Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 8 (1968)

Rubrik: IIa. Theoretical solutions and test-results

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.03.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

II

Structures en éléments minces
Dünnwandige Konstruktionen
Thin-Walled Structures

II a

Solutions théoriques et résultats expérimentaux
Theoretische Lösungen und Versuchsergebnisse
Theoretical Solutions and Test-Results

Leere Seite
Blank page
Page vide

DISCUSSION PRÉPARÉE / VORBEREITETE DISKUSSION / PREPARED DISCUSSION

Beams and Columns Braced by Thin-Walled Steel Diaphragms

Poutres et piliers renforcés par des tôles transversales minces

Durch dünnwandige Stahlquerscheiben versteifte Träger und Stützen

S.J. ERRERA and T.V.S.R. APPARAO
Department of Structural Engineering
Cornell University
Ithaca, New York

INTRODUCTION

Thin-walled corrugated sheets or ribbed steel panels are often used as side wall sheathing, roof decking or floor decking of steel framed buildings. An illustration of such a building is shown in Fig. 1, and some examples of the cross sectional shapes of available steel panels are shown in Fig. 2. These panels carry

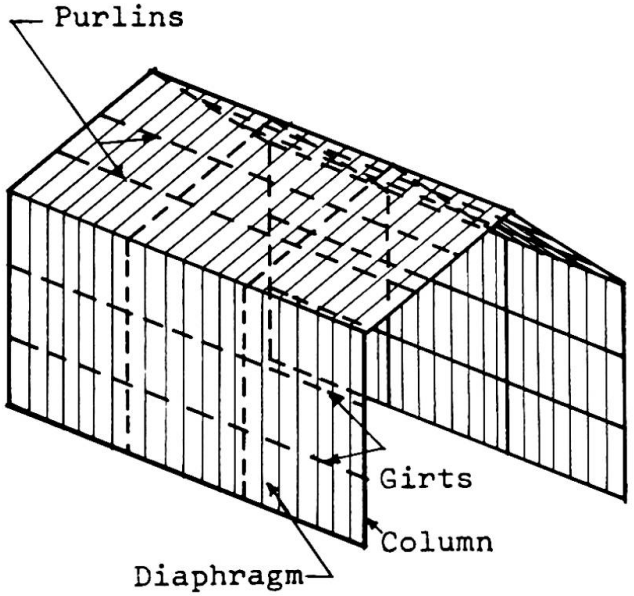


Fig. 1 A Steel Framed Building

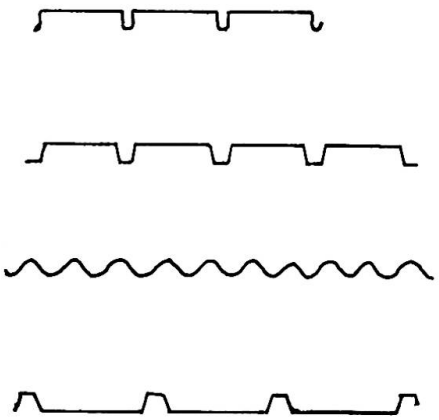


Fig. 2 Panel Configurations

loads normal to their planes (such as wind, snow or floor loads) by virtue of their bending strength in that plane, and transmit these loads to the building frame. In addition, as mentioned in

Professor Winter's report on Theme IIa, because of their in-plane shear rigidity, these interconnected panels act as shear-resistant diaphragms, and can provide restraint to the members of the steel frame against buckling in the plane of the diaphragm.

Fig. 3 shows a pair of beams or columns with attached dia-

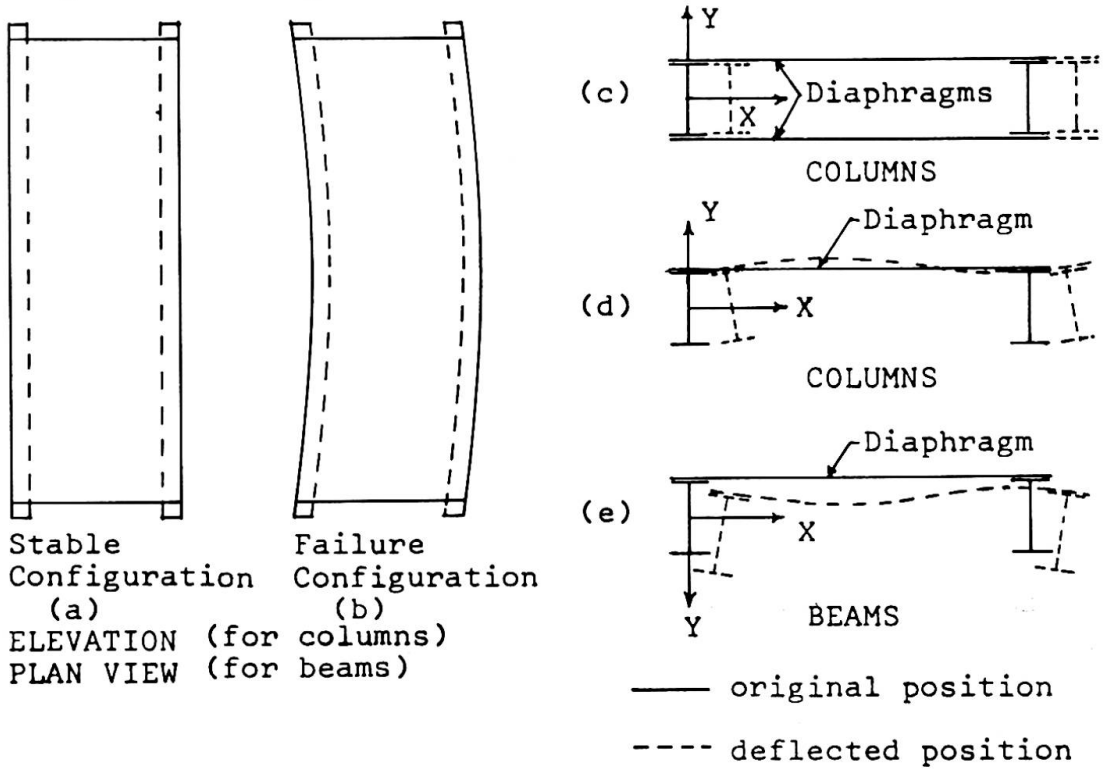


Fig. 3 Diaphragm-Braced Columns or Beams

phragm (a) with no load, and (b) in an assumed buckled shape. A diaphragm that is attached to two or more parallel members and constrained to deform with the members as they deflect laterally (Fig. 3b) is in a state of shear. Properly connected diaphragms are quite effective in resisting shear, and therefore can be very efficient in bracing beams, joists or purlins, against lateral torsional-flexural buckling. Similarly, buckling loads or failure loads of columns can be increased by either (1) bracing the columns along their length with diaphragms or (2) bracing the columns with girts which in turn are braced by a shear diaphragm, as shown in Figs. 1 and 4, and hereafter called diaphragm-girt bracing.

Fig. 4 Columns with Diaphragm-Girt Bracing

This report presents a summary of the results of an investigation at Cornell University on the effectiveness of thin-walled steel diaphragms as bracing for columns and beams. Comparisons of theoretically computed buckling loads and experimental failure loads are presented. Theoretically predicted deflections considering initial imperfections of columns, and based on small deflection theory, are compared with experimental deflections for a typical case.

CHARACTERISTICS OF THE DIAPHRAGM

In the present discussion, the two important characteristics of the diaphragm are its shear rigidity and its shear strength. No reliable theory has yet been developed to predict the rigidity and strength of a diaphragm; however, a standard procedure for testing a diaphragm in shear and for computing the rigidity and strength from its load-deflection relationship has been established.[1] (Superscripts indicate Reference Numbers).

For light gage steel diaphragms the effective shear modulus may be denoted as G_{eff},[2] expressed in force per unit of cross-sectional area. The shear rigidity Q is then expressed as

$$Q = A_d \, G_{eff} \qquad (1)$$

where A_d is the cross-sectional area of the diaphragm contributing to the support of one member.

THEORY

General - Theory of diaphragm-braced members has been developed to cover the following:

1. the critical moment for diaphragm-braced I-,[2] channel[3] and Z-section[3] beams subjected to uniform moment
2. the buckling load for axially-loaded I-section columns[4],[5] directly braced by diaphragms on one or both flanges
3. the buckling load for axially loaded I-section columns with diaphragm-girt bracing[3]
4. load-deflection relationships[3] for diaphragm-braced members with initial imperfections
5. failure loads[3] of diaphragm-braced members with imperfections, based on stipulated failure criteria.

Two analysis methods will be illustrated by particular cases; one based on equilibrium, the other based on an energy method.

Diaphragm-Braced Beams (Equilibrium Method) - Diaphragm-braced I- and channel section beams under uniform moment in the YZ plane (Fig. 3e) bend in the Y direction before they buckle laterally. Due to initial imperfections, real, imperfect beams deflect laterally and twist even at moments below the buckling moments. To determine the precritical deflections considering these initial imperfections, equilibrium equations of a diaphragm-braced I or channel beam may be written as:

$$EI_x v^{iv} = 0 \tag{2}$$

$$EI_y u^{iv} - Q(u''+e\beta'') + M_x(\beta''+\beta_o'') = 0 \tag{3}$$

$$GK\beta'' - E\Gamma\beta^{iv} + Qe(u''+e\beta'') - F\beta - M_x(u''+u_o'') = 0 \tag{4}$$

where EI_x is the bending rigidity about the x-axis
EI_y is the bending rigidity about the y-axis
$E\Gamma$ is the warping rigidity
GK is the torsional rigidity
F is a parameter of the cross-bending rigidity of the diaphragm[2]
e is the distance from the center of gravity of the beam section to the plane of the diaphragm
M_x is the moment about the X-axis
u_o and β_o are the initial deflections in the X-direction and about the Z-axis respectively
v is the deflection in the Y direction
and u and β are the additional deflections corresponding to u_o and β_o respectively.

Knowing the initial deflections, the above equations 2, 3 and 4 can be solved to obtain load-deflection relationships of the diaphragm-braced beam. Further, if the initial imperfections are set equal to zero, the non-trivial solution of the resulting homogeneous equations gives the lateral torsional-flexural buckling moment of the diaphragm-braced beam. Following the above procedure, the buckling moment M_{cr}, the amplitude of the additional lateral deflection C of the centroidal axis in the X-direction, and the amplitude of the additional twist D of a diaphragm-braced I- or channel beam are given by:

$$M_{cr} = \sqrt{\{EI_y(\frac{n\pi}{L})^2 + Q\}\{E\Gamma(\frac{n\pi}{L})^2 + GK + Qe^2\}} + Qe \tag{5}$$

$$C = \frac{M\delta_\beta\{E\Gamma(\frac{n\pi}{L})^2 + GK + Qe^2\} + M\delta_u\{M-Qe\}}{\{EI_y(\frac{n\pi}{L})^2 + Q\}\{E\Gamma(\frac{n\pi}{L})^2 + GK + Qe^2\}-(M-Qe)^2} \quad (6)$$

$$D = \frac{M\delta_u\{EI_y(\frac{n\pi}{L})^2 + Q\} + M\delta_\beta(M-Qe)}{\{EI_y(\frac{n\pi}{L})^2 + Q\}\{E\Gamma(\frac{n\pi}{L})^2 + GK + Qe^2\}-(M-Qe)^2} \quad (7)$$

where L is the total length of the member

n = 1 or 2 depending on whether the ends of the beam are "simply supported" or "fixed" against lateral deflection

δ_u and δ_β are the amplitudes of the initial lateral deflection and twist of the beam respectively (initial deflections are assumed to be affine to the buckled shape of an ideal beam)

and M is the moment under consideration.

The cross-bending rigidity of the diaphragm is neglected in Eqs. 5, 6 and 7.

Diaphragm-Braced Columns (Energy Method) - The change in total energy U from the compressed stable position to the compressed and deflected unstable position of the portion of the system related to one column of a diaphragm-braced column assembly is formulated below. The total energy U consists of strain energy V of the column, potential energy U_w of the axial load, and energy B_s due to shear in the diaphragm. Thus the total energy is given by

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \{EI_y u''^2 + GK\beta'^2 + E\Gamma\beta''^2 - P(u_t'^2 - u_o'^2) - P\frac{I_p}{A}(\beta_t'^2 - \beta_o'^2) + Q\,(u'^2 + e^2\beta'^2)\}dz \quad (8)$$

where $u_t = u_o + u$, and $\beta_t = \beta_o + \beta$. The energy due to the cross-bending rigidity of the diaphragm is neglected. Deflections of a diaphragm-braced column at precritical loads are obtained by solving the equations resulting from minimization of U using the Rayleigh-Ritz technique.

If the diaphragm bracing is symmetric (Fig. 3c) the terms with derivatives of β in Eq. 8 will vanish, and the load-deflection relationship and buckling load P_{cr} of a column are given by:

$$\{EI_y(\frac{n\pi}{L})^2 - P + Q\}\,C = PE_{10} \quad (9)$$

$$P_{cr} = EI_y\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + Q \qquad (10)$$

where E_{10} is the amplitude of initial lateral deflection of the centroidal axis and P is the axial load on the column.

If columns are braced on one flange only (Fig. 3d), the load-deflection relationship for the column is given by:

$$\begin{bmatrix} EI_y\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + Q - P & Qe \\ Qe & E\Gamma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + GK + Qe^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} E_{10} \\ \frac{I_p}{A} F_o \end{Bmatrix} \qquad (11)$$

where F_o is the amplitude of initial twist of the column. The buckling load P_{cr} of the column is obtained by letting the initial deflection equal zero and solving the resulting homogeneous equations for the non-trivial solutions; the smaller value of P from the solutions gives P_{cr}. Eqs. 9 and 11 are obtained by assuming either sine or cosine functions for the deflection pattern in the first mode, depending on whether the ends of the column are "hinged" or "fixed" respectively.

Columns with Diaphragm-Girt Bracing - The method of solution to obtain buckling loads and deflections at precritical loads for this case is similar to that employed in the case of diaphragm-braced columns, and is described in detail in Reference 3. For a column with j intermediate girts there are (j+2) possible modes of buckling, including sidesway. The actual mode of buckling depends on the diaphragm rigidity Q, the bending stiffness of the girts, m, the eccentricity e of bracing, and the geometry of the column assembly. For example, for a column with one intermediate girt and with "hinged" ends (i.e. flexurally hinged, and warping unrestrained) possible modes of buckling are shown in Fig. 5 and possible types of elastic behavior of the column are shown in Fig. 6. In Fig. 6 each curve in each graph represents a particular failure mode. The governing critical load and corresponding critical mode are given by the solid curves.

Inelastic Theory - In all cases the equations obtained in the elastic range can be modified by replacing the modulus of elasticity E by a suitable reduced modulus E_r, and the shear modulus G by a corresponding reduced modulus G_r to describe the behavior in the inelastic range.[3]

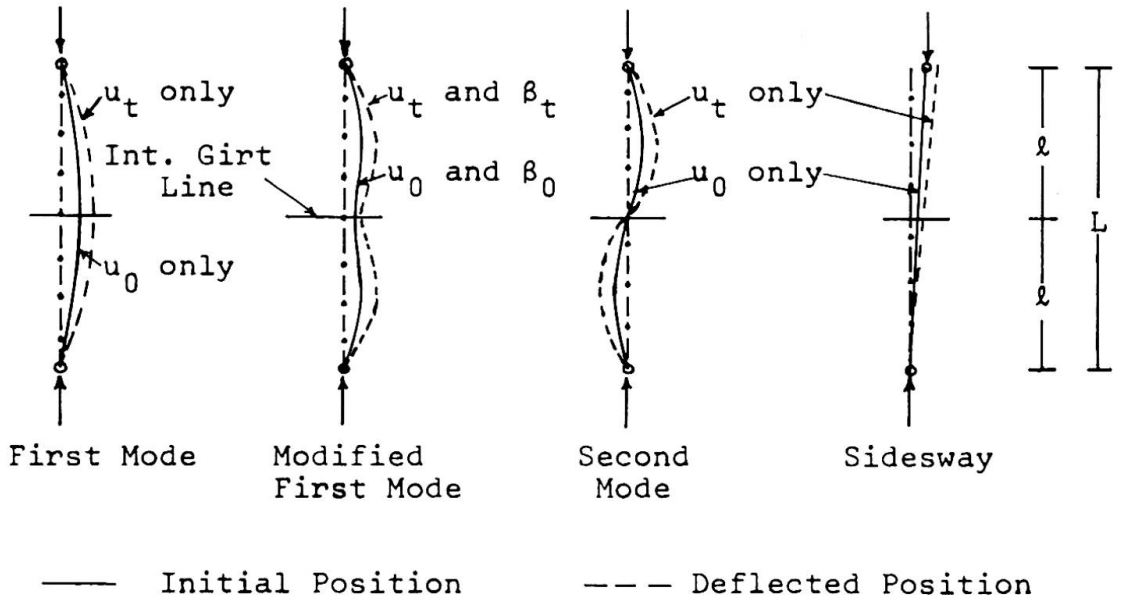
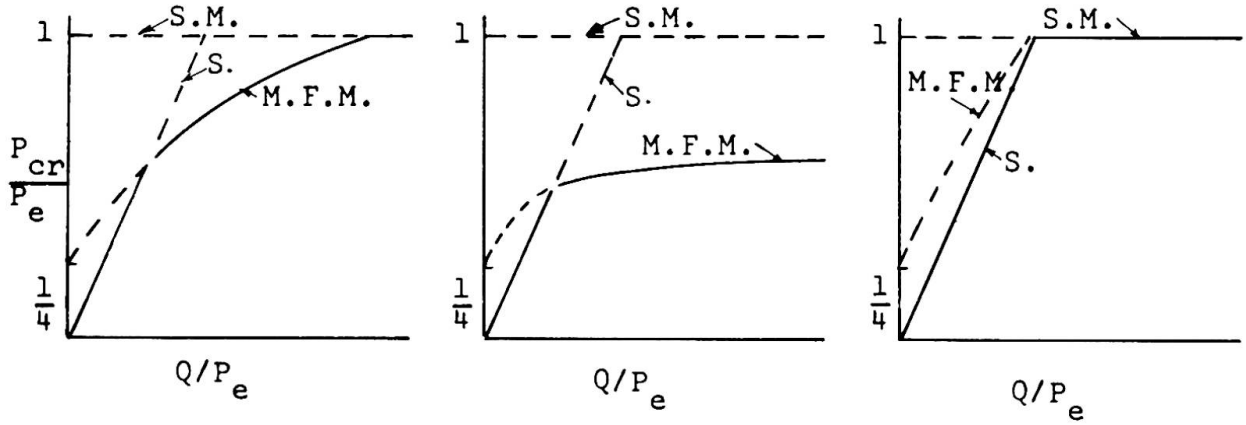


Fig. 5 Buckling Pattern of an Imperfect Column with One Intermediate Girt



Legend: M.F.M. - Modified First Mode, S.M. - Second Mode, S. - Sidesway, as shown in Fig. 5; $P_e = \frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2}$

Fig. 6 Possible Types of Behavior of an Elastic Column with one Intermediate Girt

THEORETICAL FAILURE LOADS

Actual failure loads of beams and columns are usually smaller than the theoretical buckling loads because of initial imperfections and consequent deflections at precritical loads. The deflections of diaphragm-braced beam and column assemblies can be computed using the methods described above; therefore, theoretical failure loads can be computed if appropriate failure

criteria are established for the beams, columns, diaphragm and girts. For example, it may be assumed that a column with continuous diaphragm bracing fails when

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \geq 1 \qquad (12)$$

where f_a is the computed axial stress, P/A
f_b is the computed bending stress at the critical section, including the effect of additional deflection under axial load
F_a is the buckling stress
and F_y is the yield stress.

Then, knowing the deflections of a column at a given load, one can compute the axial and bending stresses in the column, and compare the results with Eq. 12 to determine if column failure will occur at that load. Similarly, the computed deflections can be used to determine the shear strain in the diaphragm, which can be compared with the shear strain that would cause failure of the diaphragm. Computation of theoretical failure loads of beams and columns is illustrated in Ref. 3.

EXPERIMENTAL RESULTS

General - To corroborate the theoretical results, tests were conducted on 35 diaphragm-braced beam and column assemblies all using 50 ksi nominal yield strength steel. Several types of light gage steel diaphragms were used; these were fastened to the members by power driven pins or sheet metal screws. In each case, G_{eff} for the diaphragm was determined experimentally, and the shear rigidity Q was calculated from Eq. 1. To obtain a conservative estimate of the theoretical deflections at pre-failure loads, the amplitudes of the initial deflections used in the calculations were the largest measured values irrespective of their location.

Diaphragm-Braced Beams - Beam tests included pairs of 8JR6.5 and 10B17 I-sections, 8[6.2 sections, and an assembly of four 8JR6.5 beams. Beam spacing ranged from 1'-3" to 3'-8", (38 cm to 112 cm) and lengths ranged from 20' to 30' (6.1 m to 9.15 m) with ends fixed against lateral bending. A comparison of the theoretical

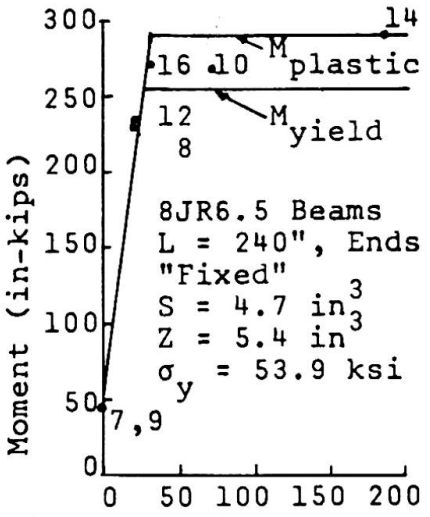


Fig.7 Beam Test Results and Predicted Values

buckling loads with test failure loads for 8JR6.5 assemblies is shown in Fig. 7. The moments sustained by the diaphragm-braced beams were always more than 80% of predicted buckling values for ideal members, and as high as six times the buckling moments of corresponding unbraced beams.

Diaphragm-Braced Columns - Tests were conducted on assemblies of pairs of 4I7.7 columns braced by diaphragms on one or both flanges. Spacing of columns ranged from about 14" to 17" (36 cm to 43 cm), and slenderness ratios ranged from 280 to 50. A comparison of theoretically predicted buckling loads with the test failure loads is shown in Fig. 8. Failure loads were 80% to 98% of predicted buckling loads for ideal members and as high as ten times the buckling loads of unbraced columns.

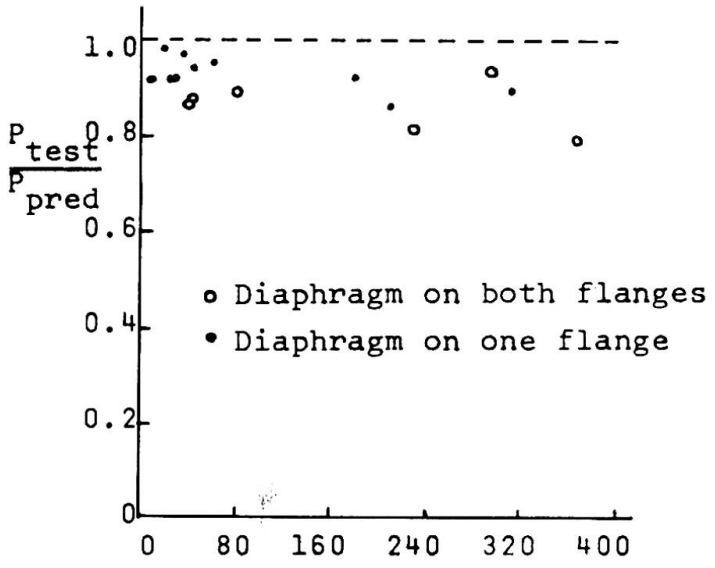


Fig. 8. Comparison of Theory and Column Test Results

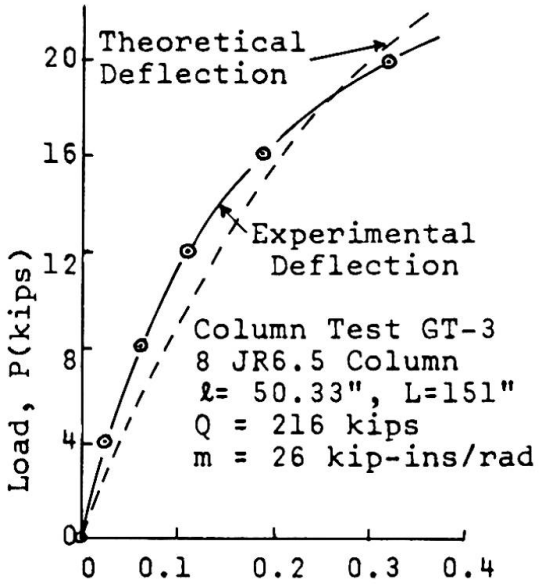


Fig. 9 Load-Deflection Curves

Columns with Diaphragm-Girt Bracing - Tests were made on three assemblies of axially-loaded pairs of 8JR6.5 I-section columns braced by two intermediate girts and a 26 gage standard corrugated steel diaphragm. Columns were spaced 6' (1.8 m) apart and were

12'-7" (3.8 m) high. Theoretical buckling loads and experimental failure loads for the three assemblies are given in Table 1, and

TABLE 1. Comparison of Test Failure Loads with Predicted Buckling Loads of Columns with Diaphragm-Girt Bracing

Test	Twist Restraint, m(kip-in/rad.)	Failure Mode	Distance, e (in)	Predicted Critical Load (kips)	Max Test Load (kips)	Test/$_{Pred.}$
GT-1	0	Modified First Mode (Tor-Flex)	6	21.4	17.7	0.84
GT-2	7750	Third Mode (Flexural)	10	39.9	37.3	0.94
GT-3	13	Modified First Mode (Tor-Flex)	6	29.6	25.5	0.86

the load-deflection relationships for a particular assembly are shown in Fig. 9. Failure loads were 84% to 94% of predicted buckling loads, and as high as nine times the buckling load of an unbraced column. Deflections predicted by the theory give a conservative estimate of the experimental deflections (Fig. 9), except at very high loads where secondary effects of large deflections began to prevail. A photograph of assembly GT-2 after test appears in Fig. 10. It is evident that failure was by buckling of the column over one-third its total length.

FURTHER STUDIES

Recent efforts have been directed toward assessing the practical implications and applications of diaphragm bracing. The dimensions and member sizes of the column-girt-diaphragm assembly of a typical steel building with metal sheathing is shown in Fig. 11. As ordinarily fastened, the diaphragm bracing has a Q-value of approximately 1000 kips. Calculations show that this combination of girts and panels is adequate to fully brace the columns, where "full bracing" is equivalent to the bracing that would be provided by an infinitely rigid diaphragm. In other cases, minor

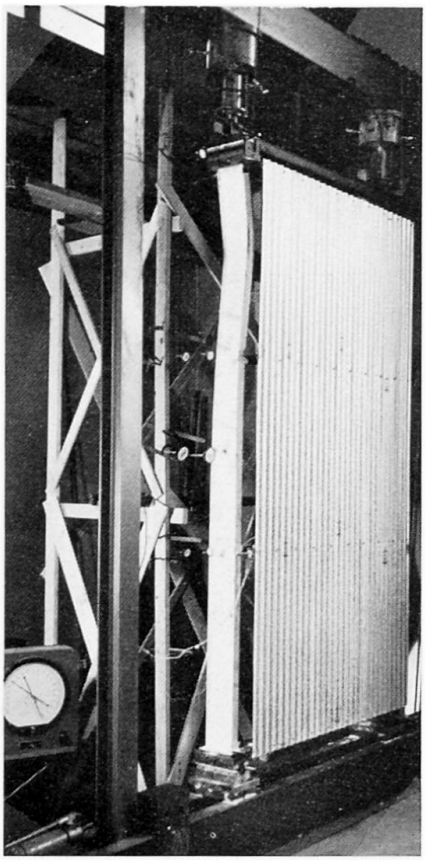


Fig. 10 Column-Girt-Diaphragm Assembly After Test GT-2

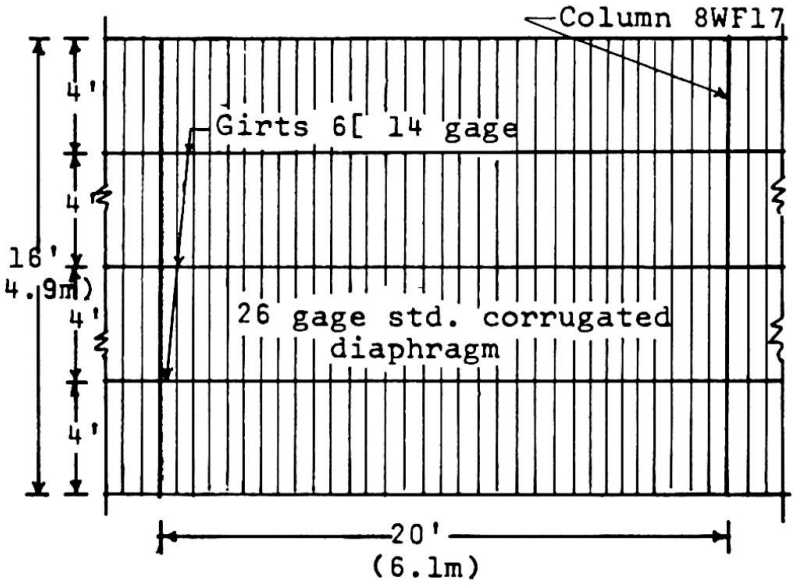


Fig. 11 Column-Girt-Diaphragm Assembly of a Typical Steel Building

modifications in construction practice may be required to achieve full bracing. Other studies have shown similar results for most practical sizes of beams braced by diaphragms in this type of construction. In such cases design loads may be increased, or other types of lateral bracing can be safely omitted.

CONCLUSIONS

Theory and test results both indicate that properly connected diaphragms can be very effective as bracing for beams and columns. In tests of actual assemblies, 80% to 100% of the theoretical critical load was obtained, with failure loads up to 10 times the critical load for the same member without diaphragm bracing.

This information permits the more economical design of: wall columns connected directly to steel sheathing; wall columns connected to girts which in turn are connected to steel sheathing; roof trusses connected directly or through purlins to roof decking; and floor beams and joists connected to light steel flooring. In all these cases buckling in the plane of the panels can be prevented by utilizing the shear rigidity of the ribbed thin diaphragm which, as wall, roof or floor, must be present in any event and, therefore, is available at no extra cost.

ACKNOWLEDGMENTS

This paper is an outcome of an investigation sponsored at Cornell University originally by the American Institute of Steel Construction and later by the American Iron and Steel Institute.

REFERENCES

1. "Design of Light Gage Steel Diaphragms", by the American Iron and Steel Institute, New York, N.Y.
2. Errera, S. J., "Buckling of Beams and Columns Braced by Shear-Rigid Diaphragms", Ph.D. Dissertation, Cornell University, 1965.
3. Apparao, T.V.S.R., "Problems in Structural Diaphragm Bracing", Ph.D. Dissertation, Cornell University, 1968.
4. Pincus, G., "The Performance of Columns and Beams Continuously Braced with Diaphragms", Ph.D. Dissertation, Cornell University, 1963.
5. Errera, S. J., Pincus, G. and Fisher, G. P., "Columns and Beams Braced by Diaphragms", Proceedings ASCE, Vol. 93, ST1, February 1967.

SUMMARY

Thin-walled corrugated sheets or ribbed steel panels often are used as side wall sheating, roof decking or floor decking of steel framed buildings. These interconnected panels act as shear-resistant diaphragms, and can restrain the members of the steel frame against buckling in the plane of the diaphragm. Theory and confirming test results are presented for columns and beams braced directly by diaphragms, and also for columns braced by girts which in turn are braced by diaphragms.

RÉSUMÉ

Souvent des tôles ondulées ou profilées servent au revêtement des fassades ou à la couverture des toits et planchers des portiques à étages multiples en acier. Ces tôles, solidement liées entre elles, forment une dalle stabilisante, retenant la construction et pouvant empêcher un flambement dans leur plan. La théorie et les résultats expérimentaux sont présentés ici pour les deux cas possibles, les tôles stabilisant directement poutres et piliers, ou stabilisant seulement les poutres, lesquelles retiennent les piliers à leur tour.

ZUSAMMENFASSUNG

Häufig werden Well- und Rippenblech als Fassadenbekleidung, Dach- und Fussbodeneindeckung von Stahlrahmenkonstruktionen verwendet. Diese Bleche wirken als stabilisierende Querscheiben und können das Knicken der Stahlrahmen in ihrer Ebene verhindern. Theorie und Testresultate werden dargestellt sowohl für direkte Verstärkung von Stützen und Balken als auch für verstärkte Träger, die ihrerseits dann auch die Stützen halten.

Probleme der Kaltverfestigung im Stahlleichtbau

Problems of Cold-Forming in Light-Gage Steel Structures

Problèmes du durcissement à froid dans la construction légère en acier

Dr.-Ing. S. MARX, Dipl.-Ing. H. E. GOEBEN,
Dipl.-Ing. H. SCHRÖDER, Dipl.-Ing. G. RICHTER,
Dipl.-Ing. W. BADER
DDR

1. Einleitung

Für einige Tragwerke des konstruktiven Ingenieurwesens aus Baustahl werden im Trend zum Leichtbau immer mehr faltwerk- und schalenartige Stab- und Flächenelemente als kaltgewalzte Profile verwendet. Gegenüber den warmgewalzten Profilen haben sie durch eine bessere Möglichkeit der Optimierung im Querschnitt einen hohen wirtschaftlichen Effekt. Infolge der zweiten walztechnischen Verarbeitungsstufe (Band-Profil) sind sie jedoch teurer als warmgewalzte Profile.

Durch den Kaltverformungsprozeß entstehen indirekte (nichtgezielte oder direkte (gezielte) Qualitätsverbesserungen, die zur Steigerung des wirtschaftlichen Effektes der kaltgewalzten Profile unter Ausnutzung der heute verbesserten Eigenschaften von Bandstahl mit Verfestigungseffekten ohne zusätzliche metallurgische Forderungen genutzt werden können. Voraussetzung dazu sind die axakte Erfassung der Einflüsse der Verformungsprozesse auf die mechanischen Größen für die Bemessung, deren unterschiedliche Verteilung im Profilquerschnitt und damit die Veränderung des Tragverhaltens bei den einzelnen Belastungsarten oder Belastungskombinationen. Infolge der Veränderung der Verhältnisse zwischen den einzelnen mechanischen Größen und der Alterungserscheinungen sind gesonderte Sicherheitsbetrachtungen erforderlich.

Der Abfassung einer allgemeingültigen Bemessungsvorschrift zur Berücksichtigung der Kaltverfestigung müssen eingehende

statistische und experimentelle Versuche vorausgehen. Winter und Karren [1], [2] entwickelten aus theoretischen und experimentellen Untersuchungen allgemeingültige Bemessungsregeln. Sie bauen auf zwei Verfestigungsmodellen und einem - von Buelfinger und Bach als nichtlineares Elastizitätsgesetz bekannten - Potenzansatz für die Verfestigungsfunktion auf, der keine echte rheologische Gleichung sondern nur eine Interpolationsformel der logarithmischen, rheologischen Spannungs-Verformungskurve darstellt. Er hat jedoch gegenüber anderen Ansätzen für die schon komplizierte mathematische Behandlung Vorteile und wurde deshalb auch von Norton und Odqvist in der angewandten Kriechmechanik eingeführt [3]. Durch umfassende Werkstoffprüfungen und statistische Auswertungen muß ein ausreichender Genauigkeitsgrad für den Spannungskoeffizienten und Verfestigungsexponenten erreicht werden.

2. Einfluß auf die mechanischen Größen

Für tragende Konstruktionen aus kaltgewalzten Profilen werden vorrangig U-, Z-, Winkel-, Hut- und Hohlprofile verwendet. Ausgangsmaterial sind Bänder der Güte St 38 u-2 (σ_F = 24 kp/mm^2, σ_B = 38 kp/mm^2, δ_5 = 24 %) und St 35 u bzw. St 35 hb (σ_F = 24 kp/mm^2, σ_B = 35 kp/mm^2, δ_5 = 25 %). Die Fertigung erfolgt in ein oder zwei Stufen mit jeweils mehreren Profilwalzgerüsten. Bei Hohlprofilen wird zunächst ein offenes Rundrohr hergestellt, das längs verschweißt und durch weitere Walzgerüste zum Endquerschnitt verformt wird.

Zur Ermittlung der Kaltverfestigung wurden Profile nach natürlicher Alterung von 2 Monaten in Streifen zerschnitten bzw. als Gesamtquerschnitt unter Zug- und Druckbelastung geprüft. Die wesentlichen Ergebnisse nach [4], [5], [6] sind:

Das Kaltwalzen führt zu stark veränderten mechanischen Gütewerten über den Querschnitt. Die Höhe der Kaltverfestigung ist von der Größe, Form und den Biegeradien der Profile und der Anzahl der Verformungsstufen abhängig. Charakteristisch ist bei offenen Profilen das Ansteigen der Festigkeitswerte an den freien Schenkelenden, während in Stegen unbedeutende Veränderungen erfolgen. In den mittleren Bereichen der Stege von Profilen mit Steghöhen größer als 65 mm ist keine Kaltverfestigung vor-

handen. Abb. 1 zeigt die typischen Veränderungen der Festigkeitswerte bei einem U-Profil. Die $\sigma_{0,2}$-Dehngrenze steigt am stärksten an, während die Zugfestigkeit geringfügig angehoben wird. Die Bruchdehnung fällt nicht unter δ_{10} = 10 % ab.

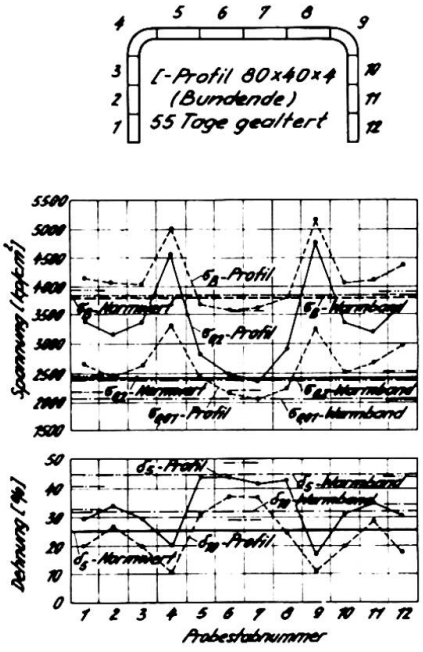


Abb. 1

Die größte Kaltverfestigung bei gleichmäßigerer Verteilung über den Querschnitt tritt bei Kastenprofilen auf. Die günstigen Werte werden darauf zurückgeführt, daß die Kaltverformung den ganzen Querschnitt erfaßt und in Querrichtung eingetragen wird.

