

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 8 (1968)

**Artikel:** Optimisation des structures par la considération des états limites plastiques

**Autor:** Lorin, Paul Albert

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-8751>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Optimisation des structures par la considération des états limites plastiques

Optimierung der Tragwerke unter Berücksichtigung der plastischen Grenzzustände

Optimisation of Structures on the Basis of the Plastic Behaviour of Material

PAUL ALBERT LORIN

Ingénieur-Conseil

Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

France

Une structure peut être considérée comme optimisée lorsque, conçue pour assurer correctement les services qui lui sont demandés, son exécution peut être effectuée pour le moindre prix.

La recherche d'une structure optimale est nécessairement fort complexe, compte tenu de toutes les données techniques et économiques.

Le poids de matière employée est un élément du prix de revient, mais la recherche du poids minimal n'est certainement pas la voie qui conduit au moindre prix.

L'optimisation dans la conception et le dimensionnement conduira à la recherche de la distribution la plus judicieuse de la matière.

Dans cette recherche fort complexe nous ne considérerons ici qu'un seul aspect : sécurité de la structure par rapport à la ruine par affaissement.

Cette étude laisse donc de côté tout ce qui concerne les problèmes de rupture fragile ou d'instabilité de forme ; il ne faut pas se dissimuler l'importance de ces problèmes d'instabilité lorsque l'on tient compte de la plasticification de certains éléments.

Nous laissons également de côté la prise en compte de toutes les incertitudes concernant l'action des charges et le comportement de la matière. Il s'agit là d'un autre problème ; on peut cependant remarquer que la méthode la plus générale pour faire un contrôle en sécurité, s'appliquant tant dans le domaine élastique que dans le domaine plastique, est celle qui consiste à frapper les diverses sollicitations de coefficients de pondération (méthode préconisée par la Convention Européenne de la Construction Métallique).

Enfin l'étude se borne à l'équilibre statique. On suppose donc que l'application des charges se fait progressivement, et que la structure en se déformant sous l'action des charges est à tout instant en équilibre.

Traditionnellement les calculs de l'équilibre de la structure se font en supposant que la matière est parfaitement élastique.

Il faut cependant signaler que de tout temps on a eu conscience de l'importance des qualités plastiques en ce qui concerne la sécurité. Les plus anciens cahiers des charges ont toujours exigé un important allongement plastique pour les aciers de construction.

La ruine se produisant par affaissement, certains éléments sont nécessairement entrés en phase plastique. Le calcul élastique ne correspond donc pas au comportement réel de la matière en état limite.

Une première conséquence est que le calcul élastique ne conduit pas à une sécurité homogène.

Une section soumise à flexion possède une réserve de sécurité d'autant plus grande que le moment de saturation plastique est plus différent du moment de limite élastique. Plus une section est loin de l'optimisation élastique, plus grande est la réserve de capacité de flexion par plastification.

Une structure hyperstatique calculée élastiquement possède du fait des plastifications possibles une réserve de capacité de résistance que ne possède pas une structure isostatique calculée avec les mêmes critères.

Ces deux faits à eux seuls justifient déjà la prise en compte des états limites plastiques.

Mais le problème que nous voulons aborder est celui-ci : "La considération des états limites plastiques conduit-elle à une distribution plus judicieuse de la matière ?"

Nous simplifierons le problème en supposant :

a) que la matière est un corps élasto-plastique parfait (l'image correspond assez bien à l'acier de construction)

b) que les sections fléchies sont optimisées élastiquement, c'est-à-dire que toutes les fibres atteignent simultanément la limite élastique. Le moment de limite élastique est alors égal au moment de saturation plastique.

Nous considérerons des systèmes hyperstatiques.

Nous ferons souvent appel aux polygones d'écoulement (en employant la méthode de RJANITSYN pour les systèmes de poutres).

Pour un système de charges donné l'état limite nous permettra de déterminer l'état d'autocontrainte.

Le problème pour les charges variables sera de savoir si cet état d'autocontrainte est définitif (structure adaptée) dans le cas contraire on aura cumul de déformations sous mises en charges successives.

Nous aurons donc à considérer :

- 1) des systèmes de charge invariables dans le temps (poids propre)
- 2) des systèmes de charge variables en intensité ou en position.

#### 1) SYSTEMES DE CHARGE INVARIABLES

Dans une structure isostatique les moments de flexion et efforts tranchants en tous points sont déterminés par le système de charge, et sont indé-

pendants de la distribution de la matière. L'optimisation élastique conduit nécessairement au poids minimal de matière. Si la distribution de matière s'écarte de celle obtenue par optimisation élastique la plasticité n'apporte aucune réserve de capacité.

Dans une structure hyperstatique les moments et efforts tranchants en tous points dépendent non seulement du système de charge mais également des réactions hyperstatiques et donc de la distribution de la matière.

Il n'est donc pas évident que l'optimisation élastique qui impose un choix des réactions hyperstatiques conduise au poids minimal.

