, the optimum design problem with constraints is changed to the unconstrained optimum design problem. The macro flow chart is shown in Fig. 4.1.

4.3 Parametric Study

Using the developed programming, a parametric study was carried out. The observed results tell the interesting behaviors of the optimum designs.

(i) Parameter: Span

Constants given:

$$\begin{aligned}
 P &= 200 \text{ kg/m}^2 \\
 F &= 2.4 \text{ t/cm}^2 \\
 E &= 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \\
 C_j &= 308,000 \text{ yen (1,000 dollars)} \\
 C_m &= 123,000 \text{ yen (400 dollars)} \\
 l_p &= 180 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

At the optimum design, all stresses of members are fully constrained, however, the deflection limitation $p = a/300$ does not dominate at all. The cost per unit area increases almost linearly with the span length of the whole structure. Span per depth is scattered between almost 8 - 12, which is coincident to the usually adapted value in the actual design. Moreover, the optimum number of blocks seems to be obtained so that the angle of the diagonal member is almost 45° (actually 42° - 49°).

(ii) Parameter: Loading

Constant given:

Span length 72 meters, F , E , C_j , C_m , l_p are same as 4.1.

The cost per unit area increases almost linearly with loading amount.

The optimum designs of the S.E. Truss were almost same as those of the S.P. Truss when $C_j = 0$, that is, the weight is minimized, the results show almost same tendency. Moreover, almost the same results were obtained for the change to the purline spacing, too.

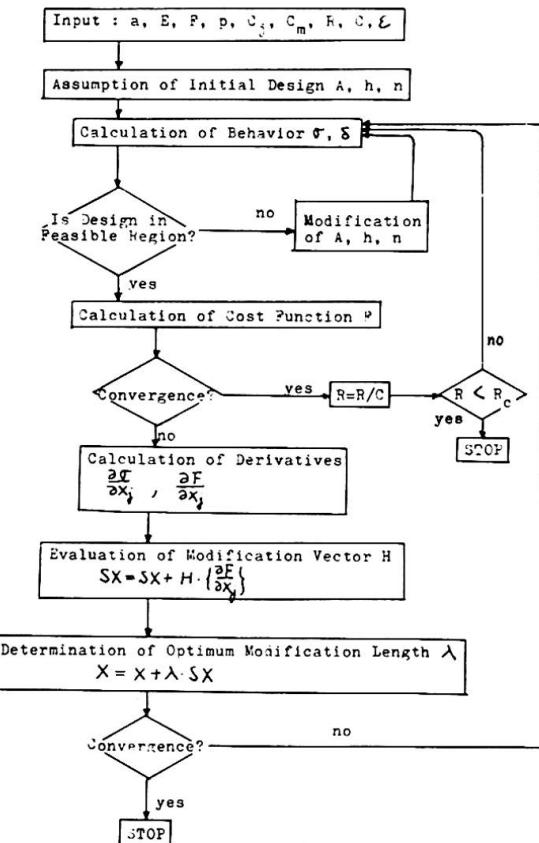


Figure 4.1

Macro Flow Chart of S.U.M.T.

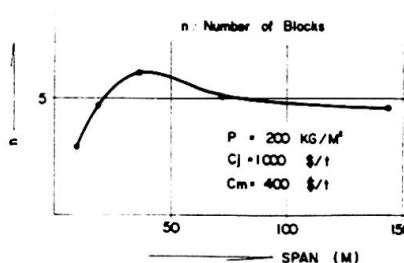
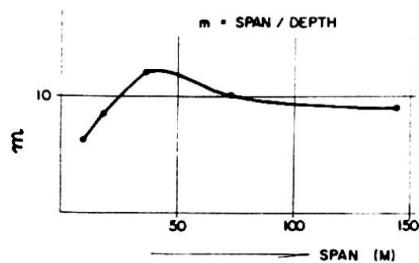
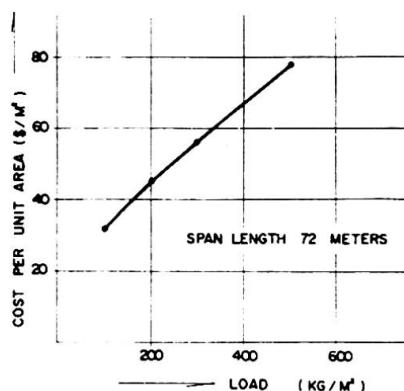
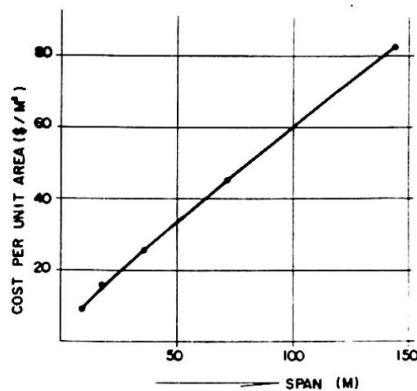