In Abb. 2 werden die Spannungs-Dehnungs-Linien im unteren Verformungsbereich von herausgeschnittenen Zugproben eines U-Profils 100x50x3 (Kurve 1a - Stegmitte, 1b - Schenkelrand, 1c - Ecke), eines Rohres 48,3x3 (Kurve 2) und eines Kastenprofiles 88x45x3 (Kurve 3a - Seitenmitte, 3b - Ecke) gegenübergestellt.

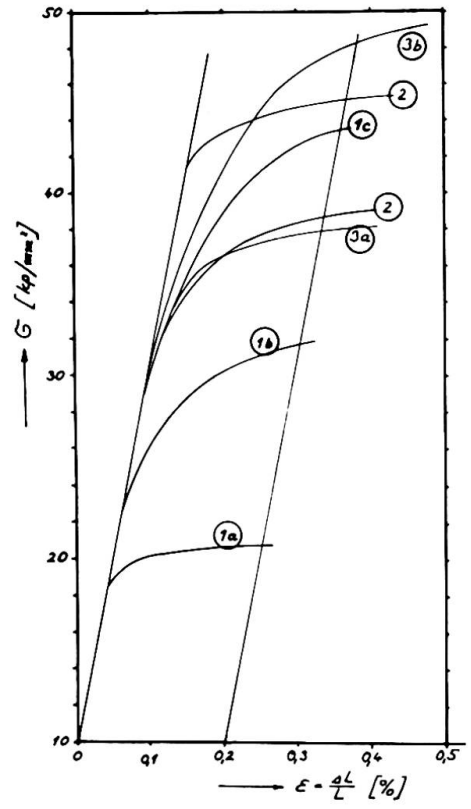


Abb. 2

Der Einfluß der Beanspruchungsrichtung auf die Festigkeitswerte (Bauschinger-Effekt) ist unbedeutend. Abb. 3 zeigt den Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurven verschiedener Proben bei Zug- und Druckbelastung. Bei Gesamtquerschnittsproben von Hohlprofilen verursachen die durch das Kaltwalzen entstandenen Eigenspannungen ein zeitigeres Auftreten plastischer Verformungen als bei den herausgeschnittenen Einzelproben, wo nach Abb. 2 und 3 mit dem Grad der Kaltverformung auch ein Anstieg der technischen Elastizitätsgrenze im allgemeinen festgestellt wird.

Die absolute Höhe der Festigkeitswerte ist teilweise beträchtlich von der Ausgangsfestigkeit des Bandmaterials abhängig. Als Ursachen sind die unterschiedliche Abkühlung des warmgewalzten Bandes (gegebenenfalls Wärmebehandlung - Abb. 2 normalisiertes und Abb. 3 nicht normalisiertes Band), ein Walzen mit Kaltstich, das Wickeln der Bänder zu Bunden und die Stahlzusammensetzung zu nennen. In der Regel liegen die Festigkeitswerte der Proben vom Bundanfang geringfügig über den Werten vom Bundende.

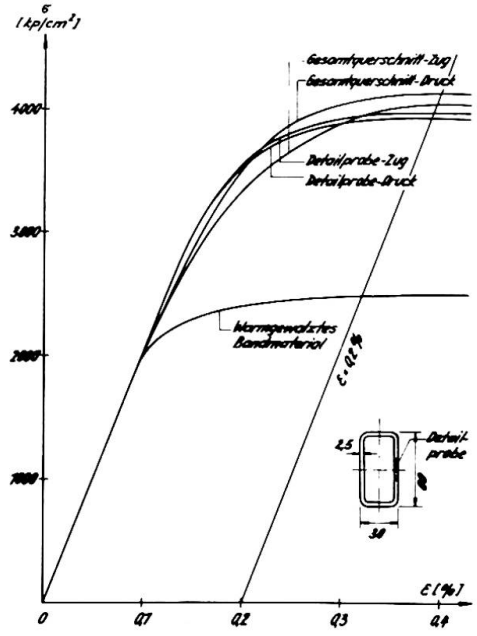


Abb. 3

Durch Verzinken von kaltgewalzten Profilen (Zinkbad 460 °C, Haltezeit 2-5 Min.) werden die technische Elastizitätsgrenze und Fließgrenze im Sinne einer künstlichen Alterung angehoben. Typisch ist das Wiederauftreten einer wieder ausgeprägteren Fließgrenze. Teilweise wurde ein geringes Absinken der Zugfestigkeit gegenüber dem unverzinkten Material beobachtet.

3. Einfluß der Verformungstechnologie

Jede Art von Kaltverformung, wie Recken, Biegen, Ziehen, verändert die Festigkeitseigenschaften von Stahl. Die Höhe der Festigkeitszunahme ist in gewissen Grenzen durch die Profilform und das Verformungsverfahren beeinflußbar. Beim Kaltwalzen sind die wesentlichen Parameter Biegewinkel, Seiten- oder Hilfsrollen, die Anzahl (z. B. 6 oder 3) und der Abstand der Profiliergerüste und die Anzahl der Profilierstufen die das Band nacheinander durchläuft.

Untersuchungen an U-Profilen 63x50x3 aus Warmbandgüte St 38 u-2 ergaben, daß bei 3 Gerüsten die Verfestigung in den abstehenden Schenkeln geringfügig gleichmäßiger, während sie bei 6 Gerüsten in den abstehenden Schenkeln nur an den Rändern ansteigt. Ein wesentlicher Unterschied (≤ 6 %) für den Gesamtquerschnitt ist jedoch nicht zu erkennen. In beiden Fällen sind die Ver-

festigungen in den Schenkeln größer als im Steg.

Als Haupteinflüsse für die Kaltverfestigung in den ebenen Schenkeln der Profile werden angesehen: Infolge Querkontraktion treten in den exzentrisch liegenden Biegezonen Kräfte auf, die zu plastischen Verformungen in den außenliegenden Teilen der Schenkel führen, weil durch die Walzgerüste eine gerade Stabachse erzwungen wird. Wegen der schrittweisen Verformung von Walzgerüst zu Walzgerüst werden die freien Schenkel mehrfach hin- und zurückgebogen, was plastische Verformungen infolge Biege- und Axialbeanspruchung zur Folge hat. Der Einfluß der Walzendrücke ist unbedeutend, da diese zur Vermeidung eines hohen Walzenverschleißes im allgemeinen gering gehalten werden.

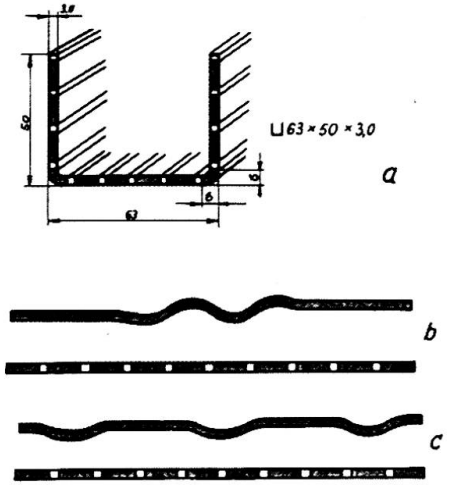


Abb. 4

Ein Einfluß weiterer Profilierparameter – bis auf die Anzahl der Stufen (z. B. Hohlkasten) – wurde nicht festgestellt.

Zur Erhöhung der Gesamtverfestigung im Profilquerschnitt wurden im Hinblick auf eine gezielte [1] Kaltverfestigung für den Profiliervorgang zwei weitere Umformstufen – Sicken und Glätten – vorgeschaltet (Abb. 4 b, 4 c). Der Einfluß unterschiedlicher Sickenformen wurde an zwei Varianten untersucht (Abb. 5 mit 4 b und Abb. 6 mit 4 c).

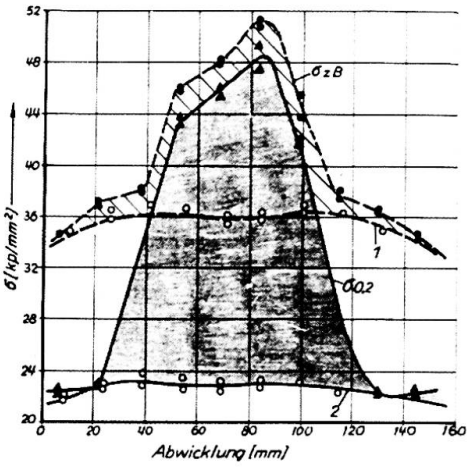


Abb. 5

Bei Verwendung des vorverfestigten Ausgangsbandes für das U-Profil wurde eine mittlere Streckgrenzenerhöhung des Gesamtquerschnittes von ca. 38 % (6 Gerüste) bis ca. 45 % (3 Gerüste) und ein mittlerer Anstieg der Zugfestigkeit von ca. 12 bis 18 % erreicht (Abb. 7 mit 5 und Abb. 8 mit 6).

1) ähnliche Versuche sind von der Hoesch AG und aus der VR Ungarn bekannt geworden.

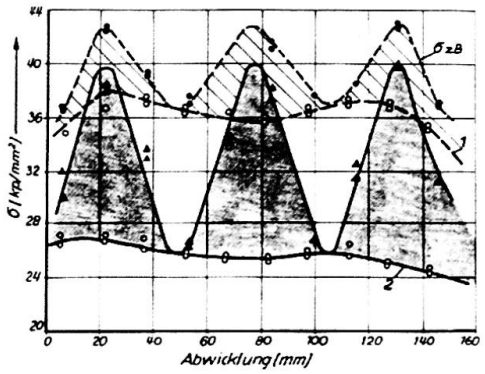
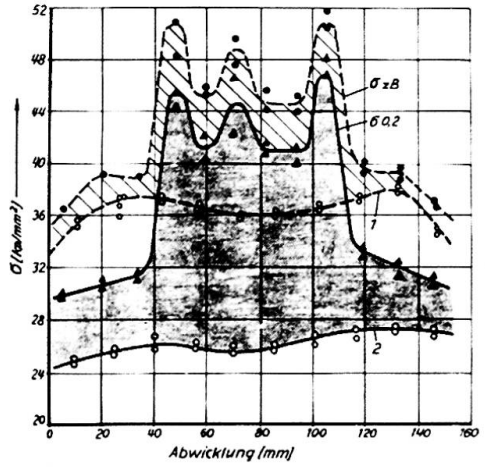
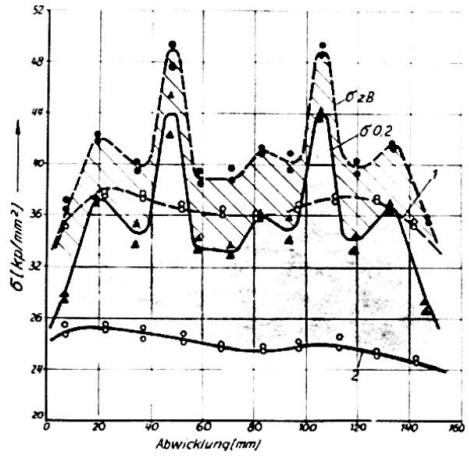


Abb. 6

Die Versuchsergebnisse zeigen, daß vor allem die Festigkeit der inneren ebenen Teile des Profiles im Vergleich zu Abb. 1 wesentlich erhöht werden kann.

Durch die Unterteilung der Sickenprofilierrollen ist ein Aufbau nach dem Baukastensystem und damit eine weitgehende Anpassung an alle vorkommenden Stahlleichtprofile möglich.





4. Theoretische Ermittlung der Kaltverfestigung

Für den als Kaltverfestigungsfunktion von Karren gewählten Potenzansatz

$$\sigma_e = k\,(\varepsilon_e)^n \qquad (1)$$

wurden die in Abb. 9 und 10 angegebenen Beziehungen des Spannungskoeffizienten k (2) und Verfestigungsexponenten n (3) zur Fließgrenze $\sigma_F \equiv \sigma_{0,2}$ und Bruchfestigkeit des Ausgangsbandmaterials aus den als Streuband dargestellten Versuchsergebnissen abgeleitet. Geringe Versuchsergebnisse lagen dabei besonders im Bereich $\sigma_B/\sigma_{0,2} > 1{,}6$ vor [1]. Die Mittelwerte aus jeweils 3 an Normzugproben ermittelten Fließkurven für 12 normalisierte Bän-

der der Güten St 38 u-2 (•1,•4,•5,•6), St 35 u (•2) und St 35 hb (•3) bestätigen in diesem Bereich den Streubereich und die lineare Beziehung der Gl. (2) und (3). Da Festigkeits-Querschnittsanalysen von Profilen in den meisten Fällen an einfachen Flachzugproben durchgeführt werden, sind für das gleiche Bandmaterial aus gleichen Versuchen die nach den Gl. (2) und (3) ermittelten Größen (○1 - 6) angegeben.

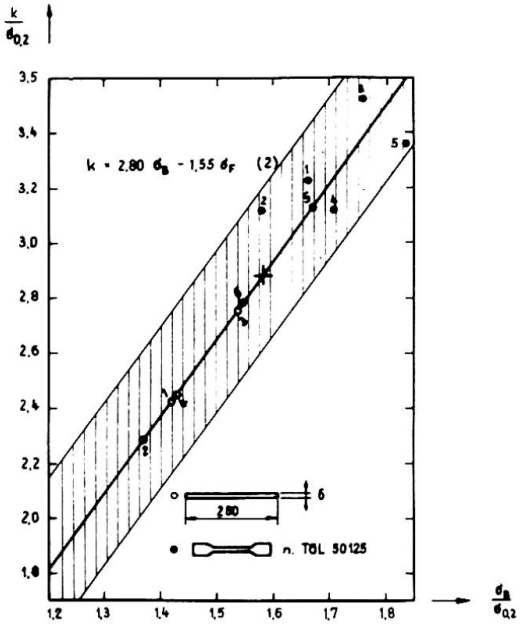


Abb. 9

Für die Größe der Streckgrenze in dem Krümmungsbereich von Abkantungen kaltgewalzter Profile hat Karren in [1] die Beziehung (4) in Abb. 11 abgeleitet. Mit einigen zusätzlichen Ergebnissen aus den Abb. 9 und 10 wurden die Beziehungen zwischen $\sigma_{0,2}$ E und dem Verhältnis a/t (Innenradius zur Banddicke) nach Gl.(4)als Kurven eingetragen. Es ergibt sich ein verhältnismäßig grosser Streubereich aus den Größen k und n.

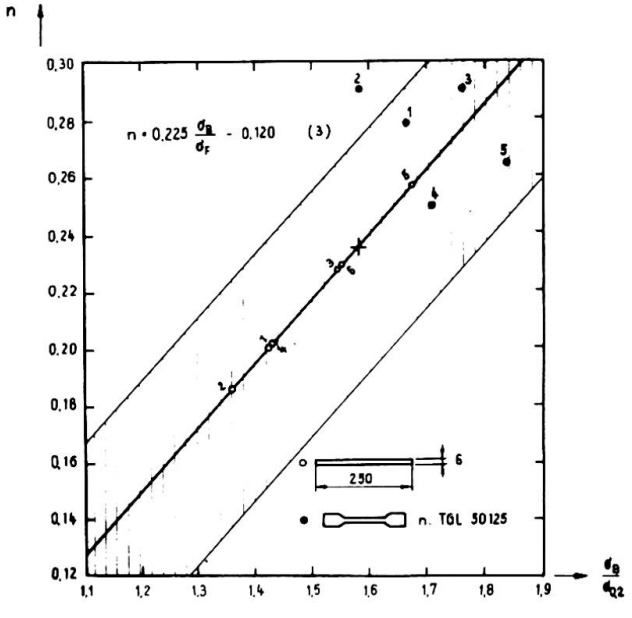


Abb. 10

Bei den Verhältnissen a/t = 1 sind die Mittelwerte und Streubereiche von je 12 Zugproben aus den Ecken von Kästen 88x45x3 (Band 1) und 63x63x4 (Band 2), bei a/t = 5,8 von 48 Zugproben aus Rohren 48,3x3,5 (Band 3) und bei a/t = 11 bzw. 12 von 60 bzw. 76 Zugproben aus den flachen Teilen der Kästen eingetragen. Das Verhältnis a/t für die flachen Teile der Kästen entspricht dabei einem dem Umfang der Kästen äquivalenten Rohr. Der Ver-

gleich der theoretischen Kurven mit den Versuchswerten zeigt, daß die theoretischen Werte schon bei Verhältnissen größer als 3 nicht mehr voll die Verfestigung nutzen lassen. Damit ist Gl. (4)

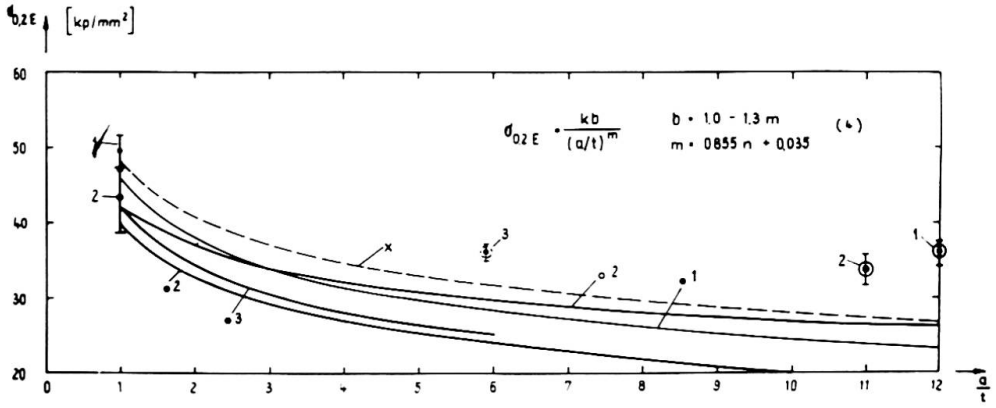


Abb. 11

für geschlossene - über 2 Stufen hergestellte - Profile nicht geeignet. Sie muß theoretisch und empirisch so ergänzt werden, daß sie sich mit $a/t \to \infty$ nicht $\sigma_{0,2\,E} \to 0$ sondern $\sigma_{0,2\,E} \to \sigma_{0,2}$ des Bandmaterials asymtotisch nähert. Dazu kann die Membranstreifentheorie bei physikalischer Nichtlinearität mit genutzt werden [3].

5. Möglichkeiten der Ausnutzung im Profilquerschnitt

Die Frage der höheren Auslastung von kaltgewalzten Profilen steht in engem Zusammenhang mit der Art und Weise der Ermittlung der mechanischen Gütewerte. In [2] wird vorgeschlagen, die Spannungs-Dehnungs-Linie und damit die Streckgrenze ($\sigma_{0,2}$ - Grenze) als Mittelwerte der auf die Flächen bezogenen theoretisch oder experimentell ermittelten Einzelfestigkeiten von Profilstreifen zu berechnen. Gute Übereinstimmung zwischen dem theoretisch ermittelten und dem im axialen Zug- und Biegeversuch an Gesamtquerschnittsproben festgestellten Spannungs-Dehnungs-Verhalten liegt vor, wenn die kaltverfestigten Querschnittsbereiche etwa symmetrisch zu den Schwerachsen in den Hauptbeanspruchungszonen angeordnet sind. Dabei liegen die Versuchsergebnisse bei Biegebeanspruchung etwas höher als bei Zugbeanspruchung. Im übrigen verlaufen die Versuchskurven mit Gesamtquerschnittsproben tiefer, weil zunächst Bereiche mit geringer Kaltverfestigung plastiziert werden und damit keine zentrische Belastung mehr

erfolgt (z. B. U-Profil).

Die o. a. Methode zur Ermittlung der Streckgrenze des Gesamtquerschnittes hat z. Z. noch mehrere Nachteile. Die experimentelle oder theoretische Ermittlung der Einzelfestigkeiten an Streifen des Querschnitts ist sehr aufwendig bzw. entsprechend der Angaben zu Abb. 11 noch nicht für alle Profilarten möglich. Die Prüfung von Gesamtquerschnittsproben erfordert bei Zugbelastung zentrische Einspannmöglichkeiten und bei Druckbelastung einwandfrei ebene Stirnflächen, da sonst wegen außermittiger Lasteintragung der Wert der Fließgrenze verfälscht wird [7]. Die notwendigen Feindehnungsmessungen bedeuten ebenfalls einen erheblichen Aufwand. Legt man die im axialen Zug- oder Druckversuch bestimmte gemittelte Fließgrenze der Bemessung zugrunde, kann bei Belastungen, die die größte Randspannung in Bereichen mit geringer Kaltverfestigung bewirken (z. B. Biegung, zweiachsige Biegung, Biegung mit Axialkraft) die erforderliche Sicherheit unterschritten werden. Richtig wäre deshalb die Festlegung der für die Bemessung maßgebenden Festigkeitswerte in Abhängigkeit von der Art der Beanspruchung eines bestimmten Profils zur Lage der kaltverfestigten Bereiche.

Bei einer allgemeingültigen Festlegung müßte im Bemessungsfall die Sicherheit gegen Fließen, gegen Bruch und der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Linie in der Nähe der Fließgrenze mit Werten entsprechend etwa den festgestellten niedrigsten Festigkeiten in den Schenkeln von U- und Winkelprofilen bzw. den Stegen von Kastenprofilen berücksichtigt werden. Damit gewinnt die Verformung über mehrere Stufen wie beim Hohlprofil oder entsprechend Bild 4 aus wirtschaftlichen Gesichtspunkten an Bedeutung, wenn man nicht wie bei Serienprodukten die Kaltverfestigung über beanspruchungsgerechte Traglastversuche nutzen kann.

Knickversuche zeigten, daß bei der Ermittlung der Traglast von der mittleren Fließgrenze des Profilquerschnittes ausgegangen werden kann. Die Tangentenmodulgleichung [2]

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{AL^2} \int_A E_t \cdot x^2 \, dA \qquad (5)$$

welche einen ideal geraden Stab und doppelte Querschnittssymmetrie voraussetzt, lieferten hohe Werte. In Abb. 12 sind neben

den Mittelwerten aus ca. 6 Versuchsstücken je Länge (ausgezogene Kurven) rechnerisch ermittelte Werte $\sigma_{0,2\,S}/\omega$ eingetragen (gestrichelte Kurven). Hierbei ist

$$\sigma_{0,2\,S} = A^{-1} \int_A \sigma_{0,2} \cdot dA \qquad (6)$$

die mittlere Fließgrenze, wobei für $\sigma_{0,2}$ die Ergebnisse von einzelnen aus dem Profilquerschnitt herausgeschnittenen 6 mm breiten Zugproben (Abb. 2) eingesetzt wurden. (Kurve 1: Kasten 88x45x3 mm aus St 38; Kurve 2: Kasten 63x63x3,5 mm aus St 35; Kurve 3: Rohr 48,3x3,5 mm aus St 35; Kurve 4: U 100x50x3 mm; Kurve 5: Z 125x40x3 mm; Kurve 6: L 63x63x4 mm, alle St 38).

Als ω-Wert (TGL 0-4114) wurde ein durch Interpolieren zwischen den Stahlmarken St 52 und St 38 gefundener ω-Wert genommen. Die Profilproben waren um die kleine Hauptträgheitsachse gelenkig gelagert und rechtwinklig hierzu voll eingespannt.

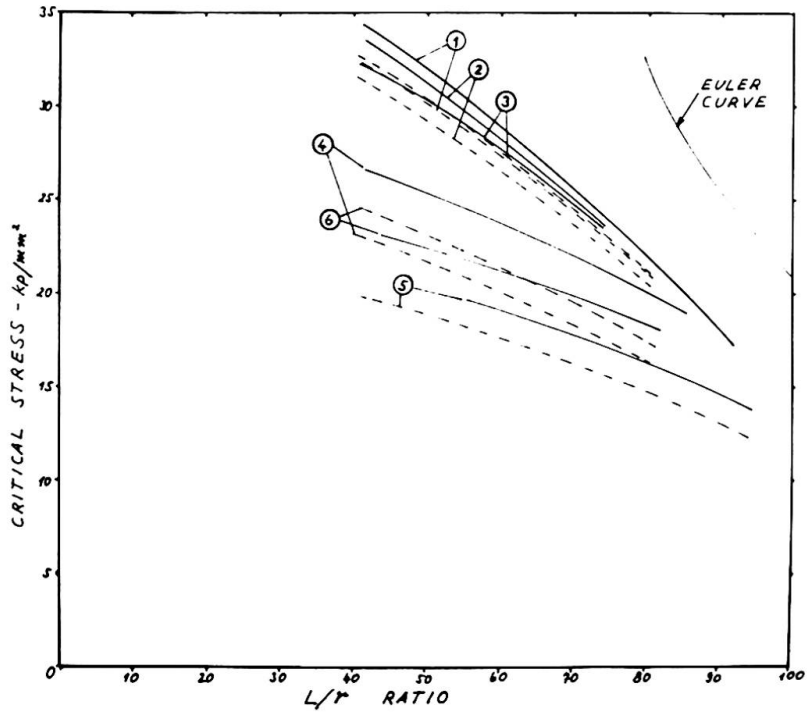


Abb. 12

In allen Fällen lag reine Biegeknicken vor, also kein Biegedrill- oder Drillknicken. Bei Hohlprofilen als Rohr oder als Kasten über die Vorstufe als Rohr gewalzt, liegt die kritische Spannung infolge der größeren Streckgrenzenerhöhung in den flachen Teilen (s. Abb. 12) in der Nähe des St 52, während bei offenen Profilen nur eine geringe Erhöhung gegenüber der des St 38 zu erkennen ist. Bei der Kurve 6 erfolgte eine Abminderung der mittleren Fließgrenze infolge Beuleinfluß. Liegen die verfestigten Zonen vorwiegend in der Nähe der neutralen Achse, liefert die Kurve $\sigma_{0,2\,S}/\omega$ zu hohe Werte.

Bei Anordnung der Tangentenmodulgleichung ist unbedingt ein vom Schlankheitsgrad L/r abhängiger Sicherheitsfaktor wie bei der Absicherung nach der Engesserkurve (TGL 0-4114) zu verwenden.

6. Schweißeinfluß

Für Schweißverbindungen an kaltgewalzten Profilen des Stahlleichtbaues sind besonders Kenntnisse über das Tragverhalten stumpfgeschweißter- und in Knoten eingeschweißter Stäbe bei statischer und dynamischer Belastung von Bedeutung. Dazu sind in der Arbeit [8] Versuche durchgeführt worden.

Als Stäbe wurden die aus längsnahtgeschweißten Rohren hergestellten Kastenprofile 40x40x3 und 60x30x2,5 ohne und mit einer einseitigen CO_2-Stumpfnaht geprüft.

Für statische Beanspruchung auf Zug sind aus Querschnittsanalysen nach Abb. 1 die Spannungsergebnisse an Streifen aus den Kastenprofilen mit den Maxima in den Ecken und den Minima in den Flachstreifen nach dem Vorschlag von Winter gemittelt worden [2]. Die Werte sind in der Tafel 1 unter Nr. 1.1 angegeben.

Bei dynamischer Beanspruchung auf Biegung wurden die Kastenprofile mit einer Spannweite von 1300 mm mittels Umwuchtschwingern bei einem Verhältnis Unter- zu Oberspannung von $\varkappa = -0{,}75$ geprüft. Aus jeweils 12 Proben wurden die Wöhlerlinien entwickelt, deren σ_D-Werte in der Tafel 1 unter Nr. 1.2 eingetragen sind. Der 6 %-Abfall beim Profil ohne Quernaht gegenüber dem Warmband ist zurückzuführen auf die größere Höhe des Profils, gegebenenfalls auch auf Kerbeinflüsse der Längsnaht, die in der Zone der höchsten Beanspruchung gelegt war.

Als Fachwerkknoten sind K-förmige Knoten aus verschiedenen Profilen und in unterschiedlicher Gestaltung geprüft worden. Der bisher beste Wert ist mit früheren Ergebnissen an Knoten gleichen Systems, mit Rohren auch als Untergurt, verglichen (Tafel 2). Ähnlich wie bei den Rohrkonstruktionen ist die Tragfähigkeit eines Fachwerkes aus Leichtprofilen sehr von der Gestaltung abhängig. Als Kriterium dient dabei die Festigkeit der Zugdiagonalen bzw. ihres Anschlusses. Der Grundwerkstoff der Zugdiagonalen hatte eine Streckgrenze von 38 kp/mm^2 [8].

Tafel 1

Nr.	Beanspruchung [kp/mm²]	Warmband St 35 hb	Kaltverfestigte Kastenprofile ohne Quernaht	mit Stumpfnaht
1.1	$\sigma_{S\ 0,2}$	25,5	42,1 (+ 65 %)	39,2 (+ 53 %)
	σ_B	37,5	45,9 (+ 22 %)	48,0 (+ 27 %)
1.2	$\sigma_{w-0,75}$	± 16,0	± 15,0 (- 6 %)	± 7,0 (- 56 %)

Für statische Beanspruchung sind die Ergebnisse in Tafel 2 unter Nr. 2.1 angegeben. Die Brüche gingen jeweils von der Schweißnaht der Zugdiagonalen aus, bis auf den Wert 42 kp/mm² in dem Versuch, bei dem die Zugdiagonale im Grundwerkstoff brach.

Bei dynamischer Beanspruchung ergab sich der in Tafel 2 unter Nr. 2.1 eingetragene Bestwert aus 3 unterschiedlichen Gestaltungen aus dem Wöhler-Versuch mit 5 Proben. Da der Bruch auch hier stets von der Anschlußnaht der Zugdiagonalen ausging, werden jetzt Schweißversuche mit einem Zusatzwerkstoff höherer Qualität vorbereitet, um zu überprüfen ob bei diesen Verbindungen die Kerbwirkung dominiert und die Kaltverfestigung der Stäbe wegen der schlechten Anschlußwerte keinen Nutzen bringt.

Tafel 2

Nr.	Beanspruchung [kp/mm²]	Rohrkonstruktion (mit Anpassung)	Leichtprofil-knoten
2.1	σ_B	34 - 42	33,5
2.2	$\sigma_{sch\ +\ 0,2}$	7 - 8	8,0

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Schweißverbindung die Festigkeitserhöhung bei kaltgewalzten Stäben unter statischer Beanspruchung nicht aufhebt, während die Erhöhung unter dynamischer Beanspruchung im Bereich der Wechselfestigkeit unwirksam wird. Offen bleibt der Einfluß des geringen Abfalles der $\sigma_{0,2}$-Grenze bei der Bemessung von Knickstäben und der Einfluß der Kaltverfestigung auf die Tragfähigkeit im Schwellbereich.

7. Literaturhinweise

[1] Karren, K. W.: „Corner Properties of Cold-Formed Shapes" Proc. A.S.C.E. Vol. 93, No St 1, 1967

[2] Karren, K. W. and Winter, G.: „Effects of Cold-Forming on Light-Gage Steel Members" Proc. A.S.C.E. Vo. 93, No St 1, 1967, S. 433

[3] Marx, S.: „Ein Beitrag zur Beurteilung des Kriechverhaltens einer biegsamen dünnen Rechteckplatte aus Metall" Diss. H.f.V. Dresden, 1967

[4] Goeben, H.-E. und Loos, W.: „Kaltverfestigung in Stahlleichtprofilen des VEB Walzwerk Finow, Wiss. Zeitsch. d. HfB Leipzig 1967/H. 3, S. 187

[5] Schröder, H.: „Einfluß der Kaltverfestigung auf die Knickstabilität kaltgeformter Stahlprofile" F.u.E.-Bericht des IfL Dresden 1967

[6] Marx, S. und Berger, P.: „Kaltverfestigte Stähle I" F.u.E.-Bericht des ISL Leipzig, 1968

[7] Handbuch für die Berechnung von Bauteilen aus kaltgewalztem dünnwandigem Stahlblech. Verlag Stahleisen mbH, Düsseldorf 1964

[8] Bader, W.: „Einfluß des Schweißens auf das Tragverhalten kaltverfestigter Profile" F.u.E.-Bericht des ZIS Halle, 1967

[9] Richter, G.: „Kaltverfestigung von Stahlleichtprofilen" F.u.E.-Bericht des ZIF Karl-Marx-Stadt 1967 im Auftrag des VEB Walzwerkes Finow.

ZUSAMMENFASSUNG

Im Beitrag werden in Ergänzung zu den Veröffentlichungen [1], [2] und [7] als Ergebnis der von den Verfassern durchgeführten Untersuchungen [4–6], [8–9] die theoretischen, technologischen und experimentellen Einflüsse auf die Berücksichtigung der Verfestigung von kaltgewalzten Profilen bei der Bemessung von Stahlleichtkonstruktionen beschrieben. Es werden dabei Vorschläge für die weitere Behandlung des Problemes Kaltverfestigung zur Aufbereitung einer allgemeingültigen Bemessungsvorschrift aufgezeigt. Durch spezielle Walztechnologien ist ein hoher Nutzungsgrad der Verfestigung möglich.

SUMMARY

In completion of the publications [1], [2] and [7] as the result of the conducted investigations [4–6], [8–9] the theoretical, technological and experimental influences on the consideration of the strengthening of cold-rolled sections at dimensioning of light-gauge steel constructions are described in the article. Thereby proposals are made for the further discussion of the problem „strain-hardening" for the statement of a universal proportioning specification. By means of special rolling technologies a high call fill of strengthening is possible.

RÉSUMÉ

Dans l'article qui représente le supplément des publications [1], [2] et [7], sont décrites, en tant que résultats des études [4–6] et [8–9] effectuées par les auteurs, les influences théoriques, technologiques et experimentelles sur la prise en condidération du durcissement des profilés laminés à froid lors du dimensionnement des constructions métalliques légères. En outre, des problèmes sont faites pour le traitement ultérieur du problème „durcissement à froid" pour l'élaboration d'une directive de dimensionnement de valeur universelle. Des technologies de laminage spéciales permettent un haut degré d'utilisation du durcissement.

Calculation of the Increase in Yield Strength due to the Effects of Cold Work of Forming

Calculation de l'augmentation de la limite d'élasticité due au travail à froid

Berechnung der durch die Kaltverformung erhöhten Streckgrenze

VLADISLAV HLAVÀČEK
CSc, Technical University Prague,
Czechoslovakia

1 Introduction

In cold-formed members strain hardening of material takes place in parts of the section that deform plastically in the course of the forming operation. Plastic deformation raises the yield strength and the ultimate strength as well. The increase in the mechanical properties of the material depends on a number of factors. Likewise, the distribution of higher mechanical properties throughout the section is affected by the method of forming used. Two essentially different kinds of strain hardening of cold-formed members may be discerned:

In the first, hardening occurs by plastic strain in the corners of the section during press brake forming. This strain hardening is restricted to a rather narrow area of the section corners. In roll-forming work, the region of strain hardening is, too, bound to parts of the section (to corners in particular) in which appreciable plastic strains were set up.

In the second kind, sheet steel of which the member is being formed, is subjected to plastic strain prior to the cold forming operation proper. The process usually employed to gain this end,

is cold wave forming which causes the sheet to strain plastically throughout its entire width. As a result the higher mechanical properties are distributed through the whole section, and this brings about substantial savings in material consumption. Not uncommon is the increase in yield strength corresponding to an increase in steel quality from St 37 to St 52.

In what follows we shall deal in detail with the conditions under which strain hardening of material occurs in the whole section of light-gauge cold-formed members.

2 Stress-strain dependence in the plastic range

We shall express the dependence between stress and strain in the plastic range by the following law

/1/ $$\sigma = F(\varepsilon)$$

where according to the Huber--Mises--Hencky theory, σ at multi-axial state of stress is the stress intensity given by the relation

/2/ $$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

when expressed in terms of principal stresses, or by

/3/ $$\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_{zx} - 3\tau_{xy}^2 - 3\tau_{yz}^2 - 3\tau_{zx}^2}$$

when expressed in terms of stress components in three mutually perpendicular planes.

Similarly, strain at multi-axial state of stress is defined by the intensity relation

/4/ $$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

in terms of principal strains, or by

/5/ $$\varepsilon = \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_z - \varepsilon_x \varepsilon_z - \varepsilon_{yz} + \frac{3}{4}\gamma_{xy}^2 + \frac{3}{4}\gamma_{yz}^2 + \frac{3}{4}\gamma_{zx}^2}$$

in terms of strain components in three mutually perpendicular planes.

In the plastic range, we shall describe the actual unit logarithmic strain as

/6/ $$\varepsilon = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = \lg \frac{1}{l_0} - \lg \frac{l_0 + l - l_0}{l_0} = \lg (1 + \varepsilon')$$

where ε' is the unit strain referred to the original dimension

/7/ $$\varepsilon' = \frac{\Delta l}{l_o} .$$

Eq. /1/ holds good under the following assumptions:

1 The material is isotropic during plastic straining
2 Compared to the plastic ones, elastic strains are slight
3 During deformation, the ratio of principal strains remains the same
4 The principal axes of strain remain constant
5 The stress-strain dependence is identical for tension and compression
6 The Bauschinger effect is absent

For steels in the plastic range in which strain hardening takes place, function F in law /1/ can be expressed as

/8/ $$\sigma = K \varepsilon^n$$

where K is the modulus of plasticity, and n the constant hardening exponent. This way of expressing function σ is possible for those materials, for which the dependence between the actual stress (i.e. referred to an instantaneous dimension) and the actual unit strain in the plastic range is linear in the logarithmic plot. The value of the modulus of plasticity K varies from 5 000 to 8 000 kp/cm^2, that of the strain hardening exponent n , from 0.13 to 0.28 depending on the kind of steel used; either can be expressed as a function of the original tensile yield strength of the virgin material, viz.:

/9/ $$K = 2{,}80\ \sigma_u - 1{,}55\ \sigma_y$$

/10/ $$n = 0{,}225\ \frac{\sigma_u}{\sigma_y} - 0{,}120$$

3 Fundamental relations

Prior to the cold-forming of the member, the sheet is cold-waved in the longitudinal direction in minute waves. For an element taken from a sheet thus waved, with axes marked according to the

notation of Fig.1, the condition of zero strain in the longitudinal direction

/11/ $$\varepsilon_y = 0$$

implies - under the observance of constant volume - that

/12/ $$\varepsilon_z = -\varepsilon_x$$

As there is no shear strain in the plane perpendicular to axis (i.e. in the plane of the sheet),

/13/ $$\gamma_{xy} = 0$$

We shall futhermore assume that there is no shear strain in the plane perpendicular to axis X , either, so that

/14/ $$\gamma_{yz} = 0$$

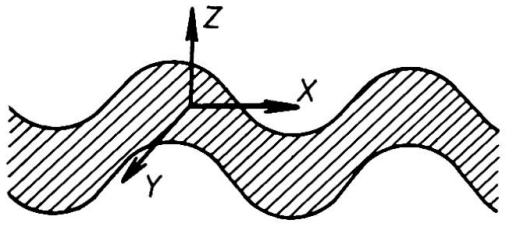


Fig.1

The decisive one is then the shear strain in the plane per - pendicular to axis y where

/15/ $$\gamma_{zx} \neq 0$$

On substituting relations /11/ to /15/, eq. /5/ of unit strain takes on the following form

/16/ $$\varepsilon = \frac{2}{3}\sqrt{3\varepsilon_x^2 + \frac{3}{4}\gamma_{zx}^2}$$

4 Parameters of cold waving

Consider a steel sheet cold waved in accordance with notation of Fig.2. D denotes the length of the wave, V the depth of the wave, R the radius of the circular arc of the wave. The rolls can also be set up so that the waves do not mesh completely; as a result the sheet is deformed in half waves with different lengths and different radii of curvature. Denote by a , b the length of the half-waves, by R , Z their radius of curvature, and by v_1, v_2 their depth. The half-length of the roll wave is denote by L , the thickness of the sheet by t . The characteristic parameter of the amount of waving is the wave depth, or the drop of the sheet. As a result of this drop, the sheet deforms like a built-in beam

with instantaneous span l . The drop is caused in part by bending, in part by shear strain depending on the bending and shear rigidities.