Nous considérerons deux types de structure :

- a) un système réticulé
- b) un système de poutres.

a) système réticulé.-

Nous supposons que toutes les barres sont rigoureusement centrées et que nous pouvons négliger la rigidité des attaches

La barre d'indice  $i$  est soumise à un effort normal  $N_i$  fonction de  $n$  inconnues hyperstatiques  $R_0, \dots, R_n$

Le potentiel élastique est :

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \frac{N_i^2 l_i}{E S_i}$$

Si la structure est optimisée élastiquement, on a :

$$N_i / S_i = \sigma_e$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \frac{N_i l_i \sigma_e}{E}$$

les  $n$  inconnues hyperstatiques sont définies par

$$\frac{\partial W}{\partial R_0} = 0, \dots, \frac{\partial W}{\partial R_n} = 0$$

soit :

$$\sum_i \frac{\partial N_i l_i}{\partial R_0} = 0, \dots, \sum_i \frac{\partial N_i l_i}{\partial R_n} = 0 \quad (1)$$

Supposons que nous cherchions une autre distribution de matière avec  $n$  réactions  $R'_0, \dots, R'_n$  obtenues par adaptation plastique et conduisant à l'emploi du volume minimal de matière

La structure adaptée devra être optimale élastique pour avoir le volume minimal

Les  $N_i$  seront fonction de  $R'_0, \dots, R'_n$

On aura  $N_i / S_i = \sigma_e$

Le volume sera :

$$V = \sum_i S_i l_i = \frac{1}{\sigma_e} \sum_i N_i l_i$$

L'optimisation correspond aux  $n$  inconnues  $R'_0, \dots, R'_n$  satisfaisant à :

$$\frac{\partial V}{\partial R'_0} = 0, \dots, \frac{\partial V}{\partial R'_n} = 0$$

d'où :

$$\sum_i \frac{\partial N_i l_i}{\partial R'_0} = 0, \dots, \sum_i \frac{\partial N_i l_i}{\partial R'_n} = 0 \quad (2)$$

Le système (2) est identique au système (1), et donc les  $n$  valeurs optimales sont bien les  $n$  valeurs  $R \dots R_n$  correspondant à la distribution de matière déterminée par optimisation élastique.

Pour le système réticulé l'optimisation élastique correspond au volume minimal de matière.

b) système de poutres.-

Nous supposons un système où seuls les moments de flexion sont à prendre en considération.

Le moment de flexion en un point d'abscisse  $s$  est fonction de  $n$  moments hyperstatiques  $M_0 \dots M_n$ , ce moment sera

$$M(s, M_0 \dots M_n)$$

Le potentiel élastique est

$$W = \frac{1}{2} \int_s \frac{M^2(s, M_0 \dots M_n) ds}{EI(s)}$$

Les  $n$  moments  $M_0 \dots M_n$  sont obtenus par :

$$\frac{\partial W}{\partial M_0} = 0 \dots \dots \dots \frac{\partial W}{\partial M_n} = 0 \quad (3)$$

L'optimisation élastique pour la poutre de demi-hauteur  $v(s)$  conduit à

$$My/I = \pm \sigma_e$$

Dans la structure optimisée élastiquement :

$$W = \frac{1}{2} \frac{\sigma_e^2}{E} \int_s \frac{I(s) ds}{V(s)} \quad (4)$$

L'optimisation élastique conduit ainsi à distribuer la matière compte tenu des  $n$  inconnues déterminées par le système (3).

Est-il possible d'avoir  $n$  valeurs  $M' \dots M'_n$  obtenues par adaption plastique et conduisant à une distribution de matière donnant un volume minimal pour les membrures ?

On aura  $M(s, M'_0 \dots M'_n)$

En tous points

$$My/I = \pm \sigma_e$$

$$\frac{M^2 V^2}{I^2} = \sigma_e^2$$

Si  $S$  est la section des 2 membrures au point d'abscisse  $s$

$$I = b V^2$$

Et le volume total sera :  $V = \int_s S ds$

$$V = \int_s \frac{I(s) ds}{V^2} \quad (5)$$

Les  $n$  moments  $M'_0 \dots M'_n$  seront définis par :

$$\frac{\partial V}{\partial M'_0} = 0 \dots \dots \dots \frac{\partial V}{\partial M'_n} = 0 \quad (6)$$

On voit en vertu de (4) et (5) que ce système (6) est identique au système (3) donc :  $M_o = M'_o \dots \dots M_n = M'_n$

Comme dans le cas du système réticulé, l'optimisation élastique conduit au volume minimal de matière.