Figure 4.2 Results of Parametric Study

5. Conclusions

- Through this study, the following conclusions have been attained.
- (1) Comparisons with the results obtained by the stiffness matrix method confirm the theoretical analysis presented.
 - (2) The sequential unconstrained minimization technique works very effectively in the optimum design of the double layered space trusses, and shows good convergence. Computer time for one case is approximately two minutes using IBM 360/65.
 - (3) Through a parametric study, structural characteristics of the Takenaka-truss have been obtained. The cost per unit area is almost proportional to the span. The optimum ratio of the truss depth to the span is approximately 8 - 12. At the optimum design, the angle of the latticed members are approximately 45° . The results for S.P. Trusses and S.E. Trusses are almost same. The optimum design with truss depth limitation, and the rectangular plan can be readily developed in the future.

Bibliography

1. Kato B. and Hirata Y. "The Analysis of a space truss composed of square pyramid units", Space Structure, pp201 - 212, September 1966.
2. Renton, J.D., "The Formal Derivation of Simple Analogies for Space Frames", IAASS Pacific Symposium Report October 1971.
3. Geiger, D.H., "A cost evaluation of space trusses of large span", AISC Engineering journal April 1968.
4. Architectural Institute of Japan, "The steel structural design code", May 1970 (in Japanese).
5. Fiacco, A.V., McCormick, G.P., "Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques", 1968.

Acknowledgements

The authors wish to express their sincere thanks to Prof. Ben Kato, the University of Tokyo, for his continuous encouragement in developing of this paper. They are indebted to Miss Reiko Senda for her assistance for the programming.

Summary

The analysis and optimum design of simply supported, double layered space trusses is presented here. The approximate analysis using a transformation method to a continuous equivalent plate is good enough for design use. The optimum design by a sequential unconstrained minimization technique insures good convergence. Through a parametric study of approximately twenty cases, the structural characteristics of the Takenaka-truss have been studied.

The Influence of Member Quality on the Safety of Space Trusses

L'influence de la qualité des éléments sur la sécurité de treillis spatiaux

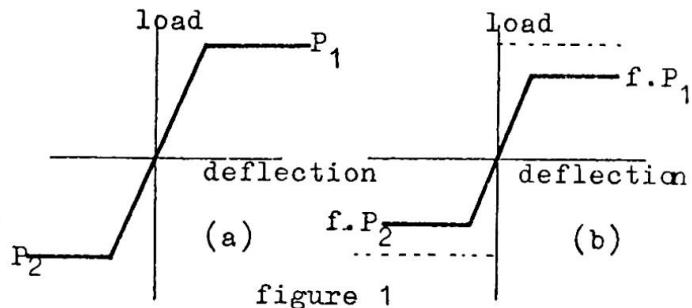
Einfluss der Qualität der Bauelemente auf die Sicherheit von Raumfachwerken

1. INTRODUCTION

In this paper an answer is sought to the question "How does the admissible load of a double-layer grid change, when it contains a certain percentage of 'inferior'

members"? In this context, 'inferior' means that for the load-deflection relation of the member concerned the valid situation is that of figure 1b, and not that of figure 1a. It is assumed that such inferior members retain their stiffness, do not break and are distributed over the entire construction in a random manner.

In the research project, two approaches were used: (a) a Monte Carlo simulation programme based on the displacement method; (b) a theoretical approach based on probability calculus.



2. MONTE CARLO SIMULATION

Whereas for the double-layer grid not only the probability of collapse had to be determined but the probability distribution of collapse loads had also to be found, in order to compare it subsequently with the probability distribution obtained theoretically, it was decided to perform an analogous simulation. The variable was the location of inferior members (random), and our assumptions related to their number and degree of inferiority (= factor f in figure 1b). It was furthermore assumed that in respect of all the members f be equal.