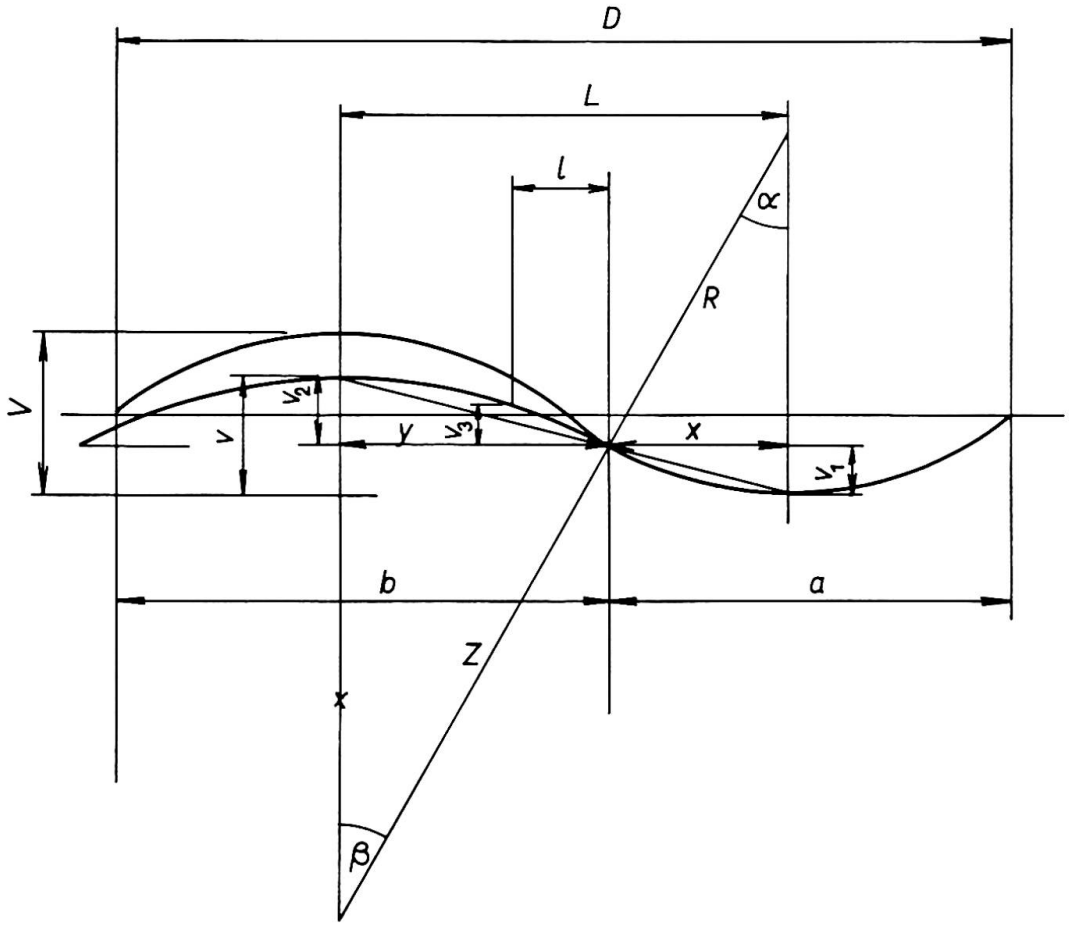


Fig.2

In the calculation that follows we shall substitute for the actual dimensions their relative values referred to the half-length of the wave, $L=\frac{D}{2}$, viz.:

/17/ $$\varrho=\frac{R}{L}\,,\ \tau=\frac{t}{L}\,,\ \upsilon=\frac{w}{L}\,,\ \lambda=\frac{l}{L}\,,\ x=\frac{X}{L}\,,\ y=\frac{Y}{L}\,,\ z=\frac{Z}{L}$$

5 Strains produced by cold waving

Since span l varies proportional to w, we shall introduce the concept of effective span λ_{ef} defined by the following relation

/18/ $$\lambda_{ef}=\frac{1}{\upsilon}\int\lambda\,d\upsilon=1-2\frac{\varrho}{\upsilon}\,\mathrm{lg}\left(1+\upsilon^2\right)\doteq 1-2\varrho\upsilon$$

The mean shear strain will now be γ_z

/19/ $$\gamma_z = \frac{\nu_s}{\lambda_{ef}} = \frac{\nu}{(1-2\rho\nu)\left[1+\frac{0{,}353}{\tau^2}\,(1-4\rho\nu+4\rho^2\nu^2)\right]}$$

At $x=\frac{l}{2}$, $y=\frac{t}{2}$ the unit strain due to bending has its maximum of

/20/ $$\varepsilon_o = \pm\,\frac{3\nu\tau\varkappa}{1+\varkappa}$$

where $\varkappa$ is the coefficient of rigidity in bending and shear

/21/ $$\varkappa = \frac{0{,}353}{\tau^2}\left[1-4\rho\nu+4\rho^2\nu^2\right]$$

Since the width of the sheet undergoes no change during the pass through the rolls, stretching in the transverse direction is also experienced in addition to the shear strain and the unit strain due to bending. The pertinent unit strain is constant across the whole sheet width and given by the difference between the wave lengths and the original width of the sheet; its magnitude is

/22/ $$\varepsilon_p = \frac{1}{2\cdot3}\left(\frac{2\nu}{1+\nu^2}\right)^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}\left(\frac{2\nu}{1+\nu^2}\right)^4 + \cdots$$

6 Calculation of the increase in yield strength

Given the parameters of waving ρ , ν , τ and knowing the mechanical properties of virgin material σ_u, σ_y, formulae /18/ to /21/ will serve us in the calculation of effective span λ_{ef}, coefficient of rigidity $\varkappa$, average shear strain γ_z , unit strain due to bending ε_o, unit strain due to transverse stretching ε_p, the maximum unit strain in the upper half of the section

/23/ $$\varepsilon_{xh} = \varepsilon_o + \varepsilon_p$$

the comparative strain

/24/ $$\varepsilon_h = \frac{2}{3}\sqrt{3\,\varepsilon_{xh}^2 + \frac{3}{4}\,\gamma_{zx}^2}$$

and on substituting in the equation

/25/ $$\sigma_h = K \varepsilon_h^n$$

the increased yield strength of the upper fibers σ_h .
Similarly for the lowe fibers

/26/ $$\sigma_d = K \varepsilon_d^n$$

For the unit strain varying in accordance with Fig.3a, the average increased yield strength of the whole section will be

/27/ $$\sigma = \frac{\sigma_h + \sigma_d}{2}$$

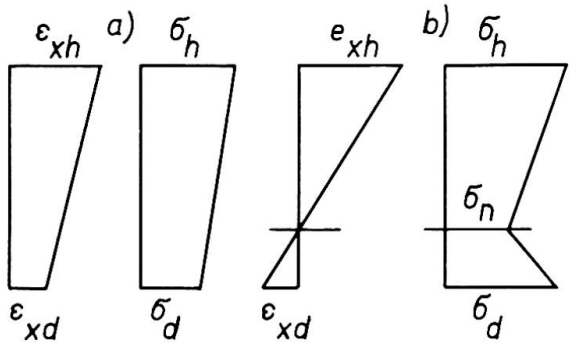


Fig. 3

So long as bending predominates in the unit strain, i.e. ε_{xd} and ε_{xh} are opposite signs /Fig.3b/ we shall also calculate the value of yield strenth in the neutral axis, σ_n . The yield strength of the whole section is the weighted mean obtained from the values of yield strength in the upper fibers, σ_h, σ_d, through the use of the formula

/28/ $$\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_n + \frac{\sigma_h \varepsilon_{xh} + \sigma_d \varepsilon_{xd}}{\varepsilon_{xh} + \varepsilon_{xd}}\right)$$

7 Comparison between calculations and results of tests

The tests were made by VÖST-Linz using material strain hardened by variously shaped waves of different depths. In all cases, the steel sheet was 1.5 mm thick; the variables were the length of the wave, D , and the radius of the arc, R ,and the examined depen - dence was that on the depth of depression w . The results of tensile tests, and the curves of yield strength, strength and elongation are in the diagrams. In these diagrams, solid dots denote the values of yield strength, strength and elongation determined by tests. Ase the measured values fail to lie on a continuous curve, the re - gion of variance indicating the probable course of the individual

quantities is marked out adjacent to the points. Circles on the yield strength curve denote the values calculated according to the theory discussed in this paper.

Fig. 4 gives the results for a wave with length $D = 6.3$ mm, radius $R = 1.6$ mm. The yield strength increases from 33.5 kp/mm^2, to 65.8 kp/mm^2, the elongation decreases from 28.5 % to 5.7 %. The calculated values of yield strength σ_y lie in the middle of the region determined by the tests. The percent increase in strength is less than that in yield strength.

Fig. 5 corresponds to a wave $D = 10$ mm, $R = 3{,}15$ mm. The yield strength increases from 40 kp/mm^2 to 66.4 kp/mm^2, the elongation drops from 30.7 % to 4.5 %. The agreement between the calculated and measured values is again good.

8 Conclusion

An examination was made of the increase in yield strength due to the effect of cold work of forming. The yield strength of the whole member is already raised by higher yield strength in the corners of the cold-formed section. In hot-rolled, press brake-formed members the increase thus achieved is about 10 %. In hot-rolled, cold roll-formed steel members, it can attain up to 20 %.

The highest increase in ultimate strength of the whole section about 70 % is obtained by increasing the yield strength through cold-waving of the steel sheet prior to the cold-forming operation proper. The paper derives a method which makes it possible to calculate the increased yield strength of a sheet thus cold-waved to a relatively high degree of accuracy. The theoretically obtained values of increased yield strength are in very good agreement with the results of tests.

Acknowledgment

The author expresses his appreciation to VÖST-Linz, Austria, and in particular to Messrs. V. Beck and A. Hulek for providing him with the necessary experimental results and continued cooperation.

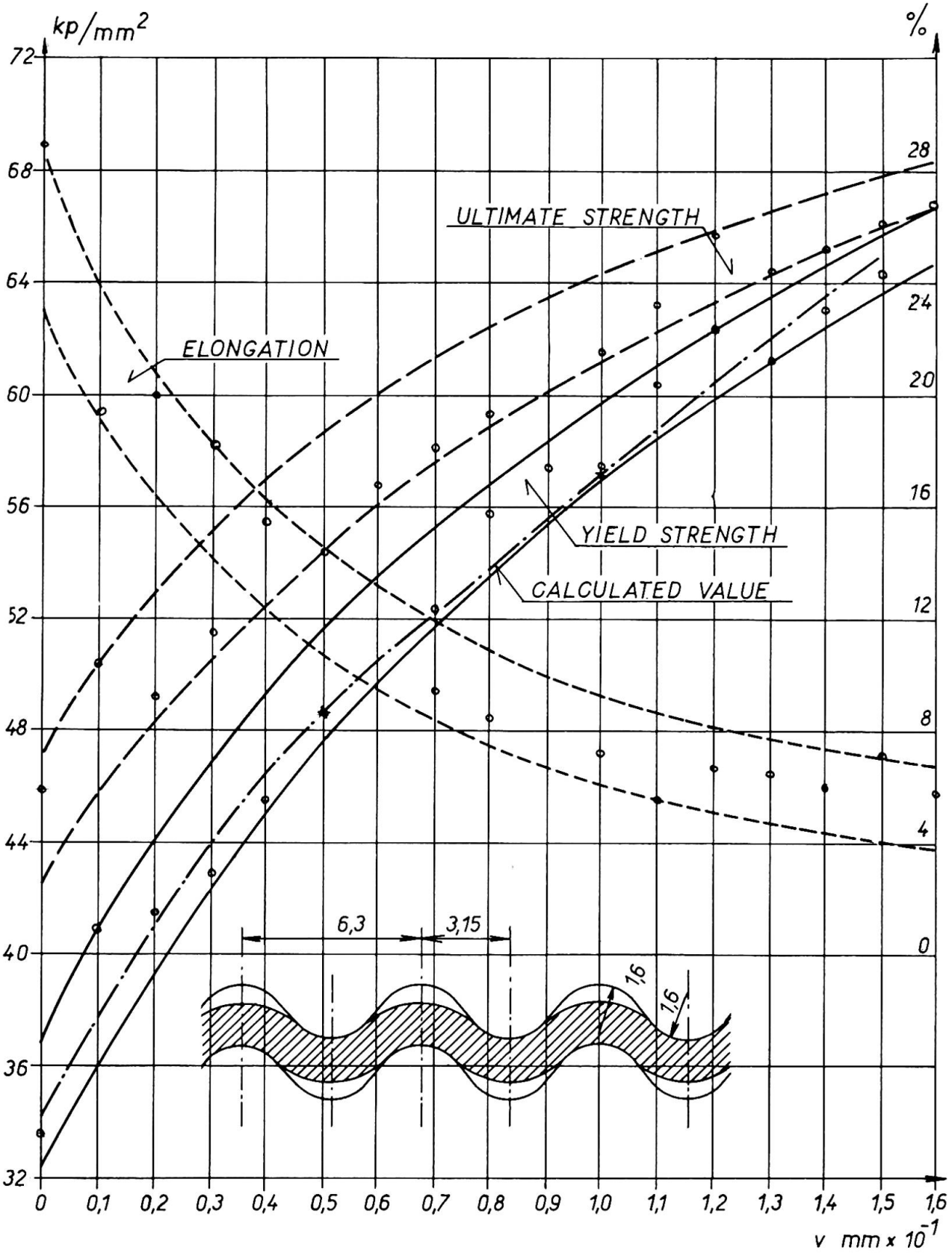

kp/mm²
%
72
68
64
60
56
52
48
44
40
36
32
28
24
20
16
12
8
4
0
ULTIMATE STRENGTH
ELONGATION
YIELD STRENGTH
CALCULATED VALUE
6,3
3,15
1,6
1,6
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
1,6
v mm x 10⁻¹

Fig. 4

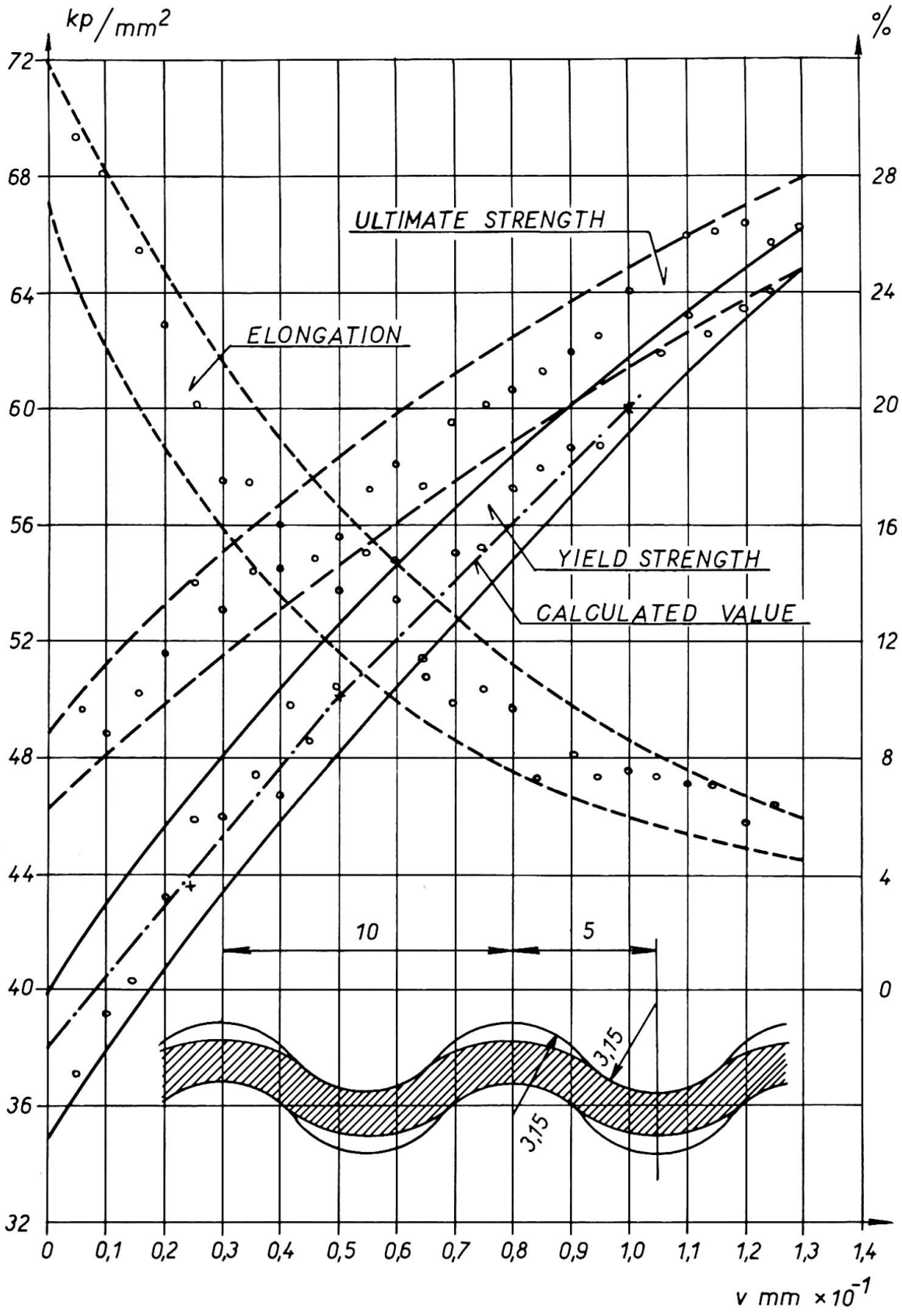

kp / mm²
%
72
68
64
60
56
52
48
44
40
36
32
28
24
20
16
12
8
4
0
ULTIMATE STRENGTH
ELONGATION
YIELD STRENGTH
CALCULATED VALUE
10
5
3,15
3,15
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,3
1,4
v mm ×10⁻¹

Fig. 5

References

/1/ Hlaváček, V.:Strain Hardening due to the Effect of Cold Work of Forming (unpublished research report, Building Research Institute, Prague,1967).

/2/ Karren, K.W.: Corner Properties of Cold-Formed Steel Shapes. Journal of the Structural Division, ASCE,Vol.93,No.ST 1, Proc.pap.5112,February.1967,pp.401-432.

/3/ Karren, K.W., Winter,G.: Effects of Cold-Forming on Light-Gage Steel Members. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.93, No.ST 1, Proc.pap.5113, February, 1967, pp.433-469.

/4/ Klöppel, K., Schardt, R.: Versuche mit kaltgereckten Stählen. Der Stahlbau, 30, Juli, 1961.

SUMMARY

The effect of strain hardening on the mechanical properties of cold-formed members depends on many factors of the method of forming used. Strain hardening can occur in the corners of the section, or - if the members are made in a special way - in the whole section. Brake-forming raises the yield strength by about 10 %. For cold-rolled members, the increase in yield strength is about 20 %. The highest increase in yield strength of the whole section - about 70 % - is achieved by raising the yield strength of the whole sec - tion through cold-waving of the sheet prior to the cold-forming operation proper.

The paper presents a method which makes it possible to cal - culate the increased yield strength of a sheet thus cold-wave formed to a relatively high degree of accuracy.

The relation between stress and strain in the plastic range is expressed by the parabolic law

$$\sigma = K \varepsilon^{n}$$

The modulus of plasticity K and the strain hardening exponent n vary with the type of steel used in dependence on the strength-yield strength ratio. Analytic relations for the strain and shear strain and for their composite effect are derived for sheets cold-formed in waves of different shapes. As the calculations imply, shear strains exercise the decisive effect on strain hardening and the increase in yield strength.

For sheets with differently shaped waves the theoretical values were compared with the results of tests made in the whole range of deformation, and found to agree well.

RÉSUMÉ

Le durcissement dû à une déformation à froid dépend de beaucoup de facteurs de la méthode de formation utilisée. La méthode la plus efficace (augmentation de 70 %) tend à durcir toute la section de la tôle en lui donnant une ondulation à froid avant l'opération propre de mise en forme définitive. Le présent travail permet de calculer la valeur exacte du durcissement pour ce dernier cas.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Wirkung der Härtung auf die mechanischen Eigenschaften kaltgereckter Stähle hängt von mehreren Faktoren der Verformungsweise ab. Die Härtung kann in den Ecken oder, sofern das Stück in spezieller Weise hergestellt worden ist, im ganzen Querschnitt erreicht werden. Die höchste Heraufsetzung der Streckgrenze im ganzen Querschnitt, ungefähr 70 %, ist dadurch erreicht worden, dass man vor der endgültigen Kaltverformung das Blech kalt verwellte. Die vorliegende Arbeit erlaubt die Berechnung der Härtungswerte für den letzten Fall.

Tragverhalten von geschweißten I- und Kastenträgern mit breiten Druckgurten

Behaviour of Welded Box Beams and I-Girder with Wide Compression Flanges

Comportement de poutres soudées en I ou en caissons, avec de larges ailes comprimées

H.-D. MÖLLER
Dr.-Ing.

R. DONAT
Dipl.-Ing.

Dresden, DDR

1. Allgemeines

Im Institut für Leichtbau und ökonomische Verwendung von Werkstoffen in Dresden werden seit mehreren Jahren theoretische Untersuchungen und Versuche über das Verhalten von dünnwandigen Druckelementen oberhalb der Beulgrenze durchgeführt. Im Jahre 1966 begannen, in Zusammenarbeit mit dem Institut für Industrieanlagenmontagen und Stahlbau Leipzig und dem Institut für Fördertechnik in Leipzig, Untersuchungen über das Tragverhalten von I- und Kastenträgern mit breiten Druckgurten. Diese Untersuchungen wurden während der Überarbeitung der DDR-Stahlbauvorschriften notwendig, weil die mittragende Breite allseitig gelagerter Gurte nach Winter schon Abminderungen ergibt, für die in den bisherigen Stahlbauvorschriften noch volles Mittragen des Gurtes angesetzt wird. Da sich jahrzehntelang bei der Anwendung der Vorschriften keine negativen Erscheinungen gezeigt hatten, sollte ermittelt werden, in welchem Maße größere mittragende Breiten benutzt werden dürfen, als das in den amerikanischen Vorschriften der Fall ist.

2. Bezeichnungen

A, B, C, K, z	Konstanten
$D = \frac{E \cdot s^3}{12(1-\nu^2)}$	Plattensteifigkeit
F	Spannungsfunktion
f_o	Vorbeulentiefe
k	Beulfaktor
w	Durchbiegung
$\alpha = a/b$	Seitenverhältnis der Platte

$\lambda = b/s$	Plattenschlankheit
ε_x	mittlere Randdehnung
σ_R	Spannungen am gelagerten Plattenrand
$\sigma_{Ki} = \frac{k \cdot \pi^2 \cdot E \cdot s^2}{12(1-\nu^2) \cdot b^2}$	Beulspannung
ν	Querdehnungszahl

3. Druckgurte von Kastenträgern

3.1. Theoretische Untersuchungen

Dünnwandige Teile von Biegeträgern oder Durckstäben, die in ihrer Ebene auf Druck beansprucht sind, können vor Erreichen der Bruchlast des gesamten Trägers oder Stabes örtlich ausbeulen.

Bei einem dünnwandigen Druckgurt eines Kastenträgers, der vor Erreichen der Traglast örtlich ausbeult, ist eine ungleichmäßige Spannungsverteilung über den Gurt vorhanden. Die Spannungen konzentrieren sich in den Ecken, während sich die Mitte des Druckgurtes einer weiteren Aufnahme von Spannungen durch ein starkes Ausbiegen entzieht. Die Behandlung dieses Problems ist nur mit der Theorie großer Verformungen möglich. Die Grundlagen für die Behandlung derartiger Aufgaben wurde von Karman geschaffen. Unter Berücksichtigung von Vorbeulen erhält man folgende grundlegende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta F &= E\left(w_{xy}^2 - w_{xx} \cdot w_{yy} + 2 \cdot \bar{w}_{xy} \cdot w_{xy} - \bar{w}_{xx} \cdot w_{yy} - \bar{w}_{yy} \cdot w_{xx}\right) \\ \Delta\Delta w &= \frac{s}{D}\left[F_{yy}(w_{xx} + \bar{w}_{xx}) - 2F_{xy}(w_{xy} + \bar{w}_{xy}) + F_{xx}(w_{yy} + \bar{w}_{yy})\right] \end{aligned} \qquad (1)$$

Ebene oder wenig vorgekrümmte druckbelastete Platten haben das Bestreben in quadratischen Halbwellen auszubeulen. Aus diesem Grund ist es möglich, mit relativ einfachen Lösungsansätzen für w (x, y) für die Praxis brauchbare Lösungen zu erhalten. Unter diesen Voraussetzungen wurden alle Untersuchungen mit dem Lösungsansatz durchgeführt.

$$w(x,y) = f \cdot \cos\frac{\pi \cdot x}{a} \cdot \cos\frac{\pi \cdot y}{b} \qquad (2)$$

Für die Betrachtungen ist dabei der ungünstigste Fall der zur Ausbeulform affinen Vorbeulen angenommen.

$$\bar{w}(x,y) = f_0 \cdot \cos\frac{\pi \cdot x}{a} \cdot \cos\frac{\pi \cdot y}{b} \qquad (3)$$

Damit lassen sich die Gleichungen (1) in folgender Form schreiben:

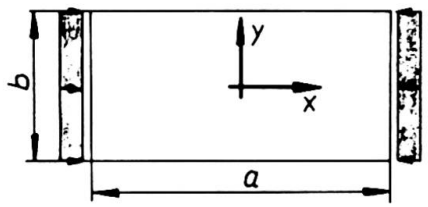


Bild 1

$$\begin{aligned} \Delta\Delta F &= E\left(1 + 2\,\frac{f_0}{f}\right)\left(w_{xy}^2 - w_{xx} \cdot w_{yy}\right) \\ \Delta\Delta w &= \frac{s}{D}\left(1 + \frac{f_0}{f}\right)\left(F_{yy} \cdot w_{xx} - 2F_{xy} \cdot w_{xy} + F_{xx} \cdot w_{yy}\right) \end{aligned} \qquad (4)$$

Für den Druckgurt eines Kastenträgers stellen folgende Randbedingungen die wirklichen Verhältnisse recht gut dar.

$$\begin{aligned} &\text{Für } x = \pm \frac{a}{2} && \text{gerade bleibende Ränder} \\ &\text{für } y = \pm \frac{b}{2} && \text{spannungsfreie Ränder } (\sigma_y = 0;\ \tau_{xy} = 0) \end{aligned} \qquad (5)$$

Für die Membranspannungen σ_x, σ_y und τ_{xy} erhält man unter Verwendung der ersten der Gleichungen (4) mit dem Lösungsansatz (3) und den Randbedingungen (5) folgende Ausdrücke [1]:

$$\sigma_x = -p_x + \frac{E\cdot\pi^2}{8\cdot b^2}(f^2+2ff_0)\left[\frac{b^2}{a^2}\cos\frac{2\pi y}{b} + \frac{1}{B}\left((z-1)\,ch\frac{2\pi y}{a} - \frac{2\pi y}{a}\,sh\frac{2\pi y}{a}\right)\cos\frac{2\pi x}{a}\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E\cdot\pi^2}{8\cdot b^2}(f^2+2ff_0)\left[1 - \frac{1}{B}\left((z+1)\,ch\frac{2\pi y}{a} - \frac{2\pi y}{a}\cdot sh\frac{2\pi y}{a}\right]\cos\frac{2\pi x}{a}\right. \qquad (6)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E\cdot\pi^2}{8\cdot b^2}(f^2+2ff_0)\cdot\frac{1}{B}\left(z\cdot sh\frac{2\pi y}{a} - \frac{2\pi y}{a}\,ch\frac{2\pi y}{a}\right)\sin\frac{2\pi x}{a}$$

mit
$$B = ch\frac{\pi\cdot b}{a} + \frac{\pi b}{a}\cdot\frac{1}{sh\frac{\pi\cdot b}{a}} \qquad (7)$$

$$z = \frac{\pi\cdot b}{a}\,cth\frac{\pi\cdot b}{a} \qquad (8)$$

Die Biegespannungen ergeben sich zu

$$\sigma_{bx} = \pm\frac{E\pi^2}{1-\nu^2}\cdot\frac{s}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right)f\cdot\cos\frac{\pi x}{a}\cdot\cos\frac{\pi y}{b}$$

$$\sigma_{by} = \pm\frac{E\pi^2}{1-\nu^2}\cdot\frac{s}{2}\left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)f\cdot\cos\frac{\pi x}{a}\cdot\cos\frac{\pi y}{b} \qquad (9)$$

$$\tau_{bxy} = \frac{E\pi^2}{1-\nu^2}\cdot\frac{s}{2}\,\frac{1}{a\cdot b}\,f\,\sin\frac{\pi x}{a}\cdot\sin\frac{\pi y}{b}$$

Der in den Gleichungen (6) und (9) erhaltene Freiwert f wird mit Hilfe der Formänderungsenergie nach dem Rietz-Verfahren ermittelt.

$$f' - \varepsilon_x'(f'+f_0') + (A+C)(f'^2 + 2f'f_0')(f'+f_0') = 0 \qquad (10)$$

mit
$$f' = \frac{f}{s} \qquad f_0' = \frac{f_0}{s} \qquad \varepsilon_x' = \frac{E\cdot\bar{\varepsilon}_x}{\sigma_{ki}} \qquad \bar{\varepsilon}_x = -\frac{p_x}{E} - \frac{\pi^2}{8a^2}\cdot(f^2+2ff_0)$$

$$A = \frac{3}{2}\,\frac{1-\nu^2}{(1+\alpha^2)^2} \qquad C = \frac{3}{4}\cdot\frac{1-\nu^2}{(1+\alpha^2)^2}\left(1 + \frac{1}{\alpha^4} - \frac{2\alpha^5}{B\cdot\pi}\,sh\frac{\pi}{\alpha}\right)$$

Aus (10) läßt sich f' ermitteln, wenn man ε_x' als unabhängigen Parameter auffaßt.

Für die mittragende Breite b_m erhält man folgenden Ausdruck:

$$\frac{b_m}{b} = 1 - \frac{A}{\varepsilon_x'}\left(f'^2 + 2f'f_0'\right) \tag{11}$$

Die errechneten Werte für b_m/b sind in Bild 2 für a/b = 1,0 über den Parameter f_0' dargestellt. In diesem Diagramm ist die Kurve für die mittragende Breite eingetragen, die sich entsprechend den Vorschriften der DDR für die zulässigen Vorbeultiefen $f_0 = b/250$ ergibt. Die so gefundene Kurve kann durch folgende Gleichung recht gut angenähert werden.

$$\frac{b_m}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{ki}}{\sigma_R}}\left(1 - 0{,}148\,\frac{\sigma_{ki}}{\sigma_R}\right) \tag{12}$$

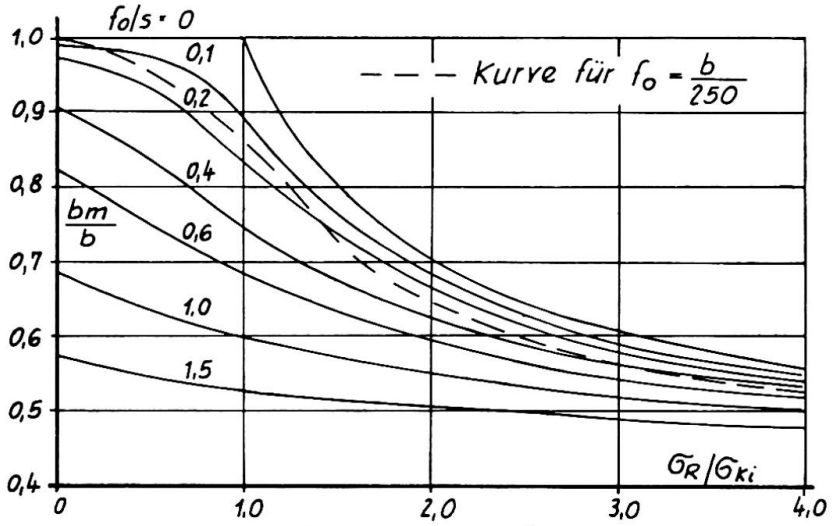


Bild 2 Mittragende Breite

In Bild 3 sind verschiedene Näherungsformeln für die mittragende Breite und die Kurve für $f_0 = b/250$ aufgetragen.

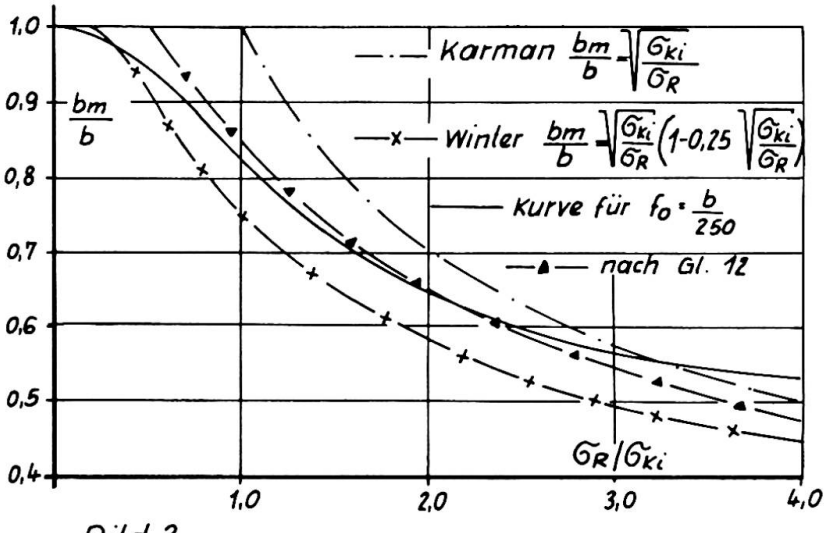


Bild 3

3.2. Vergleich zwischen Theorie und Versuch

Der Querschnitt der Versuchsträger und der Aufbau der Versuchseinrichtung gehen aus Bild 4 hervor. Die Abmessungen der Versuchsträger sind in der Tabelle 1 zusammengestellt.

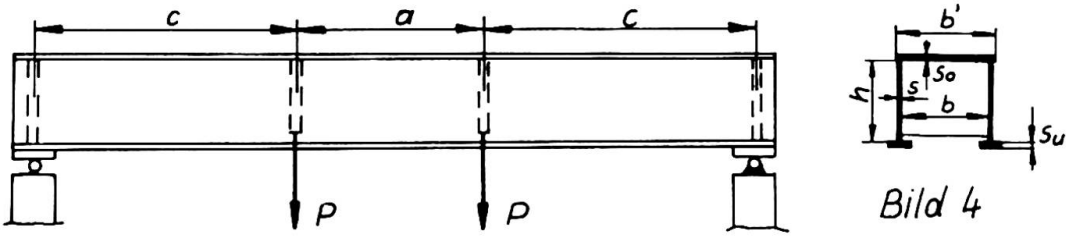


Bild 4

Träger	a mm	b mm	b' mm	u mm	h_{St} mm	c mm	s_o mm	s_u mm	s mm	F_{ges} cm^2	λ
I	320	160	184	45	160	540	4	8	4	27,35	40
II	400	200	224	55	200	700	4	8	4	33,76	50
III	520	260	284	70	260	640	4	8	4	43,35	65
IV	640	320	344	85	320	880	4	8	4	52,15	80
V	800	400	424	105	350	1100	4	8	4	61,75	100
VI	800	400	424	103	300	1100	8	16	4	90,9	50
VII	1040	520	544	133	350	1480	8	16	4	114,0	65

Tabelle 1

Zur Feststellung der Fließgrenze der Druckgurte wurden für jeden Träger, aus dem für den Druckgurt verwendeten Blech, 3 Proben vom Herstellerbetrieb mitgeliefert.

Als mittlere Fließgrenze ergaben sich für das 4 mm starke Blech aus St 38 $\sigma_{a2} = 3000$ kp/cm^2. Der Standard schreibt für diesen Werkstoff eine Mindestfließgrenze von $\sigma_{a2} = 2400$ kp/cm^2 vor.

Die Träger wurden an den Auflagern statisch bestimmt gelagert und die Kräfte mittels Hydraulikzylindern an den Querschotten eingeleitet. Um an der Innenseite des Obergurtes Dehnmeßstreifen anbringen zu können, wurde der Querschnitt des Kastenträgers in der nach Bild 4 angegebenen Weise idealisiert. Zur Ermittlung der Membranspannungen waren am Druckgurt über dessen Breite 5 bzw. 7 Dehnungsstreifen auf der Ober- und Unterseite angebracht. Weitere Dehnmeßstreifen erhielt der Zuggurt.

Die Belastung der Träger erfolgte in einzelnen Laststufen. Bei jeder Laststufe wurden die Dehnungen gemessen. Die Feststellung der Durchbiegung des gesamten Trägers erfolgte mittels Meßuhren. Zur Kontrolle nahmen wir außerdem noch die Messung der Randdehnungen im Druckgurt mit Setzdehnungsmessern vor. Die Messung der örtlichen Verformungen des Druckgurtes erfolgten mit einem Tastograph, der mittels einer Vorrichtung in verschiedenen Längsschnitten über den Druckgurt geführt werden konnte.

Vor Beginn der Versuche wurden die Vorbeulen gemessen. Sie sind in Tabelle 2 den nach der Vorschrift zulässigen gegenübergestellt.