En définitive donc, que le système soit isostatique ou hyperstatique, la distribution de matière déterminée par optimisation élastique conduit au volume minimal de matière. L'optimisation absolue n'est d'ailleurs pas réalisable. Mais, contrairement à ce qui se passe pour les systèmes isostatiques, si une structure hyperstatique n'est pas optimisée élastiquement, l'adaptation plastique permet une augmentation de la charge ultime d'autant plus importante que la distribution de matière est plus éloignée de celle déterminée par optimisation élastique. C'est-à-dire que, de même que l'adaptation plastique améliore d'autant plus le rendement d'une section en flexion que cette section est plus mal conditionnée pour la flexion (écart entre le moment de limite élastique et le moment de saturation plastique), de même l'adaptation plastique d'une structure hyperstatique améliore d'autant mieux la limite d'une charge de distribution donnée que la répartition de la matière s'écarte davantage de celle obtenue par optimisation élastique.

Nous prendrons à titre d'exemple le cas d'une poutre continue à deux travées égales sous l'action d'une charge uniforme.

Soit  $p$  la charge par unité de longueur. Dans tout ce qui suit nous prendrons une convention de signe très couramment utilisée dans l'étude des poutres : les moments seront comptés positifs dans le sens inverse des axes.

a) Poutre optimisée élastiquement

Il est facile de voir que la distribution de matière avec optimisation élastique conduit à un volume de membrures

$$V_o = \frac{\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}} \frac{bl^3}{V_e}$$

b) Poutre à inertie constante

En calcul élastique le volume de ces membrures est

$$V_e = \frac{1}{8} \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} V_o = 2.56 V_o$$

En calcul plastique (formation d'une 2ème rotule en travée)

$$V_p = (3 - 2\sqrt{2}) \times \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} V_o = 1.76 V_o$$

On voit ainsi sur cet exemple l'intérêt de la prise en compte de la plastification pour une poutre non optimisée élastiquement.

Sur l'exemple choisi on a d'ailleurs une adaptation plastique assez importante, ainsi que l'on peut s'en rendre compte en cherchant l'état d'auto-contrainte qui resterait dans la poutre si on la déchargeait.

En considérant le polygone d'écoulement on voit (en posant  $x = t_1$ ) que le moment d'autocontrainte sur l'appui B est positif et égal à :

$$M_d = \frac{8t-3}{4t^2} M_o$$

L'adaptation se limitant au moment de la formation d'une deuxième rotule plastique dans la section  $t = \sqrt{2} - 1$  on trouve :

$$M_a = + 0,456 M_0$$

On voit ainsi pour une structure hyperstatique tout l'intérêt pour la recherche d'une optimisation économique de s'écartier de l'optimisation élastique en simplifiant la structure à condition de tenir compte de l'adaptation plastique sous l'action de charges permanentes.

## 2) CHARGES MOBILES

Le cas de charges mobiles est plus complexe tant en ce qui concerne l'optimisation élastique que l'adaptation plastique définitive, c'est-à-dire celle qui rend le système adapté rigoureusement élastique sous l'action des charges mobiles et qui assure donc qu'il n'y aura pas de cumul de déformations sous le passage des charges mobiles.

Pour trouver la distribution de matière conduisant à l'optimisation élastique, il faudra chercher la courbe enveloppe des moments fléchissants maximaux dans chaque section d'abscisse  $s$ .

Soit  $\mathcal{M}(s)$  cette loi de la courbe enveloppe. En optimisation élastique on devra avoir si  $I(s)$  et  $v(s)$  sont l'inertie et la demi-hauteur de la section définie par  $s$  :

$$I(s) = \frac{\mathcal{M}(s)v(s)}{\sigma_e}$$

Pour chaque position de la charge on aura une loi des moments  $M(s, M_0, \dots, M_n)$  où  $M_0, \dots, M_n$  sont les moments sur appuis du système hyperstatique, définis si  $W$  est le potentiel élastique avec la loi  $M(s, M_0, \dots, M_n)$  par :

$$\frac{\partial W}{\partial M_0} = 0, \dots, \frac{\partial W}{\partial M_n} = 0$$

La loi  $\mathcal{M}(s)$  dépend ainsi de la distribution de la matière. L'optimisation élastique est possible par itération en partant par exemple d'une loi  $I(s) = \text{Cte.}$

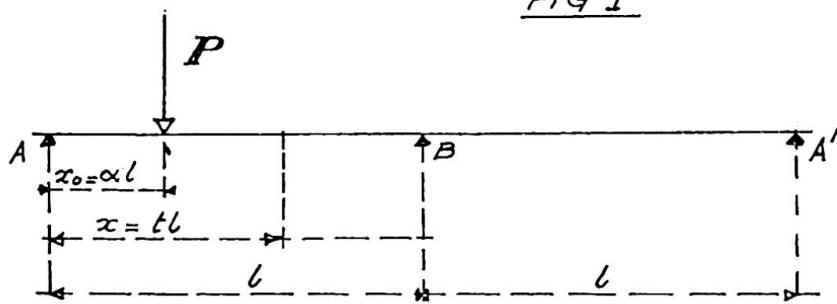
Mais il n'est plus possible de démontrer simplement que l'optimisation élastique dans le cas de charges mobiles conduit au poids minimal de matière.