To enable this analogous simulation to be performed, we designed a computer programme, based on the displacement method, which programme calculates the collapse load of a three-dimensional pin-jointed truss by an incremental method.

To make this programme useful for practice, i.e. to keep the calculation time for each collapse load low, we derived a modification algorithm which, with regard to a yielding or a buckling member, permitted the pertinent absence of stiffness to be accounted for in the load vector as an imaginary extra load (figure 2), and not in the stiffness matrix. This extra load, Δk , may be calculated from:

$$\left[\Delta S^{-1} - S^{-1} \right]_{m \times m} \cdot \Delta k = v \quad \dots \dots \quad (1)$$

where:

ΔS = change in stiffness matrix
because of yielding or
buckling of a member
(stiffness of the member)

S = terms of original stiffness
matrix belonging with
collapsed member

v = previous displacement vector
 m = number of collapsed members.

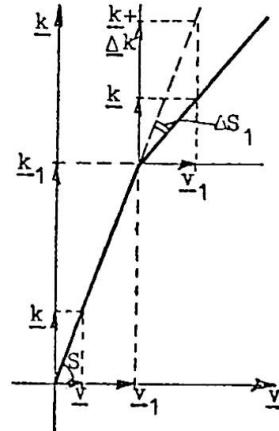


figure 2

From eq (1), we could easily find Δk , because $[\Delta S^{-1} - S^{-1}]$ represents a symmetric matrix (Maxwell). We only had to add one extra column to the matrix for each subsequent member collapsed.

For inversion of the new matrix, the inverse of the preceding one was used (bordering method [1]). Based on this algorithm [2], a very rapid computer programme was evolved. A double-layer grid with 682 elements and 211 Knots (about 600 equations with a half-bandwidth of 39) called for about one minute of calculation time on a CDC 6600 computer for each collapse load calculated (about 50 collapsed members), this is hardly more than a normal elastic calculation.

With the aid of this programme, we made calculations for some types of double-layer grids of various sizes, with various percentages of inferior members and different factors of weakening. The results have inter alia been used to verify whether a statistical approach of the problem was valid.

3. THEORETICAL DERIVATION

It was found possible to approach the problem theoretically, when the structure has one or more clearly discernible mechanisms of collapse in the very state of collapse. In the double-layer grid of figure 3, we distinguish two shear mechanisms and one yield mechanism. We assume that the members do not break and that their connections are stronger than the members themselves.

We now schematize the structure in its state of collapse as is shown in figure 4. The elements in a collapse mechanism we call "critical" elements. For each collapse mechanism, the probability g , that k critical, inferior members (or that k inferior, critical elements) are concerned is found from:

$$g(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N - K}{S - k}}{\binom{N}{S}} \quad \dots \dots \quad (2)$$

where N is the number of elements, S the number of inferior, K that of critical elements, and $\binom{K}{k} = \frac{K!}{(K - k)! * k!}$

With each value of k belongs a collapse load, so that the pertinent probability distribution, i.e. the hypergeometric distribution, is at the same time the probability distribution of the collapse load of the mechanism considered.

When the number of critical members is small, over against the number of inferior ones, eq. may be approximated through a binomial distribution; with $P = \frac{K}{N}$ we then find:

$$g(k) = \binom{S}{k} (P)^k (1 - P)^{S - k} \quad \dots \dots (3)$$

When $(N - K) > 50$ and $P < 0.2$, the binomial distribution changes to a Poisson distribution:

$$g(k) = \frac{\left(\frac{S \cdot K}{N}\right)^k}{k!} e^{-\left(\frac{S \cdot K}{N}\right)} \quad \dots \dots (4)$$

And when $P > 0.1$ and $P(1 - P)K > 8$, the binomial distribution changes to the normal distribution:

$$\mu = \frac{S \cdot K}{N} \quad \text{and} \quad \sigma = \sqrt{P(1 - P)K} \quad \dots \dots (5)$$

When, over against the number of critical members, that of the inferior ones is small, we find the same equations except that S and K change places.

Of these latter two distributions (4) and (5), the summated probabilities $g(1) + g(2) + \dots + g(k)$ may be read from a table.

The procedure for calculating the sought probability of collapse may be itemised, with reference to figure 3, as follows:

1. For each individual mechanism of collapse, determine the collapse load; this load will then be in equilibrium with the total load bearing capacity of the critical members.

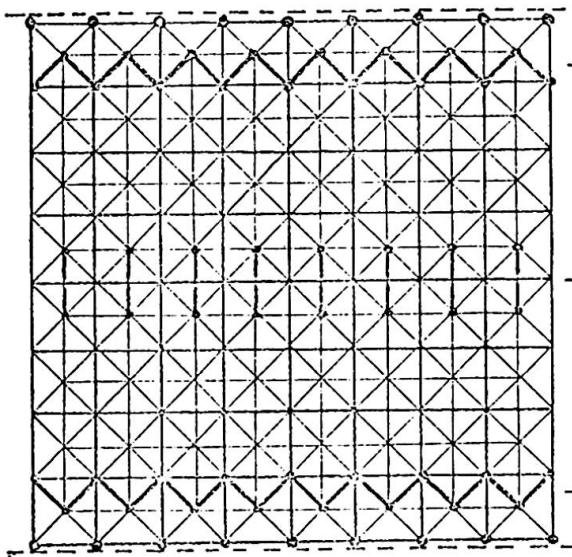


figure 3

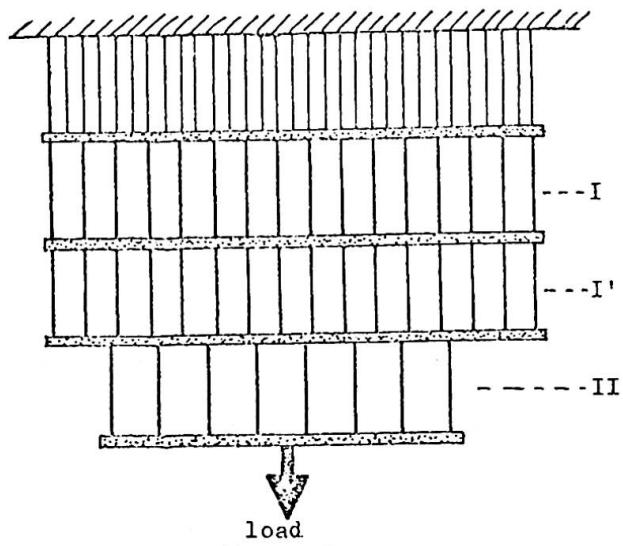


figure 4

2. For each individual collapse mechanism, the lower bound of the probability distribution of the collapse load; all the inferior members are in the mechanism concerned ($LB(1)$ and $LB(2)$ in fig. 5). Primarily we had assumed the factor of weakening, f , to be equal for all the members. If for each collapse mechanism, in other words: for each type of member, this factor is the same then only the lower bound of the distribution is subject to change.
3. From the results found in 2, calculate the number of members that should be inferior, at least, in order to enable the finding of a contribution towards a probability of collapse, i.e. the number of intervals between $B_{collapse}$ and B_{use} (B = 'load') when the distance between $B_{collapse}$ and the lower bound is apportioned into as many intervals as there are members in the mechanism.
4. Calculate the probability of collapse for each individual mechanism. Figure 5 presents an elucidation. Beside the load-deflection diagram for the structure, it shows the probability distribution of the collapse load of the two mechanisms sketched. For each mechanism, the probability distribution equals the shaded area of the curve indicating the part of probability distribution that lies below the permissible load. The probabilities that either mechanism I or mechanism I' (cf figure 4) occurs are summated to $P(1)$.

We now know the probabilities of occurrence for the individual mechanisms. We will next find the collapse probability of the entire structure, if we may assume that the mechanisms do not affect one another, i.e. are stochastically independent, with the aid of:

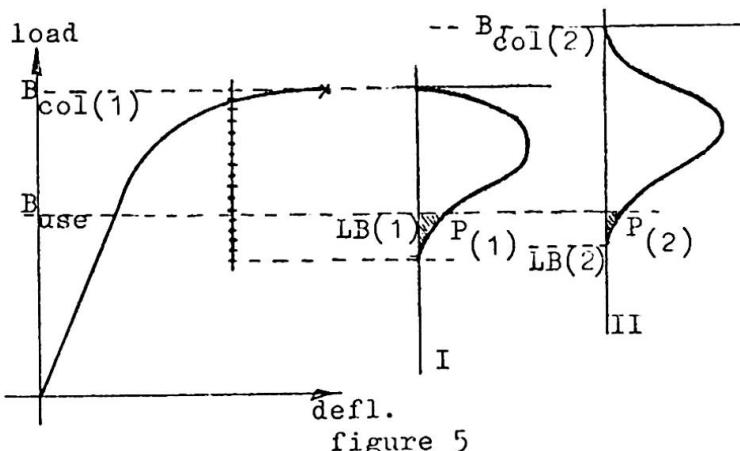


figure 5

$$P(\text{collapse}) = P(1) + P(2) - P(1) \cdot P(2) \quad \dots \dots (6)$$

where:

- $P(1)$ = the collapse probability of mechanism 1;
 $P(2)$ = the collapse probability of mechanism 2;
 $P(1) \cdot P(2)$ = the probability that mechanisms 1 and 2 occur simultaneously.

When the number of inferior members is about equal to the number of members in each mechanism, the probability of simultaneous occurrence of several mechanisms is nil. Accordingly, $P(1) \cdot P(2)$ will be larger or smaller in dependence upon N , K and S .

It should be noted that eq. (6) applies to uncorrelated mechanisms only. However, different forms of correlation are possible. In fact, members may belong to several mechanisms of collapse at the same time; deformations arising from the collapse of members in one mechanism may affect another mechanism; members from adjacent mechanisms may influence each other, and so on. Of these forms of correlation we shall here discuss the last-mentioned one only.

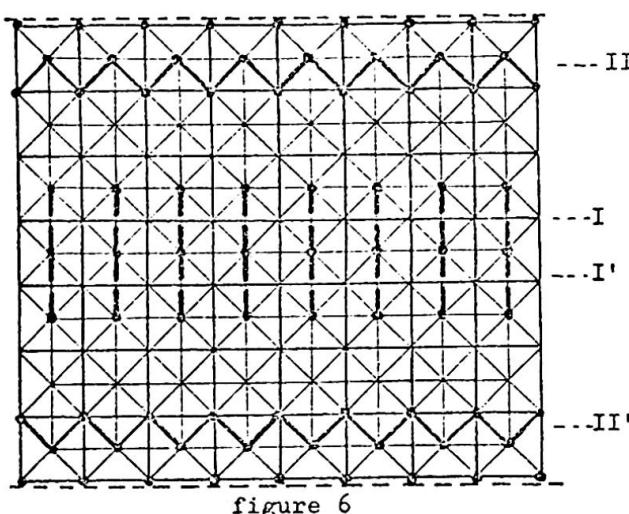


figure 6

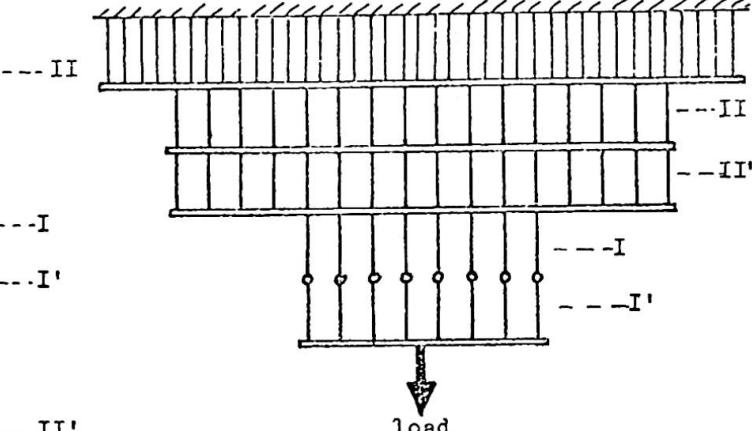


figure 7

When (cf figure 6) a member from mechanism I has collapsed, the adjacent member from mechanism I' is relieved and this remains whole.

For this structure, figure 7 then applies. The probability of collapse may be determined for the "complex" mechanism, cf I and I' in figure 7. For the example in figure 6, the collapse load of the non-weakened mechanism is 323 kgf/m^2 . The permissible load is assumed to be 175 kgf/m^2 . The number of members $N = 448$, $K = 16$ and; when we take $f = 0.5$ and $S = 200$, we find:

1. for the number of strings of members that must be inferior:

$$\frac{f \cdot x + 8 - x}{8} \cdot 323 = 178; \text{ so that } x = 8;$$

2. for the probability that there are 8, 9 ... i ... 16 inferior members in the mechanism:

$$g(i) = \frac{\binom{K}{i} \binom{N - K}{S - i}}{\binom{N}{S}}$$

3. for the probability that 8 inferior strings of members occur for i inferior members:

$$h(i) = \frac{\binom{8}{i-8} \cdot 2}{\binom{16}{i}}$$

As a result, we find for the collapse probability of mechanism: I - I':

$$P(\text{collapse}) = \sum_{i=8}^{16} g(i) \cdot h(i) = 0.052$$

For a shear mechanism we thus find that at least eleven elements must be inferior: $g(11) + g(12) + \dots + g(16) = 0.042$

Assuming that the two shear mechanisms are independent, we find for the probability of collapse:

$$P(\text{collapse}) = 0.042 + 0.042 - 0.042 \cdot 0.042 = 0.082$$

Analogously, the combination of mechanisms I - I' and II - II' yields:

$$P(\text{collapse}) = 0.130$$

Using the Monte Carlo simulation programme, we found a collapse probability of 0.139, which - considering that only the major mechanisms had been concerned in the calculation - indicates that we found an acceptable answer.

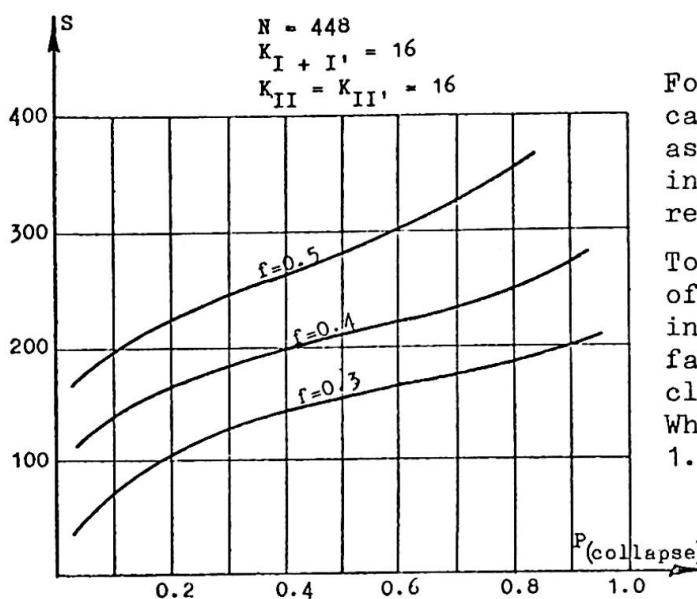


figure 8

For this trial structure, we finally calculated the collapse probabilities, as a function of the number of inferior members (cf figure 8), with regard to several factors of weakening.

To yield a reasonably high probability of collapse, either the number of inferior members must be large or the factor of weakness very low; this is clear from the curve.

Whereas:

1. At a constant percentage of inferior and critical members, the probability of collapse considerably reduces when the structure grows in size;
2. In practice, this type of grids is usually supported on four sides, so

that the number of critical members goes up and, consequently, the probability of collapse diminishes, we suggest that the following conclusion is appropriate.

4. CONCLUSION

Members with, for example, welding defects affect the safety of the investigated multiple statically indeterminate double-layer grids very slightly.

REFERENCES

- [1] V.N. Faddeeva
"Computational methods of linear algebra"
Dover Publications Inc. New York, 1959
- [2] F.P. Tolman and F.C. de Witte
"A modification algorithm for the non-linear analysis of space-trusses"
Report IBBC-TNO, BI-70-108/07.1.620
- [3] F.C. de Witte
"De invloed van ondeugdelijke staven op de veiligheid van vakwerkplaten" Report IBBC-TNO, BI-71-108/07.1.301

SUMMARY

Using an analogous Monte Carlo simulation programme that is based on the displacement method it is shown that a statistic prediction can be made about the probability that double-layer grids in which "inferior" members occur, for example due to welding defects, may collapse. For a trial structure is next calculated the probability of collapse with regard to several factors of weakening as a function of the number of inferior members used. It is found that, to yield a reasonably high probability of collapse, either the number of inferior members should be very large or the members very bad indeed.