Träger	I	II	III	IV	V	VI
$\lambda = b/s$	40	50	65	80	100	50
$f_{o/s\ vorh.}$	1)	1)	0,26	0,10	0,10	0,15
$f_{o/s\ zul.}$	0,16	0,20	0,26	0,32	0,40	0,20

Tabelle 2

1) Verformung nicht meßbar

Bei der Durchführung der Versuche konnte festgestellt werden, daß die Durchbiegung des gesamten Trägers von Beginn an bei allen Versuchsträgern über den rechnerischen Werten lag. Dies läßt sich daraus erklären, daß infolge der Schweißeigenspannungen bereits bei geringen Belastungen örtliche Plastizierungserscheinungen auftreten, die sich in einer stärkeren Verformung des Bauteiles bemerkbar machen.

Die örtlichen Verformungen des Druckgurtes stiegen bei allen Trägern unterhalb der theoretischen Beullast für gelenkig gelagerte Platten stärker an, obwohl die aufgetretenen Halbwellenlängen bis $\lambda = 65$ eine elastische Randeinspannung anzeigten. Diese frühen Beulerscheinungen des Druckgurtes sind durch die Schweißeigenspannungen und die vorhandenen Vorkrümmungen zu erklären.

Im Bild 5, 6, 7 sind für einen Träger mit dem Schlankheitsgrad $\lambda = 100$ die Verformung in der Mitte des Druckgurtes, die Membrandehnungen und die Biegedehnungen über die Breite des Druckgurtes aufgetragen.

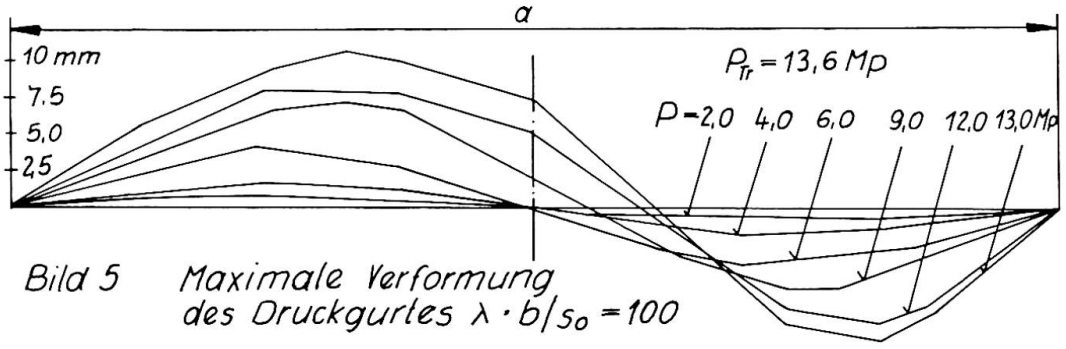


Bild 5 Maximale Verformung des Druckgurtes $\lambda \cdot b/s_o = 100$

Die im Versuch gefundenen Traglasten sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

Träger		I	II	III	IV	V	VI	VII	
Versuchs-	1	5,89	7,7	10,9	13,9	14,9	24,20	31,1	Mpm
träger	2	5,89	7,7	11,1	13,6	15,2	24,20	32,0	Mpm
	3	–	7,7	10,6	13,9	–	–	–	Mpm

Tabelle 3

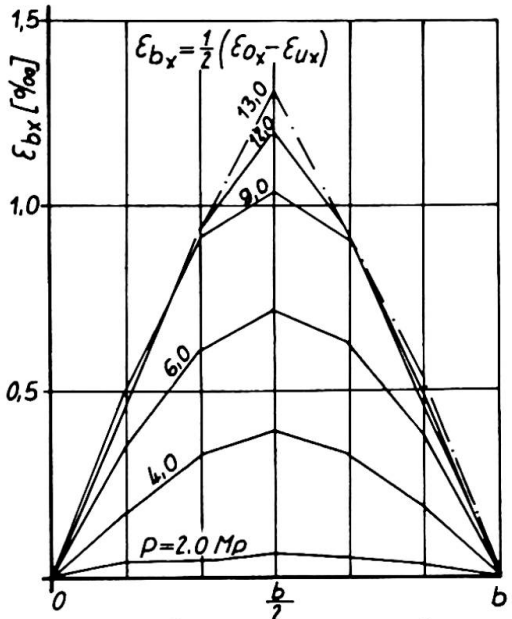


Bild 6 Biegedehnungen im Druckgurt

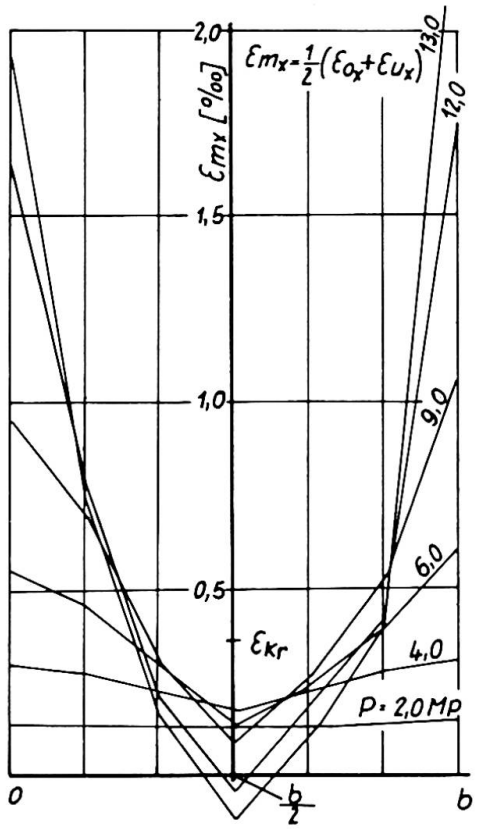


Bild 7 Membrandehnungen

Auffallend ist, daß die Tragmomente der Versuchsträger sehr wenig streuen. Alle Träger beulten unterhalb der Traglast aus, waren aber in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad des Druckgurtes noch in der Lage, weitere Belastung aufzunehmen. Die mögliche überkritische Belastung nimmt mit steigendem Schlankheitsgrad zu. Bei allen Trägern war ein ausgeprägtes Fließen festzustellen. Der Bruch kündigte sich vorher durch stetiges Fließen an. Das Versagen der Tragfähigkeit erfolgte durch starkes Fließen der Kanten, verbunden mit einem starken Ausbeulen des Druckgurtes. Mit den im Versuch ermittelten Tragmomenten wurden ideelle Vergleichsspannungen unter Verwendung des Widerstandsmomentes des vollen Querschnittes ermittelt: $\sigma_{i_{Tr}} = M_{Tr}/W_{voll}$. Zum Vergleich mit den im Versuch gefundenen ideellen Tragspannungen mußten auch ideelle Tragspannungen mit der mittragenden Breite nach Gleichung (12) und nach der Formel von Winter berechnet werden. Diese Kurven sind in Bild 8 aufgetragen. Dabei bedeuten die unteren Kurven mit der Bezeichnung min $\sigma_{i_{Tr}}$ die rechnerische Tragspannung bei der die Fließgrenze an der Außenfaser des Druckgurtes erreicht wird und die Kurven mit der Bezeichnung max $\sigma_{i_{Tr}}$ die rechnerische Tragspannung, bei der der Zuggurt vollplastiziert ist. Wie aus Bild 8 ersichtlich stimmt die Tendenz der rechnerischen Kurven mit der aus den Versuchen gefundenen nicht überein. Der stärkere Anstieg der Versuchskurve bei den kleinen Schlankheitsgraden resultiert aus einer Werkstoffverfestigung, die in der Rechnung nicht erfaßt werden kann.

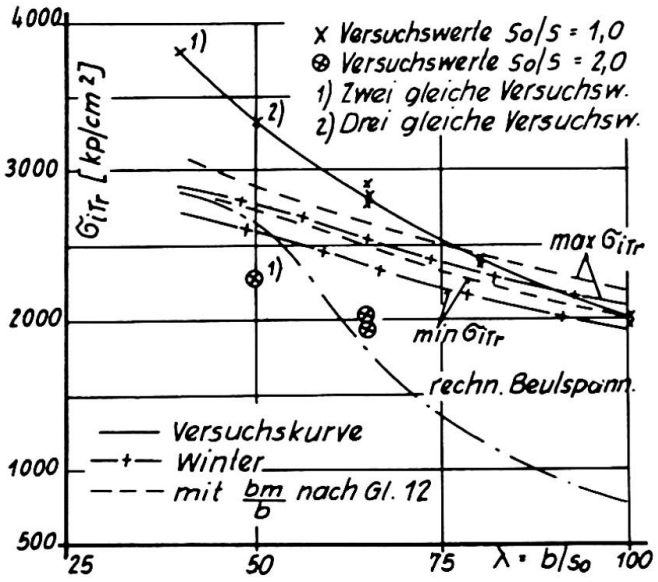


Bild 8 Tragspannungen σ_{itr}

Die im Bild 8 mit ⊗ eingetragenen Versuchspunkte waren dazu gedacht, die Versuchsreihe der Träger I bis V in der Hinsicht zu bestätigen, daß die Tragfähigkeit der Kastenträger nur abhängig ist von den Plattenschlankheiten $\lambda = b/s$ der Gurte, nicht aber von ihrer absoluten Dicke s bzw. vom Verhältnis s_0/s. Diese Annahme wurde nicht bestätigt. Eine endgültige Erklärung für die im Versuch erhaltenen Ergebnisse konnte noch nicht gefunden werden.

4. Druckgurte von I-Trägern

4.1. Theoretische Untersuchungen

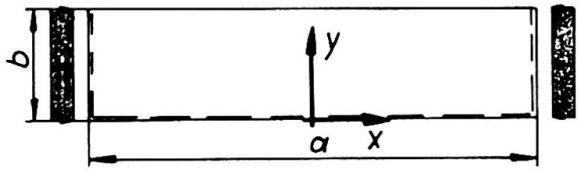


Bild 9

Der Druckgurt eines I-Trägers ist als dreiseitig gelagerte Platte aufgefaßt. Die Schwierigkeit des Problems besteht darin, daß der genaue Lösungsansatz zu sehr komplizierten Ausdrücken führt. Er konnte deshalb nicht verwendet werden.

Dafür wurde folgender Näherungsansatz benutzt:

$$w(x,y) = f \cdot \cos\frac{\pi x}{a}\left(\frac{y}{b} + \varsigma \cdot \sin\frac{K\pi y}{b}\right) \qquad (13)$$

Aus den beiden Randbedingungen am freien Rand erhält man die Bestimmungsgleichungen für die Konstanten ς und K.

$$\varsigma = -\frac{1}{\sin\pi K} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K^2}{\nu}\cdot\alpha^2} \qquad \alpha^2 = \frac{\nu}{K^2} \cdot \frac{1 - \frac{\operatorname{tg}\pi K}{\pi K}}{\frac{\operatorname{tg}\pi K}{\pi K} - \frac{\nu}{2-\nu}} \qquad (14)$$

In Tabelle 4 sind die Werte für ς und K angegeben.

α	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0	3,0	5,0	10,0
K	1,430	1,407	1,361	1,305	1,282	1,240	1,220	1,203	1,193	1,187
ς	1,0236	0,7394	0,4339	0,2915	0,1991	0,1201	0,0753	0,0378	0,0147	0,0038

Tabelle 4

Daraus ist ersichtlich, daß ς auf die in der Praxis vorkommenden Fälle von $\alpha > 1$ nur sehr wenig Einfluß hat. In der weiteren theoretischen Betrachtung wurden deshalb nur Fälle $\alpha > 1$ behandelt, für die mit dem einfacheren Ansatz

$$w(x,y) = f \cdot \frac{y}{b} \cdot \cos\frac{\pi x}{a} \qquad (15)$$

gearbeitet werden kann. Für die Vorbeulen wurde wiederum eine zur Ausbeulform affine Form angesetzt.

Dieser Lösungsansatz wird in die Gleichung (1) eingesetzt, die Spannungsfunktion F ermittelt und aus dem Minimum der Formänderungsenergie des Systems der Freiwert f bestimmt. Damit erhält man folgenden Ausdruck für die mittragende Breite

$$\frac{b_m}{b} = \frac{1 + A \cdot B (f' + 2f_0')(f' + f_0')}{1 + A(1+B)(f' + 2f_0')(f' + f_0')} \qquad (16)$$

mit $A = \frac{1-\nu^2}{1 + 6(1-\nu)\frac{\alpha^2}{\pi^2}}$ $B = \frac{4}{5} + \frac{9}{8} \cdot \frac{\alpha^4}{\pi^4}\left(1 - \frac{2\alpha}{C\,2\pi} \operatorname{sh}\frac{2\pi}{\alpha}\right)$ $C = \operatorname{ch}\frac{2\pi}{\alpha} + \frac{2\pi}{\alpha} \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{2\pi}{\alpha}}$

Die nach Gleichung (16) errechnete mittragende Breite ist im Bild 10 aufgetragen. In diese Abbildung ist auch die Kurve für die mittragende Breite eingetragen, für die die Vorverformung $f_0 = b/100$ beträgt. Der aus den theoretischen Untersuchungen gefundene Ausdruck für die mittragende Breite ist sehr umständlich. Es wird deshalb wieder der gleiche Näherungsansatz verwendet wie bei den Kastenträgern.

$$\frac{b_m}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{ki}}{\sigma_R}}\left(1 - 0{,}148\,\frac{\sigma_{ki}}{\sigma_R}\right) \qquad (18)$$

In diese Gleichung wird für $\sigma_{ki} = 0{,}45 \cdot E/\lambda^2$ eingesetzt. Winter gibt für die mittragende Breite von Platten mit einem freien Rand folgende Gleichung an:

$$\frac{b_m}{b} = \frac{0{,}8}{\lambda}\sqrt{\frac{E}{\sigma_R}}\left(1 - \frac{0{,}202}{\lambda}\sqrt{\frac{E}{\sigma_R}}\right) \qquad (19)$$

In Bild 11 sind diese Kurven, der nach der theoretischen Berechnung unter Berücksichtigung der Vorverformung ermittelten, gegenübergestellt. Man sieht, daß sie besonders bei größeren Überschreitungen stark voneinander abweichen, wobei festgestellt werden muß, daß die Näherungskurven die wirklichen Verhältnisse besser wieder geben dürften, als die aus der theoretischen Berechnung gefundene.

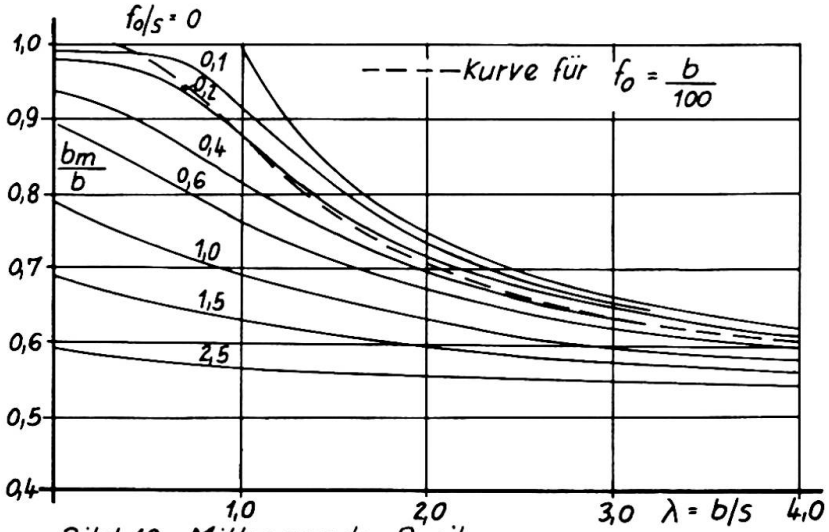


Bild 10 Mittragende Breite

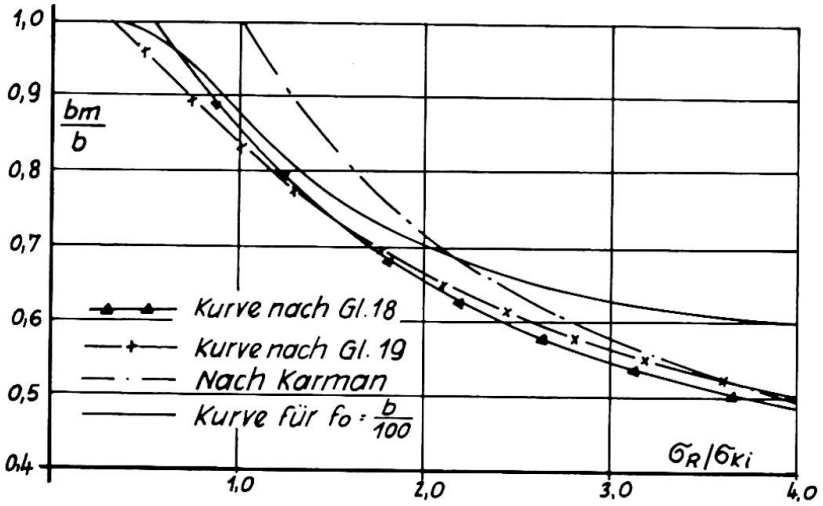


Bild 11 Mittragende Breite von I-Trägern

4.2. Vergleich zwischen Theorie und Versuch

Die Ansicht und der Querschnitt der Versuchsträger sind in einer Prinzipskizze in Bild 12 dargestellt. Die Abmessungen der Versuchsträger enthält Tabelle 5.

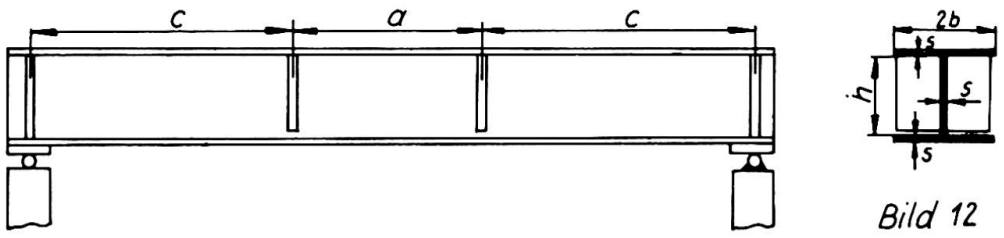


Bild 12

Träger	a mm	c mm	L mm	b mm	h mm	s mm	λ	α
I	180	560	1300	60	160	4	15	3
II	300	650	1600	60	160	4	15	5
III	240	680	1600	80	160	4	20	3
IV	400	700	1800	80	160	4	20	5
V	300	650	1600	100	200	4	25	3
VI	500	650	1800	100	200	4	25	5
VII	420	1140	2700	140	300	4	35	3
VIII	420	1140	2700	140	300	4	35	3
IX	360	720	1800	120	240	8	15	3
X	600	750	2100	120	240	8	15	5
XI	480	1210	2900	160	320	8	20	3
XII	600	2000	4600	200	400	8	25	3

Tabelle 5

Die Versuchsdurchführung und das Meßprogramm war ähnlich wie bei den Kastenträgern.

Die Messung der Durchbiegungen bei den I-Trägern ergab den gleichen Effekt wie bei den Kastenträgern. Alle gemessenen Durchbiegungen liegen höher als die gerechneten.

Die im Versuch gemessenen örtlichen Verformungen stimmen bei den Trägern mit 4 mm Gurten gut mit den theoretisch ermittelten überein. Stärkere Abweichungen traten allerdings bei den Trägern mit dickeren Gurten auf. Bei diesen lagen die im Versuch gemessenen Verformungen wesentlich unter den gerechneten Werten.

In der Tabelle 6 sind die gerechneten und die im Versuch aus der Verformung abgeleiteten Beulspannungen angegeben. Die Rechenwerte wurden dabei mit dem Faktor K = 0,45 bestimmt. Vor allem bei den größeren Schlankheitsgraden tritt der Fall auf, daß die Rechenwerte gegenüber den Versuchswerten zu tief liegen. Der Beulfaktor K könnte für diese Fälle größer gewählt werden.

λ = b/s	15	20	25	35	
σ_{Kr} rechn.	3170	2360	1510	770	kp/cm^2
σ_{Kr} Versuch	2865	2240	1695	1010	kp/cm^2

Tabelle 6

In der folgenden Tabelle 7 sind die im Versuch gefundenen Traglasten in kpm angegeben. Festzustellen ist, daß die Streuung der Versuchswerte bei den I-Trägern wesentlich größer ist als bei den Versuchen mit Kastenträgern.

α \ λ	15	20	25	35	15	20	25
3	2740	3600	5120	8300	17500	29000	30500
5	3175	3700	4300	7620[1]	16750		

Tabelle 7: Traglasten von I-Trägern

[1] α = 3,0

Zum Vergleich mit den aus theoretischen Überlegungen gefundenen Werten wird wieder der Wert $\sigma_{iTr} = M_{Tr}/W_{voll}$ gebildet. Die so aus den Versuchen bestimmten Werte und die mit der mittragenden Breite nach Gleichung (18) und (19) ermittelten Ergebnisse sind im Bild 13 aufgetragen.

Alle Träger beulten unterhalb der Traglast aus und waren nach dem Ausbeulen noch in der Lage, wesentliche Kräfte aufzunehmen. Allerdings ist bei den I-Trägern noch zu beachten, daß mit der Abnahme der mittragenden Breite die Kippgefahr der Träger ansteigt. Bei den Versuchen zeigte sich an den gemessenen Membrandehnungen, daß bis $\lambda = 20$ gewisse Biegeeffekte um die y-Achse des Trägers auftraten, ohne daß allerdings ein Versagen durch Kippen eintrat. Die Traglast der Träger wurde begrenzt durch ein starkes Beulen (Falten) des Druckgurtes bei wesentlich kleineren Dehnungen am Steg als bei den Kastenträgern. Die bisherigen Versuche erstreckten sich jedoch nur auf Träger, die ein Verhältnis $s_G/s_{St} = 1{,}0$ besaßen. Wie sich Verhältnisse $s_G/s_{St} > 1.0$ auf die Tragfähigkeit auswirken, soll in weiteren Versuchen festgestellt werden. Außerdem sind Untersuchungen mit I-Trägern aus höherfestem Stahl vorgesehen.

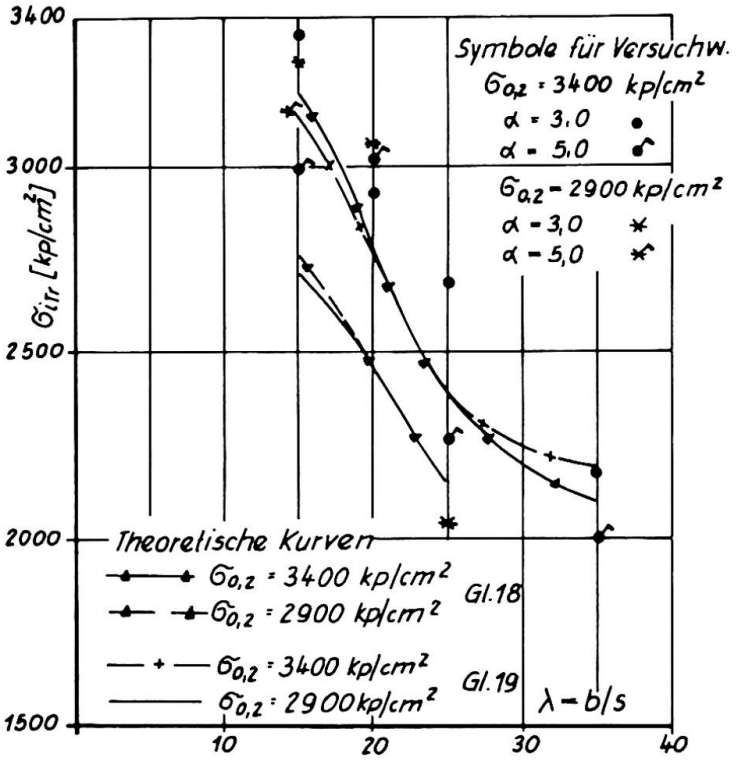


Bild 13 Tragspannungen σ_{iTr} von I-Trägern

Die durchgeführten Untersuchungen zeigten, daß allein theoretische Betrachtungen keine ausreichende Grundlage für die Schaffung neuer Vorschriften bilden, da viele Einflüsse wie die Vorverformungen, die Schweißeigenspannungen und unterschiedliche Steifigkeitsverhältnisse sich nur sehr schwer rechnerisch erfassen lassen. Es sind in jedem Fall zur Bestätigung des theoretisch ermittelten Tragverhaltens Versuche erforderlich.

5. Literaturverzeichnis

Möller	Einfluß von Vorbeulen auf die Spannungsverteilung in Trägergurten IfL-Bericht 63-31/64
Winter	Strength of Thin Stell Compression Flanges Trans. ASCE Vol. 112 (1947) S. 527
Winter	Performance of Thin Stell Compression Flanges AIPC 3. Kongress. Liege Perlim. Publ. 1948
Skalond	Verhalten von Stegblechen im überkritischen Bereich Acta Technica (CSSR) No. 3 (1961) S. 294
Donat	Mittragende Breite breiter Druckgurte IfL-Bericht 6-243/67

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Feststellung der Tragfähigkeit von I- und Kastenträgern mit breiten Druckgurten wurden theoretische Untersuchungen und Versuche durchgeführt. Die Versuche mit Kastenträgern erfolgten mit Gurtschlankheiten $\lambda = b/s$ von 40 bis 100 und für I-Träger mit Schlankheitsgraden von $\lambda = 15$ bis 35.
Die aus den theoretischen Berechnungen und den Versuchen erhaltenen Ergebnisse sind in Bildern und Tabellen dargestellt.

SUMMARY

Theoretical investigations and experiments were conducted to determine the carrying capacity of box beams and I-girder with wide compression flanges. The flange slendernes $\lambda = b/s$ form 40 to 100 was used for box beams and a slendernes ratio of $\lambda = 15$ to 35 for I-girders.
The results of the theoretical calculations and tests are shown in pictures and diagrams.

RÉSUMÉ

Pour déterminer la force portante de poutres en I et de poutres à double âme avec membrures comprimées larges, des études théoriques et des essais ont été effectués. Les essais avec les poutres à double ame ont été pratiqués avec des proportions de membrure de $\lambda = b/s$ de 40 à 100, ceux avec les poutres en I ont été opérés avec des proportions de mombrure de $\lambda = 15$ à 35.
Les résultats des calculs théoriques et des essais sont représentés sur les figures et tableaux.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Computation of the Postbuckling Strength of Thin-Walled Sections

Estimation de la tension après flambement dans des sections à parois minces

Berechnung der überkritischen Knickspannungen dünnwandiger Querschnitte

M. REISS
Associate Professor of
Civil Engineering
Technion, Haifa

A. H. CHILVER
Professor of
Civil Engineering
University College, London

INTRODUCTION

In some design methods for the assessment of local buckling strengths of thin-walled columns it is assumed that the maximum carrying-capacity of a column is the sum of the maximum loads of the separate component plates, with each plate having simple boundary conditions along its edges. The aim of this paper is to assess the accuracy of this design assumption for a range of structural shapes. It is shown first that the maximum carrying-capacity of a thin-walled column of any simple cross-section composed of component flat plates is a function of the initial elastic buckling stress, σ_{cr}, of the column and the compressive yield stress, σ_Y, of the material; this property, which is confirmed by a wide range of experimental studies of mild-steel and aluminium-alloy columns of many different cross-sectional forms, is used as a basis for estimating the accuracy of the simple design assumption of separate component plate strengths.

STRENGTH OF SINGLE PLATES

It is well known that the initial elastic buckling stress of a long rectangular plate, uniformly-compressed in the longitudinal direction, may be written

$$\sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2 , \qquad (1)$$

where

k is a constant depending on the boundary conditions on the longitudinal edges and on the length/breadth ratio,

E is Young's modulus,

ν is Poisson's ratio,

b is the breadth of the plate,

t is the uniform thickness.

When the longitudinal edges are simply-supported, a long compressed plate buckles approximately into square panels, and as the length of the plate increases the constant k approaches the value 4.

Elastic local buckling leads to a re-distribution of compressive stress over the loaded edges, if these edges are loaded through rigid platens. The maximum load-carrying capacity is reached when the yield stress is induced at the supported edges and in highly-strained regions at the centres of the buckles. It has been suggested (ref.1) that at the maximum load-carrying capacity of the plate the average compressive stress, σ_{max}, is a function of the initial elastic buckling stress, σ_{cr}, and the compressive yield stress, σ_Y, in the form

$$\sigma_{max}/\sigma_Y = F\left(\sigma_{cr}/\sigma_Y\right) , \qquad (2)$$

where $F(\sigma_{cr}/\sigma_Y)$ is a function of (σ_{cr}/σ_Y) to be determined by experiment for plates of a given material. Tests on single flat plates in compression confirm a dependence of (σ_{max}/σ_Y) on (σ_{cr}/σ_Y).

STRENGTH OF COMPRESSED SECTIONS

In ref.1 it was shown that this dependence is also true of some compressed thin-walled sections composed of thin plates. In the case of a thin-walled section σ_{max} is the maximum average compressive stress, σ_{cr} is the initial elastic local-buckling stress of the section as a whole, and σ_Y is the yield stress. A study of tests on channel and lipped-channel sections of different materials suggests that

$$\sigma_{max}/\sigma_Y = A\left(\sigma_{cr}/\sigma_Y\right)^{1/3} , \qquad (3)$$

where $A = 0.736$ for mild-steel sections and $A = 0.863$ for aluminium-alloy sections.

Studies of other types of sections and of single plates with different types of edge-support suggest that the range of validity of equation (3) can be extended. Winter (ref.2), for example, has outlined the results of compression tests on mild-steel flanges with one longitudinal edge supported and the other completely free; the range of test results described by Winter

is shown in Fig.1, and the relation

$$\sigma_{max}/\sigma_y = 0.736\,(\sigma_{cr}/\sigma_y)^{\frac{1}{3}}, \tag{4}$$

fits these tests results reasonably well. Winter (ref.3) has also described the results of many experiments on mild-steel plates, with two supported longitudinal edges, by the empirical relation

$$\sigma_{max}/\sigma_y = (\sigma_{cr}/\sigma_y)^{\frac{1}{2}}\left[1 - 0.25\,(\sigma_{cr}/\sigma_y)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{5}$$

which can be shown (see Fig.1) to give similar results to equation (4). Kenedi and others (ref.4) have compared equation (4) with the results of tests on some 200 mild-steel sections of different shapes; the limits of scatter of these tests are shown in Fig.2; equation (4) defines the average

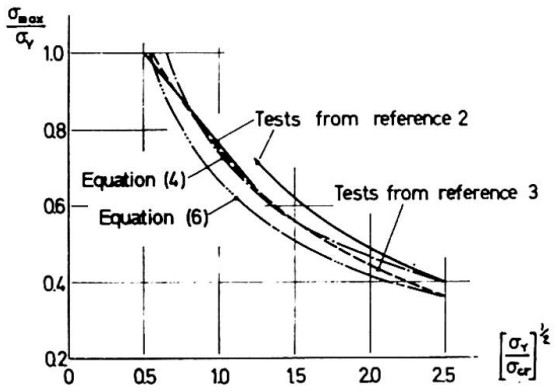


Fig.1 Average collapse stresses of mild-steel plates and thin-walled sections.

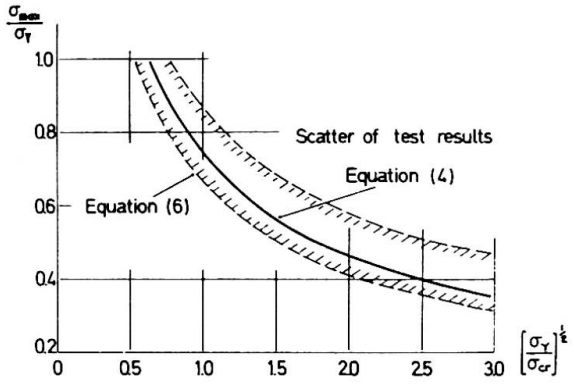


Fig.2 Collapse tests on mild-steel sections of different shapes (ref.4).

maximum stress with reasonable accuracy, while a conservative form of this relation, approximating the lower scatter boundary, (see Figs.1 and 2), can be written as

$$\sigma_{max}/\sigma_y = 0.66\,(\sigma_{cr}/\sigma_y)^{\frac{1}{3}}. \tag{6}$$

That equation (4) can be extended to mild-steel plates with different types of longitudinal edge supports suggests that this expression can be used for a wide range of thin-walled mild-steel sections.

Similar conclusions can be made about aluminium-alloy plates and sections; the appropriate form of equation (3) is

$$\sigma_{max}/\sigma_y = 0.863\,(\sigma_{cr}/\sigma_y)^{\frac{1}{3}}, \tag{7}$$

and we will discuss the relevance of this relation to both plates and structural sections. The results of tests on single plates by Schumann (ref.12), Gerard (ref.13) and Stüssi (ref.14) are shown in Fig.3. The boundary conditions of a simply-supported plate are reproduced in the local buckling of a square tube of uniform thickness; such tubes have been used to study the buckling strengths of single plates; the results of tests of this sort by Needham (ref.7), Heimerl (ref.10), Bijlaard (ref.11) and Schumann (ref.12) are shown in Fig.4. The conditions of one longitudinal

Fig.3 Results of tests on single compressed plates of aluminium-alloy materials.

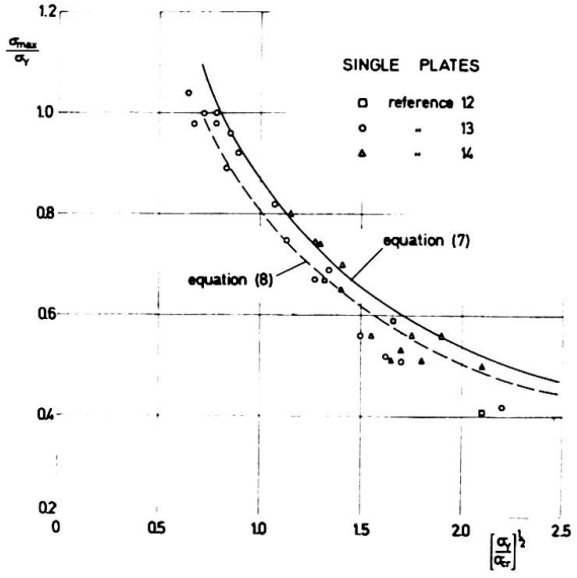
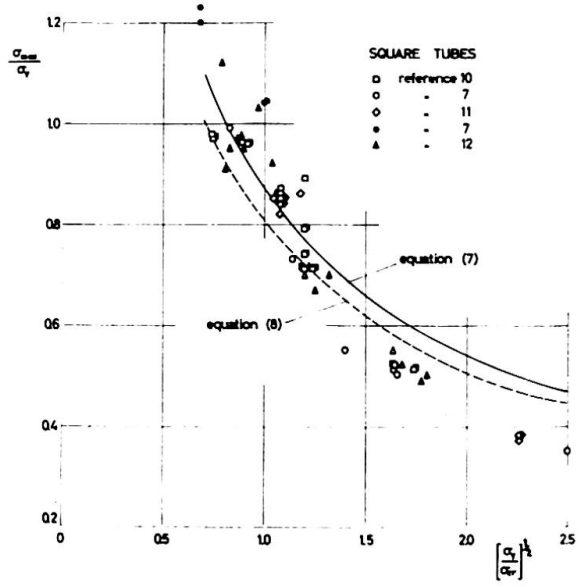


Fig.4 Results of tests on compressed square tubes of aluminium-alloy materials.



edge of a plate simply-supported and the other free are reproduced in equal angle-sections, cruciform sections and certain T-sections; the results of some tests by Needham(ref.7), Heimerl (ref.9) and Gerard (ref.13) on such sections are shown in Fig.5; component plates in these sections are said to be "unstiffened"elements.

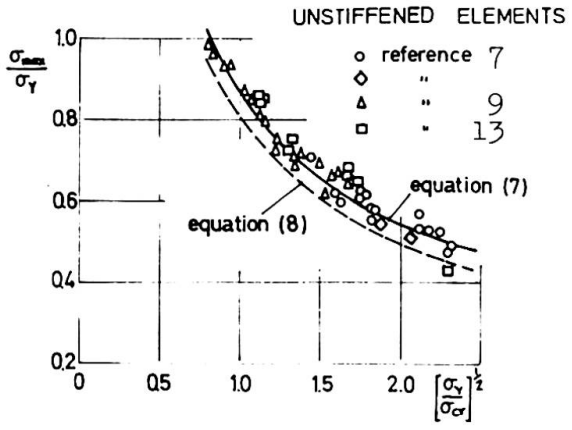


Fig.5 Results of tests on unstiffened plate elements of aluminium-alloy materials.

Fig.6 Results of tests on channel sections of aluminium-alloy.

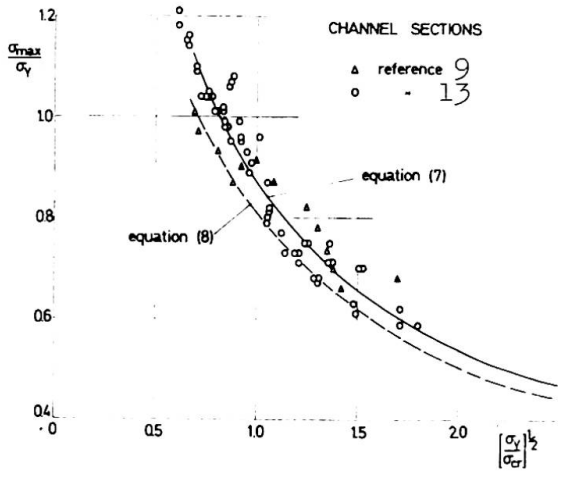
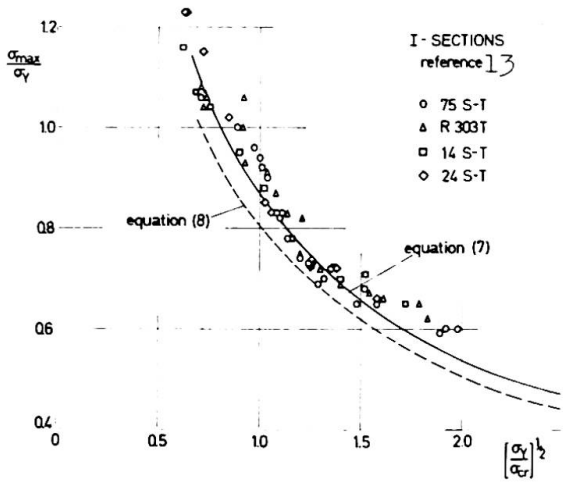


Fig.7 Results of tests on I-sections of aluminium-alloy materials.



The results of tests on channel sections by Heimerl (ref.9) and Gerard (ref.13) are shown in Fig.6, on I-sections by Gerard (ref.13) in Fig.7 and on a variety of open sections reported by Needham (ref.7) and Gerard (ref.13) are shown in Fig.8. Again, the test results in the case of sections are described reasonably accurately by equation (7).