Nous allons étudier l'optimisation élastique, et l'adaptation plastique d'une poutre non optimisée élastiquement sur le cas simple déjà envisagé plus haut d'une poutre continue à deux travées égales sous le passage d'une charge mobile unique.

### a) Poutre optimisée élastiquement

Soit la charge mobile  $P$  agissant dans la section d'abscisse  $x_0 = \alpha l$ , la section courante étant  $x = tl$

FIG 1



Le moment sur appui B pour la charge P en  $x_0 = \alpha l$  sera :

$$M_B = -PL \frac{\int_0^\alpha (1-\alpha)t^2 \frac{dt}{I(t)} + \int_\alpha^1 \alpha t(1-t) \frac{dt}{I(t)}}{2 \int_0^1 t^2 \frac{dt}{I(t)}}$$

Pour faire un calcul numérique nous divisons la poutre de A à B en n parties égales, chacun de ces n tronçons ayant une inertie  $I_1, I_2, \dots, I_n$

Nous plaçons la charge successivement à l'extrémité d'un tronçon (le q°) soit :  $\alpha = q/n$

$$M_B = \frac{(1-\alpha) \sum_{p=1}^{p=q} \frac{1}{I_p} (p^2 - p + 1/3) + \alpha \sum_{p=q+1}^{p=n} \left[ (n+1)p - p^2 - \frac{3n+2}{6} \right]}{\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{I_p} (p^2 - p + 1/3)} \times \left( -\frac{PL}{2} \right)$$

Ceci permet de calculer le moment en chaque tronçon noté  $p$  pour une charge placée en  $q$ , on obtient

$$M_p^q = K P l$$

Pour chaque valeur de  $p$  on désignera par  $M_p$  la valeur maximale de  $M_p^q$  et on écrira

$$I_p = \frac{M_p v}{\sigma_e}$$

En partant d'une loi  $I_p = Cte$  on peut par approximations successives trouver les valeurs optimales  $I_p$  de  $I_p$

Le calcul a été fait au Centre de calcul de l'Institut Français du Pétrole.

On a pris  $n = 10$ , à la 6° approximation la correction était de l'ordre de  $10^{-4}$

Les inerties  $I_p$  qui ont été déterminées sont

$$I_p = \frac{A P l v}{\sigma_e}$$

Les valeurs de A optimisées sont les suivantes :

P	1	2	3	4	5
A	0,088467	0,154082	0,197291	0,218701	0,219136

P	6	7	8	9	10
A	0,199769	0,162440	0,110592	0,053356	0,067942

On a alors le volume  $V_o$  des membrures d'une poutre optimisée élastiquement :

$$V_o = \sum_{i=1}^{10} 2S_p \cdot \frac{\ell}{10} = \frac{P\ell V}{\sigma_e} \sum_{i=1}^{10} A = 0.1471 \frac{P\ell^2}{V\sigma_e}$$

### b) Poutre à inertie constante

En période élastique le moment maximal en valeur absolue se produit toujours au point d'application de la charge P point noté  $x_o = 1$

Ce moment est :

$$M = \frac{\alpha(1-\alpha)(1-\alpha(1+\alpha))}{4} P_L$$

Si  $M_o$  est le moment de limite élastique égal par hypothèse au moment de saturation plastique, la charge admissible au point défini par  $\alpha$  sera

$$P = \frac{4}{\alpha(1-\alpha)(4-\alpha(1+\alpha))} \frac{M_o}{\ell}$$

La poutre étant à inertie constante on aura

$$M_o = \frac{I\sigma_e}{V} = 2S\sigma_e$$

La charge admissible pour toute position sera celle donnée par la valeur de  $\alpha$  rendant maximale l'expression

$$\alpha(1-\alpha)[4-\alpha(1+\alpha)]$$

Soit pour  $\alpha = 0,43$

Ce qui donne la valeur maximale de P

$$P = 4,819 \frac{M_o}{\ell}$$

Le volume  $V_e$  des membrures d'une poutre de portée 1 sera

$$V_e = 2S_l = \frac{M_o \ell}{V\sigma_e} = \frac{1}{4,819} \frac{P\ell^2}{V\sigma_e} = 0.2076 \frac{P\ell^2}{V\sigma_e}$$

Nous allons chercher le comportement plastique de cette poutre à inertie constante sous le passage de la charge  $P$ .

Pour étudier la plastification de la poutre nous considérerons les polygones d'écoulement pour chaque position  $x_0 = \alpha l$  de la charge  $P$ , en utilisant la méthode de Rjanitsyn.

D'après les calculs indiqués précédemment (dans la recherche de l'optimisation élastique) le moment élastique sur l'appui  $B$  pour une charge  $P$  placée en  $x_0 = \alpha l$  sera :

$$M_B = -\frac{P\ell}{4} \cdot \alpha (1-\alpha^2)$$

Si  $M'$  désigne le moment en phase élastique on a :

$$0 \leq t \leq \alpha \quad M' = P\ell(1-\alpha)t - \frac{P\ell}{4} \cdot \alpha(1-\alpha^2)t$$

$$0 \leq t \leq 1 \quad M' = P\ell \alpha(1-t) - \frac{P\ell}{4} \alpha(1-\alpha^2)t$$

$$1 \leq t \leq 2 \quad M' = -\frac{P\ell}{4} \alpha(1-\alpha^2)(2-t)$$

Nous désignerons toujours par  $M_0$  le moment de limite élastique ou de saturation plastique

$$M_0 = \sigma_e I/y$$

Nous supposerons après adaptation plastique qu'il y a en  $B$  un moment d'autocontrainte

$$\eta M_0$$

Les moments  $M$  dans la poutre sont alors :

$$0 \leq t \leq 1 \quad M = M' + \eta M_0 t$$

$$1 \leq t \leq 2 \quad M = M' + \eta M_0 (2-t)$$

Nous poserons  $\frac{P\ell}{4} \alpha (1-\alpha^2) = \xi M_0$

$\xi$  caractérise l'état de charge et  $\eta$  l'autocontrainte

$$0 \leq t \leq \alpha \quad M = \left[ \left( \frac{4}{\alpha + \alpha^2} - 1 \right) \xi t + \eta t \right] M_0$$

$$\alpha \leq t \leq 1 \quad M = \left[ \left( \frac{4}{1-\alpha^2} (1-t) - t \right) \xi + \eta t \right] M_0$$

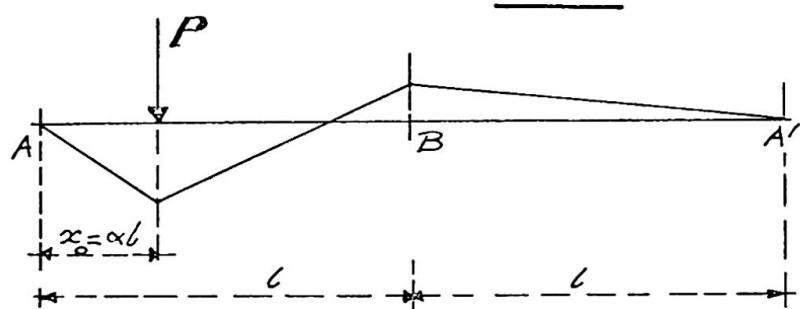
$$1 \leq t \leq 2 \quad M = \left[ -(2-t) \xi + \eta (2-t) \right] M_0$$

Supposant  $\alpha$  donné (charge  $P$  en  $x_0 = \alpha l$ ) la condition limite de plasticité s'écrit en tout point :

$$-M_0 < M < +M_0$$

Pour cette charge  $P$  en  $x_0$  le diagramme des moments de flexion est toujours le suivant :

FIG. 2



Il suffit donc d'écrire les conditions :