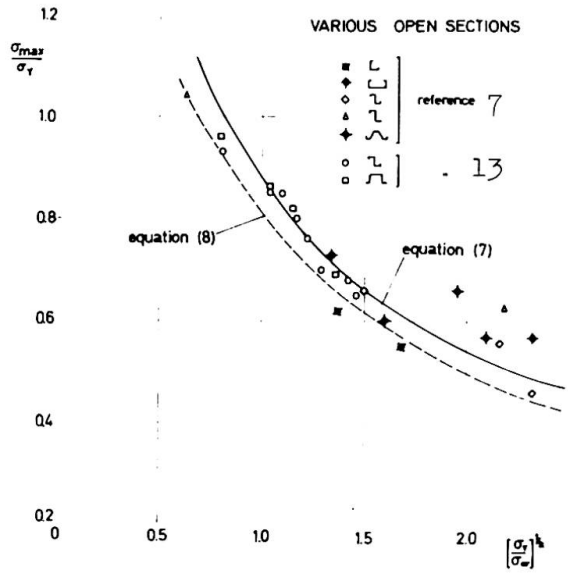


Fig.8 Results of tests on various open sections of aluminium-alloy materials.

A conservative estimate of strength, approximating to the lower boundaries of scatter of Figs.3 to 8, takes the form

$$\sigma_{max}/\sigma_y = 0.80\,(\sigma_{cr}/\sigma_y)^{\frac{1}{3}}. \qquad (8)$$

It seems that for a given material, and over a wide range of structural shapes, the maximum average compressive stress, σ_{max}, of a composite section is a function of the initial elastic local buckling stress, σ_{cr}, and of the yield stress, σ_y. Of the independent variables, σ_{cr} and σ_y, only σ_{cr} is dependent on the geometry of the section. For a section composed of a number of component flat plates,

$$\sigma_{cr} = \frac{k_o \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)_o^2, \qquad (9)$$

where k_o is a constant depending on the interaction of the

component plates and where $(b/t)_o$ is the thinness ratio of a representative component plate. On substituting this value of σ_{cr} into equation (3), we have

$$\sigma_{max} = B k_o^{1/3} (t/b)_o^{2/3}, \tag{10}$$

where

$$B = A \sigma_y^{2/3} \left[\pi^2 E / 12(1-\nu^2)\right]^{1/3}. \tag{11}$$

If B and k_o are known, equation (10) is a direct relationship between σ_{max} and $(b/t)_o$. Values of $k_o^{1/3}$ for a number of sections of uniform thickness, t, are shown in Fig.9

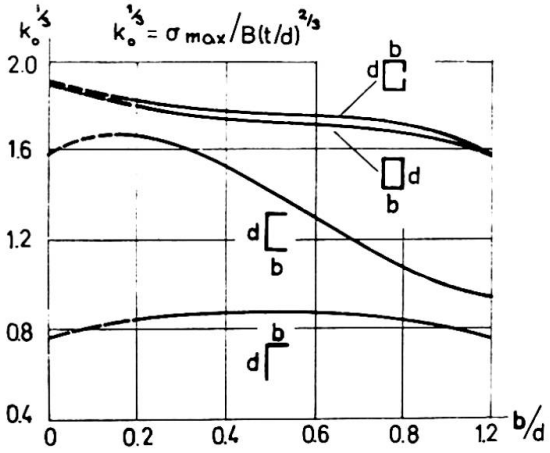


Fig.9 Values of the constant k_o for a number of shapes of cross-section of uniform thickness.

ACCURACY OF SIMPLE DESIGN METHODS

An approximate method of estimating the maximum average compressive stress of a thin-walled steel section is given in Addendum No.1 to British Standard 449 (ref.5). In this method it is assumed that the component plates of a compressed thin-walled section buckle independently of each other; the maximum stress is calculated by summing the maximum average stresses of the individual component plates, weighted according to their areas. A similar approximate method is used in the design manual of the American Iron and Steel Institute (ref.6) for sections composed of fully-supported component plates. We will now discuss the accuracy of these design methods in the light of the test results presented and surveyed in the previous section.

Consider a thin-walled section composed of a number of plates, each of breadth b_i and thickness t_i. A component plate of the section can be attached to other plates either on one longitudinal edge only or on both longitudinal edges. If the component plate is supported on both longitudinal edges, then the longitudinal edges are assumed simply-supported, and the buckling constant, k_i, for that plate is equal to 4. If one edge only is

supported, then k_i is equal to 0.425. With one or other of these values of k_i, the individual collapse loads of the plates are evaluated. The total compressive load at collapse is then

$$P_{max} = \sum_i B k_i^{\frac{1}{3}} \left(\frac{t}{b}\right)_i^{\frac{2}{3}} (bt)_i \quad . \tag{12}$$

The maximum average compressive stress is, therefore,

$$\sigma^*_{max} = \frac{\sum_i B k_i^{\frac{1}{3}} (t/b)_i^{\frac{2}{3}} (bt)_i}{\sum_i (bt)_i} \quad . \tag{13}$$

If t_i is constant throughout the cross-section, and if b_c is a reference breadth, then

$$\sigma^*_{max} = B\left(\frac{t}{b_c}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\sum_i k_i^{\frac{1}{3}} (b_i/b_c)^{\frac{1}{3}}}{\sum_i (b_i/b_c)} \quad . \tag{14}$$

Thus

$$\frac{\sigma^*_{max}}{\sigma_Y} = A\left(\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)\sigma_Y}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{t}{b_c}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\sum_i (b_i/b_c)^{1/3}}{\sum_i (b_i/b_c)} \quad . \tag{15}$$

The values of $(\sigma^*_{max}/\sigma_Y)$ are now compared with those given by equation (3) for the composite section, and we have

$$\frac{(\sigma^*_{max}/\sigma_Y)}{(\sigma_{max}/\sigma_Y)} = \frac{\sum_i k_i^{\frac{1}{3}} (b_i/b_c)^{\frac{1}{3}}}{k_c^{\frac{1}{3}} \sum_i (b_i/b_c)} \quad , \tag{16}$$

since from equation (9)

$$\sigma_{cr} = \frac{k_c \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b_c}\right)^2 .$$

Equation (16) is useful for the comparison of the approximate methods employed by the British and American design codes with the empirical relation based on full section tests. The ratio $(\sigma^*_{max}/\sigma_{max})$ serves as a measure of the accuracy of the approximate method; this ratio depends only indirectly on the value of σ_Y because of the limitation that the maximum average stress of each individual plate must not exceed the yield stress. The difference between σ^*_{max} and σ_{max} depends, therefore, only on the shape of the section and not on the plate thickness and the material.

Fig.10 Comparison of σ_{max} and σ^*_{max} for channel sections.

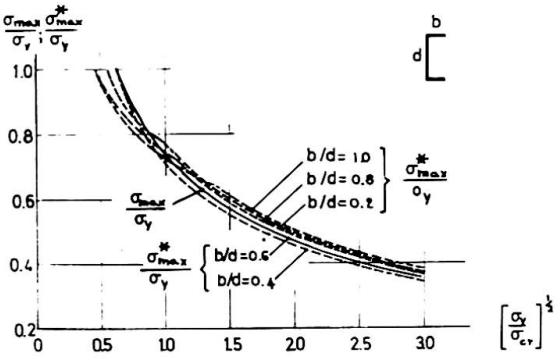
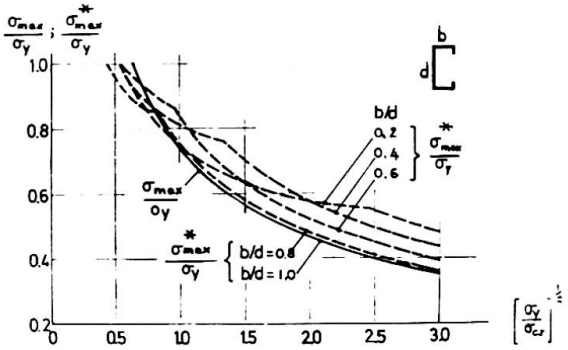


Fig.11 Comparison of σ_{max} and σ^*_{max} for lipped channel sections.



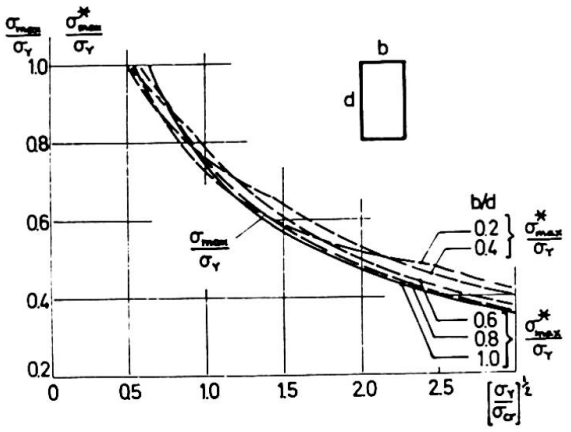


Fig.12 Comparison of σ_{max} and σ^*_{max} for rectangular tubes.

Figs.10, 11 and 12 show the comparison of stresses computed by the approximate method, equation (15), with the experimentally based empirical equation (4). It can be seen that the difference between the broken lines, representing the stresses according to the approximate method, and the full lines, corresponding to equation (4), are indeed constant, subject to the limitation of yielding of each plate. For channel and rectangular tube sections the simple design method gives reasonably accurate collapse strengths, as shown in Figs.10 and 12, but for lipped channel sections the approximate method tends to over-estimate the strength of the section considerably in some cases. If this approximate method is used, it should be appreciated, therefore, that the estimates of collapse strengths of some sections may err on the unsafe side by as much as 20%.

CONCLUSIONS

This study of the local buckling of columns shows that for some sections the assumption that the strength of a section is the sum of the separate strengths of the component plates, assuming these are simply-supported or free on the longitudinal edges, may be in error on the unsafe side by as much as 20% for some sections. The paper also shows regimes where this simple design assumption is more accurate.

REFERENCES

1. Chilver, A.H. The maximum strength of the thin-walled channel strut. Civil Engineering and Public Works Review, Volume 48, pp.1143-1146, 1953.

2. Winter, G. Commentary on the 1962 Edition of the light-gage cold-formed steel design manual. American Iron and Steel Institute, 1962.

3. Winter, G. Cold-formed light gauge steel construction. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Structural Division, ST9, pp.151-171, November, 1959.

4. Kenedi, R.M., Chilver, A.H., Griffin, E., and Smith, W.S.S. Cold-formed sections in Britain. Publications, IABSE, Volume 20, pp.137-150, 1960.

5. - British Standard 449:1959, Addendum No.1, The use of cold-formed steel sections in building, British Standards Institution, 1961.

6. - Light-gage cold-formed steel design manual. American Iron and Steel Institute, 1962.

7. Needham, R.A. The ultimate strength of aluminium alloy formed structural shapes in compression. Journal of the Aeronautical Sciences, Volume 21, No.4, pp.217-229, April 1954.

8. Winkler, G. Untersuchungen über Stabilität und Tragfähigkeit dünnwandiger offener Profile. Institut fur Luftfahrzeugbau, Technological University of Berlin, 59/5, August 1959.

9. Heimerl, G.J. Determination of plate compressive strength. U.S. National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note No.1480, 1947.

10. Heimerl, G.J., and Pride, R.A. Plastic buckling of simply-supported plates.
U.S. National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note No.1817, 1949.

11. Bijlaard, P.P., and Fisher, G.P. Column strength of H-sections and square tubes in the postbuckling range of component plates.
U.S. National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note No.2640, 1952.

12. Schumann, L., and Back, G. Strength of rectangular flat plates under edge compression.
U.N. National Advisory Committee for Aeronautics, Report No.356, 1931

13. Gerard, G. The crippling strength of compression elements.
Journal of the Aeronautical Sciences, Volume 25, No.1, pp.37-52, January 1958.

14. Stüssi, F., Kollbrunner, C.F., and Wanzenried, H. Ausbeulen rechteckiger Platten unter Druck, Biegung und Druck, mit Biegung.
Mitteilungen aus dem Inst. für Baustatik, ETH Zürich, No.26, Verlag Leemann, Zürich, 1953.

SUMMARY

The paper concerns the accuracy of some current methods of design of thin-walled columns which fail by local buckling when under uniform compression. It is suggested that simple design methods using linear addition of component plate strengths may be on the unsafe side by as much as 20% for some sections.

RÉSUMÉ

Cette étude du flambage local de piliers montre que la supposition courante, à savoir que l'effort dans une section est la somme des efforts dans les différentes parois dans le cas où celles-ci sont supportées simplement ou libres sur les bords longitudinaux, peut être erronnée dans le mauvais sens, et cela jusqu' à 20 % dans certaines sections. Cette rédaction montre aussi des cas où cette simple supposition de dimensionnement et plus rigoureuse.

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Studie des lokalen Knickens an Stützen zeigt, dass für einige Querschnitte die Annahme, die Spannung eines Querschnittes sei die Summe der Spannungen der Teilplatten, angenommen dass deren Längsränder frei oder dass sie einfach aufgelegt sind, einen Fehler für bestimmte Querschnitte zeigt, der mit 20 % auf der unsicheren Seite liegt. Dieser Beitrag zeigt zudem Fälle, wo die einfache Annahme genauer ist.

Questions raised by Dr. P.S. Bulson:

In their paper, Reiss and Chilver have indicated discrepancies when the simple design method is applied to lipped channels. Could I ask whether, in their calculations for lipped channels,

(a) the elastic critical stress, σ_{cr}, was calculated by exact theory, or measured experimentally, and

(b) the lip was treated as a component plate offering simple support to the flange; and, if so, whether K_i for the flange was taken as 4, and K_i for the lip as 0.425?

Would the authors also comment, please, on the assumption often made that lips of a given minimum size offer simple support to flanges in the post-buckling region? Tests suggest that after initial buckling the longitudinal junction between lip and plate does not remain straight.

Authors' replies:

(a) The elastic critical stress, σ_{cr}, was calculated by exact local buckling theory,

(b) the junction of lip and flange was treated as simply-supported and assumed to remain straight during buckling; the lip was assumed to be unaffected by buckling, either flexurally or torsionally.

Leere Seite
Blank page
Page vide

The Post-buckled Strength of Thin Walled Columns

La résistance de colonnes composées de plaques minces après flambement

Knicken dünnwandiger Stützen im überkritischen Bereich

T. R. GRAVES SMITH
M. A., Ph. D., Lecturer
Department of Civil Engineering
The University of Southampton
England

1. Introduction

In his paper on Thin Walled Structures, Professor Winter discusses the problem of the thin plate buckled in edge compression. He draws attention to the need of a theory that will enable a rigorous analysis of the advanced post-buckled state to be made, and hence an assessment of the ultimate load. It is the purpose of the present contribution to summarise just such a theory recently developed by the author[1] to determine the compressive strengths of thin walled rectangular columns, for which this single plate problem may be treated as a special case.

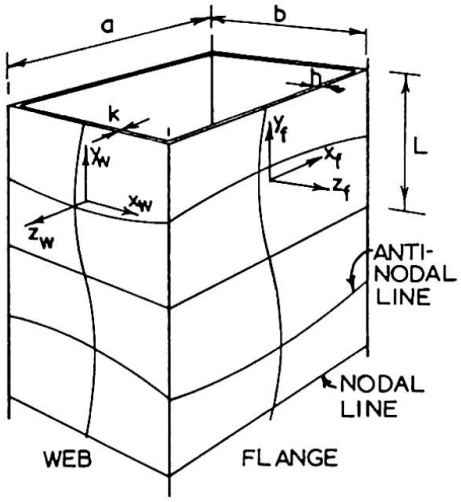


FIG 1. LOCALLY BUCKLED COLUMN

The object of the analysis is to examine the response of the column shown in figure 1 to applied compressive strain. Local buckling is considered to occur entirely elastically, after which the strain is measured by the decreasing distance between the nodal and antinodal lines of the local buckles which remain straight horizontally. The post-buckled elastic response is obtained by a variational principle using precalculated deflected forms that enable an accurate solution to be quickly obtained. Plasticity is then introduced into the calculations when a plastic criterion is satisfied by the stress system at points in the column walls. The material is considered to be elastic-perfectly-plastic and governed by von-Mises' Criterion and the Prandtl-Reuss equations. The onset of plasticity causes an apparent loss of sectional stiffness in regions of the plate elements and as this

effect spreads with the increasing deformations the total reactive force of the column is found to pass through a maximum and load shedding begins.

The complication of overall buckling interaction in the longer column is dealt with by finding the apparent bending stiffness of the section at stages in the post-buckled range, thus enabling the Euler buckling load to be computed. It is shown that overall failure of this type has no effect on the ultimate load of the square column provided the slenderness ratio is less than about half the 'critical slenderness ratio' (for which the Euler buckling stress is equal to the local buckling stress of the section).

2. Elastic Theory

The elastic post-buckled behaviour of the system of plates constituting the column is analysed by the Rayleigh-Ritz method[2]. Thus arbitrary expressions for the displacements u, v and ω in the x, y and z directions are chosen in terms of independent displacement parameters such that they satisfy all the kinematic boundary conditions. Values of the parameters corresponding to the approximate equilibrium solution are then obtained by minimising the expression for the elastic strain energy. In the present case, where the plate boundaries at the corners of the column suffer no appreciable direct stresses, the in-plane displacements u and v cannot be accurately represented by say simple truncated Fourier series, so that in order to limit the required number of parameters it becomes necessary to obtain more sophisticated expressions for u and v in advance. This is done in the following way. Von Kármán's large deflection equations[3]

$$\nabla^4\omega = \frac{t}{D}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - 2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right\} \qquad (1)$$

$$\nabla^4 F = E\left\{\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right\} \qquad (2)$$

are solved simultaneously for each element of the column section by a relaxation technique. The boundary conditions are,

1. along the corners of the column,

$$\omega_f = \omega_w = 0; \quad \frac{\partial\omega_f}{\partial x} = \frac{\partial\omega_w}{\partial x}; \quad h^3\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}_f\right) = k^3\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}_w\right) \qquad (3,4,5,6)$$

$$\frac{\partial^2 F_f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F_w}{\partial y^2} = 0; \quad v_f = v_w; \quad h\left(\frac{\partial^2 F_f}{\partial x\partial y}\right) = k\left(\frac{\partial^2 F_w}{\partial x\partial y}\right) \qquad (7,8,9,10)$$

representing zero out of plane displacements and direct stresses, continuity of slopes and vertical displacements, and equilibrium of bending moments and shear forces, the subscripts f and w referring to flange and web respectively,

2. along the nodal lines of local buckles,

$$v = -\frac{SL}{2}; \quad \omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = 0 \qquad (11,12,13,14)$$

where v in (11) is the vertical displacement relative to the antinodal lines corresponding to the applied strain S and equations (12,13,14) represent the symmetry requirements of zero out of plane displacements, bending moments and shear forces.

An assumed solution for (2) corresponding to a state of uniform compression

$$F = -\frac{\sigma_{cr} \cdot x^2}{2} \tag{15}$$

is substituted into (1) and the solution ω of this equation is substituted back into (2) enabling an improved value for the stress function F to be obtained. The in-plane displacements u and v are related to ω and F by simple differential equations[4] and these are then integrated to give the following expressions[1]:

$$\begin{aligned} u = & -\frac{2\gamma(1+\nu)}{E}\left\{H_1\sinh(2\gamma x)+H_2\left[x.\cosh(2\gamma x)-\frac{(1-\nu)\sinh(2\gamma x)}{2\gamma(1+\nu)}\right]\right\}\cos(2\gamma y) \\ & -\frac{1}{E}\left\{4\gamma^2\int\psi(x)dx + \nu\frac{d(\psi(x))}{dx} + \int\frac{E}{4}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx\right\}\cos(2\gamma y) \\ & -\frac{\nu}{E}\left\{2C_1 x + \frac{d(\chi(x))}{dx} + \frac{1}{\nu}\int\frac{E}{4}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx\right\} + f(y) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} v = & \frac{2\gamma(1+\nu)}{E}\left\{H_1\cosh(2\gamma x)+H_2\left[x.\sinh(2\gamma x)+\frac{\cosh(2\gamma x)}{\gamma(1+\nu)}\right]\right\}\sin(2\gamma y) \\ & +\frac{1}{2E\gamma}\left\{\nu 4\gamma^2\psi(x) + \frac{d^2(\psi(x))}{dx^2} + \frac{E}{4}\gamma^2 w^2\right\}\sin(2\gamma y) \\ & +\frac{1}{E}\left\{2C_1 + \frac{d^2(\chi(x))}{dx^2} + \frac{E}{4}\gamma^2 w^2\right\} y + g(x) \end{aligned} \tag{17}$$

$$\omega = w(x)\cos(\gamma y) \tag{18}$$

$$\text{where} \quad \psi(x) = \frac{\delta^2 E\gamma^2}{2}\left\{\frac{A^2\alpha^2}{16\gamma^4} - \frac{B^2\beta^2}{16\gamma^4} + R_e\frac{AB\cosh((\alpha+j\beta)x)}{(\alpha-j\beta)^2}\right\} \tag{19}$$

$$w(x) = \delta(A\cosh(\alpha x) + B\cos(\beta x)) \tag{20}$$

$$\begin{matrix}\alpha^2 \\ \beta^2\end{matrix} = \left[\begin{matrix}+ \\ -\end{matrix}\gamma^2 + \left(\frac{\sigma_{cr}\, t}{D}\gamma^2\right)^{1/2}\right] \tag{21,22}$$

The constants and functions of integration H_1, H_2, C_1, f(y) and g(x) together with the function $\chi(x)$ are eliminated[1] from the equations by satisfying the boundary conditions[1].

The post-buckled problem is solved using combinations of terms in the equations (16, 17, 18) in association with the displacement parameters in such a way as to retain the necessary kinematic boundary conditions (3, 4, 5, 9). Applied in this manner the Rayleigh-Ritz technique yields curves of average axial stress versus strain composed of two straight lines intersecting at the critical local buckling stress of the column in question. The divergence from the known exact solution for the square column[5], where the elastic post-buckled stiffness gradually decreases with strain, is of the order of two percent in the range of stresses considered here. For rectangular columns the ratio of post to prebuckled compressive stiffnesses is found to vary with the ratio b/a as shown in figure 2,

passing through a maximum at about b/a = .6. In the following discussion of the plastic theory it will appear that this variation in the elastic post buckled stiffnesses is reflected in a corresponding variation in the ultimate strengths.

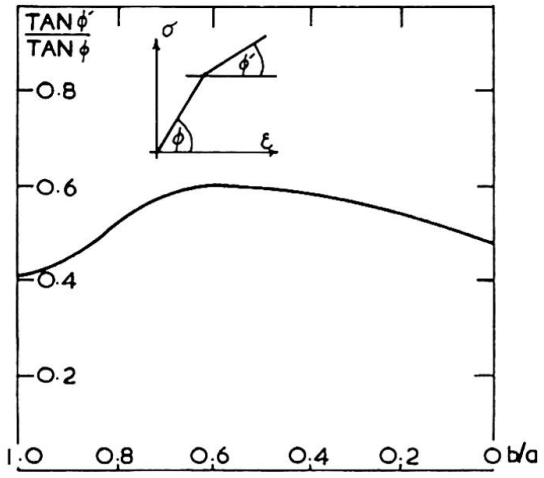


FIG 2 STIFFNESS RATIOS.

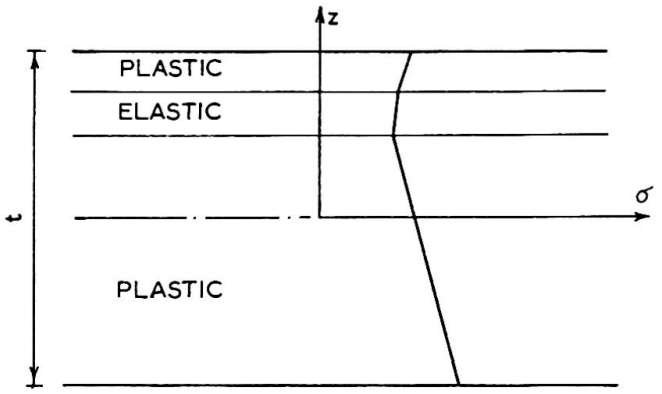


FIG 3 ASSUMED STRESS DISTRIBUTION IN THE ELASTO-PLASTIC SECTION.

3. Plastic Theory

The buckled plate element constitutes a problem in plane stress for which von Mises' Criterion takes the form

$$(\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2 - \sigma_x.\sigma_y + 3(\tau_{xy})^2 = (\sigma_Y)^2. \qquad (23)$$

Assuming that plane sections remain plane this can be expressed in terms of the elastic strains as follows[6]:

$$a_1\left(\frac{z}{t}\right)^2 + a_2\left(\frac{z}{t}\right) + a_3 = (\sigma_Y)^2\frac{(1-\nu^2)^2}{E^2} \qquad (24)$$

where $a_1(\varepsilon_b^2)$, $a_2(\varepsilon_b, \varepsilon_m)$ and $a_3(\varepsilon_m^2)$ are second order functions of membrane strains (ε_m) and bending strains (ε_b) at a point. Thus the values of (z/t) bounding the elastic and plastic regions in the cross-section are the solutions of the quadratic (24) and it can be demonstrated that for the general elasto-plastic section shown in figure 3 a region of elasticity is always sandwiched between two plastic regions[6]. In a plastic material it is possible to relate only <u>increments</u> of stress to <u>increments</u> of strain in terms of the current stress state represented by the stress deviators 's'. Prager and Hodge[7] have derived the incremental stress strain relations for the general 3-dimensional case using the Prandtl-Reuss equations and the requirement that the stress changes must satisfy the differential form of the yield criterion. In 2-dimensions their expressions reduce to

$$\Delta\sigma_x = (E/(1-\nu^2))(\Delta\varepsilon_x + \nu\Delta\varepsilon_y - \bar{\phi}(s_x + \nu s_y)) \qquad (25)$$

$$\Delta\sigma_y = (E/(1-\nu^2))(\Delta\varepsilon_y + \nu\Delta\varepsilon_x - \bar{\phi}(s_y + \nu s_x)) \qquad (26)$$

$$\Delta\tau_{xy} = G\ (\Delta\gamma_{xy} - 2\bar{\phi}\tau_{xy}) \qquad (27)$$

where

$$\phi = \frac{s_x(\Delta\varepsilon_x + \nu\Delta\varepsilon_y) + s_y(\Delta\varepsilon_y + \nu\Delta\varepsilon_x) + (1-\nu)\Delta\gamma_{xy}\tau_{xy}}{s_x(s_x + \nu s_y) + s_y(s_y + \nu s_x) + 2(1-\nu)\tau_{xy}^2} \qquad (28)$$

Making the assumption that the plastic stress increments vary linearly with z between calculated surface stresses and the known stresses at the elasto-plastic boundary as in figure 3, it is possible to integrate the response to strain increments over the cross section including both the elastic and plastic regions to obtain an apparent value for the sectional stiffness at a particular point. An appropriate value for the total strain energy of the system under an imposed set of displacements may then be obtained by numerically integrating the corresponding discrete expressions for strain energy per unit area over a representative area of the column.

The variational method for satisfying the equilibrium will be applicable provided no strain reversals occur[8] and in the present case of the column subject to monotonically increasing strain this requirement is satisfied[1]. Since the plastic behaviour is non linear and depends on the current stress state the calculation progresses into the plastic regime via a step by step Runge-Kutta type procedure. The post-buckled stiffness begins to fall off rapidly until the ultimate load is attained.

Results are given in figures 4 and 5, figure 4 showing the behaviour of the square column with various values of the ratio σ_Y/σ_{cr} of the order to be expected in civil structures, and figure 5 the behaviour of rectangular columns with constant σ_Y/σ_{cr} and differing b/a ratios.

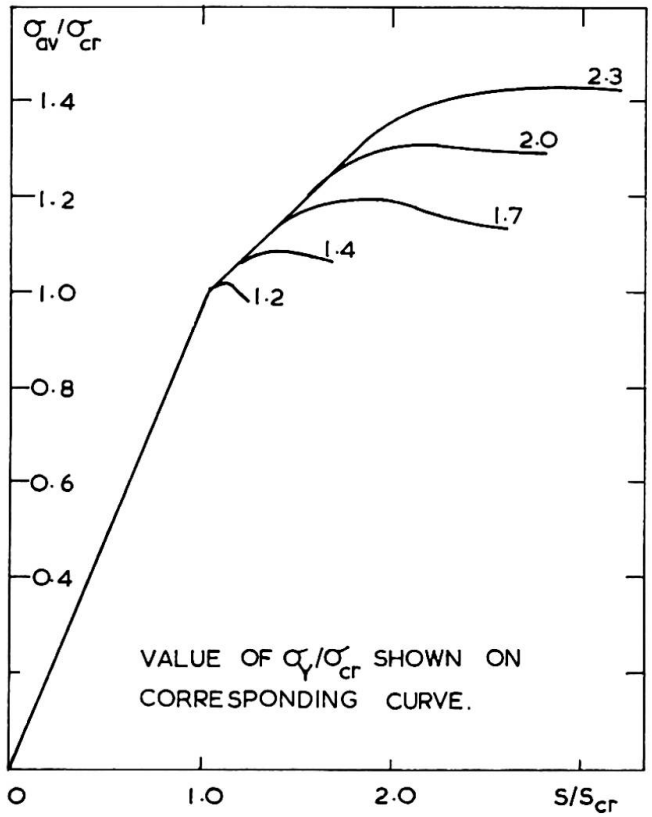


FIG 4 AVERAGE STRESS VERSUS STRAIN - SQUARE SECTIONS

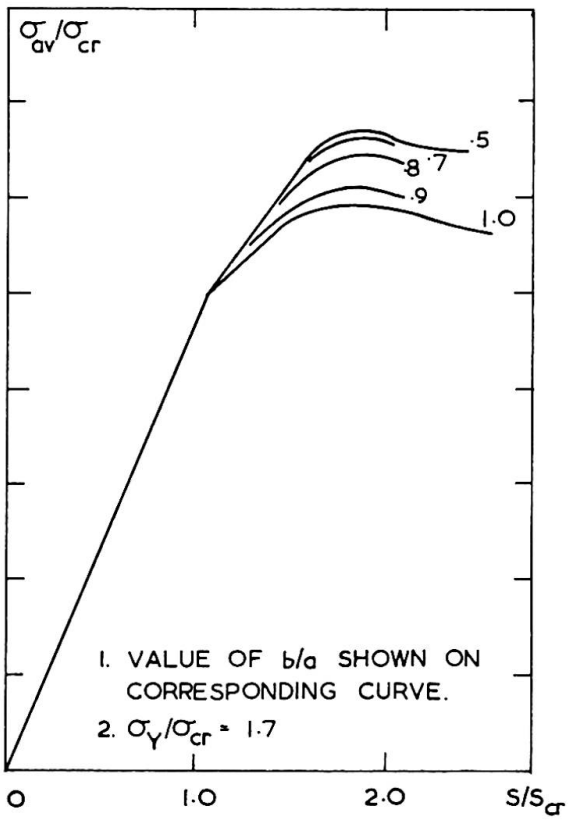


FIG 5 RECTANGULAR SECTIONS

An interesting feature of the results is that the corners of the columns go completely plastic in a predominantly compressive mode at about the same time as the ultimate load is attained, which lends support to the 'equivalent width' design approximation discussed by Professor Winter. The theoretical results for the square column agree well with the results of some simply supported plate tests recently reported by Dwight and Ractliffe[9].

4. Effect on Ultimate Strengths of Overall Buckling

Professor Winter further mentions the interaction between ultimate strengths and overall buckling in longer columns. This effect, which has hitherto been disregarded in this paper, may be dealt with theoretically by considering the apparent internal bending stiffness 'K' of the section at stages in its post-buckled range. K is proportional to the reactive moment produced by the application of an infinitesimal bending strain S' to the column, and since the nodal and antinodal lines of the existing local buckles must remain straight by symmetry, such a bending strain may be measured by a change in their inclination as shown in figure 6. Given K, the Euler buckling stress of a column of slenderness ratio (ℓ/r) follows from the formula

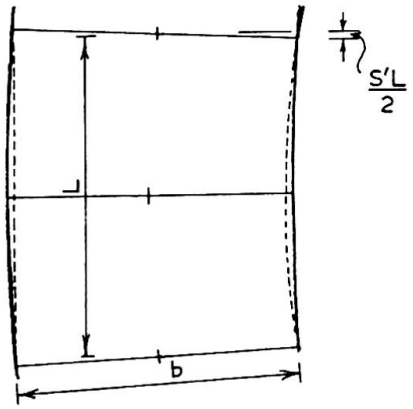


FIG 6. LOCALLY BUCKLED COLUMN UNDER BENDING STRAIN S'

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 K}{(\ell/r)^2 I} \tag{29}$$

and can therefore be found by a graphical construction on the curve of K versus σ_{av} for the section in question[6]. σ_E may then be postulated as the failure stress of the column provided it is reached before the local buckling ultimate stress.

A variational principle is again used to obtain the infinitesimal equilibrium state corresponding to the applied bending strain. Approximate expressions for u', v' and ω' are obtained by solving the differential form of von Kármán's equations (the superscript denoting quantities of infinitesimal magnitude):

$$\nabla^4\omega' = \frac{t}{D}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2\omega'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\omega'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - 2.\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\omega'}{\partial x\partial y} - 2.\frac{\partial^2 F'}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right\} \tag{30}$$

$$\nabla^4 F' = E\left\{2.\frac{\partial^2\omega'}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\omega'}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\omega'}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right\} \tag{31}$$

in which ω and F are known from the previous purely compressive calculation. The increment of strain energy U' is then minimised with respect to the chosen displacement parameters. The required value of K is directly related to U' by the formula

$$K = \frac{U'}{L}\left(\frac{b}{S'}\right)^2 \qquad (32)$$

The results of the interaction calculation for square columns are shown in figure 7 where it will be seen that overall buckling has no effect on ultimate strengths provided slenderness ratios are less than about $.5(\ell/r)_{cr}$.

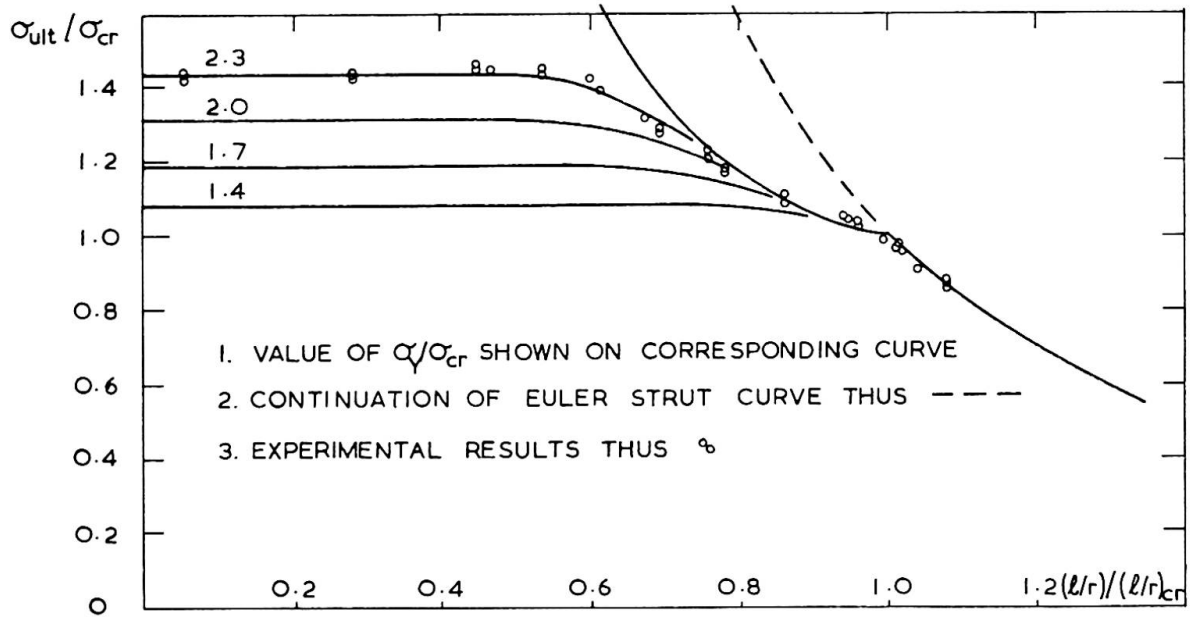


FIG. 7 ULTIMATE STRESSES OF SQUARE THIN WALLED COLUMNS

5. Experiments

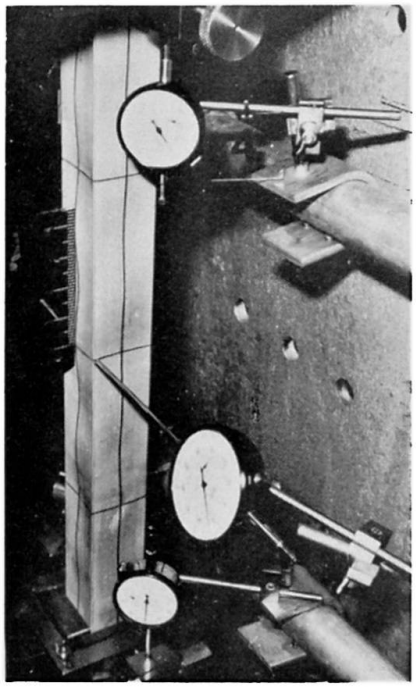


FIG 8 COLUMN TEST

In order to check the interaction theory, a series of experiments were performed on model columns cut from thin walled aluminium tubing[10]. The square section of nominal dimensions a(=b) = 2.00in, t = .040in, was drawn from the structural aluminium HT30/WP. Separate tests on the compressive characteristics of the material showed it to have a fairly marked yield as required by the theory.

Only initially straight columns have so far been examined analytically and in the tests reported here, the effect of initial overall curvature was specifically excluded by using adjustable end fittings that enabled the eccentricity of the applied load to be continuously varied. The 'correct' load position was found at the early stages of the test by observing the rate of increase of curvature with load and adjusting the fittings till this approached zero.

The compression machine was made as stiff as possible to enable the load shedding regions to be followed. Columns were tested in batches of five with slenderness ratios varying between 5 and 100 - covering the range of interest. The results are included in figure 7 and a typical specimen at its ultimate load is shown in figure 8.

6. Conclusions

The post-buckled behaviour of thin walled rectangular columns has been analysed, and by including the effect of plasticity ultimate loads have been predicted.

It has been shown that for columns of square section, overall buckling does not affect these strengths provided slenderness ratios are less than $.5(\ell/r)_{cr}$, a result which may be expressed in the form of the design criterion:

$$\frac{\ell}{r} < \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{4}}\left(\frac{b}{t}\right) \qquad (33)$$

for overall stability.

7. References

1. Graves Smith,T.R. 'The Ultimate Strength of Locally Buckled Columns of Arbitrary Length', Ph.D. Thesis, Cambridge Univ., 1966.
2. Argyris,J.H., Kelsey,S. 'Energy Theorems and Structural Analysis', Butterworths, London, p.8, 1960.
3. Chilver,A.H. 'Thin Walled Structures', Chatto & Windus, London, p.211, 1967.
4. Timoshenko,S.P., Woinowsky-Krieger,S. 'Theory of Plates and Shells', McGraw-Hill, New York, pp416,417, 1959.
5. Yamaki,N. 'Post-buckling Behaviour of Rectangular Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression', J. appl. Mech, 26, pp407-414,1959.
6. Graves Smith,T.R. 'The Ultimate Strength of Locally Buckled Columns of Arbitrary Length', Int. Symp. on Thin Walled Steel Structures, Swansea Univ. 1967.
7. Prager,W., Hodge,P.G. 'Theory of Perfectly Plastic Solids', Wiley, New York, p.29, 1951.
8. Drucker,D.C., 'Variational Principles in the Mathematical Theory of Plasticity', O.N.R.,C11-13, Brown Univ., p.15, 1956.
9. Dwight,J.B., Ractliffe,A.T. 'The Strength of Thin Plates in Compression', Int. Symp. on Thin Walled Steel Structures, Swansea Univ., 1967.
10. Graves Smith, T.R. 'Local Buckling of Thin Walled Columns, Part II', C.I.R.I.A. Res. Rep. 12, 1968.

Symbols

The following symbols are used generally throughout the paper. Other symbols are defined when they occur.

D - flexural rigidity of an elastic plate, $Et^3/12(1-\nu^2)$
E - Young's modulus of elasticity
F - Airy's stress function
G - shear modulus of elasticity
I - second moment of area of section
L - half wavelength of local buckles
$\mathcal{R}$ - real part of a complex expression
U - strain energy

j - $\sqrt{-1}$
ℓ - effective length of column
r - radius of gyration of column section
t - general thickness of plate

γ - π/L
γ_{xy} - shear strain
δ - arbitrary amplitude of local buckles
ν - Poisson's ratio
σ_{av} - average stress on column (load/sectional area)
σ_{cr} - critical local buckling stress
σ_{ult} - ultimate average stress on column
σ_Y - material yield stress

$$\nabla^4(\quad) = \frac{\partial^4(\quad)}{\partial x^4} + 2.\frac{\partial^4(\quad)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4(\quad)}{\partial y^4}$$

SUMMARY

A method of analysing the post-buckled behaviour of a rectangular column made up of thin plate elements is presented. Plastic yielding of the material as the deformations become large is taken into account and this is shown to result in a progressive decrease in the post-buckled stiffness and eventual load shedding.

The effect of overall buckling on the column strength is also assessed and conclusions are drawn as to the allowable values of slenderness ratio for which this effect may be ignored.

RÉSUMÉ

On présente dans cette communication une méthode d'analyser comment se comporte après son flambage local une colonne rectangulaire composée de plaques minces. Il est tenu compte du comportement plastique de la matière quand la déformation s'agrandit, et il en ressort que la rigidité après flambage décroit progressivement et on aboutit à la perte du chargement.

On évalue aussi l'effet du flambage total sur la résistance de la colonne, et on tire des conclusions concernant les souplesses pour lesquelles on peut ignorer cet effet.

ZUSAMMENFASSUNG

Eine Methode wird vorgelegt, das Verhalten nach Knickung einer aus dünnen Platten bestehenden rechteckigen Säule zu ermitteln. Plastisches Fliessen des Materials bei grosswerdenden Formänderungen ergibt eine zunehmende Minderung der Steifheit nach Knickung und eventuell einen Abfall der Belastung.

Die Wirkung Eulerscher Knickung auf die Säulenstärke wird auch berechnet; daraus werden die Schlankheitswerte erschlossen, bei denen man diese Wirkung nicht zu beachten braucht.

Reply to Dr. P.S. Bulson's questions

Dr. Bulson raised a very interesting point regarding the interaction between column and local buckling. His object was to derive a simple rule to enable designers to obtain an approximate interaction curve. I agree that having obtained his reduced modulus E*, a good approximation to this curve can be produced by the construction he proposes. Unfortunately this value for E* cannot be found in simple closed form, although the amount of calculation necessary to obtain it is an order of magnitude less than that necessary for the full interaction curve. For square columns E* comes out to be 0.62E where E is the Young's modulus of the material in question. From an observation of the results, the plasticity transition appears to be sufficiently sudden for the rounding off of Dr. Bulson's construction to be unnecessary.

Influence of Cross-Sectional Distortion on Flexural-Torsional Buckling

Influence de la torsion dans la section sur le flambage combiné flexion-torsion

Einfluß der Querschnittsverdrehung auf das Biegedrillknicken

YASYHIRO SUZUKI
Research Engr.
Sakurada Iron Works Co. Ltd.
Tokyo, Japan

TOSHIE OKUMURA
Prof. of Civ. Engrg.
University of Tokyo
Tokyo, Japan

1. Introduction

The influence of cross-sectional distortion on the flexural-torsional buckling of members with thin-walled open cross sections is studied applying the assemptions used in the folded plate theory.

The buckling theories of thin-walled members have been separatedly developed as the primary buckling and as the local buckling. The flexural-torsional buckling is involved in the former. The former is based on the fundamental assumption that the cross section is non-deformable at the instant of buckling, and the later is related to cross-sectional distortion. It is, however, reasonable to consider that the both of the above buckling phenomena actually take place simultaneously. The influence of cross-sectional distortion is increasing its importance in the analysis of buckling due to a tendency of using the more thin-walled members with the appearance of high-strength steel.

In relation to this problem, F. Bleich studied the flexural-torsional buckling of T-shaped stiffener considering the deformation of its web.[1] In Japan, T. Okumura,[2] and T. Naka et al.[3] studied the lateral buckling of I-shaped beams with the same method as Bleich, where the web plate is considered as an assembly of narrow transverse strips. Recently, R. Schmied[4] and M. Fischer[5] studied the buckling of I-shaped members considering the complete plate action of web plate. E. Goldberg et al[6] presented a systematical buckling analysis for members with arbitrary cross-sectional forms considering the cross-sectional distortion and starting from the usual plate equation and the membrane equation.

In this study, the members which consist of many flat plate elements are treated by energy method, and so it is difficult to take the complete plate action of each element into the consideration due to the complexity. For this reason, the thin-walled members are replaced by mechanical models of folded plate system, and thus the plate action of each element is simplified as Bleich's method.

The buckling stress is calculated with the use of the energy method. Expressions for the internal strain energy and the potential energy of external loads are derived for a thin-walled member as a folded plate system. Assuming proper buckling modes and introducing into the total energy expression, the critical condition for buckling is obtained by the concept of stational energy. Numerical results are obtained with the help of an electronic computer.

2. General Equation for Analysis

2.1 Assumptions and Symbols

In this study, only the member with a prismatical open section is treated. The cross section considered here consists of one series of flat plate elements as shown in Fig. 1.

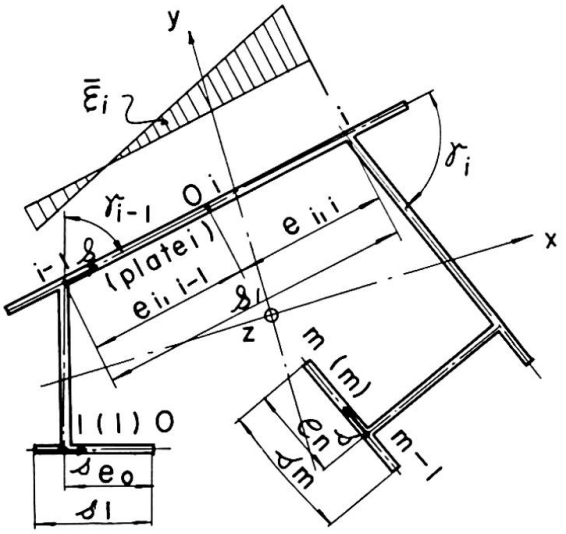


Fig. 1 Typical cross section

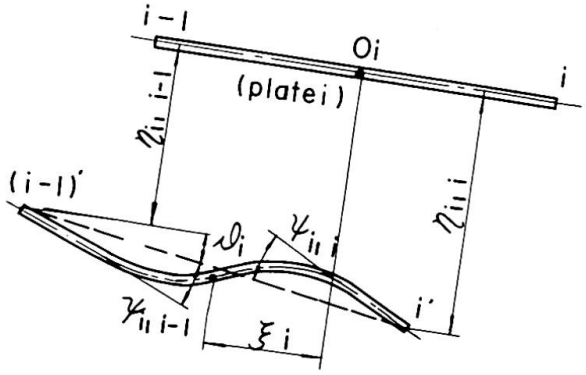


Fig. 2 Deformation of plate element

The following assumptions are also the basis of the analysis.

(1) At any point in the section, the longitudinal normal stresses due to the external loads do not exdeed the proportional limit at the instant of buckling.

(2) The longitudinal normal stresses are linearly distributed only within each plate element. That is, Navier's hypothesis remains valid for each plate element, but not for the whole section.

(3) Each plate element is subjected only to bending moment in the direction perpendicular to the longitudinal axis and to shear force accompanied to this bending moment. That is, the thin-walled member is replaced by an assembly of transverse frames of unit width, and between these frames normal and tangential stresses in the plane of each element are transmitted from one frame to another.

The symbols used hereafter are shown in Fig. 1 and 2. Fig. 2 shows the displacement components. They are

ξ_i : displacement of a plate element in its plane

$\eta_{i,i}$ $\eta_{i,i-1}$: displacements of nodal points perpendicular to the plate to which they belong

ϑ_i : bar rotation of a plate

$\psi_{i,i}$ $\psi_{i,i-1}$: tangential angles at the edge of a plate element

φ_i : rotation of a nodal point

and among these the following relations exist;

$$\vartheta_i = \frac{1}{s_i}(\eta_{i,i} - \eta_{i,i-1}) = \frac{1}{s_i}\left(\frac{\xi_{i-1}}{\sin\gamma_{i-1}} - \left(\frac{1}{\tan\gamma_{i-1}} + \frac{1}{\tan\gamma_i}\right)\xi_i + \frac{\xi_{i+1}}{\sin\gamma_i}\right) \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned} \eta_{i,i-1} &= \left(\frac{\xi_{i-1}}{\cos\gamma_{i-1}} - \xi_i\right)\frac{1}{\tan\gamma_{i-1}} \\ \eta_{i,i} &= \left(\xi_i - \frac{\xi_{i+1}}{\cos\gamma_i}\right)\frac{1}{\tan\gamma_i} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{i-1} &= \vartheta_i + \psi_{i,i-1} \\ \varphi_i &= \vartheta_i - \psi_{i,i} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3)$$

From the above relations, it can be concluded that the necessary and sufficient components to descrive the whole deformation of the section are ξ_i (i =1,2,... m) and φ_i (i =1,2,... m-1).

2.2 Internal Strain Energy

The internal strain energy V as a folded plate system is separated into three parts.

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

where V_1 : sum of the strain energy by the beam action (simplified membrane action) of each element

V_2 : sum of the strain energy by the frame action (simplified plate action) of each element

V_3 : sum of the strain energy by the pure torsion of each element

These energies are to be expressed in terms of the independent deflection ξ_i and φ_i.

( )' means hereafter the differentiation by z-coordinate.

i) V_1 As the linearlity of the longitudinal normal strain is hold within each element, V_1 can be expressed in the following form for all m plate

$$V_1 = \frac{1}{2}\int_\ell \sum_{i=1}^{m} (EI_i\, \xi_i'^2 + EF_i\, \bar{\varepsilon}_i^2)\, dz \qquad \cdots\cdots (5)$$

where I = moment of inertia of a plate element

F = cross area of a element

$\bar{\varepsilon}_i$ = longitudinal normal strain at the centroid of a element

E = Young's modurus

ξ_i and $\bar{\varepsilon}_i$ are not independent of each other. The longitudinal normal strains in both plates must be equal at a point where two plates meet

$$\bar{\varepsilon}_i + e_{i,i}\, \xi_i'' = \bar{\varepsilon}_{i+1} - e_{i+1,i}\, \xi_{i+1}'' \qquad \cdots\cdots (6)$$

Introducing the average strain ε , and the difference ε_i between the strains ε and $\bar{\varepsilon}_i$, as follows

$$\varepsilon = \frac{1}{F}\sum_{i=1}^{m} F_i\, \bar{\varepsilon}_i \qquad F = \sum_{i=1}^{m} F_i \qquad \cdots\cdots (7)$$

$$\varepsilon_i = \bar{\varepsilon}_i - \varepsilon \qquad \cdots\cdots (8)$$

Eq.(6) can be solved in the following forms

$$\varepsilon_1 = \sum_{j=1}^{m} a_j\, \xi_j'' \qquad \cdots\cdots (9a)$$

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{m} a_j\, \xi_j'' + \sum_{j=1}^{i} c_{ij}\, \xi_j''$$

$$= \sum_{j=1}^{m} A_{i,j}\, \xi_j'' \quad (i \geq 2) \qquad \cdots\cdots (9b)$$

where

$$a_1 = -\frac{e_{11}}{F}(F - F_1) \qquad a_j = -\frac{1}{F}\left(e_{j,j-1}\, F_j + s_j \sum_{j=j+1}^{m} F_j\right) \qquad \cdots\cdots (10a)$$

$$\left.\begin{array}{lll} i = 1 & c_{11} = 0 & \\ i = 2 & c_{2,1} = e_{11} & c_{22} = e_{21} \\ i > 3 & c_{i1} = e_{11} & c_{i,j} = s_j \ (i \neq j) \qquad c_{i,i} = e_{i,i-1} \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots (10b)$$

$$\left.\begin{array}{ll} j \leq i & A_{i,j} = a_j + c_{i,j} \\ j > i & A_{i,j} = a_j \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots (10c)$$

Substituting Eq.(9) into Eq.(5), the expression for V_1 is obtained in the following form

$$V_1 = \frac{1}{2}\int_\ell \sum_{i=1}^{m} \{ EI_i\, \xi_i'^2 + EF_i (\varepsilon_i + \varepsilon)^2 \}\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_\ell \{ \sum_{i=1}^{m} (EI_i\, \xi_i'^2 + EF_i\, \varepsilon_i^2) + EF_i\, \varepsilon^2 \}\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_\ell \Big[\sum_{i=1}^{m} \{ EI_i\, \xi_i'^2 + EF_i \sum_{j=1}^{m} (A_{i,j}\, \xi_i'')^2 \} + EF\varepsilon^2 \Big]\, dz$$

$$= \frac{E}{2}\int_\ell \sum R_{i,i}\, \xi_i'^2\, dz + \frac{E}{2}\int_\ell \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq i')}}^{m} 2R_{i,i'}\, \xi_i''\, \xi_{i'}''\, dz + \frac{E}{2}\int_\ell F\varepsilon^2\, dz \qquad \cdots\cdots (11)$$

where $R_{ij} = R_{ji}$, and

$$\left.\begin{aligned} R_{i'i} &= l_i + \sum_{j=1}^{m} F_j \, A_{j,i}^2 \\ R_{i',i''} &= \sum_{j=1}^{m} F_j \, A_{j,i'} \, A_{j,i''} \quad (i' \neq i'') \end{aligned}\right\} \text{----------(12)}$$

ii) V_2 Replacing the thin-walled member into an assembly of frames in the transverse direction according to the assumption in the folded plate theory, the expression for strain energy V_2 can be derived using the following relations for transverse moments Y and Eq.(3)

$$\left.\begin{aligned} Y_{i-1} &= \frac{2D_i}{s_i}(2\psi_{i,i-1} - \psi_{i,i}) \\ Y_i &= \frac{2D_i}{s_i}(-\psi_{i,i-1} + 2\psi_{i,i}) \end{aligned}\right\}$$

The strain energy V_2 stored in the plate element i becomes as follows

$$\Delta V_2 = \int_{s_i} \frac{Y^2}{2D_i} ds = \frac{s_i}{6D_i}(Y_{i-1}^2 + Y_{i-1} \cdot Y_i + Y_i^2)$$

$$= \frac{2D_i}{s_i}\{\varphi_{i-1}^2 + \varphi_{i-1}\varphi_i + \varphi_i^2 - 3\vartheta_i(\varphi_{i-1} + \varphi_i) + 3\vartheta_i^2\}$$

where $D_i = E t_i^3 / 12(1-\nu^2)$

Since one edge is free for the edge plates 1 and m, no bending moment exist in these element, and thus no contribution to the strain energy may be assumed. Consequently the strain energy V_2 for the whole section is expressed as follows excluding the contribution from the edge plates

$$V_2 = \int_\ell \sum_{i=2}^{m-1} \frac{2D_i}{s_i}\{\varphi_{i-1}^2 + \varphi_{i-1}\varphi_i + \varphi_i^2 - 3\vartheta_i(\varphi_{i-1} + \varphi_i) + 3\vartheta_i^2\} dz \text{ -------(13)}$$

ϑ_i in this expression is a function of ξi as defined in Eq.(1).

iii) V_3 This energy is defined as the sum of the energies stored in each element due to pure torsion, that is, St. Venant's torsion. This strain energy is expressed as a function of ϑ_i for each interior plate element, while the contribution for the two edge plates are expressed by the twisting angles at the nodal points 1 and m-1, and thus the strain energy V_3 is

$$V_3 = \frac{1}{2}\int_\ell \sum_{i=2}^{m-1} GJ_i \vartheta_i'^2 dz + \frac{1}{2}\int_\ell (GJ_1 \varphi_1'^2 + GJ_m \varphi_{m-1}'^2) dz \text{ ----------(14)}$$

where J_i is St. Venant's torsional constant and G is the elastic modulus for shear.

2.3 Potential Energy of External Loads

The potential energy of external loads U is equal to the sum of negative products external forces and displacements of their points of application in the didection of the forces. Considering the fully loaded but undeflected state as the reference position for the potencial energy, U represents the change of the potential energy due to buckling:

$$U = -\int_F \bar{\sigma}\,\delta\,dF \qquad (15)$$

Provided that no cross-sectional distortions take place at the end of the member, the external stresses on the end surfaces are given as follows for the nodal points

$$\bar{\sigma}_i = \frac{P}{F} + \frac{Mx}{Ix}\,y_i + \frac{My}{Iy}\,X_i$$

The stresses vary linearly between the nodal points and therefore

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{i-1} + (\bar{\sigma}_i - \bar{\sigma}_{i-1})\left(\frac{\delta}{\delta_i}\right) \qquad (16)$$

Neglecting the change of the external stresses and the change of the fiber strains due to the change of stresses before and after the buckling, the displacement δ is due only to the curvature of the fiber by the buckling deflection:

$$\delta = \frac{1}{2}\int_e \left[\left(\frac{d\Delta x}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta y}{dz}\right)^2\right] dz \qquad (17)$$

where Δ x and Δ y are the two displacements of a fiber in the mutually perpendicular direction. Considering the distortion of the plate elements, they become as follows for interior elements

$$\Delta x = \xi_i$$
$$\Delta y = \eta_{i,i-1} + \delta_i\varphi_{i-1}\left(\frac{\delta}{\delta_i}\right) - \delta^2(2\varphi_{i-1}+\varphi_i-3\vartheta_i)\left(\frac{\delta}{\delta_i}\right)^2 + \delta_i(\varphi_{i-1}+\varphi_i-2\vartheta_i)\left(\frac{\delta}{\delta_i}\right)^3\Big\} \qquad (18)$$

Substituting the displacement δ obtained from Eq.(17) and (18), and the external stresses of Eq.(16) into Eq.(15), the portion of potential energy of external loads for the internal plates U_1 is given as follows

$$\begin{aligned}U_1 = -\frac{1}{2}\int_\ell \sum_{i=2}^{m-1}\Big[&\frac{\bar{\sigma}_{i-1}F_i}{840}(420\xi_i'^2 + 420\eta_{i,i-1}'^2 + 5\delta_i^2\varphi_{i-1}'^2 - 6\delta_i^2\varphi_{i-1}'\varphi_i' + 3\delta_i^2\varphi_i'^2 + 72\delta_i^2\vartheta_i'^2\\ &+ 252\delta_i\eta_{i,i-1}'\vartheta_i' + 24\delta_i^2\vartheta_i'\varphi_{i-1}' - 28\delta_i^2\vartheta_i'\varphi_i' + 84\delta_i\eta_{i,i-1}'\varphi_{i-1}' - 56\delta_i\eta_{i,i-1}'\varphi_i')\\ &+\frac{\bar{\sigma}_i F_i}{840}(420\xi_i'^2 + 420\eta_{i,i-1}'^2 + 3\delta_i^2\varphi_{i-1}'^2 - 6\delta_i^2\varphi_{i-1}'\varphi_i' + 5\delta_i^2\varphi_i'^2 + 240\delta_i^2\vartheta_i'^2\\ &+ 588\delta_i\eta_{i,i-1}'\vartheta_i' + 28\delta_i^2\vartheta_i'\varphi_{i-1}' - 60\delta_i^2\vartheta_i'\varphi_i' + 56\delta_i\eta_{i,i-1}'\varphi_{i-1}'\\ &- 84\delta_i\eta_{i,i-1}'\varphi_i')\Big]dz \end{aligned} \qquad (19)$$

This potential energy for the edge plates become as follows considering the following relations

for plate 1 $\quad \Delta x = \xi_1 \quad \Delta y = \eta_{11} - \varphi_1\cdot\delta$

for plate m $\quad \Delta x = \xi_m \quad \Delta y = \eta_{m,m-1} + \varphi_{m-1}\cdot\delta$

$$\begin{aligned}U_2 = -\frac{1}{2}\int_\ell \Big[&\bar{\sigma}_0 F_1\Big\{(\xi_1'^2+\eta_{11}'^2)\Big(1-\frac{\delta_1}{2e_0}\Big) - 2\eta_{11}'\varphi_1'\Big(e_0-\delta_1+\frac{\delta_1^2}{2e_0}\Big) + \frac{\varphi_1'^2}{4}\Big(2-\frac{\delta_2}{e_0}\Big)(2e_0^2-2e_0\delta_1+\delta_1^2)\Big\}\\ &+\bar{\sigma}_1 F_1\Big\{(\xi_1'^2+\eta_{11}'^2)\frac{\delta_1}{2e_0} - \eta_{11}'\varphi_1'\delta_1\Big(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{\delta_1}{e_0}\Big) + \frac{\varphi_1'^2}{12e_0}(6\delta_1 e_0 - 8e_0\delta_1^2 + 3\delta_1^3)\Big\}\\ &+\bar{\sigma}_{m-1}F_m\Big\{(\xi_m'^2+\eta_{m,m-1}'^2)\frac{\delta_m}{2e_m} + \eta_{m,m-1}'\varphi_{m-1}'\delta_m\Big(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{\delta_m}{e_m}\Big) + \frac{\varphi_{m-1}'^2}{12e_m}(6\delta_m e_m^2 - 8e_m\delta_m^2 + 3\delta_m^3)\\ &+\bar{\sigma}_m F_m\Big\{(\xi_m'^2+\eta_{m,m-1}^2)\Big(1-\frac{\delta_m}{2e_m}\Big) + 2\eta_{m,m-1}'\varphi_{m-1}'\Big(e_m-\delta_m-\frac{\delta_m^2}{2e_0}\Big) + \frac{\varphi_{m-1}'^2}{4}\Big(2-\frac{\delta_m}{e_m}\Big)\\ &\times(2e_m^2-2e_m\delta_m-\delta_m^2)\Big\}\Big]dz \end{aligned} \qquad (20)$$

The potentical energy of the whole system π is the sum of the expressions as derived and thus $\pi = V + U = V_1+V_2+V_3+U_1+U_2$, in which all the terms are the function of η and ℓ. The deflection components ξ_i and φ_i involved in the above expression are also expressid in terms of ξ_i and φ_i by Eq. (1) and (2).

Assuming the buckling mode, the critical equation for this buckling is derived from the concept of stationary potential energy, that is

$$\delta\pi = \delta (V_1+V_2+V_3+U_1+U_2) = 0$$

The terms which includes the strain ε in the energy V_1 is ommitted, because we consider here only the change of the energy before and after the buckling.

3. Numerical Examples on Hat-Shaped Columns

3.1 Critical Equations

For an example, lateral-torsional buckling of columns subjected to exccentrical compression on the axis of symmetry as shown in Fig. 3 is treated.

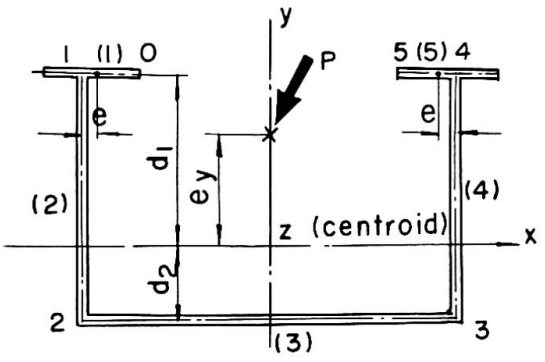


Fig. 3 General hat-shaped section

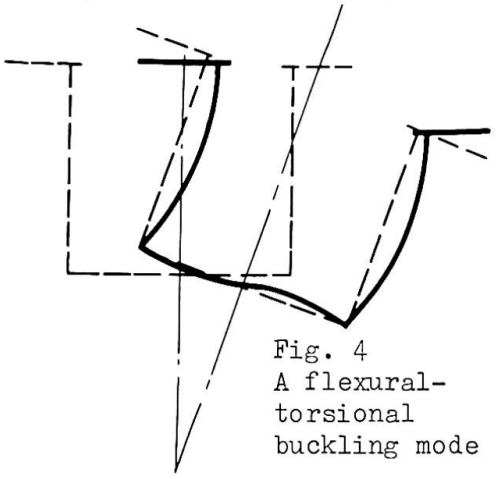


Fig. 4 A flexural-torsional buckling mode

Introducing the following parameters

$$z_1 = 1 + \frac{Fd_1}{I_x} e_y \quad , \quad z_2 = 1 - \frac{Fd_2}{I_x} e_y$$

the external stresses at nodal points are expressed by one stress $\bar{\sigma}$ as follows

$$\bar{\sigma_0} = \bar{\sigma_1} = \bar{\sigma_4} = \bar{\sigma_5} = \bar{\sigma} \cdot z_1 \quad , \qquad \bar{\sigma} = P/F$$
$$\bar{\sigma_2} = \bar{\sigma_3} = \bar{\sigma} \cdot z_2$$

The flexural-torsional buckling mode is assumed to be symmetric on the axis of symmetry of the cross section as shown in Fig. 4, then there exist the following relationship

$$\xi_1 = \xi_5 , \ \xi_2 = \xi_4 , \ \varphi_1 = \varphi_4 , \ \varphi_2 = \varphi_3$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 and φ_1, φ_2 remains as the independent components. In the direction of the column axis, they are further assumed to vary as

$$\xi_i = C_i \sin \lambda z \qquad \lambda = \pi/\ell$$
$$\varphi_i = B_i \sin \lambda z$$

After introducing the above relations into the energy expressions derived in the previous sections, the potential energy for the whole system can be expressed in terms of C_i and B_i, and differentiation of thus obtained total energy by C_i and B_i reduces to a system of linear equations about C_i and B_i. The buckling criteria is the condition that the determinant of this system vanishes;

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{vmatrix} = 0$$

The elements of this determinant take the form $K_{ij}=K_{ij,1}+K_{ij,2}\times\bar{\sigma}$. Numerical evaluation of $\bar{\sigma}$ satisfying this condition can be attained with the help of an electronic computer. And in this case the theoretical value with no consideration of cross sectional destortion can be used as the starting value.

3.2 Numerical Results and Comparison with Usual Theory

Some numerical results on hat-shaped columns are shown in Fig. 5 through 8, in which the vertical axis is the reduction of the flexural-torsional buckling stress due to the influence of cross-sectional distortion compared with the usual theory where the cross section is assumed to be non-deformable----- cf. (1) or (7).

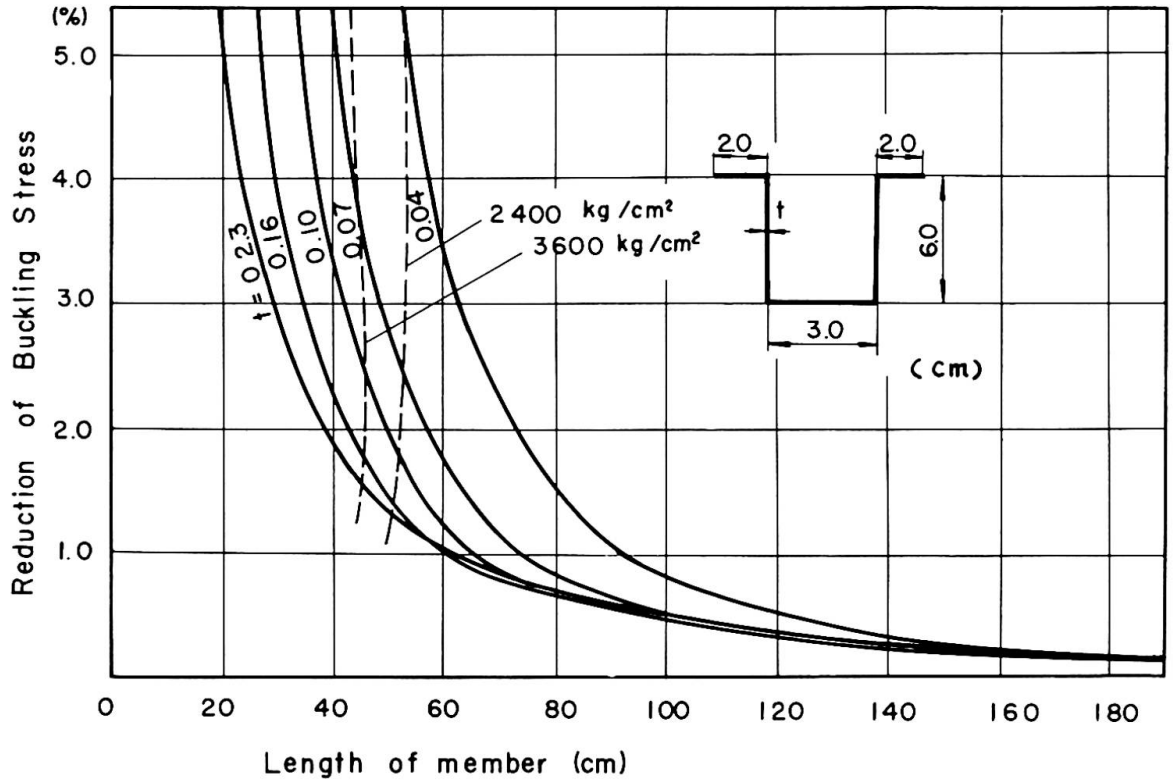


Fig. 5 Relation between reduction of buckling stress and length of member for hat-shaped column

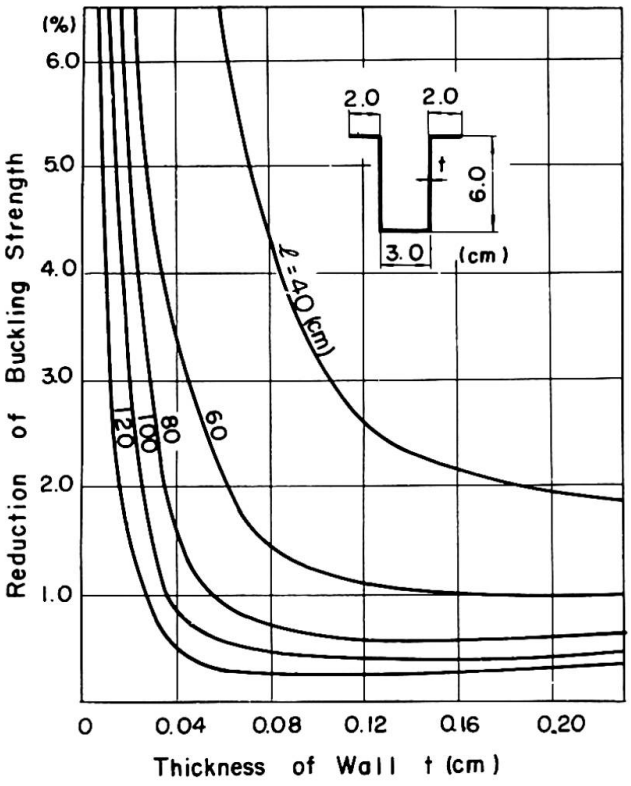


Fig. 6 Relation between reduction of buckling strength and wall thickness

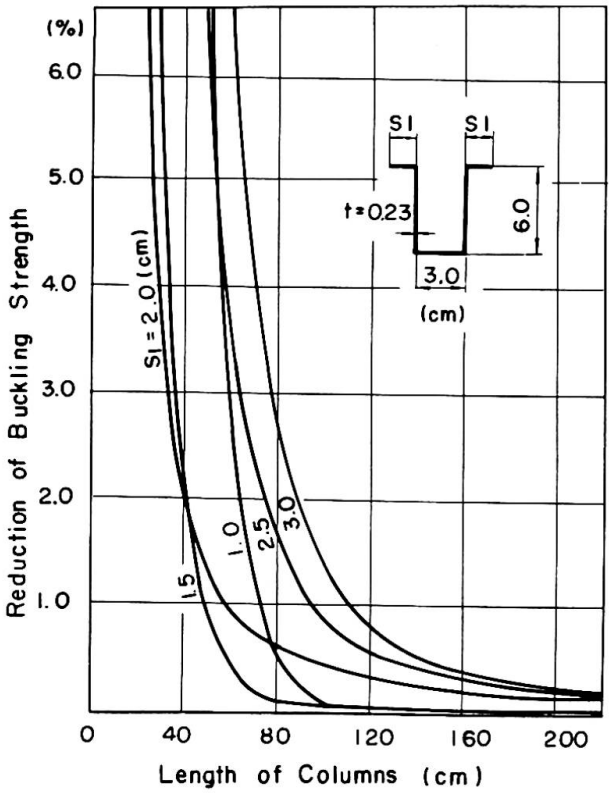


Fig. 7 Relation between reduction of buckling strength and size of lip plates

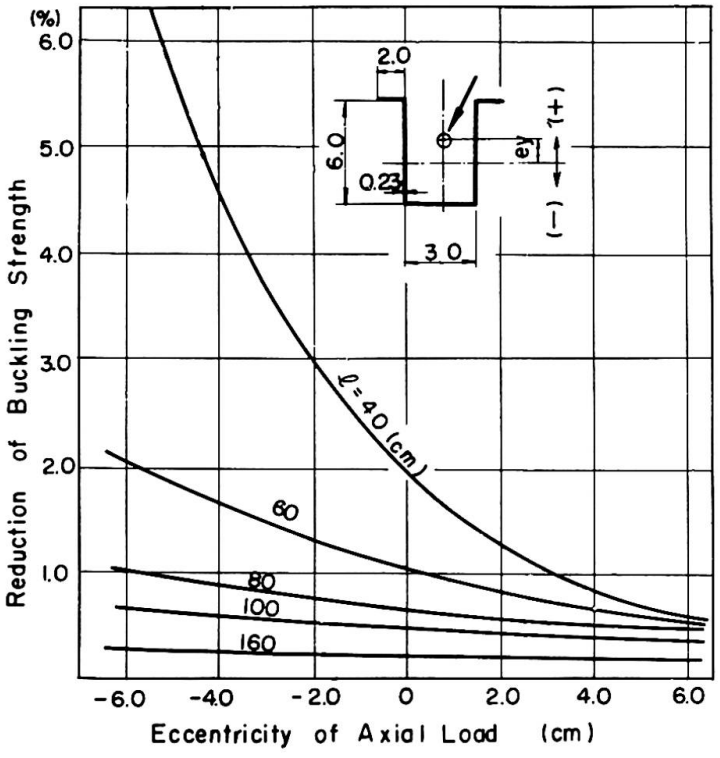


Fig. 8 Relation between reduction of buckling strength and eccentricity of axial force

Fig. 5 shows the change of reduction of the flexural-torsional buckling stress in relation to the length of column for some wall-thickness, when the hat-shaped column shown in the same figure is subjected to the axial compression only. For longer columns the reduction is generally very small and scarcely no more than 1%, but with the shortening of column length, acceleration of the reduction is noted; more acceleration is observed for a column with thinner cross section.

It is noticed that the results shown here are valid only for the elastic buckling, and this limits are shown in the figure by two broken lines for yield stresses of 2400 and 3600 kg/cm^2, and the curves on the lefthand side of these broken lines for each yield stress has to be modified to be meaningful by the theory of inelastic buckling. Consequently, it can be concluded that the reduction of the flexural-torsional buckling strength for a practical elastic column does not exceed a few percents.

Fig. 6 shows the relationship between the change of reduction and the change of the wall-thickness for the same column as for Fig. 5.

Fig. 7 shows the variation of reduction as a function of sizes of lip plates of the hat-shaped column under axial compression. It is presumed that there is a critical size of lip plates with which the minimum reduction may results.

Fig. 8 shows the relation between the reduction and the eccenntricity of the axial load. In the case of a longer member, the reduction is scarcely influenced by the eccentricity and it's magnitude is very small but in the case of a shorter member the reduction is largely changed by eccentricity, and moreover the reduction increases with increasing eccentricity to the direction for the top of the hat-shape and decreases with a eccentricity to the opposite direction.

References

(1) F. Bleich "Buckling Strength of Metal Structures" McGRAW-HILL, 1952, p.143

(2) T. Okumura "Study on Buckling of Welded members --- Laterel Buckling of I-Shaped Girgers" (in Japanese), Journal of the Japan Welding Society, vol.21, 1950, Oct.

(3) T. Naka & T. Kato "Buckling Strength of Single Members" (in Japanese), University of Tokyo Press, 1961

(4) R. Schmied "Die Gesamtstabilität von zweiachsig aussermittig gedrückten dünnwandigen I-Stäben unter Berücksichtigung der Querschnittsverformung nach der nichtlinearen Plattentheorie" Der STAHLBAU, Heft 1, Januar 1967,

s.1-12 und Heft 2, February 1967, s.50-60

(5) M. Fischer "Das Kipp-Problem querbelasteter exzentrisch durch Normalkraft beanspruchter I-Träger bei Verzicht auf Voraussetzung der Querschnittstreue" Der STAHLBAU, Heft 3, März 1967, s.77-86

(6) J.E. Goldberg, J.L. Bogdanoff and W.D. Glauz "Lateral and Torsional Buckling of Thin Walled Beams" Publ. I.A.B.S.E. vol. 24, p.92, 1964

(7) V.Z. Vlasov "Thin Walled Elastic Beams" (Translation from Russian) Israel Program for Scientific Translations, 1959

SUMMARY

An approximate method to estimate the influence of the cross-sectional distortion on the flexural-torsional buckling of open thin-walled members is presented based on the folded plate theory using the energy concept. From some numerical results on hat-shaped columns, it is shown that this influence is small and negligible for steel columns of practical length and section, but for such columns as with shorter length or much thinner wall thickness, the reduction of flexural-torsional buckling stress is highly enlarged.

RÉSUMÉ

Une méthode approximative d'estimation de l'influence de la déformation de la section sur le flambage combiné flexion -torsion d'une barre à section ouverte mince est développée à partir de la théorie des voiles prismatiques utilisant des considérations d'énergie. Quelques résultats numériques sur des profilés en U montrent que cette influence est minime pour des barres de dimensions raisonnables, mais que les tensions sont réduites sensiblement dans le cas de barres très courtes ou très minces.

ZUSAMMENFASSUNG

Aufgrund der Faltwerktheorie mittels Energiebetrachtung wurde eine Näherungsmethode entwickelt, um den Einfluss der Querschnittsverformung auf das Biegedrillknicken von offenen, dünnwandigen Stäben zu schätzen. Einige numerische Beispiele mit U-Profilen zeigen, dass dieser Einfluss verschwindend klein wird bei Stäben mit normalen Längen und Querschnitten, dass dagegen die Biegedrillknickspannung erheblich reduziert wird bei sehr kurzen oder sehr dünnwandigen Stäben.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Sandwich-Flächentragwerke im Stahlbau

Sandwich Sheet Supporting Structures

Eléments de support sandwich pour la construction métallique

OTTO JUNGBLUTH
Dr.-Ing., Dortmund

Es ist für die moderne Technik kennzeichnend, daß die Anforderungen an die Werkstoffe hinsichtlich Festigkeit, Steifigkeit, Temperaturbeanspruchung, Ermüdungsverhalten, Korrosion, Verarbeitbarkeit usw. in stärkerem Maße steigen als die Gebrauchseigenschaften der Naturwerkstoffe und ihrer Mischsysteme wie z. B. Legierungen bei Metallen und Copolymerisate bei Kunststoffen verbessert werden. Um die Forderung nach vielfacher Kombination der Eigenschaften zu erfüllen, bemüht man sich, die Werkstoffe nicht nur molekular zu mischen, sondern zu Verbundsystemen und speziell zu Sandwichsystemen zu paaren.

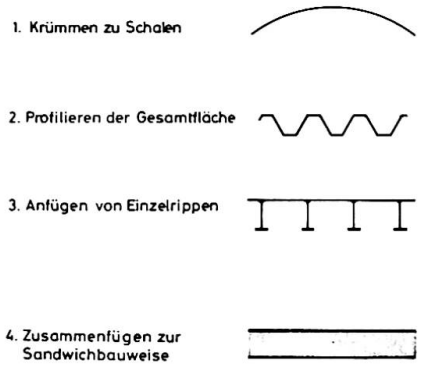


Bild 1: Versteifungsarten von Stahlblechen

Werden für zweidimensionale Tragsysteme Grob-, Mittel- und Feinbleche aus Stahl verwendet, dann ist die Dicke im Verhältnis zur Flächenausdehnung meist so gering, daß stählerne Flächentragwerke zusätzlich versteift werden müssen (Bild 1). Zu den im Stahlbau üblichen 3 Versteifungsarten von Stahlblechen

das Krümmen zu Schalen
das Profilieren der Gesamtfläche
das Anfügen von Einzelrippen

soll also eine 4. Versteifungstechnik treten:

das Zusammenfügen zur Sandwichbauweise.

Ein Sandwichflächentragwerk besteht aus mehreren im Verbund wirkenden Schichten (Bild 2), vorzugsweise aus zwei symmetrischen oder unsymmetrischen Deckschichten und einer dazwischen angeordneten Kernschicht, wobei man nach der Theorie dicke und dünne Deckschichten mit jeweils steifen und leichten Kernschichten unterscheidet. Ferner können die Deck- und Kernschichten mit gerichteten oder mit nicht gerichteten Eigenschaften ausgebildet sein und aus dem gleichen Material oder aus unterschiedlichen Werkstoffen bestehen. Es sind also bezüglich des Werkstoffs homogene und inhomogene sowie hinsichtlich der Steifigkeit isotrope und auch orthogonal-anisotrope Sandwichsysteme möglich. Sandwichtragwerke sind also Verbund-Flächentragwerke, d. h. die Sandwichtechnik ist anwendbar bei Platten, Scheiben, Schalen und Faltwerken.

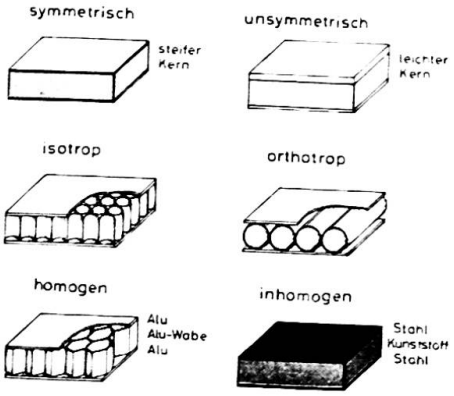


Bild 2: Sandwichsysteme

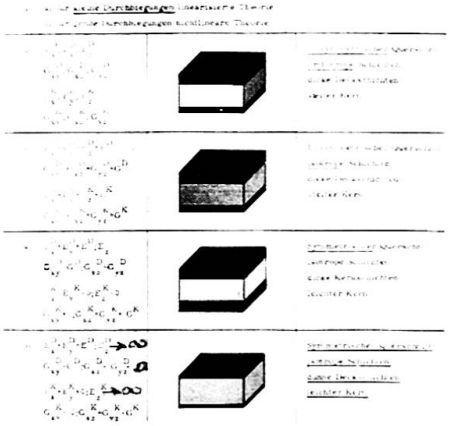


Bild 3: Physikalische Voraussetzungen der Sandwich-Plattentheorie

Der rasche Fortschritt in Luft- und Raumfahrt hat für die Zellenentwicklung eine Fülle von Veröffentlichungen im internationalen Schrifttum ausgelöst. Die Sandwichtheorie (Bild 3) unterscheidet mehrere Fälle unterschiedlicher physikalischer Voraussetzungen.

Die mathematische Behandlung kann für sehr kleine Durchbiegungen mit Hilfe der linearisierten Theorie und für große Durchbiegungen mit der genauen nichtlinearen Theorie durchgeführt werden, bei der die exakten geometrischen Gleichungen in die Differentialbeziehungen eingehen.

Für kleine Durchbiegungen wird unter der Voraussetzung der Linearisierung das Biegeproblem einer dreischichten unsymmetrischen Sandwichplatte mit zwei dicken orthotropen Deckschichten und einer steifen orthotropen Kernschicht, also mit jeweils drei verschiedenen E-Moduli in jeder Ebene einer Schicht, nach Dundrová, Kovařik und Šlapák beschrieben durch die beiden simultanen Diff. - Gleichungen

$$\begin{matrix}(10)\\(8)\end{matrix}\ \begin{matrix}L\cdot\omega = -p & (1)\\ L^{*}\cdot\varphi = q & (2),\end{matrix}$$

bei denen 17 unbekannte Funktionen, die von den Variablen x und y abhängen, durch eine allgemeine Verschiebungsfunktion ω und eine allgemeine Spannungsfunktion φ ersetzt werden. L und L^{*} sind umfangreiche lineare partielle Differential-Operatoren von 10. und 8. Ordnung.

Für symmetrische, isotrope Sandwichplatten mit dicken Deckschichten aber leichtem Kern vereinfacht sich das Problem wesentlich. Die getroffenen Voraussetzungen (Bild 3) für die Elastizitäts- und Schubmoduli bedeuten

für die Deckschichten, daß die Dehnungen und Verzerrungen senkrecht zur Plattenebene gegenüber denen des Kerns vernachlässigbar klein sind.

Für den Kern bedeuten sie, daß er keine Spannungen in der Plattenebene aufnimmt, sondern daß diese nur den Deckschichten zugeordnet sind.

Das Biegeproblem wird dann beschrieben durch die partielle Differential-

gleichung für die Mittelfläche des Kerns:

$$\Delta\Delta w = \underbrace{K_1 p_K}_{\text{Biegesteifigkeit}} + \underbrace{K_2 \cdot \Delta p_K}_{\text{Schubsteifigkeit}} + \underbrace{K_3 \cdot \Delta\Delta p_K}_{\text{Dehnsteifigkeit}} \qquad (3)$$

wobei Δ und $\Delta\Delta$ die Laplace' schen Operatoren 2. und 4. Ordnung darstellen.

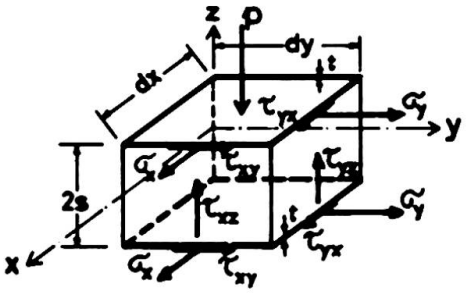


Bild 4: Spannungen am Sandwich-Plattenelement

Im Falle dünner Deckschichten mit leichtem Kern, wenn also ein Membranspannungszustand der Deckschichten angenommen werden kann, wird die gesamte Querkraft vom Kern aufgenommen (Bild 4). Für die Lösung dieses baupraktisch wichtigen Falles eignet sich gut das Ritz' sche Verfahren, das sich auf das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie stützt. Dieses kann formuliert werden in dem Ausdruck:

$$\delta A_1 + \delta A_a = 0. \qquad (4)$$

Das Potential der inneren Kräfte in den Deckschichten ist:

$$A_i^D = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy})\, dV \qquad (5)$$

und das Potential der äußeren Kräfte

$$A_a^D = -\iint p\, \bar{w}\, dx\, dy \qquad (6)$$

Analog gilt für das Potential infolge der Schubverformung des Kerns:

$$A_i^K = \frac{1}{2} \int (\tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz})\, dV \qquad (7)$$

$$A_a^K = -\iint p\, \bar{\bar{w}}\, dx\, dy \qquad (8)$$

Mit den Hooke' schen Gleichungen und nach Ersetzen der Verzerrungen und Spannungen durch Verschiebungen in üblicher Weise nach der Plattentheorie erhält man mit $z = \pm s$ und $dV = 2\, t\, dx\, dy$ die Formänderungsarbeit der beiden Deckschichten:

$$A^D = \frac{E\, s^2\, t}{1 - \mu^2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right)^2 - 2 (1 - \mu) \cdot \left[\right. \right.$$

$$\left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] \iint dx\, dy - \iint p\, \bar{w}\, dx\, dy \qquad (9)$$

und mit dz = 2 s die Formänderungsarbeit des Kerns

$$A^K = G^K \cdot s \iint \left[\left(\frac{\partial \bar{\bar{w}}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\bar{w}}}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy - \iint p\, \bar{\bar{w}}\, dx\, dy \qquad (10)$$

Die Spannungen in den Deckschichten lauten:

$$\sigma_x = - \frac{z \cdot E^D}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2}\right) \qquad (11)$$

$$\sigma_y = - \frac{z \cdot E^D}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}\right) \qquad (12)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{z \cdot E^D}{1 - \mu} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x\, \partial y} \qquad (13)$$

und in der Kernschicht:

$$\tau_{xz} = G^K \frac{\partial \bar{\bar{w}}}{\partial x} \qquad (14)$$

$$\tau_{yz} = G^K \frac{\partial \bar{\bar{w}}}{\partial y} \qquad (15)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsanteil $\bar{w}$ der Deckschichten und dem Anteil $\bar{\bar{w}}$ des Kerns wird hergestellt durch die Bedingung, daß in der Grenzzone zwischen Deckschicht und Kern Gleichgewicht zwischen der Schubspannung im Kern und der Spannungsänderung in der Deckschicht herrschen muß, also für:

$$z = \pm s: \quad \tau_{xz} = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) \cdot t \qquad (16)$$

$$\tau_{yz} = \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) \cdot t \qquad (17)$$

Diese ~~Rand~~Übergangsbedingungen lassen sich in Verschiebungen ausdrücken:

$$-\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \frac{E^D \cdot s \cdot t}{G^K(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x \cdot \partial y^2} \right) \qquad (18)$$

$$-\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = \frac{E^D \cdot s \cdot t}{G^K(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \cdot \partial y} \right) \qquad (19)$$

Zur Lösung der Aufgabe wählt man die beiden Ritz-Ansätze:

<u>für die Deckschicht:</u> $\bar{w} = \sum_{mn} a_{mn} \cdot f_{mn}(x,y)$ (20)

<u>für die Kernschicht:</u> $\bar{\bar{w}} = \sum_{mn} b_{mn} \cdot g_{mn}(k,y)$ (21)

Das Minimum der potentiellen Energie verlangt, daß die Ableitungen der Potentiale nach den Koeffizienten a_{mn} und b_{mn} verschwinden, also

$$\frac{\partial A^D}{\partial a_{mn}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial A^K}{\partial b_{mn}} = 0 \qquad (22)\ (23)$$

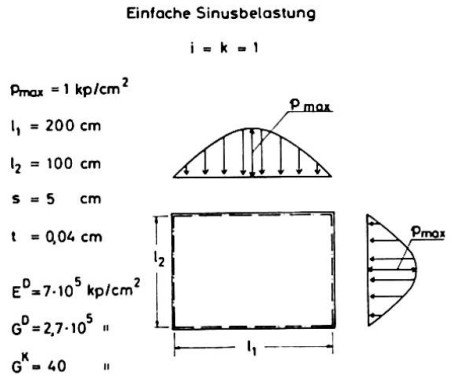


Bild 5: Zahlenbeispiel: einfache Sinusbelastung

	Energiemethode		Linearisierte Diff. Gleichung		nicht lineare Theorie
w	2,466 cm	+0,04%	2,467 cm	+0,08%	2,465 cm
max σ	+1745 kp/cm²	-6,1 %	+1703 kp/cm²	-8,4 %	+1859 kp/cm²
min σ	-1745 kp/cm²	+8,5 %	-1746 kp/cm²	+8,5 %	-1609 kp/cm²

Bild 6: Vergleich der Ergebnisse

Die recht gute Übereinstimmung der Näherung nach der Energiemethode mit den genaueren Lösungen der Diff. - Gleichung und der nichtlinearen Theorie (Bild 6) zeigt im Vergleich ein Zahlenbeispiel für einfache Sinusbelastung (Bild 5).

Wie sich in einer besonderen Untersuchung zeigen läßt, ist die Theorie brauchbar, wenn folgende Grenzen eingehalten werden:

$$\frac{2\,s}{t} \geq 100 \qquad (24)$$

$$\frac{E^D}{E^K} \geq 5000 \qquad (25)$$

$$\frac{l}{s} \geq 0,2 \sqrt{\frac{E^D}{E^K}} \qquad (26)$$

Mit einem gewissen Vorbehalt wird man aber die auf der Grundlage der idealisierten Elastomechanik gewonnenen Ergebnisse der Sandwichtheorie werten und zur praktischen Nutzung experimentell modifizieren müssen, besonders, wenn Kern- oder Deckschichten aus einem Material bestehen, das nicht dem linearen Hooke' schen Elastizitätsgesetz gehorcht, wie z. B. Kunststoff (Bild 7). Polyurethan-Hartschaum für Kerne von Sandwichtragwerken zwischen Stahlblechen ist dennoch besonders geeignet wegen der für die Beanspruchungen des Hochbaus relativ hohen Tragfähigkeit, des geringen Gewichts und der hervorragenden Wärmedämmung, insbesondere aber wegen der direkten Verklebung mit den Stahldeckblechen. Werden die flüssigen Komponenten Polyol (Markenname Bayer: Desmophen) und Polyisocyanat (Desmodur) zusammen mit Fluortrichlormethan (Markenname Frigen von Hoechst) als Treibmittel und einem Aktivator genau dosiert zwischen die Stahlbleche eingespritzt, dann treibt nach wenigen Sekunden das Gemisch in einer exothermen

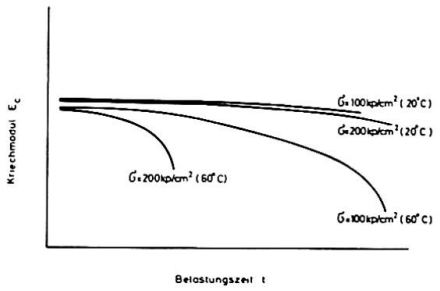


Bild 7: E-Modul-Kennfunktionen von Kunststoffen

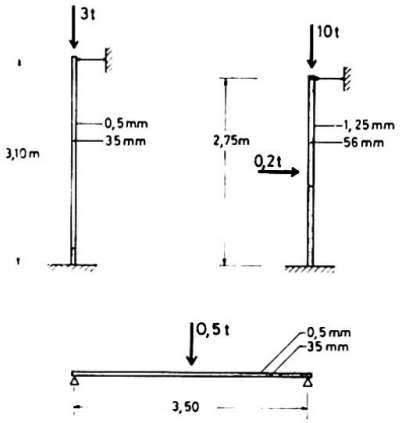


Bild 8: Sandwichtraglastversuche

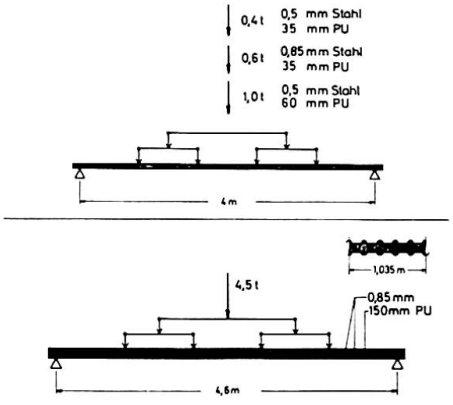


Bild 9: Sandwichtraglastversuche

Reaktion auf, und der Hartschaumkunststoff, dessen Raumgewicht etwa zwischen 50 und 200 kg/cbm variiert werden kann, verbindet sich schubfest mit den Stahldeckblechen. Versuche über Tragfähigkeiten von Stahl/Polyurethan-Sandwichflächentragwerken haben im Hinblick auf ihr geringes Eigengewicht

außerordentlich hohe Tragfähigkeiten ergeben (Bild 8 und 9). Bei der Variation der Dicke der Stahlblechdeckschichten und der Dicke des PU-Hartschaumkerns bestätigten die Versuche das zu erwartende Ergebnis, daß durch die Erhöhung der Kernschichtdicke höhere Traglasten erreicht werden als durch eine entsprechende Erhöhung der Deckschichtdicke. Darüber hinaus zeigt die Kostenrechnung für den Fall der höheren Traglast durch die vergleichsweise dickere Kunststoffkernschicht das wirtschaftlichere Ergebnis.

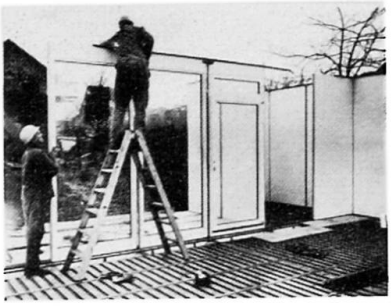


Bild 10:Stahl/PU-Sandwichwandtafeln

Zahlreiche Bauten sind bereits in Stahl/Polyurethan-Sandwichtechnik ausgeführt worden. Die tragenden Wandtafeln (Bild 10) des in Bild 11 gezeigten Hauses nehmen mit etwa 4facher Sicherheit alle den deutschen Hochbauvorschriften entsprechenden Eigengewichts-, Wind- und Schneelasten auf bei einer freien Spannweite des Daches von 10 m. Ein anderes Sandwichprodukt (Bild 12) aus beiderseits 0,5 mm dicken Stahlblechen mit 35 mm

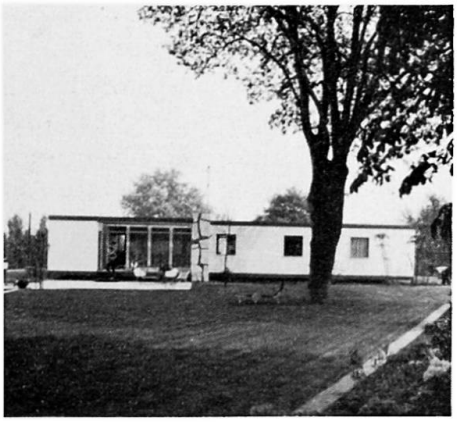


Bild 11: Haus mit Sandwichwandtafeln

Bild 12: Stahl/PU-Sandwichwandtafeln für Industriehallen

oder 60 mm dicken Polyurethankernen mit Nut- und Federverbindung für die Beplankung von Industriehallen wird vollkontinuierlich im Plattenband mit einer

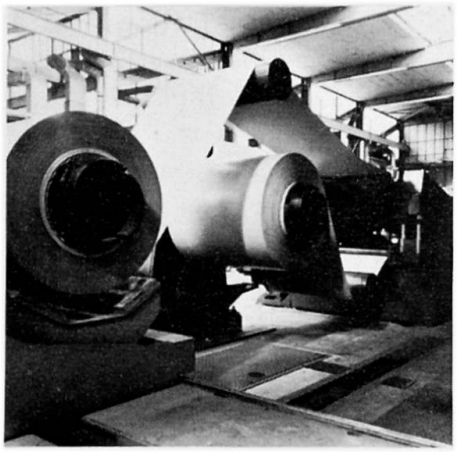


Bild 13: Stahl/PU-Sandwichkontilinie

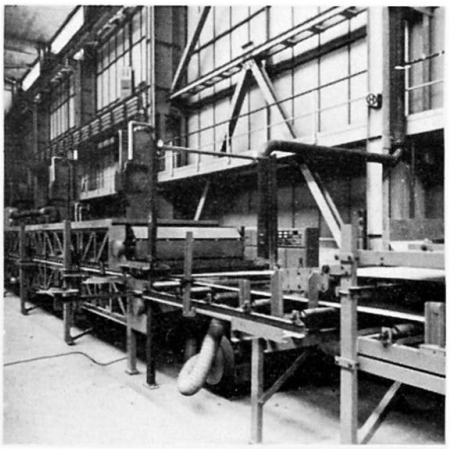


Bild 14: Stahl/PU-Sandwichkontilinie

Geschwindigkeit von 3 - 5 m pro Minute hergestellt (Bild 13 und 14). Neu entwickelte Sandwich-Trapezprofilplatten (Bild 15 und 16) kombinieren die Profil-

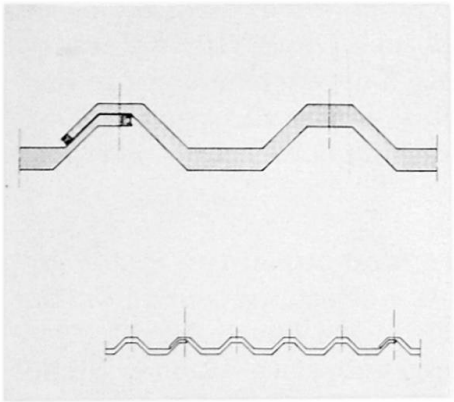


Bild 15: Trapez-Sandwichplatten

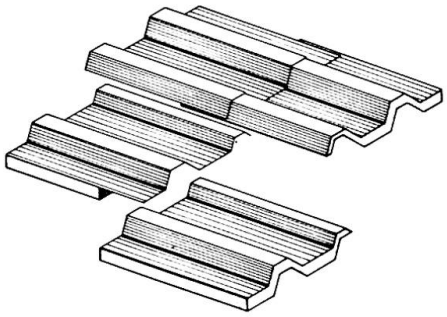


Bild 16: Trapez-Sandwichplatten

steifigkeit mit der Sandwichsteifigkeit und gewährleisten die erforderliche Wärmedämmung mit Dampfsperre. Durch die nicht parallele, sondern kongruente Ausbildung der beiden Deckschichten werden die Platten ineinander stapelbar. Bei der Seitenstoßdeckung der Längsränder ist die gemeinsame Dicke der überlappten Stoßfuge gleich der Dicke des Normaltrapezquerschnitts, und die Längsstoßdeckung wird erreicht durch Überschießen des dünnen oberen Deckbleches der oberen Platte.

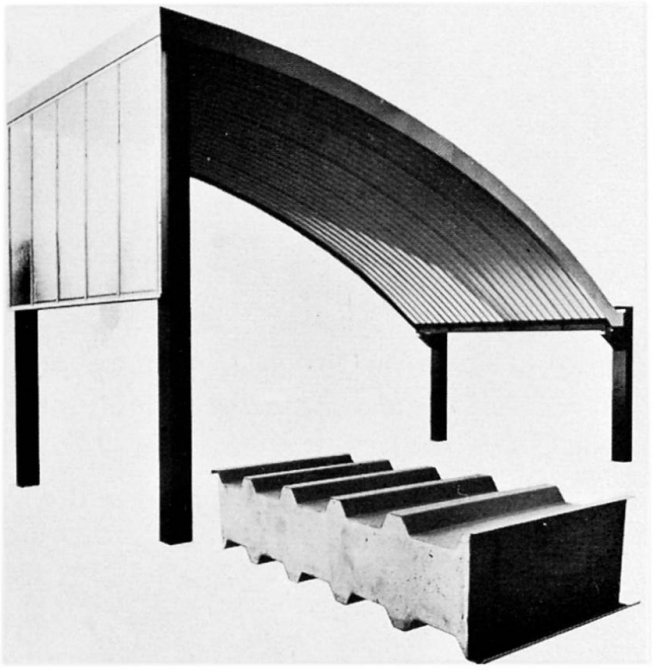


Bild 17: Sandwich-Zylinder-Schalendach

Die Kombination dreier Versteifungsarten, nämlich Sandwichversteifung mit der Profil- und der Schalenversteifung wurde bei dem 10 m bis 15 m weitgespannten Kreiszylinderschalendach nach Bild 17 angewandt. In der Planung ist z. Zt. eine 40 - 50 m weitgespannte Kugelschale in Sandwichbauweise aus Fertigteilen mit Ortausschäumung der Fugen (Bild 18), wobei für die Deckschichten 1 mm dickes verzinktes und kunststoffbeschichtetes Stahlblech und für die Kernschicht 150 mm dicker Polyurethan-Hartschaum vorgesehen ist. Die Firmen Bayer (Chemie) und Hoesch (Stahl) beabsichtigen, diese weitgespannte Sandwichkuppel als Demonstrations- und Versuchsobjekt für die Internationale Messe 1969 in Hannover zu errichten.

Es liegt natürlich nahe, für höchste Beanspruchungen im Hoch- und Brükkenbau auch an Stahlkerne für im Werkstoff homogene Sandwichplatten zu denken. Erste Überlegungen zielen mit Trapez- und Röhrenkernschichten auf isotrope (Bild 19) wie auch auf orthotrope (Bild 20) Sandwichtafeln, die als Brük-

kenfahrbahntafeln eingesetzt werden könnten. Die schubfeste Verbindung zwischen Stahldeckschichten und Stahlkernschichten wirtschaftlich herzustellen, wird das eigentliche Problem darstellen.

Die aus der Luft- und Raumfahrt übernommene Sandwichtechnik bietet dem Stahlbau die Möglichkeit, in Ergänzung zum Skelett-Stahlbau den Kontinuum-Stahlbau wirtschaftlich zu betreiben und neben den orthotropen Rippenstahlfahrbahnen möglicherweise eine reizvolle Variante in Gestalt von Sandwichstahlfahrbahnen zu entwickeln.

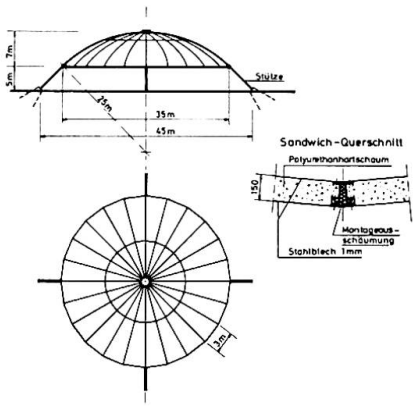


Bild 18: Sandwich-Kugelschale

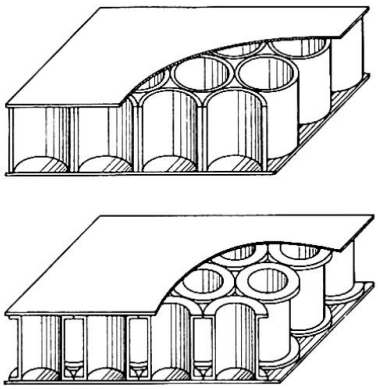


Bild 19: Isotrope Stahlkern-Sandwichplatten

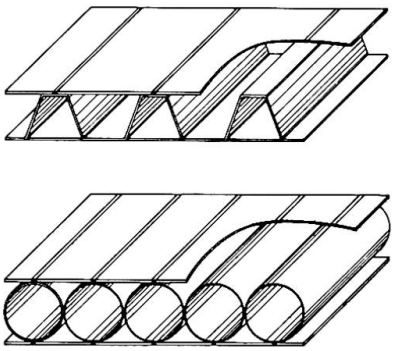


Bild 20: Orthotrope Stahlkern-Sandwichplatten

Neben dem Ausbau der Theorie werden weitere Versuche notwendig sein, die wie die vorausgegangenen an den Stahlbau-Instituten der Technischen Universitäten Darmstadt und Karlsruhe durchgeführt werden sollen.

Literaturverzeichnis

1. Williams, D. — Flat sandwich panels under compressive end loads Roy. Aircr. Est., 1941

2. Flügge, W. Marguerre, K. — "Théorie de la stabilité en compression de la Plaque Sandwich" - Les dimensions optima de la Plaque Sandwich comprimée" - Rep. 421 R1 und 421 R2, Off. Nat. d' Etudes et de Recherches Aéronautiques, Paris 1947

3. Reissner, E. — Contributions to the problem of structural analysis of sandwichtype plates and shells. Theorie and practice of sandwich construction in aircraft. A symposium Preprint No. 165/ 1948

4. Reissner, E. — Finite deflections of sandwich plates. - Journal of the aeronaut. sci. Vol. 15, No. 7, 1948

5. Neuber, H. — "Theorie der Druckstabilität der Sandwichplatte", ZAMM/ 1952, Nr. 11, 12, 33 und 1953 Nr. 1, 2

6. Prusakov, A. P. — Osnovnyje uravnenija izgiba i ustojčivosti trechslojnych plastin s legkim zapolnitelem, 1951

7. Dundrová, V. Kovařík, V. Šlapák, P. — Teorie ohybu sendvičových desek, 1965

8. Jungbluth, O. Witte, H. — Das Verbundsystem Stahl/Kunststoff in der Sandwich-Technik. HOESCH-Berichte aus Forschung und Entwicklung unserer Werke, Heft /68, z. Zt. im Druck

ZUSAMMENFASSUNG

Neben den im Stahlbau üblichen 3 Versteifungsarten von Stahlblechen, das Krümmen zu Schalen, das Profilieren der Gesamtfläche, das Anfügen von Einzelrippen, bietet eine 4. Versteifungstechnik, das Zusammenfügen zur Sandwichbauweise, Vorteile. Für das System Polyurethan-Hartschaum zwischen Stahldeckblechen liefert die Energiemethode mit dem Ritz'schen Verfahren genügend genaue Ergebnisse, die mit Traglastversuchen recht gut übereinstimmen. Neuartige Sandwich-Flächentragwerke, darunter solche großer Spannweite, werden beschrieben.

SUMMARY

Apart from the traditional methods of tempering steel sheets

- chilling
- profiling of the whole surface
- ribbing

a fourth method, laminating in sandwich style, offers advantages. The energy method (Ritz treatment) gives sufficiently accurate results agreeing very well with the loading tests to justify the "polyurethane hard foam between steel sheets" system. Novel sandwich sheet supporting structures including those with extensive width span are being described.

RÉSUMÉ

En dehors des trois manières habituelles dans la construction métallique de raidissement des tôles d'acier, à savoir:

- le pliage en coquille
- le profilage de la surface totale
- l'adjonction de barres de renforcement séparées

un 4ème procédé technique de raidissement, c'est-à-dire l'assemblage sous forme de sandwich présente des avantages. Pour le système de mousse dure de polyurethan entre des tôles d'acier, la méthode d'énergie suivant le procédé de Ritz donne des résultats assez précis qui concordent bien avec les essais de charge. Des récents éléments de support sandwich, notamment de grandes portées, sont décrits.

Leere Seite
Blank page
Page vide

DISCUSSION LIBRE / FREIE DISKUSSION / FREE DISCUSSION

E. R. BRYAN
University of Manchester

In the Preliminary Publication several General Reporters on various themes referred to the stiffening effect of cladding in buildings. In particular, the paper presented by Dr. Errera shows that light steel cladding has a profound effect in bracing beams and columns, but the stiffness of the diaphragm in shear had to be determined experimentally because no reliable theory had been developed.

Work carried out in recent years at Manchester supplements this work and has been aimed at predicting the effect of light steel cladding, not on member behaviour, but on the overall behaviour of the building, particularly industrial type portal frame buildings. Tests have been made in the field and in the laboratory and large reductions in the frame moments and deflexions were recorded due to the cladding. In this early work it was necessary to carry out separate shear tests on panels of sheeting and, using these results, good correlation with the theory allowing for the sheeting was obtained. More recently, other shear tests on diaphragms have been carried out and a theory has been developed which allows for the effect of deformation of the corrugations, slip at the sheet fasteners and twisting of the purlin-rafter connexions.

I draw attention to these points, as, with proper safeguards, the design of industrial buildings could be made more rational and economical by allowing for the effect of the light cladding in both member design and overall design. Certainly it must be taken into account if a reliable analysis is to be made of a frame in an actual building.

Leere Seite
Blank page
Page vide

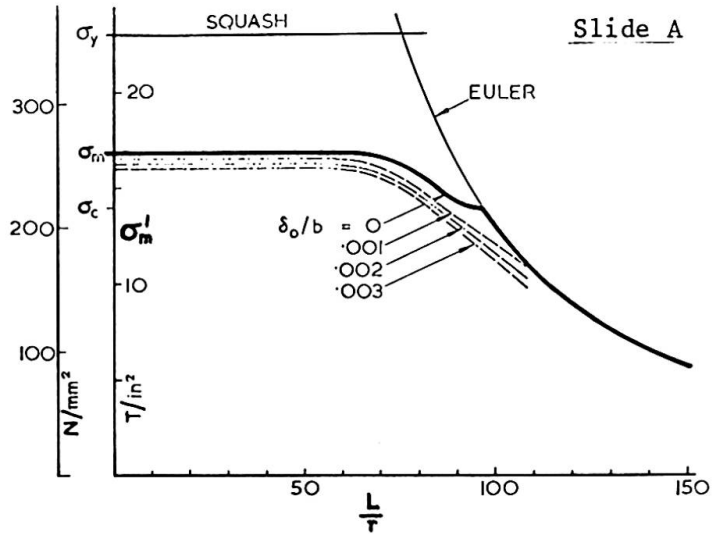
Free Discussion

Discussion libre

Freie Diskussion

J. B. DWIGHT, M.A., C.Eng.,
Lecturer,
Department of Engineering,
University of Cambridge,
England

Dr. Graves Smith's interesting work on the interaction between local buckling and overall buckling could be of considerable importance in terms of practical design. Slide A shows some theoretical curves which he has given elsewhere and which refer to a square tubular column, having walls with a width to thickness ratio (b/t) of 60, in a steel with a yield stress of about 23 ton/in^2 (355 N/mm^2). They show failure stresses plotted against slenderness ratio, assuming pin-ends. The full curve refers to a perfect member, without imperfections, and is similar to those he shows for aluminium columns in fig. 7; curves of this type have also been obtained by Bijlaard and Fisher. The dashed curves refer to members which contain a slight initial sinusoidal waviness in the component plates. Real-life members always contain geometrical imperfections, and I think we must consider the dashed curves as being the more realistic in practical terms. Instinct would make one want to round off the corner, and I believe that Dr. Graves Smith has done some tests on steel columns, not reported here, that in fact agree with this view.

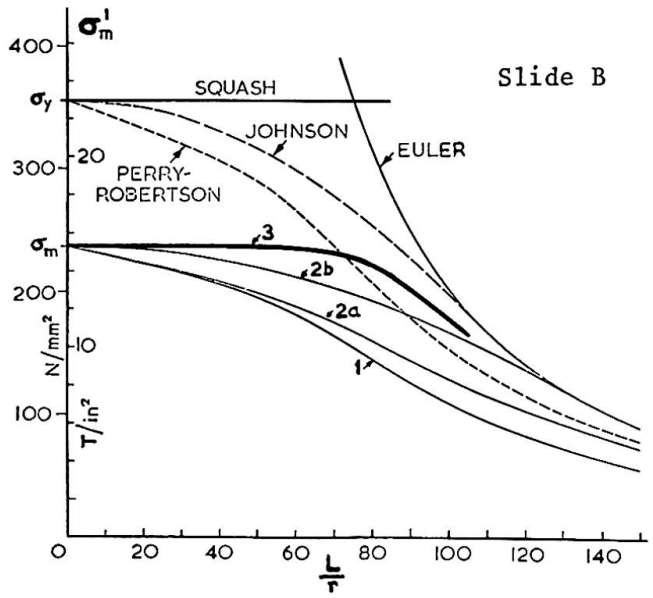


Slide A

The interesting thing on all the curves is the long flat portion, showing that the full section strength can be developed up to a considerable member length. In slide B, which refers to the same section, these results are compared with two current design philosophies, curve 3 being Grave Smith's theoretical one for a member having a small initial waviness. In heavy steel design it is common to use a simple "effective width" procedure, in which one

takes a fixed effective width for each plate and disregards the rest. Thus for a thin square tube a certain area in the middle of each side is assumed ineffective and is ignored, and the load carrying capacity is based on what is left, regardless of the length of the column. Curve 1 shows the effect of this procedure, and it is seen to be very over-safe when compared with Graves Smith's findings, and to under-estimate the strength by up to 30%.

The light-gauge steel people do it differently. Their procedure is to construct a modified strut-curve, based on a fictitious material with a yield stress equal to the maximum stress (σ_m) for a short column. Curves 2a and 2b show the effect of doing this, curve 2a being a Perry Robertson type of strut-curve (Great Britain), and curve 2b a Johnson parabola (United States). The variation between 2a and 2b is due not to any basic difference in local buckling philosophy, but simply to the different column formulas used in the two countries. It is seen that the British curve (2a) seems still too safe while the American curve (2b) appears more realistic. (For comparison there are also shown, dashed, the basic columns curves used in the two countries).



I finish by saying that, although Graves Smith's general finding is very interesting and should lead to economies, it needs confirming by practical tests on larger specimens, with different section shapes and including residual stresses. Unsymmetrical sections might have a different behaviour.

Post-buckling of Simply-Supported Square Plates

Voilement post-critique de tôles carrées à support articulé

Überkritisches Beulen einfach aufgelegter Quadratplatten

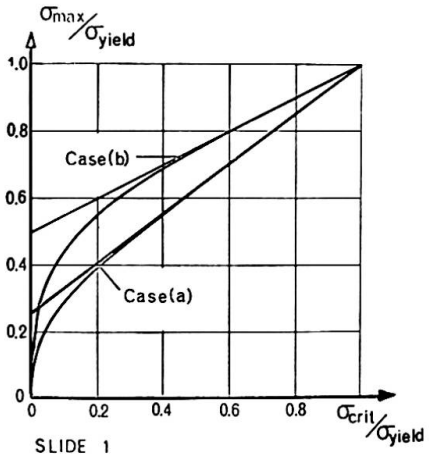
A. C. WALKER
Department of Civil Engineering
University College, London

This contribution is concerned with the post-buckling behaviour of simply supported square plates. The in-plane conditions are that the loaded edges are straight and for unloaded edge we take
Case (a) the edges are free to wave; Case (b) the edges are straight but may move bodily.

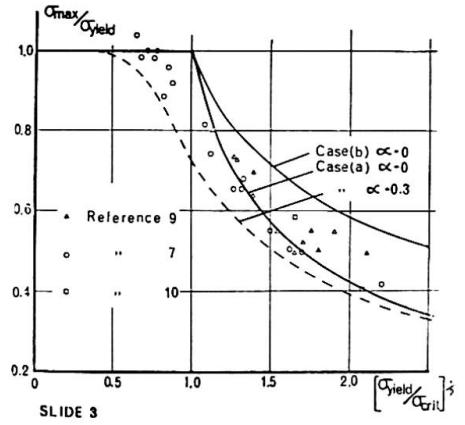
The problem is formulated mathematically in terms of the von Kármán equations which are then reduced to a series of simultaneous cubic algebraic equations by assuming series for the deflection and the stress function. Now, however, instead of solving these algebraic equations exactly we use a perturbation method to obtain a sequence of approximations which may be shown to give results almost identical to those of Levy and Coan who solved the equations by successive approximations. The advantage of the perturbation technique is that it results in explicit expressions for the deflection and stress distribution in terms of the applied and critical loads for the plate.

By employing a simple collapse criterion, namely that collapse occurs with the onset of yield on the longitudinal edge, it is possible to obtain explicit expressions for the collapse loads. Slide (1) shows the results; in this the straight lines come from the first approximation in the perturbation technique, the second approximation may be shown, by comparison to previous results, to be sufficiently accurate up to a load three to four times the critical load. It should be noted here that the parameters $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{yield}}$, $\frac{\sigma_{crit}}{\sigma_{yield}}$ occur naturally in the mathematics of the problem and fully confirm Chilver's intuitive use of them.

A generalised geometric imperfection may be included in the analysis such that its amplitude is proportional to the reciprocal of the buckling stress, then for Case (a) we obtain the dotted line in Slide (2). In this α is the



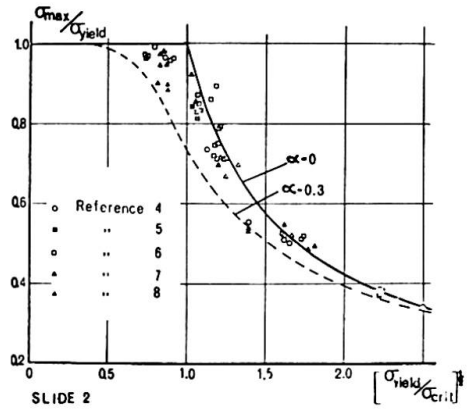
SLIDE 1



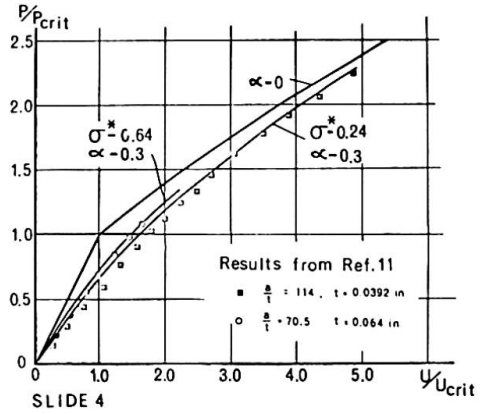
SLIDE 3

constant of proportionality and α = 0 is of course the results for a perfect plate. The experimental results in this figure are for square tubes, both aluminium and steel. Slide (3) shows corresponding results for steel and aluminium plates. The greater scatter is attributed to defective edge boundaries.

Slide (4) shows results of Case (a) for non-dimensional end shortening plotted against non-dimensional load. The results are for mild steel plates.



SLIDE 2



SLIDE 4

It should be emphasised that this perturbation technique is general and may be extended to other more complex boundary and loading conditions by using a digital computer and some discretization method such as finite elements. The simple cases outlined here were chosen only for clarity of presentation.

A full report of this work is to be published in the Aeronautical Quarterly where the references are listed.

Nomenclature

a = plate width, t = plate thickness,
P = total applied load, P_{CRIT} = theoretical buckling load,
U = end shortening, U_{CRIT} = end shortening corresponding to P_{CRIT}
α = generalised imperfection parameter,
σ_{CRIT} = average stress, σ_{MAX} = average applied stress at collapse,
σ_{YIELD} = material yield stress,
σ^* = non-dimensional buckling stress, $\sigma^* = \sigma_{CRIT}/\sigma_{YIELD}$

Probleme der Kaltverfestigung im Stahlleichtbau

Problèmes de l'écrouement dans la construction légère en acier

Problems of Cold-Hardening in Light-Weight Steel Construction

PAUL EIDAMSHAUS
Dipl.-Ing.

In den "Beiträgen zur vorbereiteten Diskussion" sind in der Fußnote zum Referat II a 2 Versuche der HOESCH AG erwähnt. Nicht von den Ergebnissen dieser Versuche - vielmehr von einem besonderen Fall der Nutzung der Kaltverfestigung in der Praxis soll hier berichtet werden.

Ausgehend von dem Gedanken, daß für die Zulassung höherer Spannungen nicht der Mittelwert der Streckgrenze eines Querschnitts - sondern im allgemeinen ihr Minimum maßgebend ist, haben wir uns seit langem besonders mit der Frage befaßt, wie im Walzprofilierverfahren eine möglichst gleichmäßige Streckgrenzenerhöhung über den ganzen Querschnitt eines Kaltprofils - also auch in den ebenen Querschnittsteilen - erzielt werden kann. Die Möglichkeit ist gegeben und wird seither in zahlreichen Fällen praktisch nutzbar gemacht.

Im Bild 1 ist als Beispiel ein trapezförmiges Profil aus einem Stahl St 37 (nach DIN 17 100) dargestellt. Die normale Streckgrenze des unverformten Bandes beträgt 24 kg/mm^2. Dagegen war für das fertige Profil eine Streckgrenze von im Mittel 38 kg/mm^2 gefordert, wobei kein Wert unter 36 kg/mm^2 liegen durfte. Das Diagramm zeigt in Schraffur den Bereich der Sollwerte und die in den verschiedenen Punkten des Querschnitts tatsächlich erreichten Streckgrenzenwerte, die durchweg höher liegen. Der Linienzug darüber gibt die jeweilige Bruchgrenze an.
Die weitere Forderung nach einer mindestens 20%igen Bruchdehnung ist ebenfalls voll erfüllt, wie der untere Teil des Diagramms zeigt.

Dieses Profil ist als Längssteife der Stahlfahrbahn einer im Jahre 1962 gebauten Straßenbrücke erstmalig eingesetzt worden. Abgesehen von den kalt gezogenen Drähten in den Kabeln der Hängebrücken ist dies meines Wissens der erste Fall einer Nutzung der Kaltverfestigung im Brückenbau.- Bild 2 zeigt Längs- und Querschnitt - Bild 3 eine Ansicht dieser Brücke.- Seither sind solche Kaltprofile mit erhöhter Streckgrenze vielfach im Brückenbau eingesetzt worden. Bild 4 zeigt eine Ausführung der letzten Zeit: Die Straßenüberführung über Eisenbahngleise bei Ludwigshafen am Rhein.

Mit dieser Anwendung der Kaltverfestigung ergeben sich interessante wirtschaftliche Vorteile:

Einmal ermöglicht die im Walzprofilierverfahren herstellbare große Länge der Profile (bis etwa 15 m und eventuell länger) eine weitgehende Automatisierung bei der Fertigung der Fahrbahntafel,

insbesondere aber wird der Güteaufpreis gespart, der für den sonst erforderlichen höherwertigen Baustahl (zum Beispiel St 52 nach DIN 17 100 mit der natürlichen Streckgrenze von 36 kg/mm^2) aufgewandt werden müßte. Dabei bleibt die bessere Schweißbarkeit des St 37 als zusätzlicher Vorteil erhalten.

Anmerkung:

Die Veröffentlichung der Bilder 2, 3 und 4 erfolgt mit freundlicher Genehmigung der Rheinstahl Union AG, Dortmund, der ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen möchte.

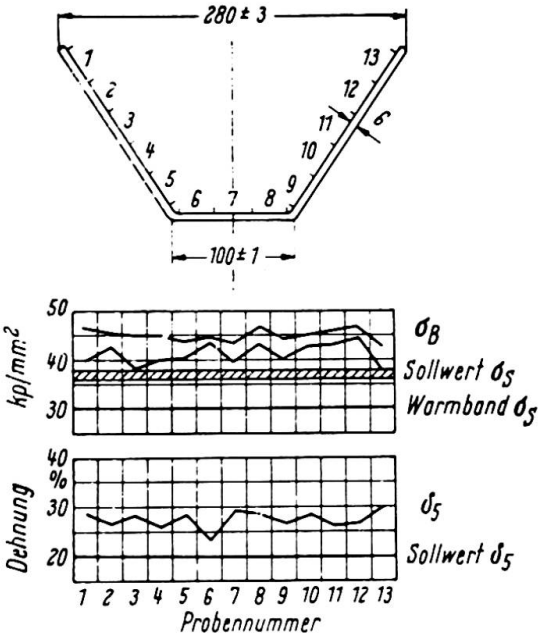


Fig. 1 Mechanische Werte eines Trapezprofils St 37-3 m.e.S.

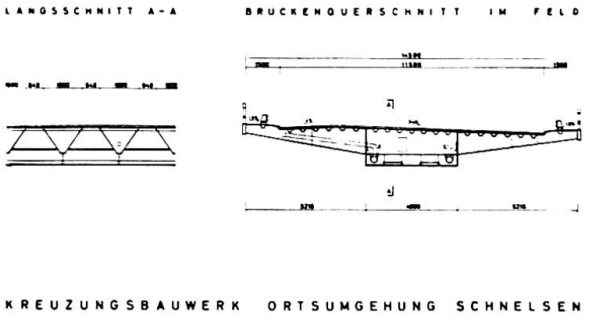


Fig. 2

Fig. 4

Fig. 3

Leere Seite
Blank page
Page vide

Computation of the Postbuckling Strength of Thin-walled Sections

Calcul de la charge limite de piles à parois minces dans le domaine post-critique

Berechnung der Tragfähigkeit dünnwandiger Stützen im überkritischen Bereich

P. S. BULSON
Great Britain

In their interesting paper, Professors Chilver and Reiss have indicated discrepancies when the simple design method is applied to lipped channels. Could I ask whether, in their calculations for lipped channels,

(a) the elastic critical stress, σ_{cr}, was calculated by exact theory or measured experimentally,

(b) the lip was treated as a component plate offering simple support to the flange; and if so, whether K_i for the flange was taken as 4, and K_i for the lip as 0.425?

Could the authors also comment, please, on the assumption often made that lips of a given minimum size offer simple support to flanges in the postbuckling region. Tests suggest that after initial buckling the longitudinal junction between lip and plate does not remain straight.

Leere Seite
Blank page
Page vide

The Post-Buckled Strength of Thin-walled Columns

Tragfähigkeit dünnwandiger Stützen im überkritischen Bereich

Charge limite de piles à parois minces dans le domaine post-critique

P. S. BULSON
Great Britain

I refer to Fig. 7 in Dr. Graves Smith's paper, and to his earlier work quoted in reference 6. It appears that the elastic critical stress curve in the postbuckling region, taking account of overall column bending, approaches a second Euler curve with a reduced modulus E^*. Further, the effect of plasticity is to cause a sharp transition away from the elastic curve to the horizontal σ_{ult} line. For design purposes, the intersection of the E^* Euler curve and the σ_{ult} line could give an indication of the slenderness ratio below which overall column buckling has no effect on maximum strength.

Would Dr. Graves Smith please comment on

(a) the possibility of calculating the limiting E^* value by a simple analysis,

(b) the sharpness of the plasticity ~~of~~ transition.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Einfluß der Querschnittsverformung auf das Biegeknicken und das Biegedrillknicken

Influence of Cross-Sectional Distortion on Buckling an on Flexural-Torsional Buckling

Influence de la déformation dans la section sur le flambage et sur le flambage combiné flexion-torsion

RICHARD SCHARDT
Privatdozent Dr.-Ing.
Technische Hochschule Darmstadt
Deutschland

Es gibt eine große Zahl von Kaltprofilen, die nicht so dünnwandig sind, daß das Beulen zwischen den unverschieblich gedachten Kanten für den Spannungs- oder Stabilitätsnachweis Einfluß hat, die aber dennoch nicht ohne Berücksichtigung der Querschnittsverformung behandelt werden können. Die Voraussetzung für die alleinige Anwendung der Biege- und Wölbkrafttheorie ist entweder eine genügende Aussteifung der Querschnitte mit Schotten oder die Verteilung der äußeren Belastung über den Querschnitt, die den Schubkraftverteilungen aus den Querkraft- und Wölbschubspannungen entspricht. Bei beliebiger Verteilung der äußeren Last muß der Einfluß der Querschnittsverformung mit untersucht werden. Der Verfasser hat in der Arbeit (1) eine Theorie dargestellt, mit der diese Aufgabe zweckmäßig gelöst werden kann. Im Folgenden sollen nur einige Ergebnisse gezeigt werden, die diese Untersuchung liefert.

Als erstes Beispiel wird ein Stab mit dünnwandigem offenem Querschnitt behandelt, der an den beiden Enden in Gabeln gelagert ist, die gleichzeitig die Querschnittsverformungen an den Auflagern verhindern. Dieser Stab ist in der Scheibenebene zwischen den Querschnittspunkten 1 und 2 mit einer Querlast belastet. Die Querlast steht im Fünftelspunkt der Stablänge. Die Berechnung nach der Biege- und Wölbkrafttheorie liefert die in Bild 1b angegebene Spannungsverteilung über Querschnitt und Stablange. Bei genauer Berechnung mit Berücksichtigung der Querschnittsverformung erhält man dagegen die in Bild 1a angegebene Verteilung. Man erkennt, daß die dem Lastangriff benachbart liegenden Querschnittsteile, also die Punkte 0, 1 und 2, unter der Last erhebliche Spannungszuwächse erhalten, während die entfernter liegenden Punkte 3 - 7 ihr Spannungsmaximum garnicht mehr im Querschnitt des Lastangriffs sondern mehr zur Stabmitte hin haben. Sie sind nur indirekt belastet und das zeigt sich auch am ausgeglicheneren Verlauf der Spannungen über die Stablänge.

Bei der Theorie II. Ordnung liefern die Längsspannungen an den infolge der Verformung gekrümmten Fasern Abtriebskräfte in den einzelnen Querschnittsteilen, die in ihrer Verteilung über den Querschnitt auch nicht mehr mit den elementaren Schubkräften aus Biegung und Wölbkrafttorsion übereinstimmen. Die Folge dieser Differenzschubkräfte sind Verformungen des Querschnitts, die die Biegedrillknicklast vermindern. Suzuki und Okumura haben eine Arbeit (2) vorgelegt, in der dieser Einfluß untersucht wird. Mit einer Erweiterung der in (1) dargestellten Methode, die demnächst veröffentlicht wird, konnten die Er-

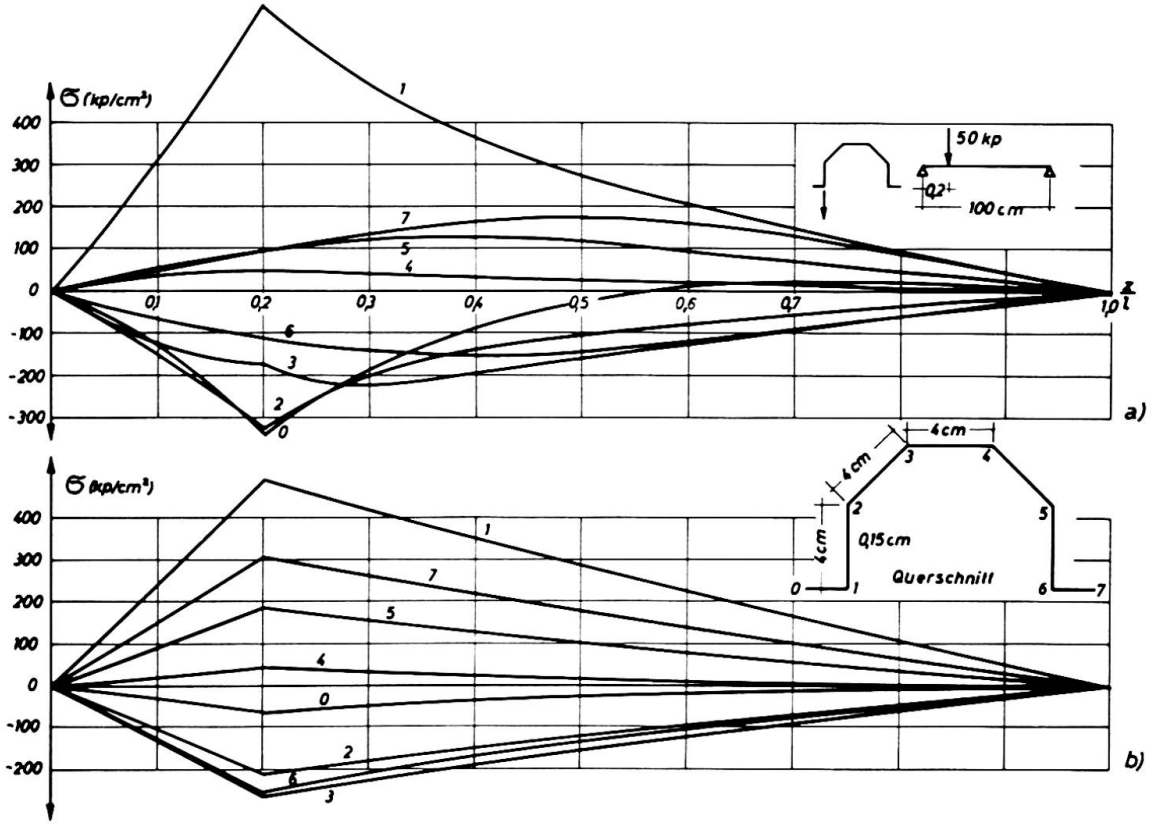


Bild 1 Verlauf der Längsspannungen, a) genaue Rechnung
b) querschnittstreue Rechnung

gebnisse von (2) in etwa bestätigt werden. Diese Ergebnisse gelten aber nur für eine bestimmte Querschnittsform. Die Untersuchung anderer Querschnittsformen zeigt, daß der in (2) betrachtete Querschnitt ein Ausnahmefall mit besonders kleinem Einfluß der Querschnittsverformung ist. Aus der Fig. 7 in (2) wird das deutlich, weil sowohl durch Vergrößern als auch durch Verkleinern der Krempe der ungünstige Einfluß der Querschnittsverformung wächst. Diesem Beispiel soll deshalb ein 6-fach abgeknicktes Hut-Profil gegenübergestellt werden. Im Bild 2 sind die antimetrischen "Beulknick"-Spannungen mit den Biegedrillknickspannungen verglichen, wobei die Krempenbreite variiert wird. Es zeigt sich, daß von einer bestimmten Länge ab, hier etwa von 110 cm aufwärts, das Biegedrillknicken die antimetrische Ausweichform genügend genau beschreibt. Bemerkenswert ist, daß bei einer Verbreiterung der Krempe die Biegedrillknickspannungen kleiner werden, woraus folgt, daß Hut-Profile im Bereich mittlerer und großer Schlankheiten dem U-Profil und erst recht dem C-Profil unterlegen sind. Im Bereich kleiner Schlankheiten wirkt sich dagegen die Verbreiterung der Krempe sowohl beim Hut-Profil als auch beim C-Profil positiv aus. Die Ergebnisse für das C-Profil zeigt Bild 4. Auch beim symmetrischen Ausweichen erhält man bei kleinen Schlankheiten einen starken Einfluß der Querschnittsverformung. Die Ergebnisse sind für das Hut-Profil in Bild 3 und für das C-Profil in Bild 5 angegeben. Die kritischen Spannungen sind dort etwa so groß wie die beim antimetrischen Beulknicken. Die Ergebnisse des reinen Biegeknickens sind liegen so hoch, daß sie auf Bild 3 nicht mehr darzustellen sind.

Schrifttum:

(1) S c h a r d t, R. "Eine Erweiterung der technischen Biegelehre für die Berechnung biegesteifer prismatischer Faltwerke." Der Stahlbau 35 (1966) H. 6, S. 161 - 171

(2) S u z u k i, Y und O k u m u r a, T. "Influence of Cross-Sectional Distortion on Flexural-Torsional Buckling." IVBH Kongress 1968

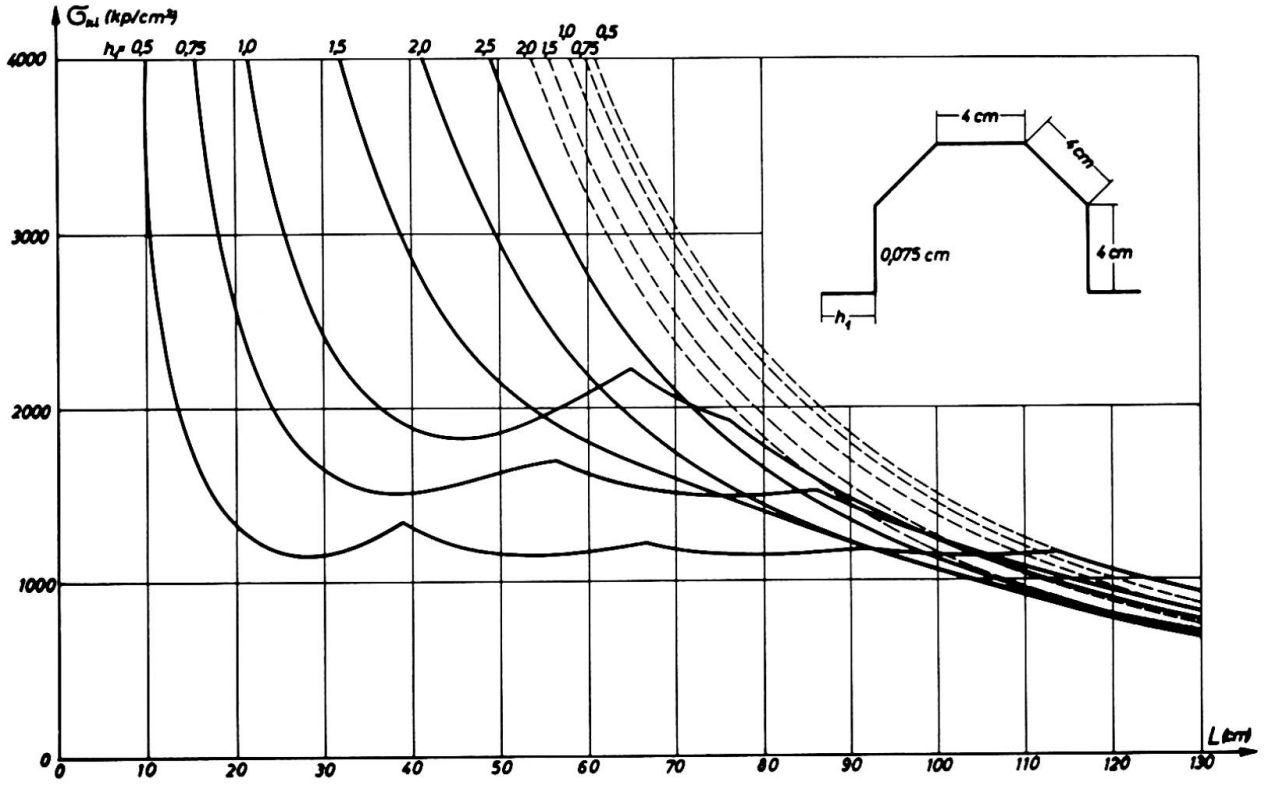


Bild 2 Biegedrillknickspannungen ---- und Beulknickspannungen —— antimetrisch für Hut-Profil (Gabellagerung)

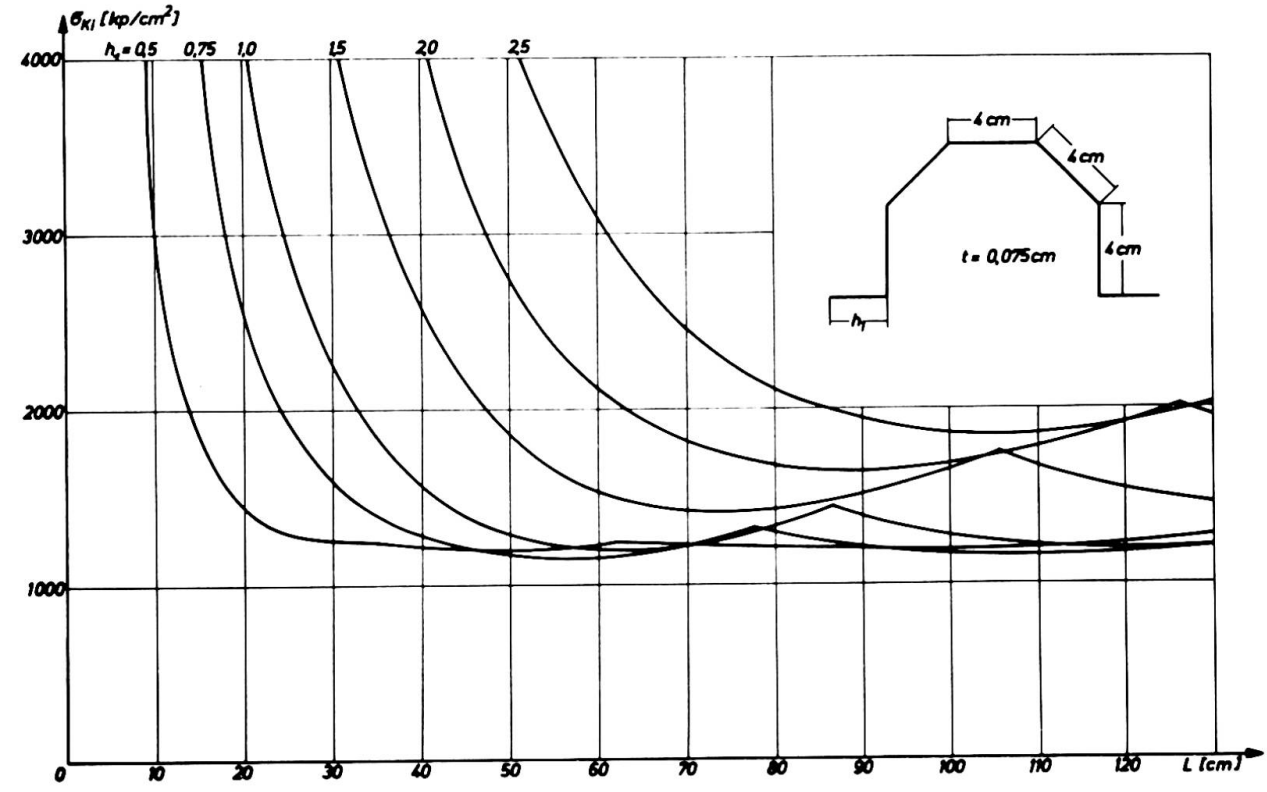


Bild 3 Beulknickspannungen symmetrisch für Hut-Profil (Gabellagerung)

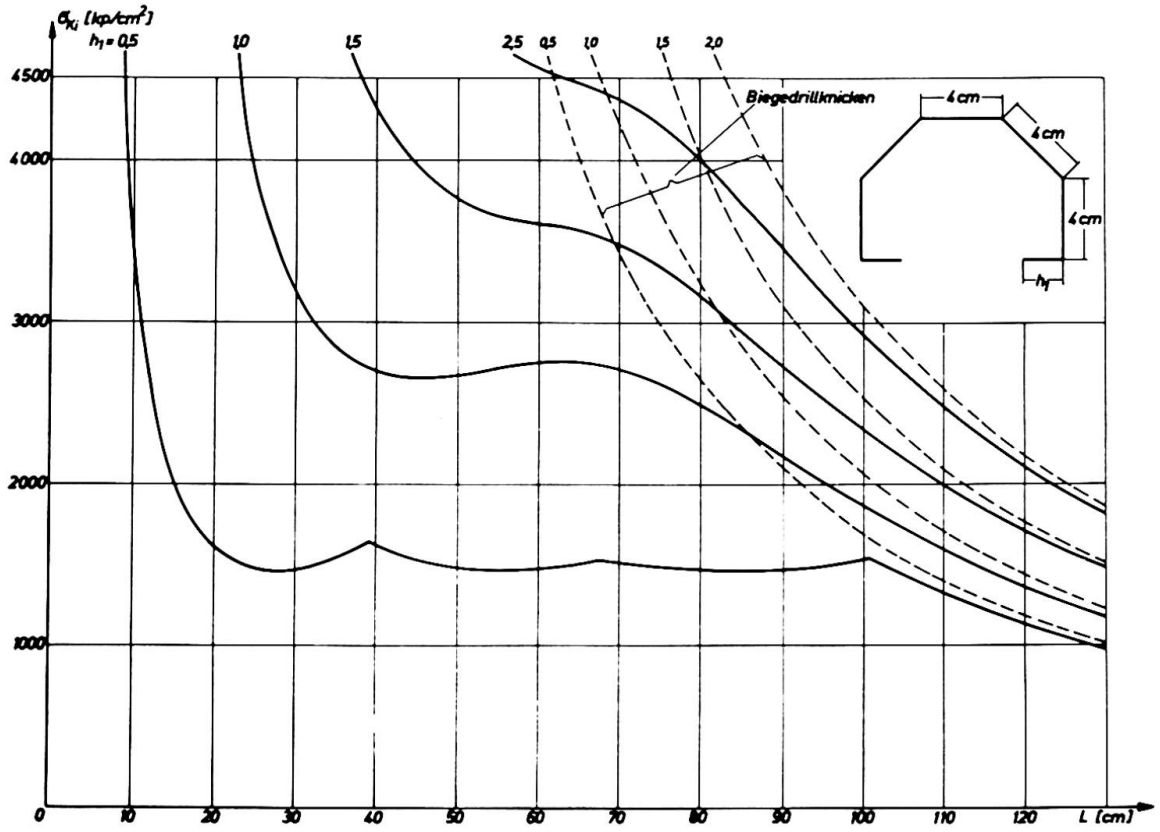


Bild 4 Biegedrillknickspannungen ---- und Beulknickspannungen ——— antimetrisch für C-Profil (Gabellagerung)

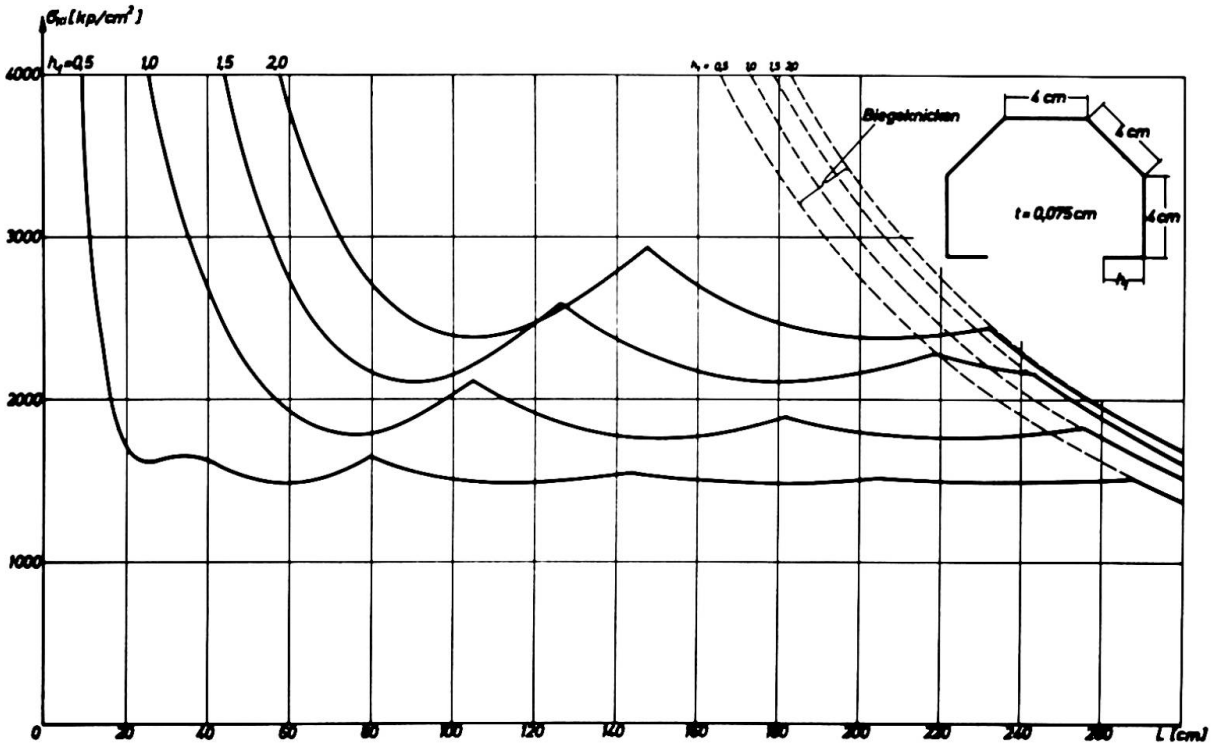


Bild 5 Biegeknickspannungen ---- und Beulknickspannungen ——— symmetrisch für C-Profil (Gabellagerung)

Comments by the author of the introductory report
Remarques de l'auteur du rapport introductif
Bemerkungen des Verfassers des Einführungsberichtes

GEORGE WINTER
U.S.A.

It is gratifying to note that utilizing the post-buckling strength in thin-walled construction is at last becoming universally accepted. This is reflected in the prepared contributions by Möller and Donat; Reiss and Chilver; and T. R. Graves Smith, and in some of the free discussion.

The writer wishes to correct the re-interpretation of his own work given by Reiss and Chilver because it results in loss of generality and of utility for design use. Post-buckling behavior was first formulated by v. Karman, Marguerre, and later by the writer in terms of an effective width b_e, which is related to the maximum stress σ_{max} at the supported edge or edges. In particular, the writer's equation (see Preliminary Publication, Theme IIa, p. 104) reads

$$b_e/b = (\sigma_{cr}/\sigma_{max})^{\frac{1}{2}}[1 - 0.25(\sigma_{cr}/\sigma_{max})^{\frac{1}{2}}]$$

This equation is valid not only at failure, when $\sigma_{max} = \sigma_y$ (σ_y = yield stress) but also for edge stresses smaller than σ_y. This makes it possible to predict the behavior of thin-walled slender columns where failure occurs at stresses smaller than the yield stress. It also makes it possible to calculate sub-ultimate stresses, deflections and strengths of flexural members whose compression flanges perform in the post-buckling domain. In this case the neutral axis shifts as σ_{max} increases with increasing load, which is properly reflected in the variation of the effective width b_e, and of the corresponding effective cross-section and its properties.

In contrast, Reiss and Chilver re-write the writer's equation in the form

$$\sigma_{ave,f}/\sigma_y = (\sigma_{cr}/\sigma_y)^{\frac{1}{2}}\,[1 - 0.25(\sigma_{cr}/\sigma_y)^{\frac{1}{2}}]$$

where $\sigma_{ave,f}$ is the average stress in the plate when failure starts by yielding at the edges. For isolated plates, or for short compression members which fail in this manner, the two formulations give the same calculated strength. However, any formulation which is in terms of an average stress rather than an effective width, and which holds only at the yield stress σ_y

rather than at any maximum edge stress $\sigma_{max} = \sigma_y$, is incapable of predicting the complete behavior of all types of members. Fundamentally, the effective width is an approximate tool for calculating actual deformations and actual maximum edge stresses at subultimate as well as ultimate loads, neither of which can be computed when only an average stress at yield failure is determined.

The difference is illustrated by the valuable investigation of Graves-Smith, which involves deformational analysis of considerable rigor. His results of the interaction of local and column buckling, as given in his Fig. 7, can be well approximated in design by an effective width approach somewhat similar to the Q-method in current American design codes, but not in terms of an average stress at yield failure.

Modern computing techniques permit deeper theoretical analyses of postcritical behavior than was possible heretofore. The writer agrees with Möller and Donat who emphasize the deviations between theory and test and state that "one must realize that the empirical approximate equations seem better to reflect the actual situations than those derived from theoretical calculations."

The increasing utilization of strength increase obtained through cold-forming is another noticeable development, reflected in the contributions by Marx, Goeben, Schröder, Richter, Bader; and by V. Hlavacek. The writer is intrigued by Hlavacek's manner of analyzing the strain-hardening effect of close-corrugating on the basis of a method first developed by Karren in the writer's department. (Hlavacek's equations 1 through 10 are identical with those used or developed by Karren, Ref. 6, on p. 111 of Preliminary Report). It is gratifying to note that Hlavacek was able to modify Karren's method for this entirely different process of cold-forming.

The paper by the five authors from the DDR further illustrates the possibilities of cold-strengthening. Their critique of the Karren method, to the effect that it leads assymptotically to zero rather than to the original yield strength, is quite correct. However, the Karren method explicitly was limited to a/t-ratios smaller than about 7, for which this problem does not arise. It is clear a priori that the method cannot apply to closed square tubes where the same piece of metal has been bent first in one direction and then in the other. Hence, the authors' Fig. 11 is somewhat misleading in two respects: it plots test results far beyond the a/t-range for which Karren's method was devised, and it includes results from square tubes which have been subjected to a double forming process different from that analyzed by Karren.

This merely illustrates that the cold-forming processes employed in producting many practical shapes are so complex that their effects probably will never become completely calculable. Design methods have to be based on strength calculations where possible, and on test results in more complex situations.