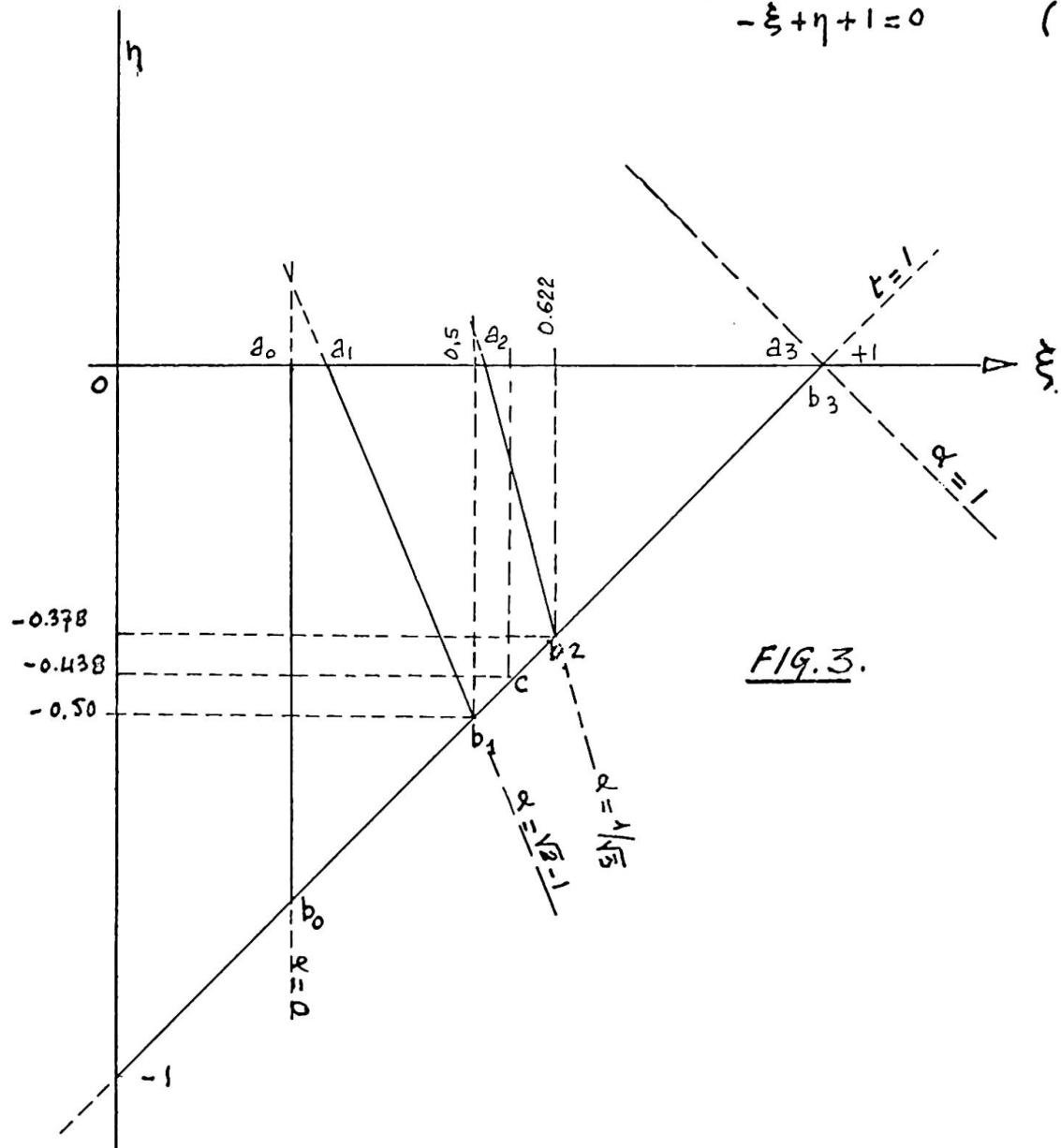
$$M(x_0) = +M_0$$

$$M_B = -M_0$$

C'est-à-dire pour les limites :

$$\left( \frac{4}{1+\alpha} - \alpha \right) \xi + \alpha \eta - 1 = 0 \quad (t = \alpha)$$

$$-\xi + \eta + 1 = 0 \quad (t = 1)$$



On a ainsi une famille de polygones d'écoulement en fonction de  $\alpha$  délimités par les 2 droites d'équations ci-dessus pour  $t = \alpha$  et  $t = 1$

La droite ( $t = \alpha$ ) coupe l'axe  $0\xi$  en un point a, ce point varie de  $a_0$  ( $\xi = 0,25$  pour  $\alpha = 0$ ) à  $a_3$  ( $\xi = 1$  pour  $\alpha = 1$ ).

Cette droite ( $t = \alpha$ ) coupe la droite ( $t = 1$ ) en un point b variant de  $b_0$  (pour  $\alpha = 0$ ) à  $b_3$  (pour  $\alpha = 1$ ).

Appliquant P au point  $x = \alpha l$  et partant d'un état naturel en faisant croître P depuis la valeur  $0^o$  le point représentatif se déplace sur l'axe  $0\xi$ . Lorsque ce point arrive à a (intersection de la droite  $t = \alpha$  avec  $0\xi$ ) P atteint la charge limite élastique qui correspond à

$$\xi = \frac{1+\alpha}{4-\alpha(1+\alpha)}$$

La charge limite élastique  $P_e(\alpha)$  est alors :  $P_e(\alpha) = \frac{4}{\alpha(1-\alpha)(4-\alpha(1+\alpha))} \frac{M_0}{l}$

Si P continue à croître  $\xi$  augmente il y a plastification dans la section  $x = \alpha l$ , le point représentatif décrit la droite  $t = \alpha$  à partir de a. Lorsque ce point arrive en b (intersection des droites  $t = \alpha$  et  $t = 1$ ) on atteint le moment limite en B, à cette valeur de  $\xi$  correspond la charge ultime plastique  $P_u(\alpha)$ , on a alors

$$\xi = \frac{(1+\alpha)^2}{4}$$

d'où :

$$P_u(\alpha) = \frac{1+\alpha}{\alpha(1-\alpha)} \frac{M_0}{l}$$

Si on déchargeait alors la poutre il y aurait en B un moment d'autocontrainte

$$M_B = - \left( 1 - \frac{(1+\alpha)^2}{4} \right) M_0$$

Si l'on cherche la charge mobile ultime  $P_u$ , cette charge doit être la plus petite valeur de  $P_u(\alpha)$ ,  $\alpha$  variant de 0 à 1.

Ce minimum se produit pour

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{1+\alpha}{\alpha(1-\alpha)} = 0$$

Soit :  $\alpha = \sqrt{2} - 1$

On a alors :

$$P_u = 5,828 \frac{M_0}{l}$$

(RJANITSYN a donné le même résultat obtenu par une autre méthode).

Si cette charge  $P_u$  arrivée au point  $x = (\sqrt{2} - 1)l$  on supprimait cette charge on aurait en B un moment d'autocontrainte déterminée par l'ordonnée du point  $b_1$  c'est-à-dire  $\eta = -0,5$

$$M_B = -0,5 M_0$$

Si la charge  $P_u$  va au-delà de  $x = (\sqrt{2} - 1)l$ ,  $\xi$  continue à croître, car  $\xi$  est donné par :

$$\frac{1}{M_0} \frac{P\ell}{4} \alpha(1-\alpha^2) = 1.461 \alpha(1-\alpha^2)$$

$\xi$  passe donc par un maximum pour la valeur maximale de  $\alpha(1 - \alpha^2)$  ce qui se produit pour  $\alpha = 1/\sqrt{3}$

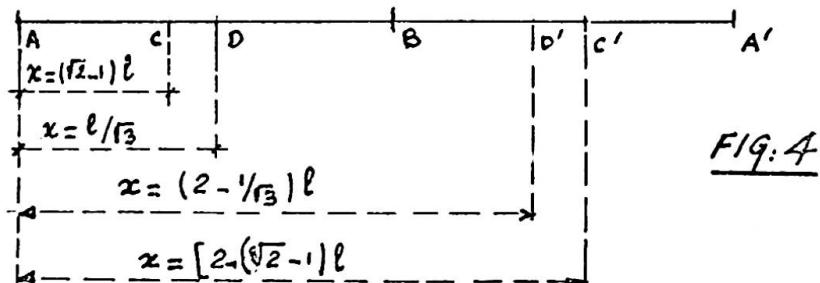
On a alors  $\xi = 1.461 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{3} = 0.562$

Le point représentatif s'est déplacé sur la droite  $t = 1$  (plastification sur l'appui B) de  $b_1$  à  $c$ .

L'ordonnée de  $c$  sur cette droite  $t = 1$  est

$$-1 + 0,562 = -0,438$$

Lorsque la charge mobile  $P_u$  se déplace à partir de l'appui A, il y a plastification dans la section C ( $x = (\sqrt{2}-1)l$ ) au moment où la charge arrive en C et le moment d'autocontrainte en B est alors  $-0,5 M_o$ ; lorsque cette charge arrive en D ( $x = l/\sqrt{3}$ ) il y a plastification sur l'appui B et le moment d'autocontrainte en B n'est plus alors que  $-0,438 M_o$ ; si la charge continue vers A', de D' ( $x = (2-1/\sqrt{3})l$ ) à C' ( $x = [2-(\sqrt{2}-1)]l$ ) il y a plastification des sections de D' à C' et le moment d'autocontrainte en B remonte à  $-0,5 M_o$ .



Chaque passage de la charge  $P_u$  sur toute la poutre provoque de nouvelles déformations permanentes, il y a cumul de déformations.

La charge  $P_u$  n'est admissible que si elle n'est susceptible d'être appliquée qu'un nombre très limité de fois au cours de la vie de l'ouvrage.

La charge ultime  $P'_u$  admissible pour un nombre illimité de passages est inférieur à  $P_u$ . On peut déterminer cette charge en imposant la condition que le moment d'autocontrainte en B atteigne une valeur définitive après un premier passage.

On trouve le  $\eta_0$  maximal constant

$$\eta_0 = -0.448$$

correspondant à une charge ultime

$$P'_u = 5,742 \frac{M_o}{l} < P_u = 5,828 \frac{M_o}{l}$$

Si l'on veut maintenant comparer l'économie de volume des membrures d'une travée de portée l pour une charge mobile P on écrira :

$$M_o = \sigma_e I / \sqrt{V}$$

$$I = 2 S V^2$$

et le volume des membrures pour une travée de portée l sera

$$V = 2 S l = M_o / \sqrt{\sigma_e} \cdot l.$$

$$\text{Avec la charge ultime } P'_u = 5,742 \text{ } M_o / \rho$$

On a le volume :

$$V_p = \frac{1}{5,742} \frac{P \rho^2}{\sqrt{\sigma_e}} = 0,1742 \frac{P \rho^2}{\sqrt{\sigma_e}}$$

Ainsi pour le cas de la charge mobile P on peut comparer les résultats obtenus pour le volume des membrures

- poutre optimisée élastiquement  $V_o = 0,1471 \frac{P \rho^2}{\sqrt{\sigma_e}}$
- pour une poutre d'inertie constante calculée élastiquement  $V_e = 0,2076 \frac{P l^2}{\sqrt{\sigma_e}} = 1,411 V_o$
- pour une poutre à inertie constante calculée plastiquement  $V_p = 0,1742 \frac{P \rho^2}{\sqrt{\sigma_e}} = 1,184 V_o$

On voit ainsi pour la charge mobile, comme pour le cas de la charge permanente, que si l'optimisation élastique conduit au volume minimal, il y a un gain considérable, lorsque la distribution de matière est loin de celle déterminée par optimisation élastique, à prendre en compte l'état limite plastique.

#### Combinaison de la charge permanente et de la charge mobile.-

On pourra reprendre l'étude en considérant à nouveau les frontières d'écoulement sous l'effet d'une charge permanente  $P$  par unité de longueur et d'une charge mobile  $P$ .

On posera :

$$p_1 = K P$$

On aura pour chaque valeur de  $K$  des familles de frontières d'écoulement en fonction de  $\alpha$ .

Le développement de cette discussion est trop long pour trouver sa place ici.

On peut pour chaque valeur de  $K$  déterminer la charge ultime admissible par la recherche du moment d'autocontrainte donnant une adaptation définitive.

Voici quelques résultats :

- pour  $K = 0,1$  (charge mobile égale à 10 fois le poids permanent)

$$\eta_0 = -0,409$$

- pour  $K = 1$  (charge mobile égale au poids permanent)

$$\eta_0 = -0,15$$

- pour  $K = 10$  (charge mobile égale au dixième du poids permanent)

$$\eta_0 = + 0,318$$

Lorsque la charge mobile est faible il y a adaptation plastique sur l'appui central et le moment d'autocontrainte sur appui est positif.

Si l'on fait croître la valeur de la charge mobile par rapport au poids permanent, le moment d'autocontrainte sous la charge ultime diminue.

Pour une certaine valeur de  $K\eta_0 = 0$ , il n'y a pas d'adaptation, pour cette valeur de  $K$  la poutre à inertie constante est optimale élastiquement.

Si la valeur de la charge mobile croît encore par rapport au poids permanent, l'adaptation plastique se produit sous la charge ultime en travée, et le moment d'autocontrainte sur appui central est négatif.

Enfin à partir d'une certaine valeur de  $K$  il y a risque de cumul de déformations plastiques.

### Conclusion

On voit en définitive que quels que soient les systèmes de charges, permanentes ou variables, pour une structure constituée en matériau pouvant, tel que l'acier doux, être considéré comme élasto-plastique, la distribution de matière déterminée par optimisation élastique conduit toujours au poids minimal.

L'optimisation élastique rigoureuse est souvent irréalisable, en outre elle conduit très généralement à une structure onéreuse (sauf cas exceptionnels où la structure simple est en même temps optimale élastiquement, comme on a vu que c'était le cas pour une poutre continue à 2 travées égales pour un certain rapport entre la charge et la charge permanente).

Lorsque la structure s'écarte de l'optimal élastique elle a, si elle est hyperstatique, une réserve de capacité pour la charge ultime d'affaissement en calcul élastique que n'a pas la structure isostatique.

On doit donc tendre à réaliser des systèmes hyperstatiques à condition de baser la sécurité sur la charge ultime plastique, ce qui permet de simplifier la structure avec une majoration de poids relativement faible, et donc d'optimiser la structure sur le critère de l'économie de réalisation.

Dans le cas de charges mobiles non exceptionnelles le calcul plastique peut conduire au danger du cumul des déformations.

Le critère alors à considérer est l'état d'autocontrainte qui doit être constant dans toutes les situations.

On peut donc établir une programmation sur la base du calcul élastique pour chercher la distribution de matière la plus économique.

L'état d'autocontrainte peut être déterminé sans tracer de diagrammes par des calculs élastiques.

L'état d'autocontrainte est un critère à la fois pour l'optimisation et pour la vérification du non cumul de déformations.

## RÉSUMÉ

Pour un matériau élasto-plastique, la distribution de matière déterminée par optimisation élastique conduit, pour les charges permanentes et variables, au poids minimal que la structure soit isostatique ou hyperstatique.

L'avantage de la structure hyperstatique, si on envisage l'état limite plastique, est de pouvoir réaliser économiquement en simplifiant et s'écartant de l'optimal élastique.

On détermine, par des calculs élastiques, l'état d'auto-contrainte qui sera un critère d'optimisation et de vérification de non cumul des déformations.

## ZUSAMMENFASSUNG

Für einen elastisch-plastischen Werkstoff führt die durch elastische Optimierung erhaltene Materialverteilung sowohl unter ständiger Last als auch bei veränderlichen Lasten zum minimalen Gewicht, gleichwohl ob das Tragwerk statisch bestimmt oder unbestimmt ist.

Statisch unbestimmte Tragwerke bieten den Vorteil, dass sie bei Berücksichtigung des plastischen Grenzzustandes durch Vereinfachung und unter Abweichung vom elastischen Optimum wirtschaftlich ausgeführt werden können.

Es wird durch elastische Berechnung der Eigenspannungszustand ermittelt, welcher als Kriterium der Optimierung und der Nicht-überlagerung der Verformungen dient.

## SUMMARY

For an ideal elastic-plastic material, the optimisation based on elastic calculations of a statically determined or indetermined structure provides the minimum weight material distribution.

When computing a statically indetermined structure on the basis of plastic behaviour, it is possible to simplify the optimum elastic material distribution in a more economical way.

The residual stresses remaining in the structure after unloading is a criteria of optimisation and a test against increasing permanent deformations with every loading cycle.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide