

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 8 (1968)

Rubrik: Prepared discussion

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DISCUSSION PRÉPARÉE / VORBEREITETE DISKUSSION / PREPARED DISCUSSION

Beitrag zur Frage der Optimierung von Tragwerken

Contribution to the Question of Optimisation of Structures

Contribution à la question de l'optimisation des structures

F. FALTUS
 Prof. Ing. Dr., Dr. Sc.
 Tschechoslowakei

Herr Courbon hat in seinem Einführungsartikel eine beachtenswerte Zusammenstellung allgemeiner Gesichtspunkte zur Frage der Optimierung von Tragwerken gegeben, welche zeigt, wie vielseitig die Aufgabe ist, auch wenn wir uns nur auf Tragwerke bzw. Bauten beschränken und nicht das ganze Bauvorhaben mit seinen mannigfaltigen ökonomischen Zusammenhängen ins Auge fassen. Ich möchte zu diesen Ausführungen einige Bemerkungen hinzufügen.

1) Die einfachste Optimierungsaufgabe ergibt sich, wenn als Kriterium lediglich das Minimum des Aufwandes eines Baustoffes gestellt wird. Da bei Stahlkonstruktionen der Materialpreis die Gesamtkosten wesentlich beeinflusst und die Anarbeitungskosten bei nicht zu grosser Änderung der Technologie dem Gewicht etwa proportional sind, genügt oft diese vereinfachte Aufgabenstellung. Sie ist sogar zu gewissen Zeiten mit Stahlmangel ausschlaggebend. Courbon weist richtig darauf hin, dass das Gewichtsminimum gewöhnlich sehr flach verläuft, wenn nur geometrische Abmessungen variiert werden. Es werden dann auch ziemlich grosse Abweichungen von der optimalen Form nur geringfügige Änderungen des Gewichtes bringen. Es sollte daher auch immer dieser Zusammenhang untersucht werden, da dann scheinbar untergeordnete, und daher vernachlässigte Einflüsse die Lage des Minimums stark verschieben können. Es soll noch hervor- gehoben werden, dass sich eine Tragkonstruktion minimalen Gewichtes i.A. nicht aus Bauteilen zusammensetzt, die an sich minimale Gewichte haben.

Grössere Stahleinsparungen bringen nur prinzipielle Änderungen.

der Tragkonstruktion. Als Beispiel sei eine Überlegung erwähnt, die beim Entwurf der Bogenbrücke über den Stausee der Moldau südlich Prag gemacht wurde. Es handelt sich um eine Strassenbrücke von 380 m lichter Weite, deren Fahrbahnkonstruktion auf vollwandigen Zweigelenkbogen von 330 m Stützweite aufgeständert ist (Abb. 1 und 2). Es wurde die Frage aufgeworfen, ob bei dieser grossen Stützweite die Fahrbahnplatte als leichte orthotrope Platte, oder wie bei Brücken kleinerer Spannweiten besser als Stahlbetonplatte in Verbund mit den Fahrbahnhauptträgern von 23 m Spannweite ausgeführt werden soll. Eine Vergleichsrechnung zeigte, dass der Stahlbedarf und dieser war zur Zeit der Projektverfassung ausschlaggebend für eine orthotrope Platte grösser ist, als die Vermehrung des Stahlgewichtes der Bogenträger zufolge der Vergrösserung der ständigen Last. Einen grossen Einfluss auf dieses Ergebnis hatte auch der Umstand, dass mit Grenzlaster gerechnet wurde, d.h. dass in die Berechnung nach der Theorie zweiter Ordnung das Eigengewicht mit einem kleineren Überlastfaktor eingeführt wurde als die Nutzlast.

2) Wesentlich schwieriger ist die Optimierung mit Hinblick auf die Gestehungskosten. Die in Betracht gezogene Technologie der Fertigung hat einen entscheidenden Einfluss auf die optimale Form des Tragwerkes. Denken wir z.B. an die Verschiebung der ökonomischen Grenzen zwischen Fachwerk und Vollwandträger zu Gunsten des letzteren durch die Einführung der Schweisstechnik und Rückkehr zu Fachwerkträgern im Leichtbau. Die Erzeugungskosten werden wesentlich von der Fabrikationseinrichtung und diese von den herzustellenden Stückzahlen beeinflusst. Bei Massenerzeugung sind auch komplizierte Formen mit grossen Anforderungen an die Genauigkeit zulässig, wie die Fachwerkplatten und Kuppeln beweisen. Ganz wesentlich wirkt sich auch das Verhältniss zwischen Materialpreis und Lohnkosten aus, sodass die Ergebnisse nicht einfach auf andere Wirtschaftsgebiete übertragen werden können.

Ein typisches und nur scheinbar einfaches Beispiel einer solchen Aufgabe ist die optimale Aussteifung eines Stehbleches. Theorie und Versuch zeigen, dass die tragfähigkeitserhöhende Wirkung einer Aussteifung nicht linear mit ihrem Querschnitt zunimmt und dass sich nach einer gewissen Grösse der Steife die Tragfähigkeit des Stehblechs nur langsam seinem Maximum nähert. Es besteht also sicherlich ein optimaler Steifenquerschnitt und mit Hinblick auf die Herstellungskosten auch eine optimale Steifenzahl. Diese Aufgabe wurde

eigentlich noch nicht gelöst, insbesondere nicht für die überkritische Beulfestigkeit. Form und Querschnitt der Gurtungen eines Vollwandträgers beeinflussen sowohl die Tragfähigkeit des Stehbleches, als auch die Kippgefahr des Trägers. In der Praxis werden sehr verschiedene Lösungen verwendet, wie Abb. 3 an einigen Beispielen zeigt. Entscheidend ist hier wieder der Gesamterfolg.

Dies möge noch ein Beispiel von dem Bau der oben erwähnten Bogenbrücke zeigen. Die Brücke ist mit einer Breite von 13,0 m zwischen den Geländern schmal im Verhältnis zur Spannweite (Abb. 3). Um eine genügende Seitenstabilität zu sichern, war ursprünglich vorgesehen, die Bogen schräg zu stellen und die damit verbundenen Erzeugungs und Montagekosten in Kauf zu nehmen. Nach entsprechenden Studien wurde jedoch folgende, wesentlich einfachere Lösung zur Ausführung bestimmt. Die beiden Bogen wurden in einem Abstand von 13 m angeordnet und mit Windverbänden bei beiden Gurtungen als torsionssteifes Gebilde ausgeführt. Die Säulen, welche die in einem Abstand von 12 m liegenden Fahrbahnhauptträger tragen, sind über den inneren Stehblechen aufgeständert. Zur Seitensteifigkeit und Stabilität der Brücke trägt wesentlich die Fahrbahn bei, welche als durchlaufender, wagrechter Balken auf fünf Stützen die Windkräfte auf den Fahrbahnträger und die Fahrzeuge nur zu einem kleinen Teil im Bogenscheitel abgibt. In Abb. 4 sind die horizontalen Reaktionen des Fahrbahnträgers bei verschiedenen Anordnungen gezeigt. Im Bogenscheitel würde bei der üblichen Ausführung (Abb. 4d) eine Reaktion von 132 Mp zu übertragen sein, bei der Ausführung als Durchlaufträger über 5 Stützen (Abb. 4b) beträgt die Reaktion nur 32 Mp, da sich der Bogen unter seiner auf ihn entfallenden Windlast auch horizontal durchbiegt. Durch diese Ausnutzung des räumlichen Zusammenwirkens konnte viel an Anarbeitungskosten gespart werden. Es sei nur nebenbei bemerkt, dass der horizontale Träger mit einer Länge von 542 m wohl der längste Vollwandträger ist, der je gebaut wurde. Den Querschnitt bildet die 12 m breite, ohne Dilatationsfugen durchlaufende Stahlbetontafel als "Stehblech" in Verbund mit den 1,8 m hohen Fahrbahnhauptträgern als Gurtungen. Der provisorische Windverband zwischen den Fahrbahnhauptträgern wurde nach Erhärten der Betonplatte entfernt.

3) Eine besondere Art der Optimierungsaufgaben bildet die Festlegung von Typenreihen. Hier kommt als neue Veränderliche noch die Grösse des Typenschrittes hinzu, welche die wirtschaftlichen Ergeb-

nisse stark beeinflussen kann. Die optimale Grösse des Typenschrittes hängt wesentlich von den zu erwartenden Ausführungszahlen ab. Grosse Schritte erhöhen den Materialverbrauch, bringen jedoch durch die Vergrösserung der Stückzahlen gleicher Ausführung Einsparungen an Fertigungskosten.

4) Wesentlich komplizierter wird die Auffindung der optimalen Lösung, wenn verschiedene Baumaterialie, also zB. Stahl, Beton, Holz usw. in Wettbewerb treten. Die Vergleichsbasis sollte nicht, wie es oft geschieht, die Gestehungskosten, sondern der Gebrauchswert der einzelnen Ausführungen sein. Dass in solchen Fällen die optimalen Lösungen für die einzelnen Bauarten verglichen werden sollten, ist wohl selbstverständlich. Unter Verbrauchswert können wir die Zusammenfassung aller während der Exploitationszeit anfallenden Kosten verstehen, also die Gestehungskosten mit entsprechender Berücksichtigung des günstigen Einflusses einer Verkürzung der Bauzeit, die Erhaltungskosten, die Möglichkeit von Einsparungen durch bessere Adaptibilität der Konstruktion bei etwaiger Änderung der Anforderungen an den Bau, und schliesslich noch die Abbruchkosten und der Altmaterialwert. Der letztgenannte Posten hat in erzarmen Ländern einen nicht ausser Acht zu lassenden Einfluss.

5) Noch schwieriger ist die Optimierungsaufgabe, welche in Ländern mit strenger Planwirtschaft gestellt wird : die geplanten Bauvorhaben sind optimal auf die vorhandenen, bzw. noch zu schaffenden Erzeugungskapazitäten der einzelnen, auf verschiedene Baumaterialien eingestellten Betriebe zu verteilen. Für gewisse Baugruppen ist es von allem Anfang an klar, dass sie bei Erfüllung der technischen Erfordernisse nur in bestimmten Materialien ausgeführt werden können. Es bleibt jedoch ein, mit dem technischen Fortschritt sich vergrösserndes Gebiet übrig, auf dem die verschiedenen Baustoffe in Wettbewerb treten können. Da keine Reserven vorhanden sind und die einzelnen Materialien daher nicht optimal eingesetzt werden können, besteht die Aufgabe darin, die durch die weniger vorteilhafte Verwendung der Baumaterialie entstehenden Verluste möglichst klein zu halten. Es kann sich auch ergeben, dass auch tragende Konstruktionen aus Leichtmetall so vorteilhaft ihren Platz im Bauplan zugewiesen bekommen. Es ist einzusehen, dass die Lösung einer so umfangreichen Aufgabe mit den zur Verfügung stehenden Mitteln und Kenntnissen nicht immer restlos gelingt.

6) Als höchste und schwierigste Optimierungsaufgabe, die weit

über das hinausgeht, was hier behandelt wird und die nur der Vollständigkeit halber angeführt wird, ist die Abschätzung der optimalen Zusammensetzung der Baukapazitäten, welche ein Land braucht, um den anfallenden Baubedarf in günstigster Weise zu befriedigen. Hierbei sind auch die notwendigen Nebenbetriebe usw. ins Kalkül zu ziehen.

Es ist sehr zu begrüßen, dass unter dem Stichwort "Optimierung" auf diesem Kongress auch ökonomische Fragen zur Sprache kommen. Der Theoretiker betrachtet oft als vordringlichste Aufgabe die möglichst exakte Berechnung der Spannungen in einer gegebenen Konstruktion, für eine gegebene Belastung. In Wirklichkeit ist die Aufgabe immer umgekehrt gestellt: für einen gegebenen Zweck ist das nach Form, Technologie und Gebrauchswert optimale Bauwerk zu entwerfen. Eine allgemeine Lösung ist ausser für einfachste Fälle noch unbekannt. Es fehlt eine tragfähige Theorie des Konstruierens und des Entwerfens.

Bei dem Fortschritt und der Verfeinerung der Berechnungsmethoden und der Möglichkeit des Einsatzes von Rechenautomaten sollte die Fragestellung mit Einschluss der Wirtschaftlichkeit immer mehr an Bedeutung gewinnen. Das Ziel einer Berechnung sollte nicht der Nachweis des Spannungszustandes oder der Sicherheit einer gegebenen Konstruktion sein, sondern direkt das Auffinden der optimalen Gestalt derselben. Es sollte sich also der Übergang von der Beurteilung eines Querschnittes zu dessen Bemessung und weiter zu seiner optimalen Formgebung vollziehen. Wir sind erst bei wenigen einfachen Aufgaben bei dieser dritten Stufe angelangt. Leider wird auch bei den Statikern in der Praxis oft mehr Wert auf eine (oft nur scheinbar) genaue Berechnung gelegt, als auf eine kritische Beurteilung der Ergebnisse und hauptsächlich auf die aus ihnen zu ziehenden Lehren für eine wirtschaftlichere Gestaltung der Konstruktion. Trotz elektronischer Rechenautomaten bleibt das Schaffensfeld des schöpferischen Gestalters der Konstruktion noch vollkommen uneingeschränkt. Dies auch deswegen, weil der Begriff "optimale Konstruktion" mathematisch schwer formulierbar bleibt.

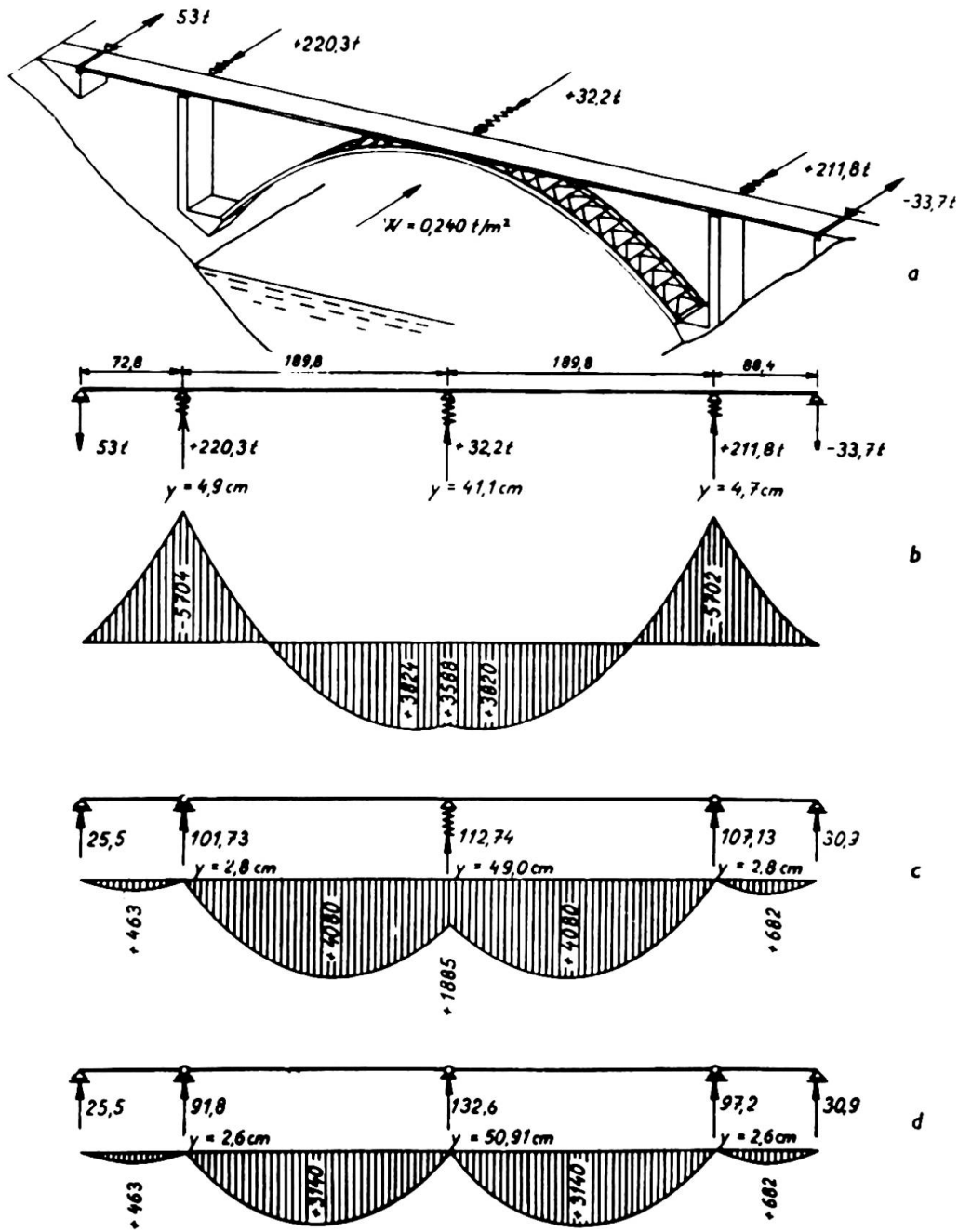


Abb. 4. Die Brücke als Raumkonstruktion bei Windbelastung
 a) Ansicht der Brücke. Horizontale Reaktion der Fahrbahnplatte und Biegemoment bei Ausbildung
 b) als Durchlaufträger über die ganze Brückenlänge
 c) als Durchlaufträger nur im Mittelfeld
 d) als 4 freiaufliegende Träger

Legend of figures:

- Fig. 1 Elevation of the two-hinged arch bridge near Prague
 Fig. 2 Cross-section of the road bridge in the quarter and in the middle of the span
 Fig. 3 Different sections with enlarged stiffness against lateral buckling
 Fig. 4 The bridge as a space structure with wind load
 a) perspective view
 Horizontal reactions and bending moments in the horizontal girder constructed
 b) as a continuous girder over the whole length of the bridge
 c) as a continuous girder only over the length of the arch
 d) as four simply supported girders

Légende de figures:

- Fig. 1 Elévation du pont en arc à deux articulations près de Prague
 Fig. 2 Coupe transversale au quart et au sommet de l'arc
 Fig. 3 Différentes sections à résistance agrandie contre déversement latéral
 Fig. 4 Le pont comme construction dans l'espace sous la poussée du vent
 a) Vue perspective du pont
 Réactions horizontaux et moments fléchissants de la poutre horizontale
 conçue comme:
 b) poutre continue sur toute la longueur du pont
 c) poutre continue dans la partie médiane
 d) poutres à deux appuis

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden 6 verschiedene Stufen von Optimierungsaufgaben angeführt: minimaler Baustoffaufwand, minimale Gestehungskosten, Optimierung von Typenreihen, optimaler Einsatz verschiedener Baustoffe, optimale Aufteilung der gegebenen Baukapazitäten für verschiedene Baumaterialien auf den Baubedarf und schliesslich deren günstigste Zusammensetzung. Es werden zwei Beispiele von Optimierungsaufgaben vom Bau der Bogenbrücke über die Moldau gebracht.

SUMMARY

Six different problems of optimization are presented: structures with lowest weight, with lowest cost, optimization of type-ranges, optimal use of different building materials, optimal distribution of the disponible building capacity and finally for different materials the best combination of building capacities. The arch bridge over the Vltava-river is used, to demonstrate two examples of optimization.

RÉSUMÉ

L'auteur présente 6 différents problèmes d'optimisation: minimum du poids, minimum du prix de revient, optimisation des rangées types, choix optimal parmi différents matériaux de construction, distribution optimale des capacités de construction possibles, la combinaison optimale des capacités de construction. Le pont en arc sur la Vltava sert comme exemple pour 2 solutions d'optimisation.

Optimisation of Structures

Optimisation des structures

Optimierung von Tragwerken

FERNANDO VASCO COSTA
Prof. Technical University
Lisbon

In Prof. J. Courbon's opinion "the optimisation of a structure consists of designing and constructing that structure at the lowest cost, with the object of fulfilling a well defined purpose. In particular the safety factor must be specified. ..."

A more general definition of optimisation is suggested, based not on the lowest cost but on the lowest overall expenses incurred during service life, including the initial cost of the structure. Such definition can be phrased as follows: the optimisation of a structure consists in designing and constructing that structure so as to minimize the sum of the initial cost plus the present value of the maintenance and operating expenses plus the expectation of all expenses incurred in case of accident or obsolescence⁽¹⁾. The safety factor of each structural element has to be selected so as to fulfill such purpose.

The consequences of failure are not the same for all the elements of a given structure: for some of them failure can bring about complete collapse of the structure, whilst for other elements an easy repair will be possible without discontinuing service.

Why not therefore regard the safety factor as one of the parameters that the designer has to choose while respecting certain rules, just as he does with the materials, the type of structure, and the particular method of construction ?

As there is no value of the safety factor that will give a clear cut limit between safe and unsafe design, there is no reason for specifying its value once and for all, as most codes of practices do. The safety factor of each element of

(1) Expectation is meant here as the probability of the accidents multiplied by the amount of the expenses incurred.

a structure has instead to be chosen taking into consideration not only the initial cost but also the maintenance expenses and the possible consequences of accidents.

What has been said of the different elements of a structure does also apply to structures of the same type but used in different circumstances, the failure of some having much more costly consequences than the failure of others. This would be the case of a dam located respectively upstream or downstream a town.

In general a higher safety factor implies an increase in the initial cost of an element or of a structure, but it permits of a reduction of the maintenance expenses and of the risk of accidents. A lower safety factor, on the other hand, permits of a lower initial cost, but implies an increase in maintenance expenses and in the risk of accidents. In general it also permits of an easier and cheaper adaptation to changing service conditions. But no safety factor, even much larger than the ones usually adopted, will ever give absolute safety.

Instead of minimizing the initial cost of a structure by taking a safety factor specified beforehand, one can try to minimize a generalized cost consisting of initial cost plus maintenance expenses plus expectation of expenses to be incurred in case of possible accidents, all such costs being expressed in terms of the safety factor.

This will permit of a very general approach to the problem of the optimisation of a structure by taking into account not only the parameters mentioned in the report but also the safety factor.

As a good example of such optimisation procedure, the most economical height of some dykes that protect the Netherlands against sea invasions has been chosen by finding the elevation H such that

$$d \left[\frac{C(H) + D e^{-\alpha(H-H_0)}}{dH} \right] = 0$$

where

- H - elevation of the top of the dyke
- $C(H)$ - cost of the dyke as a function of H
- α - a factor depending on the frequency with which certain sea levels are reached
- H_0 - lowest theoretical elevation of dyke top
- D - expenses incurred in case of overtopping of the dyke

Interest rates are currently very high. It seems therefore worthwhile to take into account the time value of money by deferring expenditure as much as possible. This can be done by reducing the initial cost, even when this implies increased maintenance expenses and higher risks during the service life of the structure.

Let us call

- C - initial cost
- m - number of types of failure envisaged for a given structure.
- n - number of periods of time - usually years - of the service life of the structure.
- $p_1^i, p_2^i \dots p_j^i \dots p_m^i$ - probability of each type of failure during each period of time i .
- $D_1^i, D_2^i \dots D_j^i \dots D_m^i$ - direct expenses with repair costs for each type of failure, and, where applicable, cost of replacing the entire structure.
- $I_1^i, I_2^i \dots I_j^i \dots I_m^i$ - indirect expenses incurred for each type of failure, such as indemnities to third parties.
- $M_1, M_2 \dots M_i \dots M_n$ - maintenance and operation expenses during each period of the structure's service life.
- $P_1, P_2 \dots P_i \dots P_n$ - survivalship of the structure, i.e. the probability of its being maintained in service during each period of time, taking into account all causes for discontinuance of service including accidents and obsolescence.
- r - interest rate.

Depending on the type of structure, the probability of failure p , the repair costs D , and the indirect expenses I , will either decrease or increase with time.

The expectation of all expenses involved in all types of failure can be evaluated for each period of time i by

$$E_i = \sum_{j=1}^m p_j^i (D_j^i + I_j^i)$$

The most economical structure will, on the long run, and taking into account the parameters just mentioned, be the one that renders the following sum a minimum:

$C +$ $+ (M_1 + E_1) (1 + r)^{-1} +$ $+ (M_2 + E_2) (1 + r)^{-2} P_1 +$ $+ (M_3 + E_3) (1 + r)^{-3} P_1 P_2 +$ $+ \dots$ $+ (M_n + E_n) (1 + r)^{-n} P_1 P_2 \dots P_{n-1}$	initial cost present value of all expenses incurred during 1st year ditto for 2nd year ditto for 3rd year \longrightarrow min
--	---

Depending on the type of structure, maintenance and operation expenses M and the survivalship of the structure P can either increase or decrease with time. If there is no reason to envisage the discontinuation of service, e.g. because the structure will have to be rebuilt even in case of total collapse, then $P_1, P_2 \dots P_n$ can be taken as unity in the above expression.

If p, D, I, M and P can be assumed to remain constant, and P taken as unity, the expression can be given the much simpler form

$$C + a_{\overline{n}}(M + E) \rightarrow \min$$

where $a_{\overline{n}}$ is the "series present value factor", given by

$$a_{\overline{n}} = (1 + r)^{-1} + (1 + r)^{-2} + \dots \dots + (1 + r)^{-n}$$

Although the values to be introduced in the above expressions are difficult to evaluate, particularly the expectations, these expressions or a similar ones could permit of a quantitative evaluation of the safety factor leading to the most economical structure, on the long run. It will also enable the influence of the usable life of the structure to be considered quantitatively in design, the same applying to its maintenance and operation costs and to the possibility of its adaptation to foreseeable changes, as recommended by the reporter in the opening paragraph.

SUMMARY

A more general definition than the one given at the beginning of the report is suggested, based not on the lowest cost of the structure for a specified safety factor, but on the lowest overall expenses incurred during the service life, namely initial cost, maintenance, operation and risks of both accidents and obsolescence. The safety factors of each structural element and of the whole structure have to be selected so as to fulfill such purpose.

Such definition can be phrased as follows: the optimisation of a structure consists in designing and constructing that structure so as to minimize the sum of the initial cost plus the present value of the maintenance and operating expenses plus the expectation of all expenses incurred in case of accident or obsolescence.

RÉSUMÉ

On propose pour l'optimisation d'une structure une définition plus générale que celle présentée au début du rapport, ayant pour objet non pas la structure au moindre prix pour un coefficient de sécurité imposé, mais la structure la plus économique en service, compte tenu de tous les frais de service y compris ceux

d'entretien, et des risques d'accidents et d'obsolescence. Les coefficients de sécurité pour chaque élément et aussi pour l'ensemble de la structure, doivent être choisis conformément à cet objet.

A cette définition on peut donner la forme suivante: l'optimisation d'une structure consiste à concevoir et à réaliser la structure de façon à rendre minimum la somme de son prix avec la valeur actuelle des frais d'entretien et avec l'espérance mathématique des frais directs et indirects que puisse entraîner des accidents ou des modifications prévisibles des conditions de service.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine erweiterte Definition des Begriffs "Optimierung eines Tragwerkes" vorgeschlagen, worin neben den Erstellungskosten auch die zu einem späteren Zeitpunkt noch zu erwartenden Kosten (Unterhalt und Risiken) mitberücksichtigt werden sollen. Dies wäre die wirtschaftlichste Lösung auf weite Sicht.

Eine solche Definition könnte folgendermassen lauten: Die "Optimierung eines Tragwerkes" besteht aus der Wahl des zweckmässigen Sicherheitskoeffizienten jedes Tragwerkes und aus der wirtschaftlichsten Verbindung zwischen Projekt - und Erstellungskosten mit den laufenden Unterhalts - und Bedienungskosten und den auf statistischer Vorhersage zu erwartenden Kosten gelegentlicher Unfälle und eventueller Änderungen.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Optimum Design for Structural Safety

Dimensionnement optimal pour la sécurité d'une construction

Optimierung für die Bausicherheit

FRED MOSES

Assistant Professor of Engineering
Case Western Reserve University
Cleveland, Ohio U.S.A.

BACKGROUND

In recent years there have been developments in the area of optimum design of structures which concerned the sizing and proportioning of members for minimum weight or cost. The utilization of digital computers and advances in allied fields of Mathematical Programming and Operations Research led to the formulation of structural optimization as a problem in Mathematical Programming. Given a set of design variables such as depth, thickness, area, moment of inertia all denoted by a vector X_j the design problem becomes:

$$\text{Minimize } f(X_j) \quad (1)$$

$$\text{such that } g_j(X_j) \geq 0 \quad j=1,2,\dots, \text{Number of constraints} \quad (2)$$

$f(X_j)$ is a function of weight or cost to be minimized while $g_j(X_j)$ are the design limitations on stress, stability and deflection or any practical fabrication or construction restrictions. It is necessary to be able to compute for any set of design variables X_j the stresses, deflections and stability associated with this design. Recent papers in the structural engineering literature have presented efficient optimum design techniques for a wide class of problems including plate girders, trusses, frames, stiffened plates and cylinders.¹ These works have used Mathematical Programming techniques such as linear programming, dynamic programming, gradient methods and unconstrained minimization.² The Mathematical Programming approach to design may be limited in that unlike Professor Courbon's paper entitled, "Optimization of Structures" it does not consider creative changes in design or even large deviations from an initial prescribed design geometry and topology.³ Nevertheless, it has led to important economies in structural design and has been used in practice particularly for conventional type structures such as plate girder bridges and frames.

This paper considers the problem of optimization within the context of safety. It has been proposed by Professor Freudenthal that a rational approach

to safety must be based on reliability or probability of failure.⁴ This leads to a new formulation of an optimum design problem which is:

$$\text{Minimize } f(X_i) \quad (3)$$

$$\text{such that } P_f(X_i) \leq P_f \text{ allowable} \quad (4)$$

P_f allowable is the minimum failure probability acceptable for the design and is assumed in this study as given. $P_f(X_i)$ is a function which gives the overall failure probability of the structure as a function of the design variables to be determined. This constraint on $P_f(X_i)$ is the only constraint used on structural behavior although other constraints may be based on construction or other requirements. Several methods for computing $P_f(X_i)$ and utilizing it in an optimum design procedure are presented. Some factors which have motivated this approach to optimization include the following points:

- a) Safety as expressed in terms of probability of survival may actually be impaired in current deterministic optimum design programs. This is because existing design codes and safety factors are used to provide protection against stress, deflection and stability-type failure modes. These safety factors were developed over a period of time in practice and were not associated with structures which were optimized. Most mathematical programming optimum designs end up with a larger number of constraints on stress and deflection against their limit than an unoptimized design. It should be expected, therefore, that the probability of failure which is the probability that any failure mode occurs will be higher for an optimized design. An optimization procedure which uses overall structural failure probability as the behavior constraint should produce more balanced designs consistent with the development of rational safety.
- b) In order to reach more significant levels of structural optimization it is necessary to compare optimized structures of different configuration, material and geometry. Within this decision context a rational comparison is possible only if the structures have the same level of safety as expressed in terms of probability of failure.
- c) The use of new materials such as brittle composites with greater scatter in strength tests and new structural applications in environments with greater uncertainty suggest that there will be more emphasis in the future on designing for probability levels rather than using preassigned safety factors. It, therefore, seems appropriate to formulate the design optimization problem as in equations 3 and 4.
- d) Reliability based optimum design may actually facilitate the mathematical optimization problem by replacing the numerous limitations (on member stress

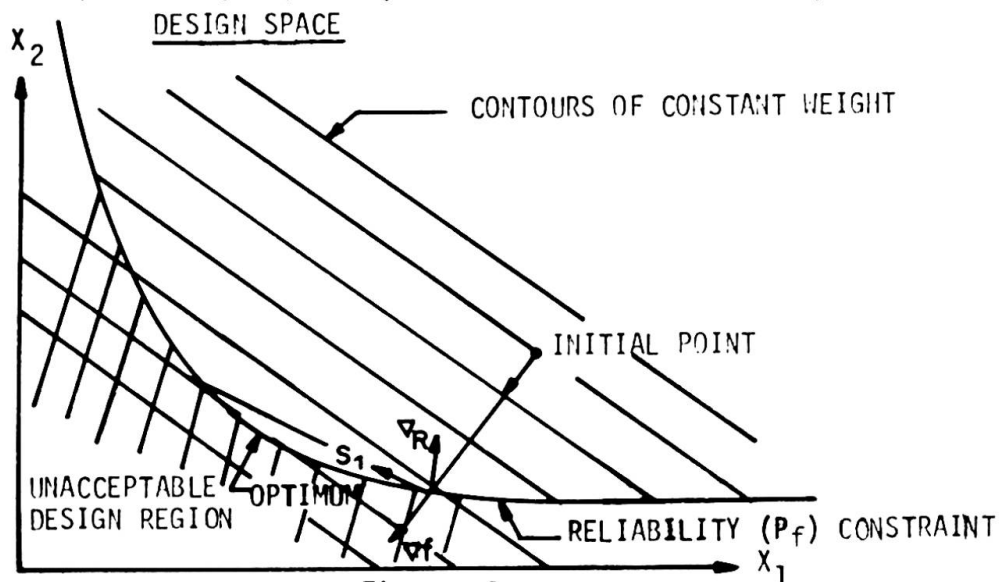


Figure 1

and deflections) in a deterministic design by a single constraint on overall structural failure. The mathematical and computational complexity, however, has been transformed from the minimization aspect to the analysis of failure probability. The problem of minimizing the weight subject to only one constraint as illustrated in Figure 1 with two variables can be handled by several techniques including linear programming approximations and useable feasible gradient moves. Figure 1 illustrates an algorithm for minimization by use of the gradients or normal vectors to the weight function and the reliability constraint. From an arbitrary starting point the design is changed in steps in the direction of the gradient to the weight until the reliability constraint is encountered. Subsequent changes in the design variables are made in a direction s_1 which both reduces weight and avoids violating the reliability constraint. This is a useable feasible direction and methods for determining this direction are well known.⁵ The design changes are continued until the constraint gradient and reliability gradient are colinear.

RELIABILITY ANALYSIS AND OPTIMUM DESIGN

Most work in failure probability has concentrated on a problem in which all the strength variability was included in one member and all the load variability was included in one load. Freudenthal presented the probability of failure of this one member one load structure often called the fundamental case of structural reliability including the effect of frequency distributions, standard deviations for load and strength and the safety factor or ratio of mean values.⁶ In considering the design or proportioning of members in multi-member multi-load structures, a model is needed to show the effect on failure probability of each of the individual members of the structure and their interaction with all load conditions. Two reliability applications of importance are presented herein. The first is multi-member "weakest link" structures discussed by Professor Freudenthal in which the structure fails if any single element fails under any load condition.⁴ The second application is "redundant" structures such as limit designed frames in which failure is the occurrence of any collapse mode each involving more than one element yielding. In both cases loads and strengths are random variables described by known frequency distributions. The reliability analysis computes for a given design the overall failure probability of the structure. The optimum design problem is to proportion member sizes to have minimum weight or cost for a specified allowable failure probability.

"WEAKEST LINK" STRUCTURES

The failure probability of a single member of strength R under a single load condition S can be determined from the following equation:⁶

$$P_f = \int_0^\infty Pr \{S > \tau\} Pr \{R = \tau\} d\tau = \int_0^\infty [1 - F_S(\tau)] f_R(\tau) d\tau \tag{5}$$

Pr should be read "probability that". F (τ) is the distribution function and f (τ) the density function. In extensions to multi-member structures under one load condition it has often been proposed that the overall failure probability could be obtained from the following equation:^{7,8,9}

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^N [(1 - P_{fi})] \quad N = \text{Number of members} \tag{6}$$

P_{fi} is the failure probability of the i th member and P_f the overall failure probability. If the individual P_{fi} are small as is usually the case, then equation 6 becomes:

$$P_f = \sum_{i=1}^N P_{fi} \tag{7}$$

Equation 6 ignores, however, the fact that the events corresponding to member failures are statistically correlated since the stresses in each member are completely correlated since they arise from the same loading. The member failures are not 100% correlated since the strengths are independent random variables. The consideration of correlation leads to a lower value of P_f . If there is only one load condition and N members or element strengths, then it is easy to verify that the equation that gives the failure probability is:

$$P_f = 1 - \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^N [1 - F_{Ri}(a_i \tau)] f_p(\tau) d\tau \quad (8)$$

The constant a_i relates the forces or stress levels in member i to the load value of $P=\tau$. Equation 8 is valid for "weakest-link" structures which fail if any member fails. This includes determinate structures and those indeterminate structures with little "fail-safe" probability of survival available after the first member has yielded. This is true for structures with brittle members which can't carry any load after reaching yield load and for all structures for which the load variability greatly exceeds the strength variability. If the structure is subjected to M repeated application of the same loading condition then P_f can be computed by integrating on the density function of the worst load which is:

$$f_{P_{max}}(\tau) = M [F_p(\tau)]^{M-1} f_p(\tau) \quad (9)$$

The failure probability is then:

$$P_f = 1 - \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^N [1 - F_{Ri}(a_i \tau)] f_{P_{max}}(\tau) d\tau \quad (10)$$

If all loads are not of the same load condition but represent distinct load conditions applied at different times then an exact solution for P_f requires an evaluation of a multiple integral based on the joint distribution function of the load conditions. Various bounds have been presented on the failure probability based on evaluating integrals which reflect the importance of statistical dependence between failure modes due to a single load condition on multiple members or a single member acted on by distinct load conditions.^{10,11}

An important factor in reliability design of "weakest link" structures is whether the design constraint is based on equation 10 which is exact for the case shown or equation 6 which is an upper bound on P_f and ignores the statistical correlation between failure modes. A previous study showed that this correlation significantly affects the reliability analysis if the variability of the load random variable exceeds that of the strength as in structures designed to resist as their major loading wind and earthquakes.¹¹ In such instances, a lower bound on P_f which is the largest member failure probability may be used as the design constraint.

In studying optimum design of "weakest-link" structures two factors were under observation. One was the effect of statistical correlation between failure modes on the overall structural weight and the second is the influence of unequal individual member failure probabilities. It should be noted that all previous studies on reliability based optimums have used equation 6 as the basis for computing the failure probability and thus have ignored the correlation.^{7,8,9} To study the effect of correlation, a design is found for a truss with one load condition. All members are assumed to have equal mean loads and, therefore, have the same optimum area. The consideration of the exact value of the P_f constraint in equation 8 including statistical correlation allows each member to be designed for a higher individual failure probability than if equation 6 were used as the constraint and correlation ignored. The higher individual failure probability

means a lower weight and the ratio of the two optimum weights based on equation 8 and equation 6 is plotted in Figure 2. With a normal frequency distribution of load and strength for the coefficients of variation shown the maximum weight saving reaches 7.3% for case 1 in a 50 member structure.

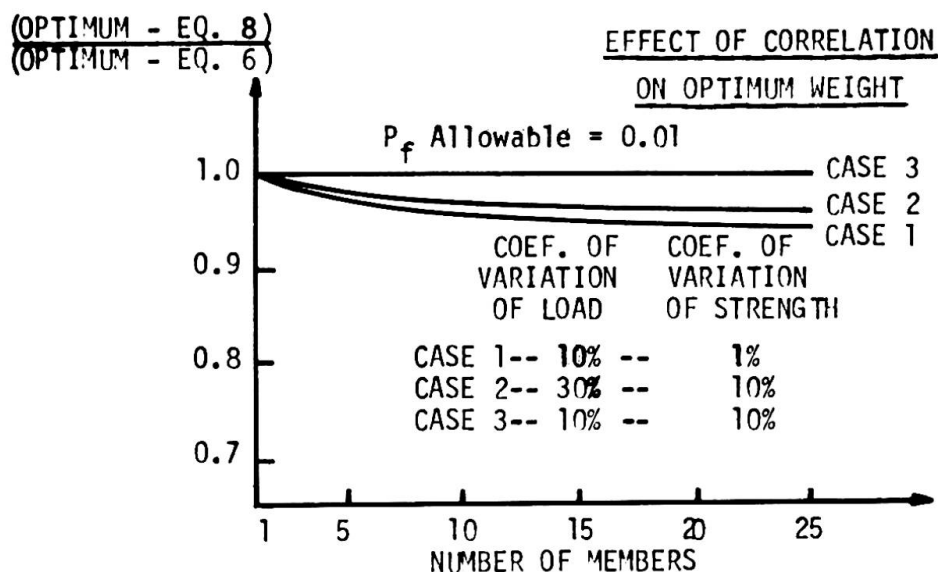


Figure 2

Another indication of the correlation factor becomes evident when the overall failure probability is written as:

$$P_f = a_1 P_{f_1} + a_2 P_{f_2} + \dots + a_i P_{f_i} + \dots + a_N P_{f_N} \tag{11}$$

P_{f_i} is the failure probability of the i th member and a_i is the percentage of its failure probability that this member contributes to the overall probability. The a_i shown in Figure 3 are computed either by sequentially integrating equation 8 for increasing number of members or by another technique discussed elsewhere.¹¹ If there were no statistical correlation all a_i would equal 1.0. If there was complete correlation between failure modes and the members were ordered with member 1 having the highest failure probability then a_1 would be 1.0 and all other a 's equal zero.

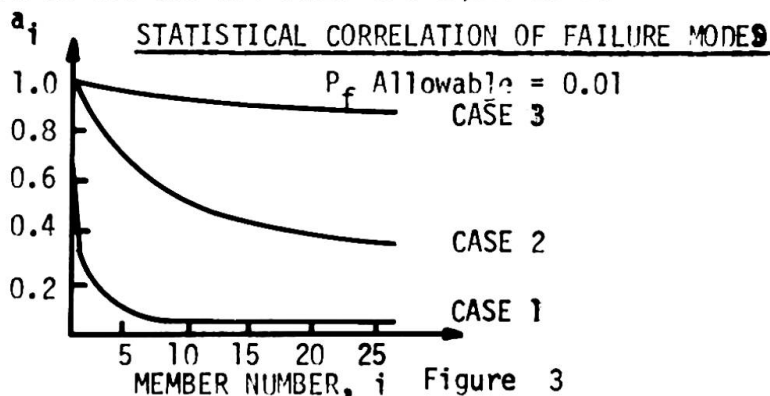


Figure 3

Figure 3 shows the potential weight saving with other frequency distributions and members with unequal lengths and mean applied loads since it indicates the correlation effect and the error introduced into the overall probability expression as the number of members in a structure increases. The magnitude of the weight saving can be obtained from plots of member failure probability vs. member size (or equivalently its safety factor) and is available from the work

on the single member single load fundamental case.⁶ It is seen from Figure 3 that the correlation factor becomes more significant when the load variability exceeds the strength variability as in structures subject to wind and earthquake loading.

The second factor mentioned above for study is "weakest-link" structures with members of unequal mean loads. An optimum design in this case has unequal safety factor and failure probability for each member. In general minimum weight results if heavier members have higher than the average failure probability and lighter member with lower mean applied loads or stresses have less than one average member failure probability. It has been proposed that the following equation applies to an optimum design.⁸

$$\frac{\text{Weight of member } i}{\text{Total weight}} = \frac{P_{fi}}{P_f \text{ allowable}} \quad (12)$$

This equation was derived and is applicable to cases where equation 7 for P_f is used as the design constraint. Furthermore, it implies that the element P_{fi} depends only on the size of the i^{th} element, or:

$$\frac{\partial P_f}{\partial x_i} = \frac{\partial P_{fi}}{\partial x_i} \quad (13)$$

In general, for a statically indeterminate structure this last equation is not applicable and:

$$\frac{\partial P_f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial P_{fk}}{\partial x_i} \quad (14)$$

That is the change in any member affects the force distribution and, therefore, the failure probability of every indeterminate member of the structure. It should be noted that the simplicity that equation 7 introduces into the optimization procedure is not lost when the correlation is included in the computation of the failure probability. This simplicity is needed since most optimization methods need the gradient to the constraint. Using equation 11, the components of the gradient of the reliability constraint can be computed as:

$$\frac{\partial P_f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^N a_k \frac{\partial P_{fk}}{\partial x_i} \quad (15)$$

It has been found from experience that the a_k which accounts for the correlation does not change much in a small region in which the gradient is determined from the partial derivatives using a finite difference technique. Thus the gradient based on N computations of the form shown in equation 15 need not be obtained from finite difference perturbations of equation 8 of N members and one load but rather from equation 5 which is for one member and one load. The computation time saved in this manner may be significant.

To illustrate an optimum design for a structure with unequal member sizes Table 1 is presented for a determinate truss with 10 members. The formulation of the design problem as a minimum weight design with a failure probability constraint as indicated in equations 3 and 4 was used. Equation 12 can be seen not to be valid at the optimum due to correlation between failure modes not considered in its derivation. Also shown in Table 1 is a design based on equal safety factor for each member such that the overall failure probability of the structure based on equation 7 is equal to the allowable value. The difference between the weight of the optimum design and the equal safety factor design is partly due to

the correlation factor but principally due to the Mathematical Programming technique discussed above which proportions the members in an optimum manner using only the single overall failure probability constraint.

TABLE 1 - 10 Member Example^a

Member	Mean Load Value	Equal Safety Factor		Optimum Design	
		Area in ²	P _{fi}	Area in ²	P _{fi}
1	0.1P	0.274	0.0001	0.297	0.519x10 ⁻⁴
2	0.2P	0.547	0.0001	0.554	0.604x10 ⁻⁴
3	0.3P	0.817	0.0001	0.818	0.958x10 ⁻⁴
4	0.4P	1.09	0.0001	1.09	0.991x10 ⁻⁴
5	0.5P	1.37	0.0001	1.35	1.23 x10 ⁻⁴
6	0.6P	1.64	0.0001	1.61	1.61 x10 ⁻⁴
7	0.7P	1.92	0.0001	1.86	2.08 x10 ⁻⁴
8	0.8P	2.19	0.0001	2.11	2.65 x10 ⁻⁴
9	0.9P	2.46	0.0001	2.35	3.25 x10 ⁻⁴
10	1.0P	2.74	0.0001	2.59	3.91 x10 ⁻⁴

a Mean Load, $\bar{P}=60,000$ lb.; C.V.(P) = 20%
 Mean Yield stress, $\bar{\sigma}_y=40,000$ psi; C.V. (σ_y) = 5%
 Density = 0.283 lb/in.³;
 Length $L_i=60$ " for all members.
 Both P and σ_y have normal distributions

Weight based on equal safety design factor = 255.6 lb.
 Weight based on optimum design = 248.6 lb.
 P_f allowable is 0.001

"REDUNDANT" STRUCTURES

In many structures particularly those designed by limit or ultimate design methods several members or elements must simultaneously reach their capacity before the structure is failed. This is the case with some indeterminate trusses and also beams and frames in which mechanisms form at failure. It is assumed that each element strength is an independent random variable.¹²

A failure mechanism occurs if the contribution of load elements exceeds the strength elements for any particular collapse mode. If the contributions are linear this leads to an equation for reserve strength Z_j in a mode j of:

$$Z_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} M_i - \sum_{k=1}^L b_{jk} P_k \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n - \text{Critical Elements} \\ k=1, \dots, L - \text{Loads} \\ j=1, \dots, m - \text{Collapse Modes} \end{matrix} \quad (16)$$

Equation 16 would for example govern a frame against the formation of a collapse mechanism. The overall failure probability of the structure is the probability that any Z_j is less than zero and can be written as:

$$P_f = \Pr \{Z_1 \leq 0\} + \Pr \{Z_2 \leq 0, Z_1 > 0\} + \Pr\{Z_3 \leq 0, Z_2 > 0, Z_1 \geq 0\} + \dots \quad (17)$$

A method presented elsewhere has been developed to compute the probability that each Z_j is less than zero, including the effect of statistical correlation between Z_j present because some load and strength terms appear in more than one collapse equation.¹³

As an example of an optimum redundant design consider a single bent frame with design variables corresponding to the plastic moment capacity of the beam and column. Figure 4 shows the deterministic constraints based on a safety factor approach and the constraint based on failure probability as expressed in equation 17. The weight function used which is shown linearized in Figure 4 is:

$$W = K \sum_{i=1}^R (M_i)^{2/3} L_i \tag{18}$$

M_i is the plastic moment capacity, L_i the length of the member, R the number of members and K is a constant.

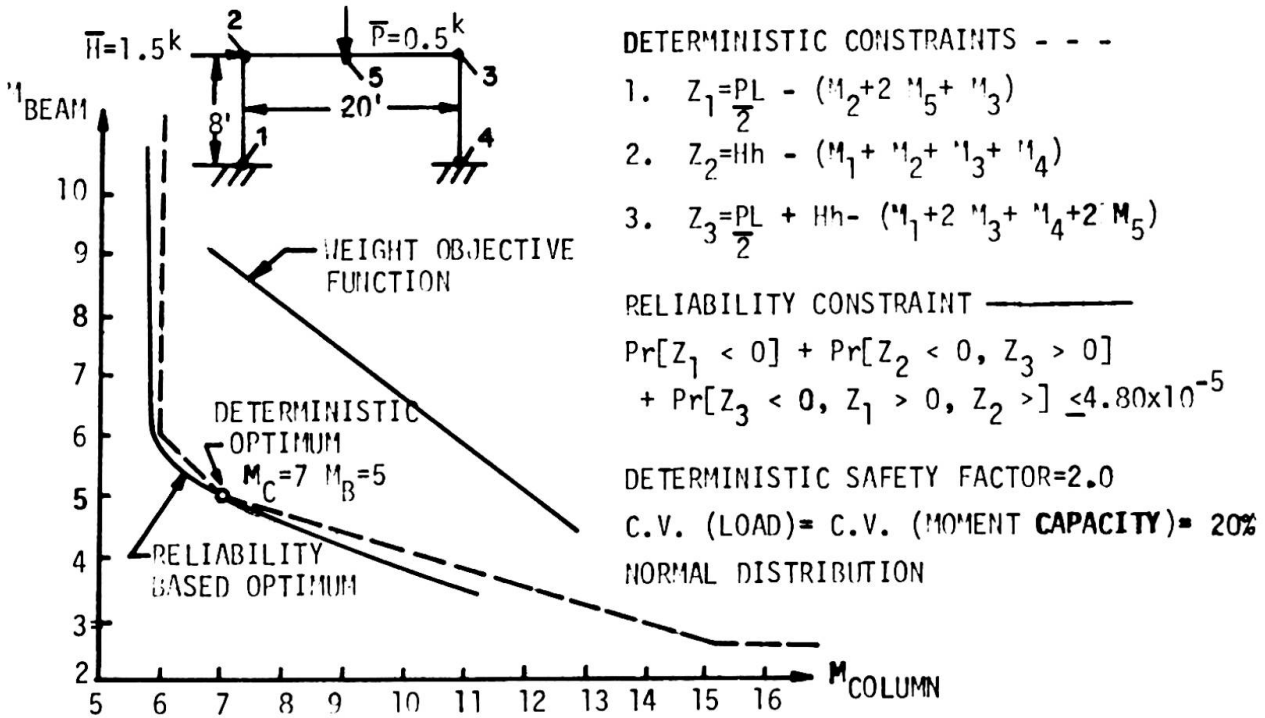


Figure 4 DESIGN SPACE FOR BENT FRAME

The allowable failure probability was set at 4.80×10^{-5} and was chosen based on a failure probability analysis of the optimum design obtained using the deterministic or nonstatistical constraints. Optimum design methods for frames to resist plastic collapse in the deterministic case are well known and since all constraints are linear, a linear programming technique is applicable. A result of a deterministic optimum design is that a theorem for this case shows that the number of collapse modes designed up against their limit in the optimum design equals the number of design variables which is the number of unknown member plastic moment capacities.¹⁴ Although this is acceptable from a deterministic viewpoint and does not violate conventional safety factors, it must be viewed as unsafe from a reliability design viewpoint. The fact that an optimum design with a large number of design variables has an equally large number of failure modes designed to their limit must indicate that the failure probability is increased over a conventional unoptimized safety factor limited design. Consequentially, the replacement of the deterministic constraints by a single reliability constraint should lead to a more balanced optimum and also allows the failure probability to be specified in the constraint. An added benefit that may be seen from Figure 4 is that the design optimized with respect to failure probability is lower in weight than the deterministic optimum with the same failure probability. Further examples of optimum single story frames showed the optimum weight increased as both the allowable failure

probability was decreased and the coefficients of variation of load and strength was increased.¹⁵

To illustrate reliability based optimum design for larger redundant structures the frame shown in Figure 5 with six design variables was studied.

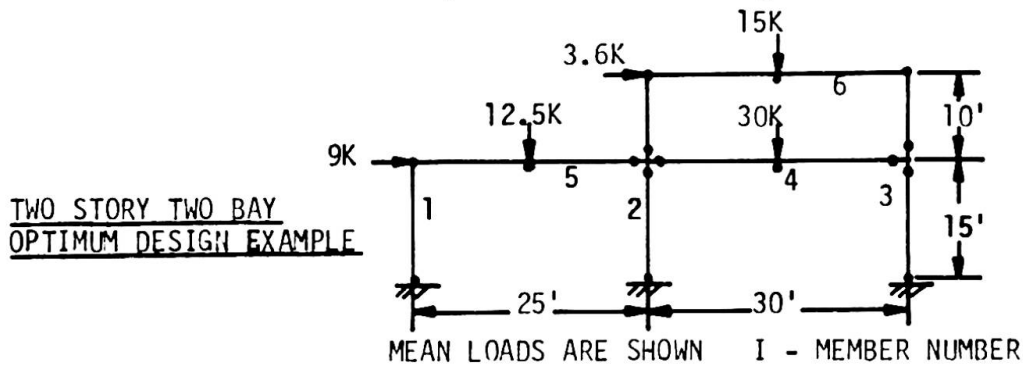


Figure 5

The resulting design moment capacities for the frame in Figure 5 is shown in Table 2 for designs with normal and log normal frequency distribution for load and strength of different coefficients of variation. It is interesting to observe as shown in Table 2 that at least for the examples studied one mode seems to dominate in having a relatively larger failure probability than the other modes.¹³

Table 2
Optimum Design Results of Two Story
Two Bay Frame Shown in Figure 4

Example No.	Optimum Design Moment Capacities K-ft			C.V. Mom. Load %	P_f Allowable	Weight Function	Frequency Distribution	Individual Collapse Mode Failure Probability in Order of Largest Value First		
	1	2	3					1	2	3
	4	5	6					4	5	
1	29.2	95.8	84.4	0.10	7.78(2)*	312.5	Normal	6.70(2)	6.87(3)	4.50(3)
	175.0	73.2	74.4	0.20				6.26(4)	3.16(4)	
2	27.8	96.3	84.4	0.10	7.80(2)	310.9	Log Normal	4.85(2)	1.55(2)	1.35(2)
	173.8	72.0	77.9	0.20				2.21(3)	1.67(3)	
3	28.0	78.7	71.0	0.20	7.72(2)	297.3	Normal	4.94(2)	1.22(2)	1.16(2)
	170.9	69.4	74.9	0.10				2.81(3)	2.68(3)	
4	27.3	78.3	71.3	0.20	7.16(2)	293.5	Log Normal	4.19(2)	1.64(2)	1.09(2)
	166.4	65.1	74.9	0.20				3.13(3)	2.25(3)	
5	29.1	87.8	72.3	0.15	7.52(2)	300.6	Normal	5.39(2)	1.10(2)	9.89(3)
	170.3	68.0	74.1	0.15				1.71(3)	1.69(3)	

* Exponents of failure probability are shown in parenthesis (m) and should be read as 10^{-m}

DISCUSSION AND CONCLUSIONS

- 1] The results presented indicate the feasibility of using reliability or probability of failure constraints in solving for optimum multi-member structural designs. By using Mathematical Programming methods to proportion member sizes a design is obtained which has an overall failure probability equal to an allowable value. This approach to design appears more rational than many current optimum design methods which use conventional code safety factors to restrict member dimensions based on stress and deflection limitations. As a result such optimum designs end up with many element constraints active which from a reliability viewpoint reduces its safety below a conventionally unoptimized design. Two examples presented include "weakest-link" structures for which any member failure constitutes failure of the structure and "redundant" structures which fail by forming collapse mechanisms after several members have simultaneously yielded.
- 2] It is seen from the examples presented that a reliability based optimum design does not have equal safety factor for all elements. In a "weakest-link" structure the heavier members have higher failure probability values than lighter members. This factor is influenced by the degree of statistical correlation between member failures which depends on the ratio of the variability or coefficient of variation of the load to the strength. In an optimum "redundant" structure such as a frame designed to resist formation of a collapse mechanism, the same safety factor is not present for each mechanism at the optimum design. Rather the Mathematical Programming method proportions each member to achieve minimum weight within the constraint of overall failure probability. For the frames studied it was observed that one particular mechanism in an optimum design dominates in its value of failure probability but it is not possible to choose beforehand which mechanism this will be.
- 3] An important factor influencing the magnitude of the optimum design as well as its member sizes will be the choice of load and strength frequency distributions and their parameters particularly the coefficients of variation. Curves of cost vs. statistical parameters show choice of frequency distribution is not too critical unless the distribution is highly skewed. Another important factor is the choice of an allowable failure probability. This should depend on the function of the structure as well as the failure consequences in social and economic terms and is not considered herein.¹⁶
- 4] The computation of failure probability for any frequency distribution as presented herein and its incorporation in an optimum design procedure should stimulate studies of random variables encountered in structural engineering to improve their description. Empirical studies are needed to provide reasonable frequency distributions for static strength, fatigue life, creep rate, floor loading as well as stochastic theories for dynamic phenomena associated with wind, highway and earthquake loading. The use of optimum design techniques illustrated herein should be useful in assessing the importance of changes in the parameters of these frequency distributions in terms of optimum cost or weight rather than in terms of predicted failure probabilities. Failure probabilities are usually expressed in quantities of 10^{-2} to 10^{-9} and small changes in frequency distribution may cause large changes in failure probability. However, the change in optimum weight associated with this change in frequency distribution may be of smaller magnitude.
- 5] A truly optimum design should consider the behavior of the structure over various types of loading conditions as well as possible strength deteriorations. In a more extensive approach under study an optimum design is to be found which considers all levels of failure including yielding, formation of cracks, large

deflections, instability and collapse. Although for some "weakest-link" structures yielding and collapse occur simultaneously, this is not true for most structures.¹⁷ One approach to this problem would be to impose an allowable failure probability which depends on the damage for each failure level and to seek an optimum design which satisfies all probability of failure constraints. Another approach is to combine the constraints into one reliability constraint which would contain the probability of a level of failure occurring multiplied by a factor which includes the associated damage.

6] One question often raised in consideration of failure probability analysis is the meaningfulness of a statement that the failure probability is 0.001 since not enough data could conceivably exist to support this claim. It is easy, however, to see that a statement that P_f of structure A is 0.001 and of structure B 0.00001 is meaningful.¹⁸ In the light of optimum design the P_f statements take on further meaning since they influence the overall structural cost. Furthermore, in a single design it would be possible to use various combinations of P_f allowables, coefficients of variation of load and strength to see how they influence the overall cost. The final structural cost would be based on the best estimate of these parameters in the light of previous experience, empirical studies of existing structures and other economic factors.

ACKNOWLEDGEMENT

The author wishes to thank the National Science Foundation for supporting this research which is part of NSF Grant GK-1871 on "Optimum Design of Structures Within a Reliability Philosophy" at Case Western Reserve University under the direction of the Writer.

REFERENCES

1. Schmit, L.A., "Automated Design", International Science and Technology, June 1966, pp. 63-78, also: "A Structural Synthesis Capability for Integerally Stiffened Cylindrical Shells", No. 68-327 AIAA - 9th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, April 1968.
2. Kowalik, J. "Nonlinear Programming Procedures and Design Optimization; ACTA Polytechnica Scandinavica, Math & Computing Mach. Series No. 13 Trondheim, 1966.
3. Courbon, J. "Optimization of Structures", Preliminary Publication-- 8th Congress I.A.B.S.E. New York 1968 pp. 79-86
4. Freudenthal, A.M., "Critical Appraisal of Safety Criteria and their Basic Concepts" Ibid. pp. 13-25.
5. Zoutendijk, G. Methods of Feasible Directions, Elsevier Publishing Company, Princeton, 1960
6. Freudenthal, A.M., Garrelts, J.H., Shinozuka, M., "The Analysis of Structural Safety", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 92, No. St. 1, Proc. Paper 4682, Feb. 1966.
7. Hilton, H.H. and Feigen, M., "Minimum Weight Analysis Based on Structural Reliability," Journal of the Aerospace Sciences, Vol. 27, No. 9 Sept. 1960.
8. Switzky, H., "Minimum Weight Design with Structural Reliability", AIAA 5th Annual Structures and Materials Conference, 1964 pp. 316-322.
9. Khachaturian, N. and Halder, G.S., "Probabilistic Design of Determinate Structures", Proceedings of the Specialty Conference, Eng. Mech. Div. ASCE Oct. 1966, pp. 623-647.

10. Cornell, C. Allin, "Bounds on the Reliability of Structural Systems, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, No. St. 1 Proc. Paper 5096, Feb. 1967
11. Moses, F., and Kinser, D.E. "Analysis of Structural Reliability", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, No. St. 5, Proc. Paper 5494, Oct. 1967
12. Tichy, M. and Vorlicek, M., "Safety of Reinforced Concrete Framed Structures", Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Proceedings of the International Symposium held in Miami, Fla., Nov. 1964, ASCE-ACI, 1965.
13. Stevenson, John D. "Reliability Analysis and Optimum Design of Structural Systems With Applications to Rigid Frames". Solid Mechanics, Structures, and Mechanical Design Division Report No. 14, Case Western Reserve University, November 1967.
14. Neal, G. "The Plastic Methods of Structural Analysis", J. Wiley & Sons, Inc. 1956.
15. Moses, F. and Stevenson, J.D. "Reliability Based Structural Design" Solid Mechanics, Structures, and Mechanical Design Division Report No. 16, Case Western Reserve University, November 1967.
16. Asplund, S.O., "The Risk of Failure", Structural Engineer, Vol. 36, No. 8, August 1958.
17. Sawyer, H.A. Jr., "Status and Potentialities of Nonlinear Design of Concrete Frames" Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Proceedings of the International Symposium held in Miami Fla. Nov. 1964, ASCE-ACI, 1965.
18. Bolotin, U.V., "Statistical Methods in Structural Mechanics" 2nd Ed. STROIZDIAT, Moscow, 1965 Translated by M.D. Friedman.

SUMMARY

An optimization procedure is presented in which safety in terms of reliability or probability of failure is used as the controlling design limitation for finding minimum weight structures. Reliability analysis and optimum proportioning in multimember structures is given for "weakest-link" and redundant cases. Examples illustrate the effect on optimum weight of frequency distributions, coefficients of variation and allowable failure probability. Some aspects of the reliability analysis problem are discussed.

RÉSUMÉ

Le rapport présente un procédé d'optimisation où la sécurité, en termes d'endurance et de probabilité de ruine, détermine le dimensionnement minimal d'une construction. Dans les structures à éléments multiples, l'analyse de la sécurité et le dimensionnement optimal sont déterminés par le membre le plus faible et par les conditions extrêmes exagérées. Des exemples expliquent l'effet de la répartition des fréquences, des coefficients de variation et de la probabilité de ruine acceptable sur le dimensionnement optimal. Quelques aspects du problème de l'analyse de la sécurité sont discutés.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Beitrag wird ein Optimierungsverfahren vorgestellt, in welchem der Sicherheitsbegriff in Zuverlässigkeits- oder Wahrscheinlichkeitsraten des Bruches zur Kontrollbegrenzung des minimalen Gewichtes gebraucht wird. Die Zuverlässigkeitsanalyse und die Optimierung (vielstübiger) hochgradiger Bauwerke ist für das schwächste Glied und extreme Fälle durchgeführt worden. Beispiele zeigen die Wirkung der Häufigkeitsverteilungen, der Streuungsmasse und der zulässigen Bruchwahrscheinlichkeit auf das minimale Gewicht. Einige Merkmale der Zuverlässigkeitsanalyse werden besprochen.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Optimisation des structures par la considération des états limites plastiques

Optimierung der Tragwerke unter Berücksichtigung der plastischen Grenzzustände

Optimisation of Structures on the Basis of the Plastic Behaviour of Material

PAUL ALBERT LORIN

Ingénieur-Conseil

Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

France

Une structure peut être considérée comme optimisée lorsque, conçue pour assurer correctement les services qui lui sont demandés, son exécution peut être effectuée pour le moindre prix.

La recherche d'une structure optimale est nécessairement fort complexe, compte tenu de toutes les données techniques et économiques.

Le poids de matière employée est un élément du prix de revient, mais la recherche du poids minimal n'est certainement pas la voie qui conduit au moindre prix.

L'optimisation dans la conception et le dimensionnement conduira à la recherche de la distribution la plus judicieuse de la matière.

Dans cette recherche fort complexe nous ne considérerons ici qu'un seul aspect : sécurité de la structure par rapport à la ruine par affaissement.

Cette étude laisse donc de côté tout ce qui concerne les problèmes de rupture fragile ou d'instabilité de forme ; il ne faut pas se dissimuler l'importance de ces problèmes d'instabilité lorsque l'on tient compte de la plastification de certains éléments.

Nous laissons également de côté la prise en compte de toutes les incertitudes concernant l'action des charges et le comportement de la matière. Il s'agit là d'un autre problème ; on peut cependant remarquer que la méthode la plus générale pour faire un contrôle en sécurité, s'appliquant tant dans le domaine élastique que dans le domaine plastique, est celle qui consiste à frapper les diverses sollicitations de coefficients de pondération (méthode préconisée par la Convention Européenne de la Construction Métallique).

Enfin l'étude se borne à l'équilibre statique. On suppose donc que l'application des charges se fait progressivement, et que la structure en se déformant sous l'action des charges est à tout instant en équilibre.

Traditionnellement les calculs de l'équilibre de la structure se font en supposant que la matière est parfaitement élastique.

Il faut cependant signaler que de tout temps on a eu conscience de l'importance des qualités plastiques en ce qui concerne la sécurité. Les plus anciens cahiers des charges ont toujours exigé un important allongement plastique pour les aciers de construction.

La ruine se produisant par affaissement, certains éléments sont nécessairement entrés en phase plastique. Le calcul élastique ne correspond donc pas au comportement réel de la matière en état limite.

Une première conséquence est que le calcul élastique ne conduit pas à une sécurité homogène.

Une section soumise à flexion possède une réserve de sécurité d'autant plus grande que le moment de saturation plastique est plus différent du moment de limite élastique. Plus une section est loin de l'optimisation élastique, plus grande est la réserve de capacité de flexion par plastification.

Une structure hyperstatique calculée élastiquement possède du fait des plastifications possibles une réserve de capacité de résistance que ne possède pas une structure isostatique calculée avec les mêmes critères.

Ces deux faits à eux seuls justifient déjà la prise en compte des états limites plastiques.

Mais le problème que nous voulons aborder est celui-ci : "La considération des états limites plastiques conduit-elle à une distribution plus judicieuse de la matière ?"

Nous simplifierons le problème en supposant :

a) que la matière est un corps élasto-plastique parfait (l'image correspond assez bien à l'acier de construction)

b) que les sections fléchies sont optimisées élastiquement, c'est-à-dire que toutes les fibres atteignent simultanément la limite élastique. Le moment de limite élastique est alors égal au moment de saturation plastique.

Nous considérerons des systèmes hyperstatiques.

Nous ferons souvent appel aux polygones d'écoulement (en employant la méthode de RJANITSYN pour les systèmes de poutres).

Pour un système de charges donné l'état limite nous permettra de déterminer l'état d'autocontrainte.

Le problème pour les charges variables sera de savoir si cet état d'autocontrainte est définitif (structure adaptée) dans le cas contraire on aura cumul de déformations sous mises en charges successives.

Nous aurons donc à considérer :

- 1) des systèmes de charge invariables dans le temps (poids propre)
- 2) des systèmes de charge variables en intensité ou en position.

1) SYSTEMES DE CHARGE INVARIABLES

Dans une structure isostatique les moments de flexion et efforts tranchants en tous points sont déterminés par le système de charge, et sont indé-

pendants de la distribution de la matière. L'optimisation élastique conduit nécessairement au poids minimal de matière. Si la distribution de matière s'écarte de celle obtenue par optimisation élastique la plasticité n'apporte aucune réserve de capacité.

Dans une structure hyperstatique les moments et efforts tranchants en tous points dépendent non seulement du système de charge mais également des réactions hyperstatiques et donc de la distribution de la matière.

Il n'est donc pas évident que l'optimisation élastique qui impose un choix des réactions hyperstatiques conduise au poids minimal.

Nous considérerons deux types de structure :

- a) un système réticulé
- b) un système de poutres.

a) système réticulé.

Nous supposons que toutes les barres sont rigoureusement centrées et que nous pouvons négliger la rigidité des attaches

La barre d'indice i est soumise à un effort normal N_i fonction de n inconnues hyperstatiques $R_0 \dots \dots R_n$

Le potentiel élastique est :

$$W = 1/2 \sum_i \frac{N_i^2 l_i}{E S_i}$$

Si la structure est optimisée élastiquement, on a :

$$N_i / S_i = \sigma_e$$

$$W = 1/2 \sum_i \frac{N_i l_i \sigma_e}{E}$$

les n inconnues hyperstatiques sont définies par

$$\frac{\partial W}{\partial R_0} = 0 \dots \dots \frac{\partial W}{\partial R_n} = 0$$

soit :

$$\sum_i \frac{\partial N_i l_i}{\partial R_0} = 0 \dots \dots \sum_i \frac{\partial N_i l_i}{\partial R_n} = 0 \quad (1)$$

Supposons que nous cherchions une autre distribution de matière avec n réactions $R'_0 \dots \dots R'_n$ obtenues par adaptation plastique et conduisant à l'emploi du volume minimal de matière

La structure adaptée devra être optimale élastique pour avoir le volume minimal

Les N_i seront fonction de $R'_0 \dots \dots R'_n$

On aura $N_i / S_i = \sigma_e$

Le volume sera :

$$V = \sum_i S_i l_i = 1/\sigma_e \sum_i N_i l_i$$

L'optimisation correspond aux n inconnues $R'_0 \dots \dots R'_n$ satisfaisant à :

$$\frac{\partial V}{\partial R'_0} = 0 \dots \dots \frac{\partial V}{\partial R'_n} = 0$$

d'où :

$$\sum_i \frac{\partial N_i l_i}{\partial R'_0} = 0 \dots \dots \sum_i \frac{\partial N_i l_i}{\partial R'_n} = 0 \quad (2)$$

Le système (2) est identique au système (1), et donc les n valeurs optimales sont bien les n valeurs $R_0 \dots R_n$ correspondant à la distribution de matière déterminée par optimisation élastique.

Pour le système réticulé l'optimisation élastique correspond au volume minimal de matière.

b) système de poutres.

Nous supposons un système où seuls les moments de flexion sont à prendre en considération.

Le moment de flexion en un point d'abscisse s est fonction de n moments hyperstatiques $M_0 \dots M_n$, ce moment sera

$$M(s, M_0 \dots M_n)$$

Le potentiel élastique est

$$W = \frac{1}{2} \int_S \frac{M^2(s, M_0 \dots M_n)}{EI(s)} ds$$

Les n moments $M_0 \dots M_n$ sont obtenus par :

$$\frac{\partial W}{\partial M_0} = 0 \dots \dots \frac{\partial W}{\partial M_n} = 0 \quad (3)$$

L'optimisation élastique pour la poutre de demi-hauteur $v(s)$ conduit à

$$Mv/I = \pm \sigma_e$$

Dans la structure optimisée élastiquement :

$$W = \frac{1}{2} \frac{\sigma_e^2}{E} \int_S \frac{I(s)}{v(s)} ds \quad (4)$$

L'optimisation élastique conduit ainsi à distribuer la matière compte tenu des n inconnues déterminées par le système (3).

Est-il possible d'avoir n valeurs $M'_0 \dots M'_n$ obtenues par adaption plastique et conduisant à une distribution de matière donnant un volume minimal pour les membrures ?

On aura $M(s, M'_0 \dots M'_n)$

En tous points

$$Mv/I = \pm \sigma_e$$

$$\frac{M^2 v^2}{I^2} = \sigma_e^2$$

Si S est la section des 2 membrures au point d'abscisse s

$$I = S v^2$$

Et le volume total sera :

$$V = \int_S S ds$$

$$V = \int_S \frac{I(s)}{v^2 ds} ds \quad (5)$$

Les n moments $M'_0 \dots M'_n$ seront définis par :

$$\frac{\partial V}{\partial M'_0} = 0 \dots \dots \frac{\partial V}{\partial M'_n} = 0 \quad (6)$$

On voit en vertu de (4) et (5) que ce système (6) est identique au système (3) donc : $M'_0 = M'_0 \dots\dots\dots M'_n = M'_n$

Comme dans le cas du système réticulé, l'optimisation élastique conduit au volume minimal de matière.

En définitive donc, que le système soit isostatique ou hyperstatique, la distribution de matière déterminée par optimisation élastique conduit au volume minimal de matière. L'optimisation absolue n'est d'ailleurs pas réalisable. Mais, contrairement à ce qui se passe pour les systèmes isostatiques, si une structure hyperstatique n'est pas optimisée élastiquement, l'adaptation plastique permet une augmentation de la charge ultime d'autant plus importante que la distribution de matière est plus éloignée de celle déterminée par optimisation élastique. C'est-à-dire que, de même que l'adaptation plastique améliore d'autant plus le rendement d'une section en flexion que cette section est plus mal conditionnée pour la flexion (écart entre le moment de limite élastique et le moment de saturation plastique), de même l'adaptation plastique d'une structure hyperstatique améliore d'autant mieux la limite d'une charge de distribution donnée que la répartition de la matière s'écarte davantage de celle obtenue par optimisation élastique.

Nous prendrons à titre d'exemple le cas d'une poutre continue à deux travées égales sous l'action d'une charge uniforme.

Soit p la charge par unité de longueur. Dans tout ce qui suit nous prendrons une convention de signe très couramment utilisée dans l'étude des poutres : les moments seront comptés positifs dans le sens inverse des axes.

a) Poutre optimisée élastiquement

Il est facile de voir que la distribution de matière avec optimisation élastique conduit à un volume de membrures

$$V_0 = \frac{\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}} \frac{pl^3}{\sigma_e}$$

b) Poutre à inertie constante

En calcul élastique le volume de ces membrures est

$$V_e = \frac{1}{8} \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} V_0 = 2.56 V_0$$

En calcul plastique (formation d'une 2ème rotule en travée)

$$V_p = (3 - 2\sqrt{2}) \times \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} V_0 = 1.76 V_0$$

On voit ainsi sur cet exemple l'intérêt de la prise en compte de la plastification pour une poutre non optimisée élastiquement.

Sur l'exemple choisi on a d'ailleurs une adaptation plastique assez importante, ainsi que l'on peut s'en rendre compte en cherchant l'état d'autocontrainte qui resterait dans la poutre si on la déchargeait.

En considérant le polygone d'écoulement on voit (en posant $x = tl$) que le moment d'autocontrainte sur l'appui B est positif et égal à :

$$M_B = \frac{8t-3}{4t^2} M_0$$

L'adaptation se limitant au moment de la formation d'une deuxième rotule plastique dans la section $t = \sqrt{2} - 1$ on trouve :

$$M_a = + 0,456 M_0$$

On voit ainsi pour une structure hyperstatique tout l'intérêt pour la recherche d'une optimisation économique de s'écarter de l'optimisation élastique en simplifiant la structure à condition de tenir compte de l'adaptation plastique sous l'action de charges permanentes.

2) CHARGES MOBILES

Le cas de charges mobiles est plus complexe tant en ce qui concerne l'optimisation élastique que l'adaptation plastique définitive, c'est-à-dire celle qui rend le système adapté rigoureusement élastique sous l'action des charges mobiles et qui assure donc qu'il n'y aura pas de cumul de déformations sous le passage des charges mobiles.

Pour trouver la distribution de matière conduisant à l'optimisation élastique, il faudra chercher la courbe enveloppe des moments fléchissants maximaux dans chaque section d'abscisse s .

Soit $M(s)$ cette loi de la courbe enveloppe. En optimisation élastique on devra avoir si $I(s)$ et $v(s)$ sont l'inertie et la demi-hauteur de la section définie par s :

$$I(s) = \frac{M(s)v(s)}{\sigma_e}$$

Pour chaque position de la charge on aura une loi des moments $M(s, M_0, \dots, M_n)$ où M_0, \dots, M_n sont les moments sur appuis du système hyperstatique, définis si W est le potentiel élastique avec la loi $M(s, M_0, \dots, M_n)$ par :

$$\frac{\partial W}{\partial M_0} = 0 \dots \dots \dots \frac{\partial W}{\partial M_n} = 0$$

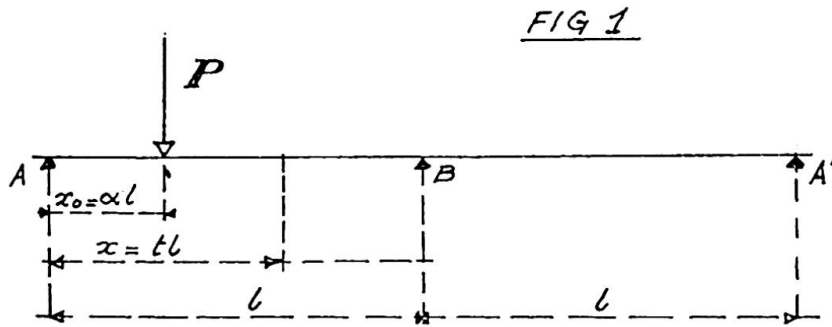
La loi $M(s)$ dépend ainsi de la distribution de la matière. L'optimisation élastique est possible par itération en partant par exemple d'une loi $I(s) = Cte$.

Mais il n'est plus possible de démontrer simplement que l'optimisation élastique dans le cas de charges mobiles conduit au poids minimal de matière.

Nous allons étudier l'optimisation élastique, et l'adaptation plastique d'une poutre non optimisée élastiquement sur le cas simple déjà envisagé plus haut d'une poutre continue à deux travées égales sous le passage d'une charge mobile unique.

a) Poutre optimisée élastiquement

Soit la charge mobile P agissant dans la section d'abscisse $x_0 = \alpha l$, la section courante étant $x = tl$



Le moment sur appui B pour la charge P en $x_0 = \alpha l$ sera :

$$M_B = -Pl \frac{\int_0^\alpha (1-\alpha) t^2 \frac{dt}{I(t)} + \int_\alpha^1 \alpha t (1-t) \frac{dt}{I(t)}}{2 \int_0^1 t^2 \frac{dt}{I(t)}}$$

Pour faire un calcul numérique nous divisons la poutre de A à B en n parties égales, chacun de ces n tronçons ayant une inertie I_1, I_2, \dots, I_n

Nous plaçons la charge successivement à l'extrémité d'un tronçon (le q^0) soit : $\alpha = q/n$

$$M_B = \frac{(1-\alpha) \sum_{p=1}^{p=q} \frac{1}{I_p} (p^2 - p + 1/3) + \alpha \sum_{p=q+1}^{p=n} [(n+1)p - p^2 - \frac{3n+2}{6}]}{\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{I_p} (p^2 - p + 1/3)} \times \left(-\frac{Pl}{2}\right)$$

Ceci permet de calculer le moment en chaque tronçon noté p pour une charge placée en q, on obtient

$$M_p^q = K Pl$$

Pour chaque valeur de p on désignera par M_p la valeur maximale de M_p^q et on écrira

$$I_p = \frac{M_p v}{\sigma_e}$$

En partant d'une loi $I_p = Cte$ on peut par approximations successives trouver les valeurs optimales I_p de I_p

Le calcul a été fait au Centre de calcul de l'Institut Français du Pétrole.

On a pris $n = 10$, à la 6^o approximation la correction était de l'ordre de 10^{-4}

Les inerties I_p qui ont été déterminées sont

$$I_p = \frac{A Pl v}{\sigma_e}$$

Les valeurs de A optimisées sont les suivantes :

p	1	2	3	4	5
A	0,088467	0,154082	0,197291	0,218701	0,219136

p	6	7	8	9	10
A	0,199769	0,162440	0,110592	0,053356	0,067942

On a alors le volume V_0 des membrures d'une poutre optimisée élastiquement:

$$V_0 = \sum_1^{10} 2S_p \cdot \frac{l}{10} = \frac{Plv}{\sigma_e} \sum_1^{10} A = 0,1471 \frac{Pl^2}{v\sigma_e}$$

b) Poutre à inertie constante

En période élastique le moment maximal en valeur absolue se produit toujours au point d'application de la charge P point noté $x_0 = \alpha l$

Ce moment est :

$$M = \frac{\alpha(1-\alpha)(4-\alpha(1+\alpha))Pl}{4}$$

Si M_0 est le moment de limite élastique égal par hypothèse au moment de saturation M_0 plastique, la charge admissible au point défini par α sera

$$P = \frac{4}{\alpha(1-\alpha)(4-\alpha(1+\alpha))} \frac{M_0}{l}$$

La poutre étant à inertie constante on aura

$$M_0 = \frac{I\sigma_e}{V} = 2Sv\sigma_e$$

La charge admissible pour toute position sera celle donnée par la valeur de α rendant maximale l'expression

$$\alpha(1-\alpha)[4-\alpha(1+\alpha)]$$

Soit pour $\alpha = 0,43$

Ce qui donne la valeur maximale de P

$$P = 4,819 \frac{M_0}{l}$$

Le volume V_e des membrures d'une poutre de portée l sera

$$V_e = 2Sl = \frac{M_0 l}{v\sigma_e} = \frac{1}{4,819} \frac{Pl^2}{v\sigma_e} = 0,2076 \frac{Pl^2}{v\sigma_e}$$

Nous allons chercher le comportement plastique de cette poutre à inertie constante sous le passage de la charge P.

Pour étudier la plastification de la poutre nous considérerons les polygones d'écoulement pour chaque position $x_0 = \alpha l$ de la charge P, en utilisant la méthode de Rjanitsyn.

D'après les calculs indiqués précédemment (dans la recherche de l'optimisation élastique) le moment élastique sur l'appui B pour une charge P placée en $x_0 = \alpha l$ sera :

$$M_B = - \frac{Pl}{4} \cdot \alpha (1 - \alpha^2)$$

Si M' désigne le moment en phase élastique on a :

$$0 \leq t \leq \alpha \quad M' = Pl(1-\alpha)t - \frac{Pl}{4} \cdot \alpha (1 - \alpha^2) t$$

$$0 \leq t \leq 1 \quad M' = Pt \alpha (1-t) - \frac{Pl}{4} \alpha (1 - \alpha^2) t$$

$$1 \leq t \leq 2 \quad M' = -\frac{Pl}{4} \alpha (1 - \alpha^2) (2-t)$$

Nous désignerons toujours par M_0 le moment de limite élastique ou de saturation plastique

$$M_0 = \sigma_e I/y$$

Nous supposons après adaptation plastique qu'il y a en B un moment d'autocontrainte

$$\eta M_0$$

Les moments M dans la poutre sont alors :

$$0 \leq t \leq 1 \quad M = M' + \eta M_0 t$$

$$1 \leq t \leq 2 \quad M = M' + \eta M_0 (2-t)$$

Nous poserons $\frac{Pl}{4} \alpha (1 - \alpha^2) = \xi M_0$

ξ caractérise l'état de charge et η l'autocontrainte

$$0 \leq t \leq \alpha \quad M = \left[\left(\frac{4}{\alpha + \alpha^3} - 1 \right) \xi t + \eta t \right] M_0$$

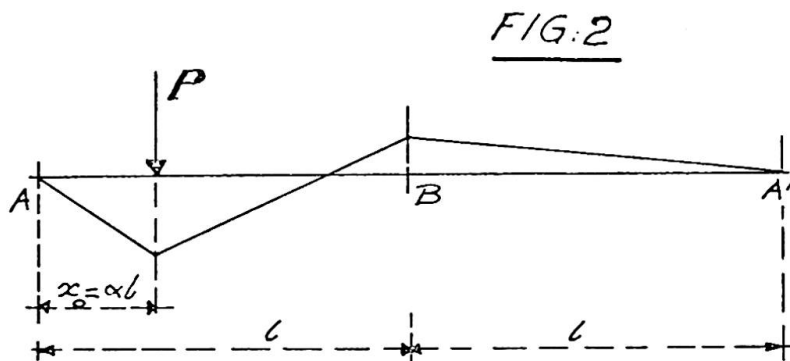
$$\alpha \leq t \leq 1 \quad M = \left[\left(\frac{4}{1 - \alpha^2} (1-t) - t \right) \xi + \eta t \right] M_0$$

$$1 \leq t \leq 2 \quad M = \left[-(2-t) \xi + \eta (2-t) \right] M_0$$

Supposant α donné (charge P en $x_0 = \alpha l$) la condition limite de plasticité s'écrit en tout point :

$$-M_0 < M < +M_0$$

Pour cette charge P en x_0 le diagramme des moments de flexion est toujours le suivant :



Il suffit donc d'écrire les conditions :

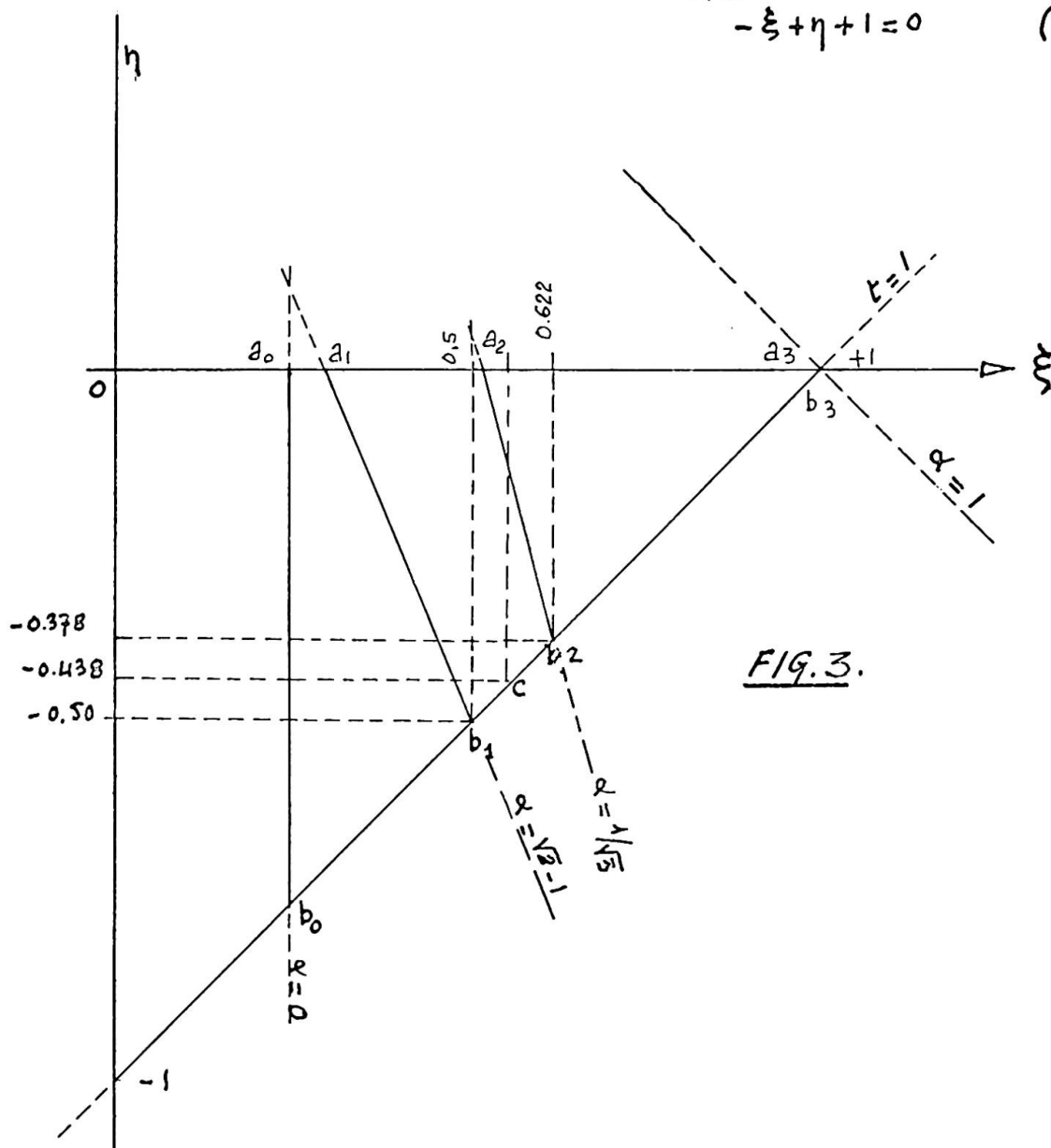
$$M(x_0) = +M_0$$

$$M_B = -M_0$$

C'est-à-dire pour les limites :

$$\left(\frac{4}{1+\alpha} - \alpha\right)\xi + \alpha\eta - 1 = 0 \quad (t = \alpha)$$

$$-\xi + \eta + 1 = 0 \quad (t = 1)$$



On a ainsi une famille de polygones d'écoulement en fonction de α délimités par les 2 droites d'équations ci-dessus pour $t = \alpha$ et $t = 1$

La droite ($t = \alpha$) coupe l'axe $O\xi$ en un point a , ce point varie de a_0 ($\xi = 0,25$ pour $\alpha = 0$) à a_3 ($\xi = 1$ pour $\alpha = 1$).

Cette droite ($t = \alpha$) coupe la droite ($t = 1$) en un point b variant de b_0 (pour $\alpha = 0$) à b_3 (pour $\alpha = 1$).

Appliquant P au point $x_0 = \alpha l$ et partant d'un état naturel en faisant croître P depuis la valeur 0^0 le point représentatif se déplace sur l'axe $O\xi$. Lorsque ce point arrive à a (intersection de la droite $t = \alpha$ avec $O\xi$) P atteint la charge limite élastique qui correspond à

$$\xi = \frac{1+\alpha}{4-\alpha(1+\alpha)}$$

La charge limite élastique $P_e(\alpha)$ est alors : $P_e(\alpha) = \frac{4}{\alpha(1-\alpha)(4-\alpha(1+\alpha))} \frac{M_0}{l}$

Si P continue à croître ξ augmente il y a plastification dans la section $x_0 = \alpha l$, le point représentatif décrit la droite $t = \alpha$ à partir de a . Lorsque ce point arrive en b (intersection des droites $t = \alpha$ et $t = 1$) on atteint le moment limite en B , à cette valeur de ξ correspond la charge ultime plastique $P_u(\alpha)$, on a alors

$$\xi = \frac{(1+\alpha)^2}{4}$$

d'où :

$$P_u(\alpha) = \frac{1+\alpha}{\alpha(1-\alpha)} \frac{M_0}{l}$$

Si on déchargeait alors la poutre il y aurait en B un moment d'autocontrainte

$$M_B = -\left(1 - \frac{(1+\alpha)^2}{4}\right) M_0$$

Si l'on cherche la charge mobile ultime P_u , cette charge doit être la plus petite valeur de $P_u(\alpha)$, α variant de 0 à 1.

Ce minimum se produit pour

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{1+\alpha}{\alpha(1-\alpha)} = 0$$

Soit : $\alpha = \sqrt{2} - 1$

On a alors :

$$P_u = 5,828 M_0/l$$

(RJANITSYN a donné le même résultat obtenu par une autre méthode).

Si cette charge P_u arrivée au point $x = (\sqrt{2}-1)l$ on supprimait cette charge on aurait en B un moment d'autocontrainte déterminée par l'ordonnée du point b_1 c'est-à-dire $\eta = -0,5$

$$M_B = -0,5 M_0$$

Si la charge P_u va au-delà de $x = (\sqrt{2}-1)l$, ξ continue à croître, car ξ est donné par :

$$1/M_0 \frac{Pl}{4} \alpha(1-\alpha^2) = 1,461 \alpha(1-\alpha^2)$$

ξ passe donc par un maximum pour la valeur maximale de $\alpha(1-\alpha^2)$ ce qui se produit pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

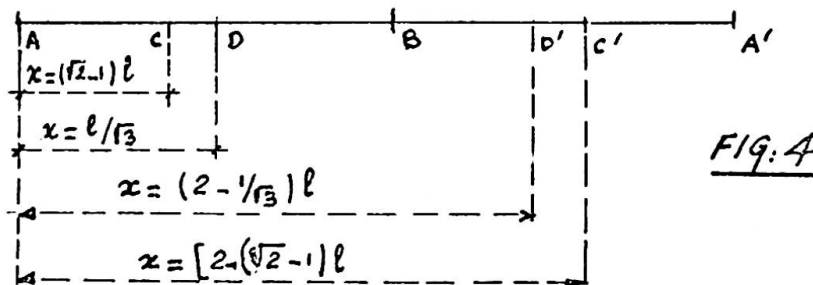
$$\text{On a alors } \xi = 1.461 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{3} = 0.562$$

Le point représentatif s'est déplacé sur la droite $t = 1$ (plastification sur l'appui B) de b_1 à c.

L'ordonnée de c sur cette droite $t = 1$ est

$$-1 + 0,562 = -0,438$$

Lorsque la charge mobile P_u se déplace à partir de l'appui A, il y a plastification dans la section C ($x = (\sqrt{2}-1)l$) au moment où la charge arrive en C et le moment d'autocontrainte en B est alors $-0,5 M_0$; lorsque cette charge arrive en D ($x = l/\sqrt{3}$) il y a plastification sur l'appui B et le moment d'autocontrainte en B n'est plus alors que $-0,438 M_0$; si la charge continue vers A', de D' ($x = (2 - 1/\sqrt{3})l$) à C' ($x = [2 + (\sqrt{2}-1)]l$) il y a plastification des sections de D' à C' et le moment d'autocontrainte en B remonte à $-0,5 M_0$.



Chaque passage de la charge P_u sur toute la poutre provoque de nouvelles déformations permanentes, il y a η_u cumul de déformations.

La charge P_u n'est admissible que si elle n'est susceptible d'être appliquée qu'un nombre η_u très limité de fois au cours de la vie de l'ouvrage.

La charge ultime P'_u admissible pour un nombre illimité de passages est inférieur à P_u . On peut η_u déterminer cette charge en imposant la condition que le moment d'autocontrainte en B atteigne une valeur définitive après un premier passage.

On trouve le η_0 maximal constant

$$\eta_0 = -0.448$$

correspondant à une charge ultime

$$P'_u = 5,742 \frac{M_0}{l} < P_u = 5,828 \frac{M_0}{l}$$

Si l'on veut maintenant comparer l'économie de volume des membrures d'une travée de portée l pour une charge mobile P on écrira :

$$M_0 = \sigma_e I / \nu$$

$$I = 2 S \nu^2$$

et le volume des membrures pour une travée de portée l sera

$$V = 2Sl = M_0 / \nu \sigma_e \cdot l.$$

Avec la charge ultime $P'_u = 5,742 M_0 / l$

On a le volume :

$$V_p = \frac{l}{5,742} \frac{P l^2}{\nu \sigma_e} = 0,1742 \frac{P l^2}{\nu \sigma_e}$$

Ainsi pour le cas de la charge mobile P on peut comparer les résultats obtenus pour le volume des membrures

- poutre optimisée élastiquement $V_0 = 0,1471 \frac{P l^2}{\nu \sigma_e}$
- pour une poutre d'inertie constante calculée élastiquement $V_e = 0,2076 \frac{P l^2}{\nu \sigma_e} = 1,411 V_0$
- pour une poutre à inertie constante calculée plastiquement $V_p = 0,1742 \frac{P l^2}{\nu \sigma_e} = 1,184 V_0$

On voit ainsi pour la charge mobile, comme pour le cas de la charge permanente, que si l'optimisation élastique conduit au volume minimal, il y a un gain considérable, lorsque la distribution de matière est loin de celle déterminée par optimisation élastique, à prendre en compte l'état limite plastique.

Combinaison de la charge permanente et de la charge mobile.-

On pourra reprendre l'étude en considérant à nouveau les frontières d'écoulement sous l'effet d'une charge permanente p par unité de longueur et d'une charge mobile P .

On posera :

$$pl = KP$$

On aura pour chaque valeur de K des familles de frontières d'écoulement en fonction de α

Le développement de cette discussion est trop long pour trouver sa place ici.

On peut pour chaque valeur de K déterminer la charge ultime admissible par la recherche du moment d'autocontrainte donnant une adaptation définitive.

Voici quelques résultats :

- pour $K = 0,1$ (charge mobile égale à 10 fois le poids permanent)

$$\eta_0 = - 0,409$$

- pour $K = 1$ (charge mobile égale au poids permanent)

$$\eta_0 = - 0,15$$

- pour $K = 10$ (charge mobile égale au dixième du poids permanent)

$$\eta_0 = + 0,318$$

Lorsque la charge mobile est faible il y a adaptation plastique sur l'appui central et le moment d'autocontrainte sur appui est positif.

Si l'on fait croître la valeur de la charge mobile par rapport au poids permanent, le moment d'autocontrainte sous la charge ultime diminue.

Pour une certaine valeur de $K \eta_0 = 0$, il n'y a pas d'adaptation, pour cette valeur de K la poutre à inertie constante est optimale élastiquement.

Si la valeur de la charge mobile croît encore par rapport au poids permanent, l'adaptation plastique se produit sous la charge ultime en travée, et le moment d'autocontrainte sur appui central est négatif.

Enfin à partir d'une certaine valeur de K il y a risque de cumul de déformations plastiques.

Conclusion

On voit en définitive que quels que soient les systèmes de charges, permanentes ou variables, pour une structure constituée en matériau pouvant, tel que l'acier doux, être considéré comme élasto-plastique, la distribution de matière déterminée par optimisation élastique conduit toujours au poids minimal.

L'optimisation élastique rigoureuse est souvent irréalisable, en outre elle conduit très généralement à une structure onéreuse (sauf cas exceptionnels où la structure simple est en même temps optimale élastiquement, comme on a vu que c'était le cas pour une poutre continue à 2 travées égales pour un certain rapport entre la charge et la charge permanente).

Lorsque la structure s'écarte de l'optimal élastique elle a, si elle est hyperstatique, une réserve de capacité pour la charge ultime d'affaissement en calcul élastique que n'a pas la structure isostatique.

On doit donc tendre à réaliser des systèmes hyperstatiques à condition de baser la sécurité sur la charge ultime plastique, ce qui permet de simplifier la structure avec une majoration de poids relativement faible, et donc d'optimiser la structure sur le critère de l'économie de réalisation.

Dans le cas de charges mobiles non exceptionnelles le calcul plastique peut conduire au danger du cumul des déformations.

Le critère alors à considérer est l'état d'autocontrainte qui doit être constant dans toutes les situations.

On peut donc établir une programmation sur la base du calcul élastique pour chercher la distribution de matière la plus économique.

L'état d'autocontrainte peut être déterminé sans tracer de diagrammes par des calculs élastiques.

L'état d'autocontrainte est un critère à la fois pour l'optimisation et pour la vérification du non cumul de déformations.

RÉSUMÉ

Pour un matériau élasto-plastique, la distribution de matière déterminée par optimisation élastique conduit, pour les charges permanentes et variables, au poids minimal que la structure soit iso-statique ou hyperstatique.

L'avantage de la structure hyperstatique, si on envisage l'état limite plastique, est de pouvoir réaliser économiquement en simplifiant et s'écartant de l'optimal élastique.

On détermine, par des calculs élastiques, l'état d'auto-contrainte qui sera un critère d'optimisation et de vérification de non cumul des déformations.

ZUSAMMENFASSUNG

Für einen elastisch-plastischen Werkstoff führt die durch elastische Optimierung erhaltene Materialverteilung sowohl unter ständiger Last als auch bei veränderlichen Lasten zum minimalen Gewicht, gleichwohl ob das Tragwerk statisch bestimmt oder unbestimmt ist.

Statisch unbestimmte Tragwerke bieten den Vorteil, dass sie bei Berücksichtigung des plastischen Grenzzustandes durch Vereinfachung und unter Abweichung vom elastischen Optimum wirtschaftlich ausgeführt werden können.

Es wird durch elastische Berechnung der Eigenspannungszustand ermittelt, welcher als Kriterium der Optimierung und der Nichtüberlagerung der Verformungen dient.

SUMMARY

For an ideal elastic-plastic material, the optimisation based on elastic calculations of a statically determined or indetermined structure provides the minimum weight material distribution.

When computing a statically indetermined structure on the basis of plastic behaviour, it is possible to simplify the optimum elastic material distribution in a more economical way.

The residual stresses remaining in the structure after unloading is a criteria of optimisation and a test against increasing permanent deformations with every loading cycle.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Decision Theory Approach to Structural Optimization

Optimisation des constructions à l'aide de la "théorie des décisions"

Stellungnahme der Entscheidungstheorie zur Bauwerksoptimierung

C.J. TURKSTRA
 Assistant Professor
 Department of Civil Engineering
 McGill University
 Montreal, Canada

Some of the optimization problems mentioned by M. Cambon are similar in principle to those treated in the theory of decision making under uncertainty that has been developed in recent years. Such theories are of considerable potential value in design since they provide a logical framework in which engineering judgement can be applied realistically and consistently.

1. FUNDAMENTALS OF DECISION THEORY

The theory of decision under uncertainty deals with the problem of choosing "optimum" courses of action when the results of action involve uncertain future events and a variety of possible consequences. To satisfy the basic requirements of the theory, a designer must establish four sets of basic data before decision:

- (i) a set of feasible actions a_i from which he must choose one,
- (ii) a set of possible outcomes o_{ij} resulting from the choice of any action a_i ,
- (iii) a probability measure specifying the probability p_{ij} that o_{ij} will occur if he chooses any action a_i ,
- (iv) a set of value losses L_{ij} specifying the relative undesirability of all outcomes o_{ij} .

Extensions to these basic requirements have been made when experiments are performed prior to final action [1]. Provided that a designer's values follow

certain rules of consistency [2], the relative desirability of any action is given by its total expected loss

$$T_i = \sum_j P_{ij} L_{ij} \quad (1.1)$$

and the action with least total expected loss is the optimum action.

In structural design alternative actions may involve different structural forms, materials, construction methods, and member sizes. Outcomes may involve initial costs, construction delays, appearance, serviceability and safety.

Prior to design outcomes cannot be predicted because of uncertainties in costs, material behaviour, foundation conditions and future loadings. In general there are insufficient data to establish statistical distributions and a designer must use judgement to establish subjective probability measures. It has been shown [3] that provided several consistency requirements are satisfied, subjective probability measures obey the conventional rules of probability. However subjective probabilities change as new information becomes available. The formal mechanism for modifying subject distributions is Bayes' Theorem [4]. Applications of subjective probabilities have been made to the strength of concrete structures [5] and the prediction of earthquake probabilities.

In order to formulate an optimization criteria, the relative value of all outcomes must be expressed on a single scale. Some outcomes such as construction costs and time delay involve monetary losses which can be measured directly. The value of other losses must be measured on the same scale as monetary losses from a set of elementary decisions. Thus, for example, structural collapse may only involve economic losses of the order of initial costs but must be assigned much higher relative values for moral, social, and professional reasons.

To illustrate the essentials of a decision theory approach, consider a simple example involving the preliminary design of a structure in which two basic schemes are under consideration. It is assumed that both schemes would be designed to provide the same safety and serviceability. The only variables under consideration are appearance, construction costs and construction delay.

To establish relative values of appearance the following basic decision is made. If both schemes were completed at the same time, the first scheme would be preferable if its initial costs were not more than \$25,000 greater than those of the second scheme. Denoting the losses associated with aesthetics of the schemes as A_1 and A_2 the basic decision implies that $A_2 = A_1 + \$25,000$. After further investigation, a designer might estimate the range of possible initial costs and time delays and their respective probabilities for the two schemes as shown in Table 1.

TABLE 1

Scheme	Outcome Losses and Probabilities					
	Initial Costs (\$000)	Prob.	Time Delay (\$000)	Prob.	Appearance (\$000)	Prob.
I	90	0.1	0	0.2	A_1	1
	100	0.3	5	0.3		
	110	0.3	10	0.4		
	120	0.2	15	0.1		
	130	0.1				
II	80	0.1	0	0.4	$A_1 + 25$	1
	90	0.4	5	0.4		
	100	0.4	10	0.2		
	110	0.1				

The numbers in this example were chosen to illustrate the common problem of conflicting objectives. The first scheme is more aesthetically pleasing than the second but probably would cost more and is less likely to be completed on time. The total expected loss for the first scheme is $A_1 + \$116,000$ while the second scheme has an expected loss of $A_1 + \$124,000$. Hence the first scheme is preferable to the second.

2. APPLICATIONS TO SAFETY ANALYSIS

Although decision theory can be applied to any situation in which a designer can formulate the necessary sets of basic data, existing studies have concentrated on design strength decisions. In many cases, alternative actions can be grouped into schemes with alternatives in a scheme essentially identical in appearance, functional efficiency and ease of construction. Optimization within such a scheme involves the choice of member sizes and proportions on the basis of initial costs and safety alone. Solution of such restricted optimization problems is the purpose of standard design procedures.

Each alternative in a scheme is associated with a variety of possible resistances and future loads. Since future conditions are uncertain, probability measures must be applied to the families of possible loads and resistances. Such probabilities must be at least partially subjective to allow for uncertainties in workmanship, methods of analysis, and load idealization. Using well known methods of analysis, load and resistance distributions can be combined to obtain failure probabilities [6].

If attention is restricted to one class of failure, the decision table for optimization within a scheme takes the form shown in Table II.

TABLE II

Alternatives	Outcome Losses and Probabilities			
	Success	Probability	Failure	Probability
a_1	S_1	$(1 - P_1)$	F_1	P_1
a_2	S_2	$(1 - P_2)$	F_2	P_2
"	"	"	"	"
"	"	"	"	"
a_n	S_n	$(1 - P_n)$	F_n	P_n

Where S_i and F_i are the success and failure losses if alternative a_i is chosen.

In view of the definition of a basic scheme, it is reasonable to assume the following loss relationships.

$$S_i = I_i + S \quad (2.1)$$

$$F_i = I_i + S + F \quad (2.2)$$

where I_i is the initial cost of alternative a_i . The constants S and F are success and failure losses in excess of initial costs for the scheme. With these losses, the optimum alternative has a total loss given by:

$$T_{opt} = \min (I_i + p_i F) \quad (2.3)$$

except for the constant S that is irrelevant to decision. A similar optimization rule has been suggested by other authors [7]. However in this development, the failure loss F is not simply the capitalized economic losses associated with failure but may be, and generally is, greater than such losses.

The relationship between total losses and a safety factor n can be deduced qualitatively for many common structures. Since initial costs generally increase relatively slowly with increasing n , and failure probabilities decreases relatively quickly, total losses decrease quickly, reach a minimum and then increase slowly eventually merging with initial costs. This behaviour is shown symbolically in Figure 1. In practice, costs and failure probabilities would be discontinuous functions of n but the trends indicated can be expected in many situations.

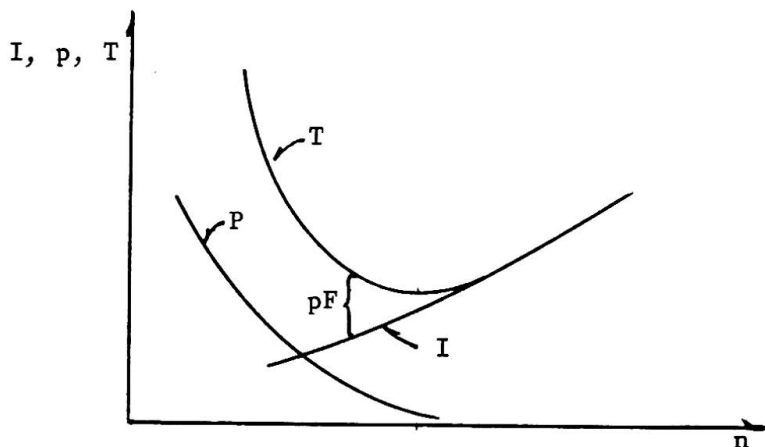


Figure 1

The behaviour of total losses for large n and low failure probability is of particular interest. If, for example, an alternative has an initial cost of $\$1 \times 10^6$, failure losses equal to 100 times initial costs and a failure probability of 1×10^{-6} , its total loss is equal to $\$1,000,000 + \100 . Obviously the loss of $\$100$ associated with failure is negligible in comparison to the initial cost.

A formal basis for neglecting failure losses may be established by stating that small variations in initial costs are irrelevant. Such a statement implies that initial costs must be rounded off in forming expected losses. To ensure consistency, failure losses must be rounded to the same level of precision. In the preceding example, if initial costs are rounded to the nearest $\$1,000$, any failure probability less than 5×10^{-6} results in zero failure loss. In other words, any failure probability less than 5×10^{-6} is effectively zero.

With a restriction on sensitivity to initial costs, the general behaviour of initial costs and total losses shown in Figure 1 becomes that shown in Figure 2.

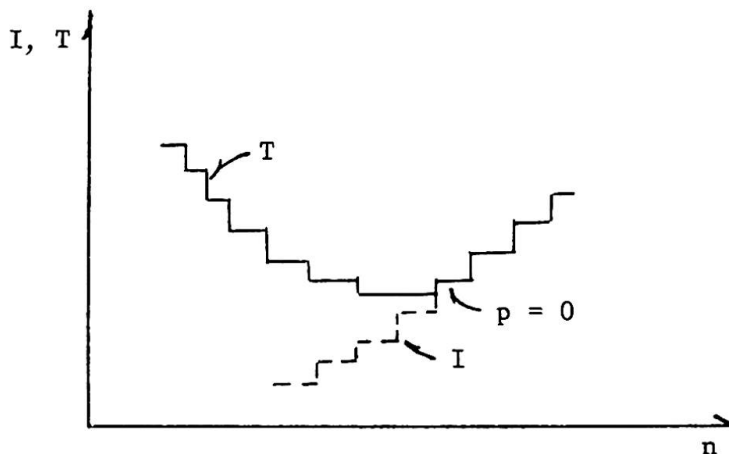


Figure 2

A number of alternatives may have equal initial costs and failure losses, and a number of alternatives may have effectively zero failure probability. The least costly alternative with zero failure loss is always either equally or more safe and costly than the theoretically optimum alternative. Computations under a variety of conditions indicate that an order of magnitude estimate of failure losses may be sufficient for practical applications [8].

An alternative formulation based on the probabilities and values associated with strength alone has been applied by Burnes to the choice of capacity reduction factors in reinforced concrete design [9]. In this study, subjective probability measures and the values associated with various real strengths were obtained from several individuals. After modification of initial probability measures by the use of Bayes' Theorem and experimental data, optimum code values of reduction factors were obtained.

Both of the preceding formulations admit design based on the traditional concept of absolute safety. Effective absolute safety can result from insensitivity to initial costs and small failure losses. True absolute safety can be achieved if a designer believes that certain conditions cannot occur and assigns zero probability to such conditions. However, there can be no objective procedure for establishing true absolute safety.

3. USES AND LIMITATIONS OF DECISION THEORY

The unfortunate fact that experimental evidence is rarely a sufficient basis for design is well known in structural engineering practice. Inevitably objective fact must be combined with intuition and experience. However, in conventional design decisions rational analysis is confined to the study of physical phenomena and judgement is applied in a more or less arbitrary manner. In a decision theory approach judgement is explicitly recognized as an essential component of design and an attempt is made to analyze its operation. In effect, the art of engineering is assumed to be an intuitive science.

Any formulation recognizing engineering judgement obviously can not yield optimum designs in an absolute sense. All optimization is relative to the alternatives considered, the existing state of technology and powers of individual intuition. However, one can hope to discover the rules of good judgement and to establish a logical framework in which judgement can be used to best advantage. In particular, statements of judgement can be reduced to their simplest and most meaningful form and logical consistency can be achieved.

In the simple theory developed to date, the decision process has been abstracted into two basic components - prediction and value systems. In

addition, two fundamentals postulates have been adopted. The first is that a rational individual operates as an intuitive probability analyzer when making predictions. The second is that in an uncertain situation a rational individual operates as an intuitive expected loss minimizer with constant values. The first of these postulates is almost certainly correct in principle. However, subjective probabilities are seldom numerically precise. The second postulate is more questionable and must be verified experimentally.

Possibly the greatest potential use of decision theory is a vehicle for stating opinions in group decisions. At the present time there is often considerable dispute over the numerical factors to be used in standard design procedures. Such differences of opinion probably arise because individuals have different estimates of probability distributions and different value systems. By decomposing the choice of such factors into a large number of separate small statements of opinion, it may be possible to isolate the differences between individuals and establish reasonable agreement.

REFERENCES

- [1] Raiffa, H., and Schlaifer, R., "Applied Statistical Decision Theory", Harvard University Graduate School of Business Administration, Boston, 1961.
- [2] Luce, R., and Raiffa, H., "Games and Decisions", John Wiley and Sons, New York, 1957.
- [3] Cox, R.T., "The Algebra of Probable Inference", John Hopkins Press, Baltimore, 1961.
- [4] Jeffreys, H., "Theory of Probability", 2nd edition, Clarendon Press, Oxford, 1948.
- [5] Sexsmith, R.G., "Reliability Analysis of Concrete Structures", Dept. of Civil Eng., Stanford University, Tech. Rep. No. 83, 1967.
- [6] Freudenthal, A.M., "Critical Appraisal of Safety Criteria and Their Basic Concepts", Prel. Pubs. 8th Congress, Report Ia, IABSE, New York, 1968.
- [7] Johnson, A.I., "Strength, Safety, and Economical Dimensions of Structures", Bull. Div. Struct. Eng. Royal Inst. Tech., No. 12, Stockholm, 1953.
- [8] Turkstra, C.J., "Choice of Failure Probabilities", J. Struct. Div. Am. Soc. Civil Eng., Vol. 93, No. ST6, 1967.
- [9] Burnes, J.A., "Statistical Decision Theory as Applied to the ACI Code", thesis presented to the University of Pennsylvania, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, 1967.

Leere Seite
Blank page
Page vide

L'optimisation des ouvrages courants sur routes et autoroutes

Optimierung gebräuchlicher Brücken über Strassen und Autobahnen

Optimization of Usual Structures over Roads and Highways

J.C. LERAY
Ingénieur des
Ponts et Chaussées

C. LANGELLO
Ingénieur des Travaux
Publics de l'Etat

les Ingénieurs de la Division des Ouvrages d'Art B
Service d'Etudes Techniques de Routes et Autoroutes
(Ministère de l'Equipement et du Logement)

1. CONSIDERATIONS PRELIMINAIRES.

Le problème de l'optimisation des ouvrages d'art courants nous est apparu vers 1960 du jour où a démarré la réalisation du réseau français d'autoroutes de liaison; ce programme, à lui seul, implique la construction annuelle de 200 ouvrages, dont 160 présentent entre eux des analogies étroites.

La pratique de l'étude et du contrôle des ouvrages d'art nous a permis d'acquérir un certain nombre de certitudes.

Tout d'abord, la solution la meilleure ne se trouve pas dans la réalisation d'un nombre très limité de modèles prêts à l'emploi, les raisons en étant les suivantes :

- un ouvrage doit s'adapter exactement à son site; organe de franchissement d'une route il doit en épouser le tracé et sa conception doit être adaptée aux particularités géotechniques du lieu.

- la réalisation systématique d'un nombre limité de modèles conduirait à des distorsions géométriques (sur la longueur des travées de rive par exemple) telles que les économies faites sur les études et la réalisation ne compenseraient pas les dépenses supplémentaires en matériaux et les défauts d'aspect.

La recherche d'une solution judicieuse ne peut ignorer certaines considérations :

- le groupement en lots des ouvrages et leur dispersion (à titre d'exemple, l'Administration des Ponts et Chaussées a lancé en 1964 un appel d'offres, qui portait sur un lot de 69 ouvrages répartis sur 2 autoroutes).

- la dimension des Entreprises pressenties;

- les facilités d'approvisionnement en matériaux et leur qualité;

- les délais et les moyens dont on dispose pour les études et le contrôle des travaux;

- le degré d'économie recherché (dépenses éventuelles pour l'aspect et la longévité).

Ces considérations conduisent à procéder à une standardisation dans laquelle on trouve les avantages suivants :

- possibilité d'organiser les chantiers d'ouvrages d'art sous une forme échelonnée avec des équipes spécialisées;
- faculté d'amortir des matériels particuliers tels que des coffrages métalliques;
- accélération des études et facilité du contrôle;
- enfin et surtout possibilité d'améliorer au cours des années un type d'ouvrage que l'on réalise à de très nombreux exemplaires.

La "standardisation" se trouve donc à mi-chemin entre la conception isolée et le prêt à l'emploi.

2. UNE PREMIERE APPROCHE DE L'OPTIMUM DANS LE CADRE DE LA STANDARDISATION.

La standardisation consiste à dégager un certain nombre de types parmi lesquels on peut ranger la plupart des ouvrages courants. Mais comme certaines parties entières d'ouvrages sont communes à plusieurs types - les appuis intermédiaires, ou encore les joints de chaussées - on peut dégager les notions "d'ouvrages-types" et même "d'éléments-types".

Les études sur la standardisation d'un élément ou d'un ouvrage type se traduisent par la mise au point d'un dossier-pilote. Ce dernier comprend, dans le cas d'un tablier ou d'un ouvrage monolithique, trois parties :

- les pièces-pilotes servant au dégrossissage du projet ;
- les bordereaux et les pièces explicatives nécessaires à la commande du calcul et éventuellement des dessins automatiques;
- un ou plusieurs exemples d'application à des fins purement pédagogiques.

L'ensemble pèse de 2 à 3 kilogrammes.

La liste des dossiers-pilotes figurés au tableau ci-dessous fait état du développement actuel de notre standardisation.

L'ensemble de ces dossiers-pilotes sont couronnés par deux documents généraux :

- un catalogue qui rend compte de l'avancement de cette standardisation.
- un manuel d'estimation par une méthode de prix composés.

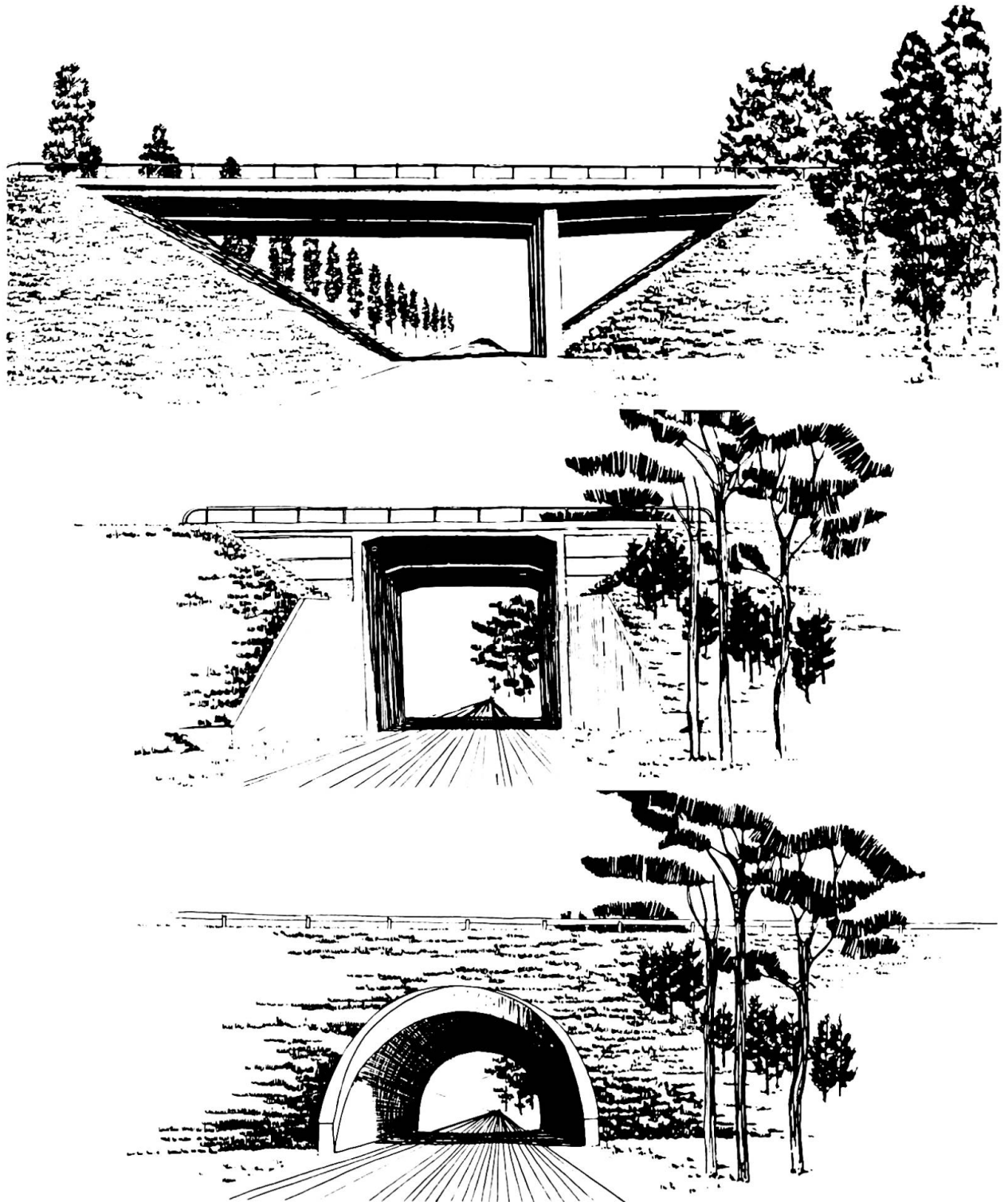
Un troisième, traitant de l'esthétique, est en préparation (fig.1)

Nous nous proposons de montrer comment l'utilisation des pièces-pilotes du dossier-pilote V.I.P.P., qui traite des Viaducs à travées Indépendantes en Poutres préfabriquées de béton Précontraint, permet de s'approcher efficacement de la solution la meilleure.

2.1. LE CHOIX DE LA STRUCTURE.

D'une façon générale, un chapitre du catalogue situe ce type de tablier parmi l'ensemble des tabliers-types.

Classe d'élément-type	Elément-type ou ouvrage-type	Sigle	Niveau d'automatisation. cf 8 3.2
Fondations	<u>F</u> ondation des <u>o</u> uvrages <u>c</u> ourants sur <u>s</u> emelles	FOCS	-
	Fondations profondes (en préparation)		
Appuis	<u>P</u> iles et <u>p</u> alées	PP	1
	<u>C</u> ulées <u>t</u> ypes	CT	-
Tabliers de passages supérieurs et inférieurs	Travées solidaires à poutres de hauteur constante de <u>b</u> éton <u>a</u> rmé	PSI-BA	3
	<u>T</u> ravée <u>i</u> ndépendante à poutres de hauteur constante de <u>b</u> éton <u>a</u> rmé	TI-BA	3
	Travées solidaires en dalle pleine d'épaisseur constante de <u>b</u> éton <u>p</u> récontraint	PSI-BP	4
	Travées solidaires en dalle pleine d'épaisseur constante de <u>b</u> éton <u>a</u> rmé	PSI-DA	3
	Travées solidaires en dalle <u>é</u> légie de hauteur variable de <u>b</u> éton <u>p</u> récontraint	PSI-DE	3
	Plaques en dalle d'épaisseur constante de <u>b</u> éton <u>p</u> récontraint (par la méthode des <u>r</u> éflexions <u>b</u> iharmoniques)	MRB-BP	1
	Plaques en dalle d'épaisseur constante de <u>b</u> éton <u>a</u> rmé (par la méthode des réflexions biharmoniques)	MRB-BA	2
	Travées solidaires ou indépendantes en <u>o</u> ssature <u>m</u> ixte	OM	2
	<u>V</u> iaduc à travées <u>i</u> ndépendantes à <u>p</u> outres préfabriquées de <u>b</u> éton <u>p</u> récontraint	VIPP	2
Ouvrages monolithiques	<u>P</u> assage <u>i</u> nférieur en <u>c</u> adre <u>f</u> ermé de <u>b</u> éton <u>a</u> rmé	PICF	3
	<u>P</u> assage <u>i</u> nférieur en <u>p</u> ortique <u>o</u> uvert de <u>b</u> éton <u>a</u> rmé	PI-PO	3
	<u>P</u> assage <u>s</u> upérieur à <u>b</u> équille de <u>b</u> éton précontraint	PS-BQ	1
Equipements	<u>G</u> arde- <u>c</u> orps, glissières, corniches, grilles centrales	GC	-
	<u>J</u> oint de chaussée, <u>a</u> ppareils d'appui, <u>d</u> alle de transition, <u>é</u> vacuation des eaux.	JADE	-
	<u>S</u> urfaçage des <u>t</u> abliers, <u>é</u> tanchéité, couches de <u>r</u> oulement	STER	-



Figures 1. Extrait d'un guide esthétique pour ouvrages courants actuellement en préparation. Le franchissement d'une route à deux voies est traité sous trois formes différentes qui font toutes appel à des ouvrages-types du S.E.T.R.A. Le guide précise leur coût respectif.

La notice générale du dossier-pilote précise plus particulièrement le domaine d'application technique et économique du V.I.P.P.

La pièce intitulée "dimensionnement du tablier" indique les quantités de bétons, d'aciers et de coffrages qui ont été utilisées pour la réalisation d'un certain nombre d'ouvrages du même type - sept au total - et débouche sur des résultats statistiques.

La méthode des prix composés évoquée plus haut, permet d'apprécier rapidement et très simplement une estimation avec une marge d'erreur de quelques % à indice de prix donné.

2.2. LE CHOIX DES DISPOSITIONS CONSTRUCTIVES.

Le dossier permet de traiter un large éventail de dispositions constructives. Leurs descriptions sont suivies de discussions et finalement de recommandations sur leur choix de façon à permettre une approche statistique de la solution optimale.

Les questions sont envisagées sous les aspects les plus divers.

Ainsi la sécurité des usagers est-elle envisagée dès le début à propos de la disposition des poutres de rive, lesquelles ne doivent pas coïncider avec l'emplacement des glissières pour ne pas rendre impossible la fixation de celles-ci sur platine.

Les problèmes liés à la manutention des poutres et à leur assemblage sont évoqués à propos de la forme de l'amorce des entretoises.

La volonté d'intégrer exactement l'ouvrage dans son site se traduit par l'énoncé d'une série d'adaptations en relation avec la courbure en plan du tracé, avec le biais des lignes d'appuis par rapport à l'axe de la chaussée, et avec une variation du dévers de la chaussée (fig. 2).

Par souci esthétique, des variantes pour la forme des poutres de rives sont suggérées, et cinq types d'appuis intermédiaires sont proposés.

2.3. LES PROCÉDES D'EXECUTION.

La notice générale énonce un certain nombre de règles dont le respect au niveau de l'exécution est nécessaire à la réussite; elles concernent l'installation du chantier, la constitution des coffrages la disposition des armatures, la mise en oeuvre du béton et des différentes phases de précontrainte, la manutention des poutres, l'exécution du hourdis et des entretoises, les opérations de finition.

3. L'OPTIMISATION DES ETUDES D'OUVRAGES D'ART COURANTS PAR LE TRAITEMENT AUTOMATIQUE DES INFORMATIONS

L'incidence du coût, de la qualité des études et du contrôle sur l'optimum n'a pas été évoquée de façon explicite dans le Rapport préliminaire malgré son importance relative dans le prix de revient final, qui est de l'ordre de 5 à 10 %.

De surcroît, considérant que l'on dispose d'une masse d'Ingénieurs généralement limitée, il est souhaitable de délivrer au maximum ces derniers des tâches purement mécaniques comme l'établissement manuel d'une note de calcul détaillée pour leur permettre de reporter leur activité sur les problèmes où leur intervention est irremplaçable : la conception, l'exécution et son contrôle.

L'effort que nous avons consenti en matière d'automatisation des études est extrêmement important parce qu'il est poursuivi de

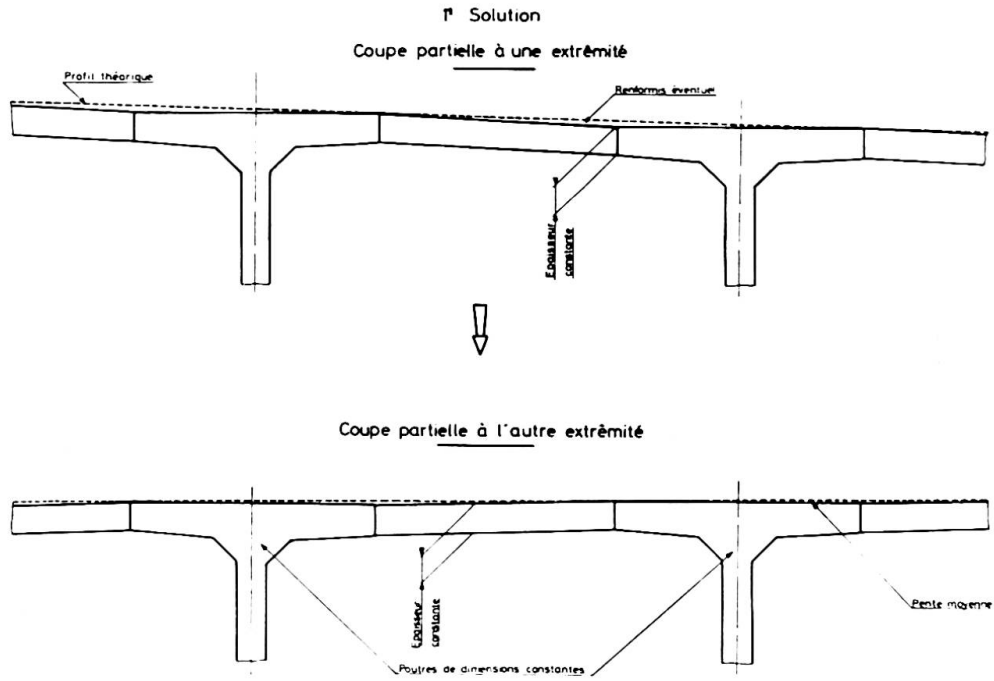


Figure 2. Extrait du sous-dossier 1 "Pièces-pilotes" du dossier-pilote VIPP 67. L'une des trois dispositions constructives qui tiennent compte d'un dévers variable de chaussée.

COUPE TRANSVERSALE

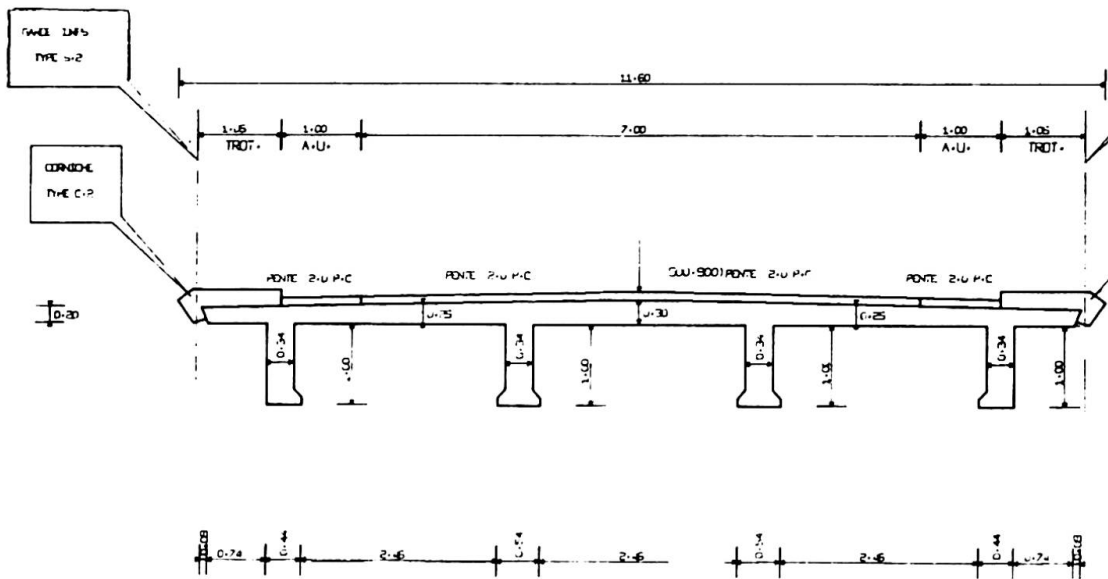


Figure 3. Coupe transversale de tablier à poutres sous chaussée automatiquement dessinée par traceur de courbes.

façon homogène et appliqué à l'ensemble des structures-types.

Le but poursuivi est l'automatisation des différentes tâches qui ne sont pas reconnues comme conceptuelles.

3.1. LES ETUDES D'AVANT-PROJET DETAILLE.

Ainsi désigne-t-on le dégrossissage du projet. Ce dégrossissage comprend les opérations suivantes :

- le choix du type d'ouvrage,
- le prédimensionnement,
- les dessins d'implantation et de coffrage.

Les deux premières opérations sont accomplies par l'Ingénieur comme indiqué aux § 2.1. et 2.2.

Les travaux de dessins consistent à démarquer certaines pièces de la troisième partie où l'on trouve un modèle d'application complètement traité. Cette opération a été accomplie manuellement jusqu'à présent; nous l'avons automatisée dans le cas de la représentation de passages à travées multiples et nous comptons l'étendre au cas des cadres fermés, des portiques ouverts et des viaducs du type V.I.P.P. (fig. 3)

Ce mode d'étude aura atteint sa pleine efficacité le jour où les "entrées" ne devront plus être préétablies dans leur ensemble ni être formulées sous formes numériques, mais où le dialogue avec l'ordinateur sera possible y compris sous forme graphique par utilisation d'une unité d'affichage en time-sharing.

3.2. L'ETUDE DEFINITIVE.

A ce stade, qui est généralement préalable à l'appel d'offres, il est souhaitable de dimensionner et d'implanter exactement l'ouvrage et d'assortir cette définition du schéma des armatures principales.

L'automatisation de toutes ces tâches est une entreprise de longue haleine que nous accomplissons par étapes.

Niveau 1 : automatisation des calculs de résistance des matériaux de la structure supposée prédimensionnée (calcul des lignes et surfaces enveloppes des efforts et des contraintes; cf les figures de la référence (4)).

Niveau 2 : automatisation des armatures de B.A. et de B.P. et établissement d'un avant-métré.

Niveau 3 : automatisation du dimensionnement complet.

Niveau 4 : tracé automatique des schémas de coffrage et de ferrailage.

Le niveau d'automatisation des programmes associés aux dossiers pilotes de structures-types est indiqué tableau 1. Le programme V.I.P.P. est automatisé jusqu'au niveau 2, non compris toutefois le dimensionnement des armatures transversales (fig.4)

4. LES RECHERCHES D'OPTIMUM SUR OUVRAGES-TYPES EN B.P. PAR LE SYSTEME "EUGENE".

Malheureusement, la standardisation des ouvrages a jusqu'à présent été limitée dans le domaine des structures par des difficultés de calcul. Quant aux recherches sur les procédures de dimensionnement et de tracé des câbles, préliminaires au traitement auto-

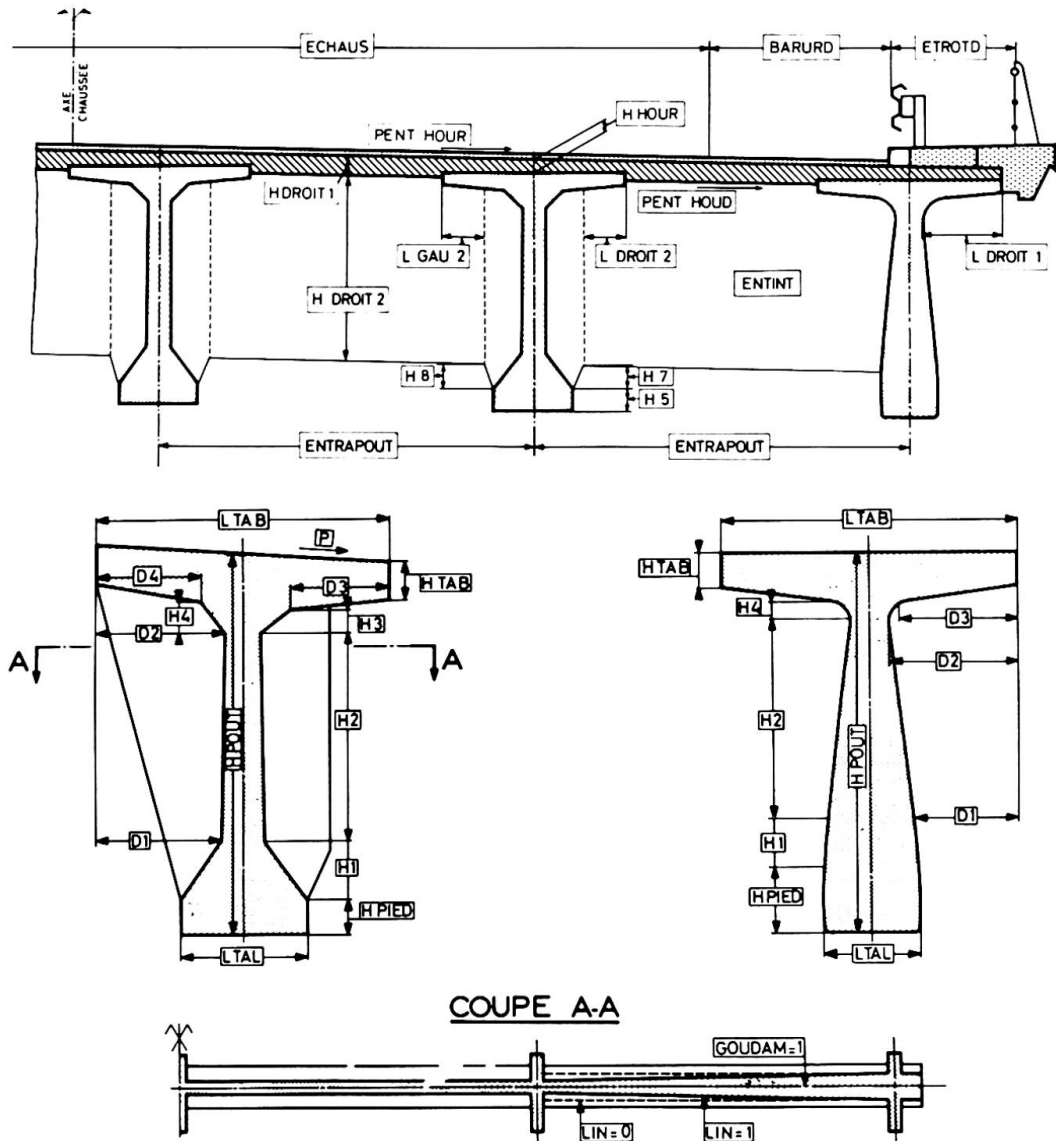


Figure 4. Extrait du sous dossier 2 "Calcul électronique" du dossier-pilote VIPP 67. Les variables géométriques intervenant dans la définition d'une travée de pont du type VIPP.

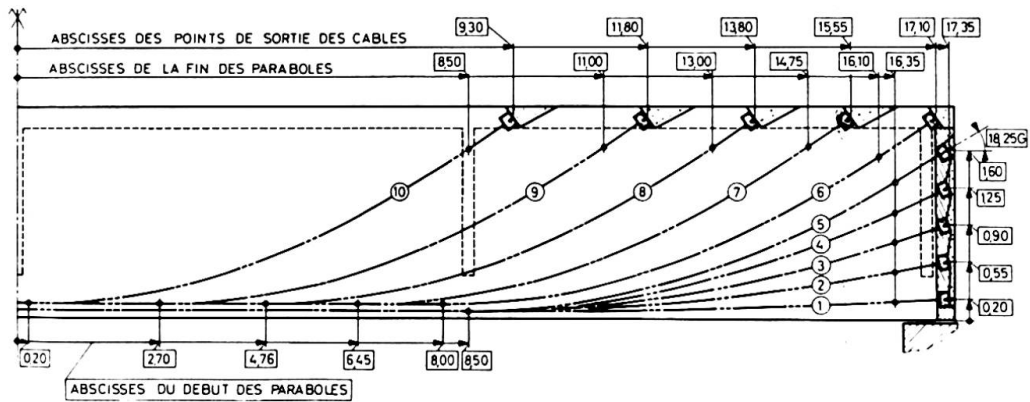


Figure 5. Extrait du sous-dossier 3 "Exemple d'application" du dossier-pilote VIPP 67. Résultats des recherches automatiques sur le dimensionnement et le tracé des câbles.

matique, elles sont déplorables de lenteur parce que menées de façon entièrement manuelle : ainsi, la mise au point d'un dossier - pilote et du programme associé poussé jusqu'au niveau 4 demande de quatre à six ans sous forme d'une version tous les deux ans.

"EUGENE", système d'analyse élastique des structures hautement complexes et d'optimisation des structures en béton précontraint aura, entre autres mérites, celui de lever ces deux hypothèses.

4.1. STRUCTURES ELASTIQUES CALCULABLES PAR "EUGENE".

Les structures dont l'analyse élastique est envisageable doivent appartenir à l'ensemble des corps composés des corps élémentaires suivants :

- des poutres à caractéristiques géométriques et mécaniques, à rayon de courbure et torsion constants ou variables; il est tenu compte de l'influence d'une réaction élastique du milieu environnant aussi bien vis-à-vis des déplacements que des rotations, ainsi que d'une déformabilité à l'effort tranchant;

- des plaques homogènes isotropes à bords parallèles, rectilignes, tous deux libres ou tous deux simplement appuyés ou tous deux encastés;

- des plaques homogènes isotropes à bords parallèles circulaires et libres;

- des plaques infinies homogènes et isotropes.

Les coefficients d'influence de ces corps ont été étudiés en faisant abstraction des conditions d'appui par les techniques mathématiques les plus modernes (transformation de Laplace et méthode de réflexions dans le cas des plaques).

L'application systématique du principe de réciprocité fait que les assemblages entre corps élémentaires, les efforts extérieurs et les déformations sont présentés et traités de façon identique. On peut donc englober ces trois notions sous le terme d'efforts-déformations.

Les natures des efforts-déformations envisageables sont : force-déplacement, couple-rotation, déformateur-déformation pure.

Leurs domaines de définition doivent être limités par des polygones pouvant dégénérer en segments ou en points.

Leurs distributions doivent être de la forme exponentielle - polynôme.

Les lignes et surfaces d'influence sont exploitées jusqu'à la détermination des enveloppes de contraintes induites par le poids propre et par les surcharges réglementaires.

4.2. OPTIMISATION DES OUVRAGES EN BETON PRECONTRAIT PAR LES METHODES DE RECHERCHE OPERATIONNELLE.

L'optimisation en question porte sur la détermination des variables continues qui interviennent dans le dimensionnement d'un ouvrage précontraint.

Il est bien entendu que cette recherche ne peut être envisagée qu'une fois réglés les problèmes de conception.

4.2.1. LES VARIABLES ENVISAGEES.

Nous trouvons, tout d'abord, les variables attachées au dimen-

sionnement des coffrages. Précisons, toutefois, que la recherche correspondante respecte la forme générale et que son objet vise seulement à parfaire certaines dimensions.

Les variables qui ont été retenues pour la définition de la précontrainte sont le couple d'excentrement et les forces d'ancrage. On distingue les variables attachées aux précontraintes respectivement isostatiques et hyperstatiques.

4.2.2. LES CONTRAINTES ENVISAGEES.

Moyennant ce choix des variables, nous avons démontré que la recherche de l'optimum pouvait relever de la programmation linéaire sous réserve d'introduire la notion de "déformateur" (1).

Les différentes classes de contraintes automatiquement prises en compte sont :

- les tensions admissibles (compression et cisaillement),
- les couvertures de béton admissibles,
- les courbures admissibles des câbles.

Mais il est possible d'introduire d'autres contraintes.

4.2.3. LA FONCTION ECONOMIQUE.

Elle permet de rechercher aussi bien un optimum économique que technique (minimisation d'une dimension géométrique).

4.2.4. LE SOFTWARE.

La procédure, qui est schématisée sur l'organigramme, fait appel au programme linéaire OPHELIE II et au générateur de rapport en clair OPHEDIT mis aux point à la Société d'Informatique Appliquée et exploitables sur CDC 6.600. (fig.6)

4.2.5. LES DIFFERENTES PROCEDURES D'EXPLOITATION D'EUGENE (cf. ORGANIGRAMME).

L'exécution des procédures numérotées sur l'organigramme (1) (3) (4) et (6) permet de dégrossir un projet en donnant une approximation de la précontrainte et du tracé correspondant. (fig. 7, 8, 9a et 9b).

Le dimensionnement exact d'un ouvrage particulier se fait par appel aux procédures (1) (2) (3) (4) et (6). Dans le cadre d'une justification détaillée, on peut vérifier la validité de la linéarisation des pertes par un recyclage sur (7) (fig. 9c).

L'exécution de l'ensemble des procédures, y compris l'analyse post-optimale, permet de connaître l'incidence sur le coût final de différentes options prises au niveau de la conception, ce coût pouvant représenter un objectif économique ou simplement technique.

C'est donc bien un outil de recherche très complet applicable aussi bien à l'étude des ouvrages exceptionnels qu'à l'étude systématique des ouvrages-types.

5. CONCLUSIONS.

L'optimisation des ouvrages courants ne va pas sans moyens de dégrossissage ni sans moyens perfectionnés d'études approfondies.

Un moyen de dégrossissage rapide et sûr des paramètres à variation discontinue existe dans la standardisation des ouvrages-types.

Deux moyens d'étude approfondie sont préconisés qui font appel

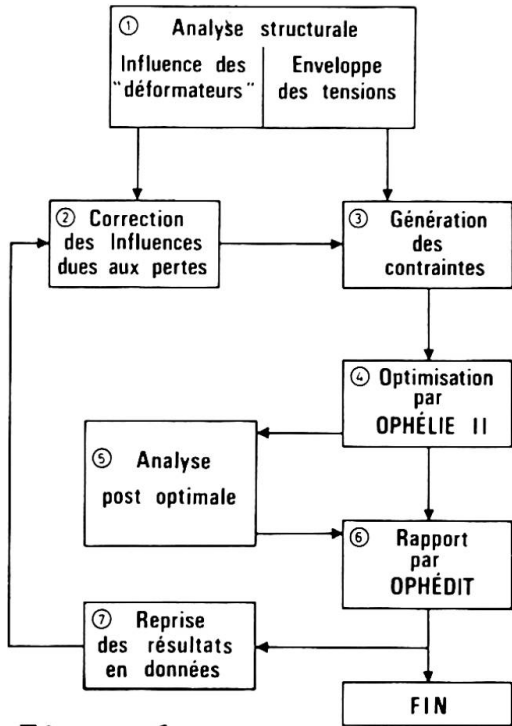


Figure 6

Figure 7

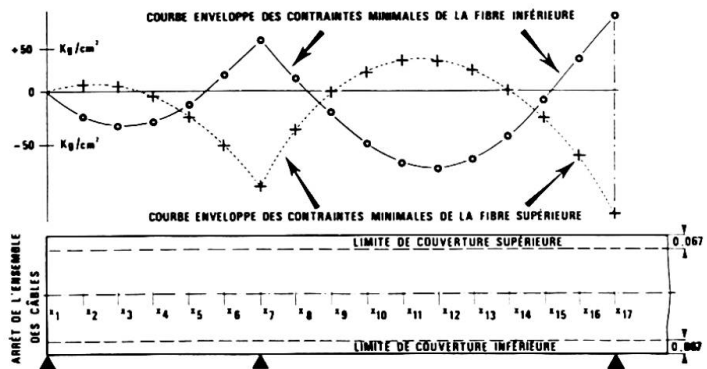
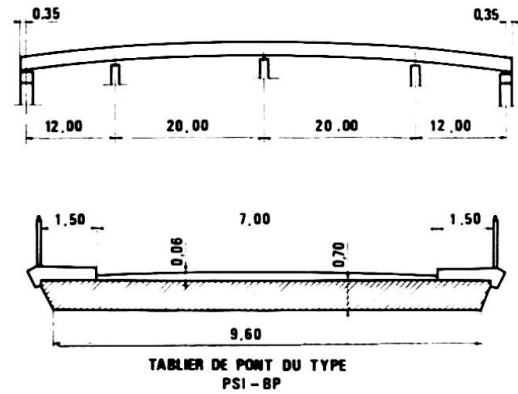


Figure 8

Figure 6. Organigramme d'EUGENE, système d'analyse élastique et d'optimisation des structures spatiales en béton précontraint.

Figure 7. L'exemple d'application: un PSI-BP à 4 travées solidaires.

Figure 8. Les données de l'exemple d'application: enveloppe des tensions, limites de couverture, arrêt des câbles.

Figure 9a. Tracé optimal non compte tenu des courbures admissibles des câbles et des pertes; force optimale: 2171 t.

Figure 9b. Tracé optimal non compte tenu des pertes; force optimale: 2171 t.

Figure 9c. Tracé optimal compte tenu des pertes; force optimale: 2411 t.

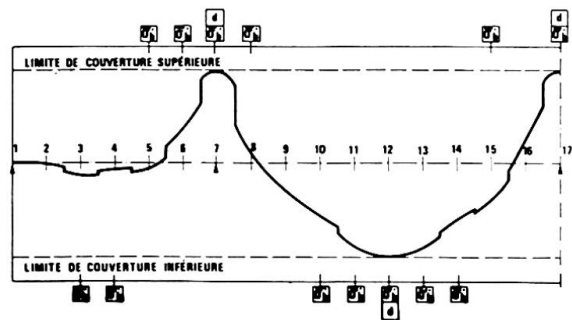


Figure 9a

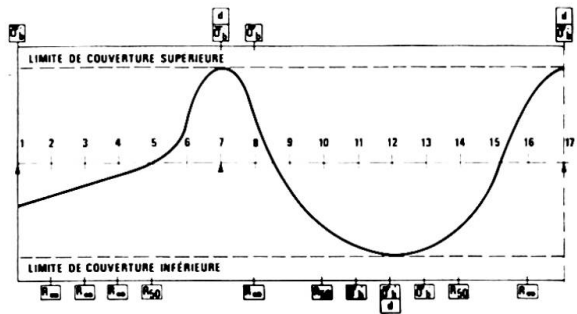


Figure 9b

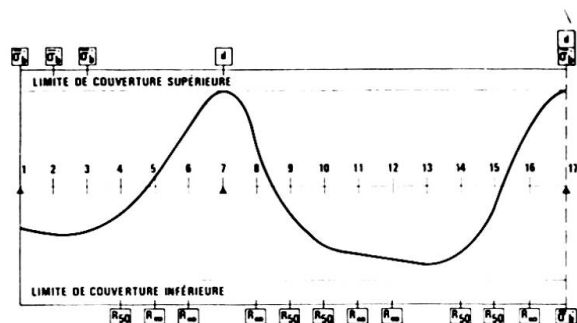


Figure 9c

l'un et l'autre au traitement automatique des informations et à la recherche d'un optimum sur un ensemble de variables continues :

- les études par programmes de calcul électronique entièrement automatiques applicables aux ouvrages-types réalisés en grand nombre;

- les programmes d'analyse structurale, sous réserve qu'ils soient d'une grande généralité et qu'ils débouchent sur des programmes de recherche opérationnelle.

Ces méthodes ont été progressivement introduites en l'espace d'une décennie dans la définition des ouvrages d'art courants du réseau routier et autoroutier français. Rapidement elles se sont révélées efficaces, et le développement des moyens à traiter l'information les ~~rendra~~ de plus en plus fécondes. Nous pensons qu'elles ont vraiment valeur générale.

BIBLIOGRAPHIE.

- (1) J.C. LERAY, C. LANGELLO, L'utilisation de la programmation linéaire dans l'optimisation des structures de Génie Civil, Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Janvier 68, n° 241, p. 49.
- (2) J.C. ALBOUY, A. BONNET, J.C. LERAY, Automatic design on electronic computers of standard bridges in reinforced concrete, Journal of A.C.I. Mars 65.
- (3) A. THIEBAULT, J.C. ALBOUY, J.L. DELIGNY, J.C. LERAY. Le calcul électronique dans les projets d'autoroutes, Annales de l'I.T.B.T.P., Mai 67, n° 233.
- (4) J.C. LERAY, les Ingénieurs du S.E.T.R.A. Les ponts courants bis et courbes, VIIIème Congrès de l'A.I.P.C., Sept. 68.

RÉSUMÉ

Pour définir les ouvrages routiers courants tout en approchant d'un optimum, deux moyens sont successivement appliqués: la standardisation et l'exploitation de programmes de calcul entièrement automatiques. Un système de programmation pour l'analyse élastique des structures complexes (poutres et plaques) et pour l'optimisation de la précontrainte nous permettra de vérifier les structures standardisées et d'accélérer la formulation de programmes de calcul entièrement automatiques.

ZUSAMMENFASSUNG

Um die gebräuchlichen Strassen- und Autobahnbrücken in Annäherung an ein Optimum festzulegen, werden zwei Mittel, eines aus dem andern folgernd, angewandt: Die Vereinheitlichung und die Ausschöpfung des Elektrorechners. Ein Programmsystem für die elastische Berechnung verwickelter Tragsysteme (Träger mit Platte) sowie für die Optimierung der Vorspannung wird uns erlauben, die vereinheitlichten Tragwerke zu kontrollieren und die Ausarbeitung der völlig automatischen Programme zu beschleunigen.

SUMMARY

In order to define the usual bridges over the roads and motorways and come near to a given optimum, two methods are used successively: the "standardization" and the utilization of wholly automatic programs for computers. A programming system for the elastic analysis of sophisticated structures (beams with slabs) and for the optimization of pre-stressed structures will allow us to diversify the standardized structures and to speed up the formulation of wholly automatic programs.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Optimal Design of Reinforced Concrete Beams and Frames

Dimensionnement optimal des poutres et portiques en béton armé

Optimale Bemessung der Stahlbetonbalken und -rahmen

M.Z. COHN

Professor of Civil Engineering and Lecturer in Civil Engineering
University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada

D.E. GRIERSON

The following optimization problem is solved in the paper: design a structure of given geometry for maximum efficiency vs. elastic design, so that under any possible load combination certain specified minimum load factors be guaranteed against both the collapse of the structure and the first yield of its critical sections.

By linearizing the merit function and developing a method to generate all limit equilibrium constraints the problem is solved with the help of linear programming and computer techniques.

The principles involved and corresponding optimal solutions are illustrated by the examples of a reinforced concrete continuous beam and frame.

INTRODUCTION

In the last few years, limit design (as opposed to limit analysis) methods have been developed enabling limit equilibrium and serviceability conditions to be explicitly used in the mathematical formulation of the problem.

Such methods, called "serviceability" (as opposed to "compatibility") methods, have been extensively applied to reinforced concrete continuous beams [1], [2], [3] and [4]*. More recently the validity of these methods has been

* Figures within brackets refer to the list of references at the end of the paper.

investigated for a variety of basic assumptions and design criteria [5] and their extension was developed for frame design [6], [7]. A comprehensive discussion of the features of serviceability vs. compatibility methods has been presented by reference to their use in building structures [8].

The possibility of considering a variety of design criteria was earlier recognized [1], [5] and suggestions for optimizing relevant merit functions have subsequently been given [6], [7].

The problem of optimal design for reinforced concrete frames has been formulated in [6], but two major difficulties have been recognized in the actual solution of the problem: 1) the explicit expression of suitable merit functions and 2) the formulation of the limit equilibrium constraints for all possible modes of structural collapse.

Some views on the first problem are offered in papers by MASSONNET and SAVE [9] and by ANDERHEGGEN and THÜRLIMANN [10], in which the total cost or the steel volume are suggested as merit functions, respectively. The authors tested, with favorable results, the use of an "efficiency index" (defined as the ratio of the steel consumption by limit vs. elastic designs, $v = V_0/V_E$) as merit function [7].

The second problem has been amply investigated [11] and a systematic procedure has been developed for generating all possible modes of collapse and predicting the most critical combinations [12].

As a result, by using mathematical programming techniques, it is now possible, and this paper illustrates how, to produce direct designs of reinforced concrete beams and frames such that 1) optimum, 2) limit equilibrium and 3) serviceability criteria be satisfied simultaneously.

It should be noted that an optimal solution verifying the three conditions above would still have to be checked for compatibility. While it is possible to add the compatibility conditions to those already considered and to attempt the solution of the more general programming problem of optimization with compatibility constraints, this will be left for a separate investigation.

THE OPTIMAL DESIGN PROBLEM

Consider a reinforced concrete beam or frame with given geometry and moments of inertia, to resist a system of known loads varying between prescribed limits.

It will be assumed that:

- 1) Reinforced concrete can be idealized as an elasto-plastic material with limited ductility;
- 2) All possible loading conditions are considered;
- 3) Limit equilibrium and serviceability are basic design criteria, with compatibility to be separately investigated;
- 4) The optimum criterion is to accomplish the minimum volume of longitudinal reinforcement.

It will also be assumed that bending action prevails, that shear and axial forces are negligible and that inelastic rotations are concentrated at critical sections as in the simple plastic theory.

Let $j = 1, 2, \dots, s$ be the critical sections of the structure and M_{pj}^+, M_{pj}^- its corresponding positive and negative plastic moments, as in general, reinforced concrete sections may have unequal flexural resistance in the two bending directions.

A design solution is found when a set of M_{pj}^+ and M_{pj}^- is derived for all critical sections of the structure such that the following conditions are satisfied:

- 1) Optimum: the design will provide the minimum volume of flexural reinforcing steel.
- 2) Limit Equilibrium: the structure will resist any loading combination of an intensity less than the prescribed ultimate load W_u and may collapse plastically for any load $W^+ \geq W_u$.
- 3) Serviceability: the critical sections of the structure will remain well within the elastic range for any combination of working loads and hence will have a safety against yield not less than a prescribed minimum value, λ_1 . It can be shown that provision of adequate yield safety will ensure satisfactory serviceability, i.e. acceptable cracking, stresses and deflections.

Let W_u, W and λ_o be the ultimate load, the service load and the overall load factor, respectively, when proportional loading is assumed, i.e. $W_u = \lambda_o W$. Let M_{pj}^\pm be the maximum (minimum) elastic envelope moment at section j , and denote λ_{1j} as the yield load factor of section j , i.e. a plastic hinge will occur at this section under some particular scheme of loading at a load level $\lambda_{1j} W$.

It can be shown [4] that the design plastic moment for section j is proportional to the corresponding elastic envelope moment for the ultimate load:

$$M_{pj} = x_j \lambda_o M_j \quad (1)$$

The scale factor x_j is called the yield safety parameter [3] and is defined by the ratio of yield to ultimate load factors:

$$x_j = \lambda_{1j} / \lambda_o \quad (2)$$

It is noted that high x_j values correspond to superior serviceability and low x_j values correspond to superior economy. An optimal solution will determine x_j values that accomplish the largest overall steel savings consistent with adequate serviceability. This is taken to mean that for any section, under any loading condition, the yield load factor λ_{1j} is not smaller than a specified lower bound $\lambda_1 \geq 1$ (the case $\lambda_1 = 1$ corresponds to the formation of a plastic hinge at service loads). For a section to become a plastic hinge in some possible mechanism it is necessary that $\lambda_{1j} \leq \lambda_o$. Therefore the serviceability constraints become:

$$\lambda_1 / \lambda_o \leq x_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (3)$$

A limit equilibrium condition is associated with each possible mode of plastic collapse (i) of the structure. This expresses the relationship between the energy dissipated in the plastic hinge rotations U_i and the external work E_i of the ultimate load in displacements corresponding to the mode of collapse i:

$$U_i \geq E_i \quad (4)$$

Relation (4) indicates that the structure collapses in the i^{th} mechanism at either the prescribed load factor λ_o if $U_i = E_i$ or at a larger load factor $\lambda^* > \lambda_o$ if $U_i > E_i$.

Assuming p possible mechanisms exist and expressing U_i in terms of the plastic moments (1) and E_i in terms of the specified ultimate load, the equilibrium constraints become after simplifications:

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} x_j \geq c_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (5)$$

where a_{ij} and c_i are some non-negative constants.

As the optimal solution corresponds by definition to the minimum steel volume V , the merit function is:

$$V = \int \frac{M_{pj} ds}{K_j} = \int \frac{\lambda_o}{K_j} M_j x_j ds = \min ! \quad (6)$$

where the integral is extended over the entire length of the structure and K_j is a constant depending on the section geometry and materials properties.

In summary the optimal design problem consists of determining the x_j values for s critical sections of the structure so that the optimum criterion $j(6)$, the limit equilibrium constraints (5) and the serviceability constraints (3) be satisfied.

This is easily identified as a typical programming problem to which the standard algorithms of mathematical programming are applicable.

MERIT FUNCTION, CONSTRAINTS AND OPTIMAL SOLUTION

Merit Function. The concrete sizes being fixed, the amount of steel reinforcement on which the design plastic moments depend is the only variable in the feasible design solutions. In current detailing practice the reinforcement provided at critical sections is maintained constant over certain lengths of the members before it is bent or terminated to conform with bond, anchorage and/or shear requirements. As a result the resisting moments provided follow a step-wise diagram, which can be idealized by a set of rectangles of depth M_{pj} and of length l_j , the distance over which M_{pj} is maintained constant [8], [10].

With these assumptions and notations the steel volume associated with each plastic moment can be expressed as:

$$V_j = A_{sj} l_j = M_{pj} l_j / K_j \quad (7)$$

Therefore the merit function (6) expressing the total steel volume is linearized in the form:

$$V = \sum_j M_{pj} l_j / \sqrt[3]{\gamma_j} = \sum_j x_j \lambda_o M_j l_j / \sqrt[3]{\gamma_j} \quad (8)$$

where γ_j are the known ratios of moments of inertia for sections j to a reference moment of inertia for the structure.

Constraints. A major difficulty of the plastic analysis and design of highly indeterminate frames consists of writing explicitly the equilibrium conditions (5) representing the limit equilibrium constraints of the optimization problem. In the paper this is done by an extension of the theory of "combination of mechanisms" due to Neal and Symonds [13], which is fully developed elsewhere [11], [12].

The procedure is based on the fact that in the derivation of the optimal solution only a limited number, m , of equilibrium conditions (collapse modes) need be considered, which is called the critical or active set of equilibrium constraints.

The active set of constraints is identified by the fact that 1) it contains $m = s - n$ collapse mechanisms, (n is the degree of statical indeterminacy of the structure) 2) which are linearly independent, 3) have only one degree of freedom, and 4) correspond to the lowest load factors of any possible mechanism. A computer programme which generates automatically all relevant combinations of mechanisms (COMECH) and which identifies the critical set of constraints based on the above mentioned criteria has been developed [11], [12]. A flow-diagram of the COMECH programme is shown in Fig. 1.

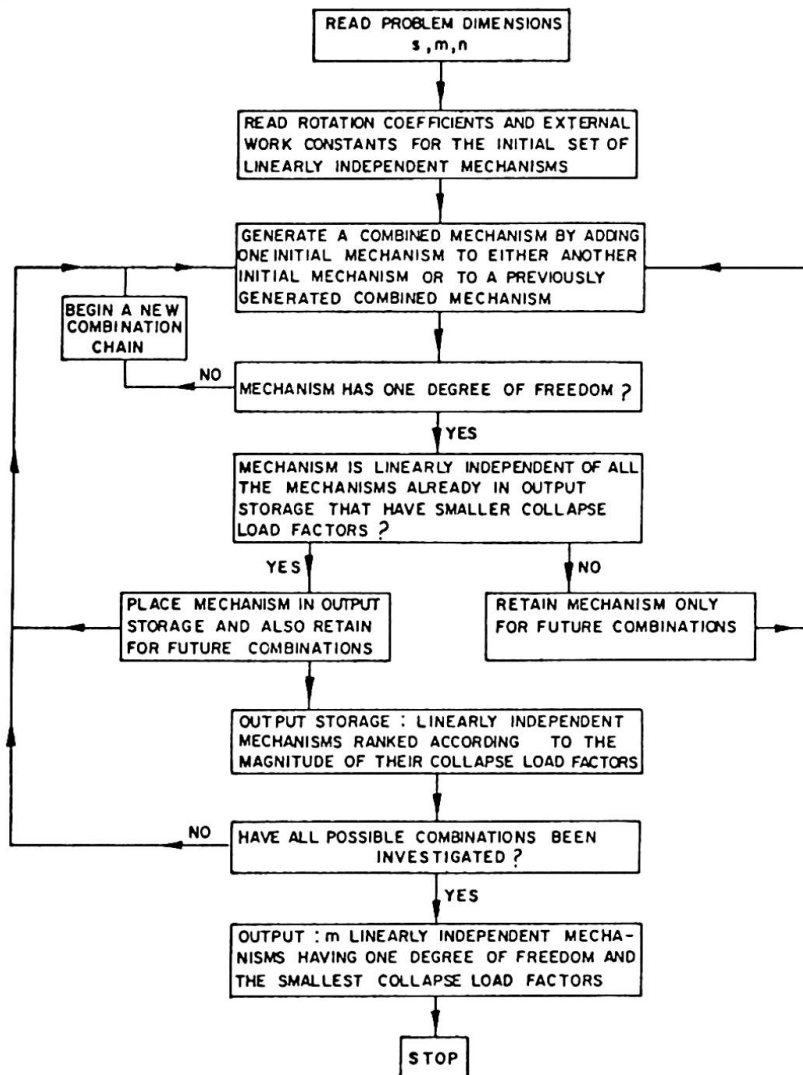


FIG. 1

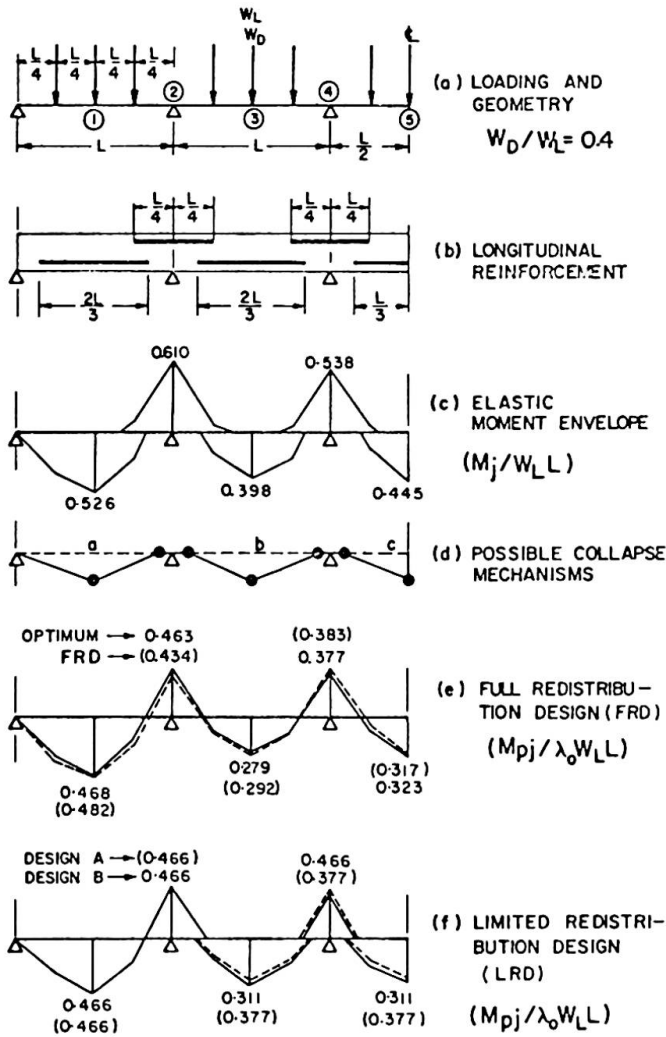
Optimal Solution. With the linear merit function (8), the serviceability constraints (5) and the equilibrium constraints determined by COMECH, the simplex algorithm can be used to solve the resulting linear programming problem of optimal design [14]. A standard computer programme for the simplex algorithm is used to solve this problem.

The coefficients of the variables, the external work constants and the bounds on the variables are given as input and the following data are obtained as output:

- 1) The optimal design plastic moments for all critical sections;
- 2) The efficiency index of the optimal design, v , and
- 3) The effective ultimate safety of the active collapse modes.

EXAMPLES

Example 1. Given is the five-span continuous beam with the geometry and loading in Fig. 2a.



in Fig. 2a. Live loads are 2.5 times higher than the dead loads and can be applied to any or all of the spans. Dead and live load factors of 1.5 and 1.8 respectively are assumed, conforming to the American practice. An overall load factor $\lambda_0 = 1.715$ is implied. A minimum yield load factor $\lambda_1 = 1.2$ is specified and therefore the minimum x_j value permitted is $x_j = \lambda_1 / \lambda_0 = 1.2 / 1.715 = 0.7$.

With the conventional arrangement of the reinforcement as in Fig. 2b, the elastic moment envelope coefficients in Fig. 2c and assuming $K_j = K = \text{const.}$, the merit function is given by expression (9).

All possible modes of collapse are indicated in Fig. 2d and are labelled by (a), (b) and (c). The corresponding limit equilibrium conditions are given by expressions (10).

The serviceability constraints are given by expression (11).

Therefore the problem statement is:

FIG. 2

minimize:

$$KV = \frac{2}{3} 0.526 x_1 + \frac{1}{2} 0.610 x_2 + \frac{2}{3} 0.398 x_3 + \frac{1}{2} 0.538 x_4 + \frac{1}{3} 0.445 x_5 \quad (9)$$

subject to:

$$1.052 x_1 + 0.610 x_2 \geq 1.4 \quad (10a)$$

$$0.610 x_2 + 0.796 x_3 + 0.538 x_4 \geq 1.4 \quad (10b)$$

$$1.076 x_4 + 0.890 x_5 \geq 1.4 \quad (10c)$$

and:

$$0.7 \leq x_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, 5) \quad (11)$$

The set of x_j values corresponding to the optimal design is given in the last column of Table 1.

It is to be noted that the optimal solution corresponds to conditions (10) becoming equalities, i.e. to mechanisms (a), (b) or (c) occurring at the prescribed load factor $\lambda_0 = 1.715$. Therefore this is a full redistribution design. The corresponding bending moment diagram is illustrated by the full lines in Fig. 2e.

For the sake of comparison the elastic solution and three additional limit design solutions are provided as follows:

- a full redistribution design (FRD) based on [3], column 5 in Table 1 and bending moment diagram in dotted lines, Fig. 2e.
- two limited redistribution designs (LRD) labelled A and B respectively, with equal design moments at a number of sections for convenience of steel placing. These solutions are given in Table 1, columns 3 and 4, and the corresponding bending moments are illustrated in Fig. 2f.

TABLE 1

EXAMPLE 1: DESIGN SOLUTIONS

$$x_j = \frac{M_{pj}}{\lambda_0 M_{oj}}$$

Section (j)	ELASTIC DESIGN	LRD:A	LRD:B	FRD	OPTIMAL DESIGN
1	1.000	0.887	0.887	0.916	0.889
2	1.000	0.763	0.763	0.712	0.760
3	1.000	0.946	0.781	0.732	0.700
4	1.000	0.700	0.866	0.712	0.700
5	1.000	0.848	0.700	0.712	0.726

Lower serviceability limit $x_j = 0.700$

In Table 2 a summary is given of the effective safety against collapse for the various designs. If λ_1^i is the actual load factor for a particular design and collapse mode i the ratio λ_1^i/λ_0 is indicative of the relative conservatism of various solutions.

In the same table the efficiency index is given for all solutions studied. As expected, it is noted that the larger is the relative safety against collapse the less economical is the design. The optimal solution is evidently the most efficient while providing exactly the required safety in all possible modes of failure. Note that the full redistribution design (FRD) is very close to the efficiency of the optimal solution.

TABLE 2

EXAMPLE 1: STRUCTURAL SAFETY AND EFFICIENCY

Mechanism (i)	λ_i' / λ_o				OPTIMAL DESIGN
	ELASTIC DESIGN	LRD:A	LRD:B	FRD	
a	1.189	1.000	1.000	1.000	1.000
b	1.389	1.142	1.111	1.000	1.000
c	1.405	1.075	1.111	1.000	1.000
$v = V_0/V_E$	1.000	0.828	0.813	0.767	0.766

Example 2. The frame in Fig. 3a [13] is to be designed for any possible combination of the applied live loads, assuming zero dead load. With an overall load factor $\lambda_o = 1.8$ and a minimum yield load factor $\lambda_1 = 1.2$, the minimum permissible value of $x_j = 1.2/1.8 = 0.667$.

The reinforcing details are provided in Fig. 3b and the elastic moment envelope is indicated in Fig. 3c. A merit function of the form (8) is obtained, which is not reproduced here for the sake of brevity.

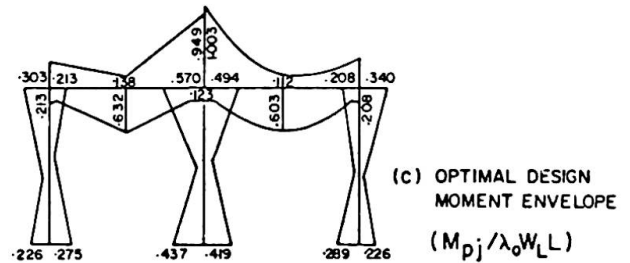
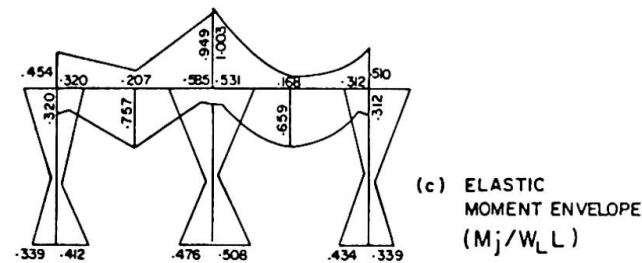
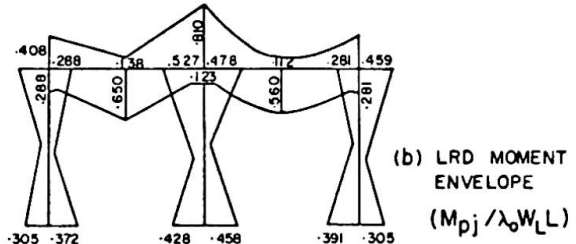
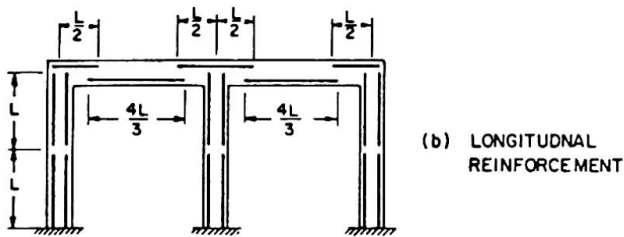
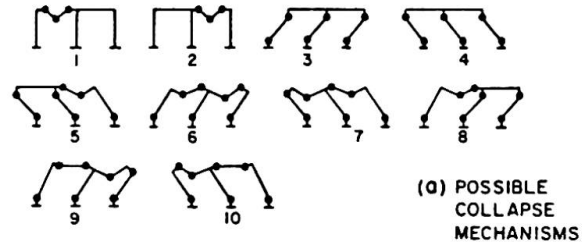
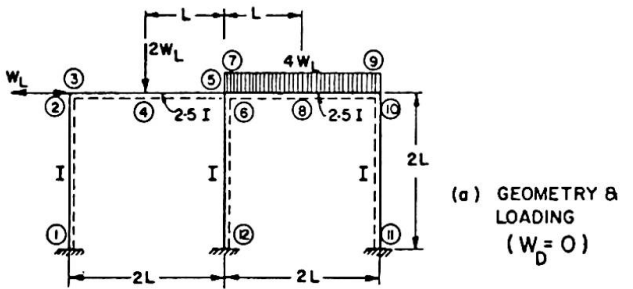


FIG. 3

FIG. 4

Of all the potential collapse modes, the COMECH programme [11] identifies the 10 mechanisms in Fig. 4a, which correspond to the critical or active set of limit equilibrium constraints.

By using the simplex computer programme the optimum solution is found and the corresponding x_j^\pm values are listed in the last columns of Table 3. Also listed are the elastic solution ($x_j^\pm = 1 = \text{const.}$) and a limited redistribution design based on [7].

The B.M. diagrams associated with these designs are represented in Figs. 4b and 4c, which are obtained by scaling down the bending moments in Fig. 3c with the corresponding x_j values in Table 3.

TABLE 3

EXAMPLE 2: DESIGN SOLUTIONS

$$x_j = M_{pj} / \lambda_o M_j$$

Section (j)	ELASTIC DESIGN		LIM. RED. DESIGN LRD		OPTIMAL DESIGN	
	x_j^+	x_j^-	x_j^+	x_j^-	x_j^+	x_j^-
1	1.000	1.000	0.900	0.900	0.667	0.667
2	1.000	1.000	0.900	0.900	0.667	0.667
3	1.000	1.000	0.900	0.900	0.667	0.667
4	1.000	1.000	0.858	0.667	0.835	0.667
5	1.000	1.000	0.667	0.853	0.667	1.000
6	1.000	1.000	0.900	0.900	0.931	0.975
7	1.000	1.000	0.667	0.807	0.667	1.000
8	1.000	1.000	0.850	0.667	0.915	0.667
9	1.000	1.000	0.900	0.900	0.667	0.667
10	1.000	1.000	0.900	0.900	0.667	0.667
11	1.000	1.000	0.900	0.900	0.667	0.667
12	1.000	1.000	0.900	0.900	0.824	0.919

Lower serviceability limit $x_j = 0.667$

The effective collapse safety of the elastic, LRD and optimal solutions is indicated in Table 4, along with the corresponding efficiency indices. It should be noted that the optimal design enables 8 modes of collapse at the prescribed ultimate load with an overall steel reduction of about 20% vs. the elastic solution. The limited redistribution design generates only 2 modes of failure at $\lambda_o W$ with a steel saving of 14% vs. the elastic design.

TABLE 4

EXAMPLE 2: STRUCTURAL SAFETY AND EFFICIENCY

$$\lambda_i / \lambda_o$$

Mechanism (i)	ELASTIC DESIGN	LRD	OPTIMAL DESIGN
1	1.46	1.26	1.26
2	1.42	1.20	1.28
3	1.31	1.18	1.00
4	1.31	1.18	1.00
5	1.16	1.00	1.00
6	1.17	1.01	1.00
7	1.17	1.00	1.00
8	1.19	1.04	1.00
9	1.21	1.06	1.00
10	1.25	1.09	1.00
$v = v_o / v_E$	1.000	0.860	0.803

CONCLUSIONS

Optimal solutions can be derived for reinforced concrete beams and frames for minimum steel consumption, with adequate safety against both the structural collapse of structures and the first yield of their critical sections.

With the assumptions adopted in the paper the optimal design becomes a linear programming problem, which can be solved by using digital computers.

Examples of optimal design presented indicate savings of 20 - 23% in steel consumption vs. the elastic solutions based on the ultimate strength design for the sections.

While the techniques described are straightforward when applied using a digital computer, they appear prohibitive for hand calculation in design offices.

However standard optimal solutions may be computed and tabulated for typical beams in the same way as in [4].

Data in Tables 2 and 4 confirm that the full redistribution design (FRD) is nearly as efficient as the optimal design, a result which has been anticipated in some previous studies [7], [8]. Because of this feature and of the relative simplicity of serviceability methods it appears that approaching full redistribution is a realistic and practical objective in the limit design of reinforced concrete frames.

ACKNOWLEDGEMENTS

The work reported in the paper is part of an extensive investigation of the Inelastic Behaviour of Reinforced Concrete Structures being carried out in the Department of Civil Engineering, University of Waterloo, with the financial assistance of the National Research Council of Canada under Grant A-4789.

The assistance of Mr. R. Hurdal of the Department of Computer Science, University of Waterloo, in developing the COMECH program and the use of the facilities of the Computer Center of the University of Waterloo are gratefully acknowledged.

REFERENCES

- [1] M.Z. COHN: "Limit design of reinforced concrete structures for maximum yield safety", Indian Concrete Journal, V. 36, No. 6, June 1962, pp. 214-224.
- [2] V. PETCU: "Optimal plastic moments of reinforced concrete continuous beams", Indian Concrete Journal, V. 36, No. 3, March 1962, pp. 110-113.
- [3] M.Z. COHN: "Optimum limit design for reinforced concrete continuous beams", Proceedings Institution of Civil Engineers, V. 30, April 1965, pp. 675-707.
- [4] K.H. GERSTLE and M.Z. COHN: "Limit design of continuous concrete bridge girders", Proceedings International Symposium on Concrete Bridge Design, April 1967, Toronto, Ontario (to appear).

- [5] M.Z. COHN: "Limit design solutions for concrete structures", Proceedings ASCE, Journal Struct. Div., V. 93, No. ST1, Feb. 1967, pp. 37-58.
- [6] M.Z. COHN: "Plastic design of frames for maximum yield safety", Proceedings 5th U.S. National Congress of Applied Mechanics, Univ. of Minnesota, Minneapolis, Minn., June 1966, p. 547.
- [7] M.Z. COHN: "Limit design of reinforced concrete frames", ASCE Structural Engineering Conference, Seattle, Washington, May 1967, Preprint No. 474, 21 pp.
- [8] M.Z. COHN, E.F. BURNETT, O. DUTT, R. FRANCIS, D.E. GRIERSON, H.C. PARAMESWAR and S. TALWAR: "Examples of limit design for reinforced concrete building structures", Colloquium on Limit Design for Structural Concrete, Univ. of Waterloo, Waterloo, Ont., Sept. 1967, 132 pp.
- [9] C. MASSONNET and M. SAVE: "Optimum design of beams and frames in reinforced concrete", Progress in Applied Mechanics, Prager Anniversary Volume, Macmillan Comp., N.Y., 1963.
- [10] E. ANDERHEGGEN and B. THÜRLIMANN: "Optimum design using linear programming" Publications IABSE, V. 26, 1966, pp. 555-571.
- [11] D.E. GRIERSON: "Optimal design of reinforced concrete frames", Ph.D. thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, 1968.
- [12] M.Z. COHN and D.E. GRIERSON: "An automatic approach to the analysis of plastic frames under fixed and variable loading", paper to be presented at the ASCE National Meeting on Structural Engineering, Pittsburgh, P.A., Sept. 1968.
- [13] J.F. BAKER, M.R. HORNE and J. HEYMAN: "The steel skeleton", V. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1956, p. 192.
- [14] G. HADLEY: "Linear programming", Addison-Wesley Publ., 1962.

NOTATION

a_{ij}, c_i	constants defining the internal and external work in the limit equilibrium equations
A_{sj}	flexural reinforcement of section j
i	index referring to the mode of collapse (mechanism)
j	index referring to critical sections of the structure
K_j	a constant which depends on the section geometry and materials properties and defines the flexural reinforcement of section j.
l_j	total distance over which M_{pj} prevails
m	number of independent mechanisms
M_j	elastic moment envelope value at section j
M_{pj}^{\pm}	design plastic moments at section j
n	degree of statical indeterminacy of the structure
p	total number of possible collapse modes (mechanisms)
s	total number of critical sections of the structure
V_E	steel volume required by elastic design
V_O	steel volume required by optimal design
$v = V_O/V_E$	efficiency index of the structural design

W	service (dead + live) loads
W_D, W_L	dead and live service loads, respectively
$W_u = \lambda_o W$	specified ultimate load
λ_o	specified ultimate load factor
λ_1	specified yield load factor
λ_i'	effective ultimate load factor in the i^{th} collapse mode
λ_{1j}	minimum effective yield load factor of section j
$x_j = \lambda_{1j}/\lambda_o$	yield safety parameter of section j

SUMMARY

Optimal solutions can be derived for reinforced concrete beams and frames for minimum steel consumption, with adequate safety against both the structural collapse of structures and the first yield of their critical sections. With the assumptions adopted in the paper the optimal design becomes a linear programming problem, which can be solved by using digital computers.

While the techniques described are straightforward when applied using a digital computer, they appear prohibitive for hand calculation in design offices. However standard optimal solutions may be computed and tabulated for typical beams in the same way as in [4].

RÉSUMÉ

Il est possible d'arriver à un dimensionnement optimal des poutres et portiques en béton armé pour un minimum d'armature, avec sécurité adéquate contre la ruine totale de la structure et la première rupture dans une section critique. L'économie contre la méthode élastique est de l'ordre de 20-23 %.

La technique de calcul décrite est directe pour une calculatrice électronique, mais plutôt difficile pour le calcul manuel. Cependant des solutions-standard pourraient être préparées en tables pour des poutres typiques, comme dans [3]. D'ailleurs une méthode approchée (table 4) donne d'assez bons résultats.

ZUSAMMENFASSUNG

Die optimale Bemessung der Stahlbetonbalken und -rahmen ist bei gleicher Sicherheit gegen Traglast sowie erstem plastischen Gelenk der gefährdeten Querschnitte für ein Minimum an Bewehrung möglich. Die Ersparnis gegenüber der elastischen Verfahren beträgt 20-23 %.

Während die beschriebene Methode auf Digital-Computern einfach anzuwenden ist, erscheint sie für die Handrechnung nicht empfehlenswert. Wie auch immer, die standardisierten Optimumslösungen mögen in der gleichen Weise wie in [3] berechnet und tabelliert werden. Im übrigen ergibt ein Näherungsverfahren (Tafel 4) hinreichend genaue Ergebnisse.

Ein optimales Flächentragwerk für Dachkonstruktionen

An Optimum Plate Structure for Roofing

Une structure bi-dimensionnelle optimale pour toitures

HORST SCHMIDT
Prof.Dr.-Ing.

EBERHARD KÜHN
Dipl.-Ing.

KARLHEINZ WEISSBACH
Dipl.-Ing.

Institut für Stahlbeton, Dresden, DDR

1. Aufgabenstellung

Es war die Aufgabe gestellt, für eine industrielle Serienfertigung ein großflächiges, montagefähiges Dachelement für hallenartige Bauwerke mit einem mechanisierten Fertigungsverfahren so zu entwickeln, daß der Absatz durch die optimale Erfüllung der nachfolgend diskutierten Forderungen gesichert wird.

2. Einflußfaktoren

2.1. Funktionelle und gestalterische Forderungen

Der Witterungsschutz ist nicht mehr die alleinige Aufgabe eines Daches. Die vielfältigen Funktionen, die Bauwerke für die Industrie, den Handel, den Verkehr und die Gesellschaft erfüllen müssen, bedingen sehr unterschiedliche Forderungen an die Dachausbildung. Die Ausführung einer individuellen Dachkonstruktion für eine spezielle Bauaufgabe ermöglicht die hierbei gestellten funktionellen und gestalterischen Forderungen maximal zu erfüllen. Soll aber eine Dachkonstruktion entsprechend der obigen Aufgabenstellung nicht nur die funktionellen und gestalterischen Forderungen befriedigen, sondern ein Optimum aus allen hier genannten Einflußfaktoren darstellen, dann müssen alle möglichen funktionellen und gestalterischen Forderungen derjenigen Bauwerke, für die die großflächigen Dachelemente eingesetzt werden sollen, in die Betrachtung der Optimierung mit einbezogen werden. Wie C o u r b o n im Vorbericht schreibt, sind wir leider noch nicht in der Lage alle Einflußfaktoren einer Tragwerksoptimierung so aufzubereiten, daß mittels eines elektronischen Rechners eine exakte Optimierung erfolgen kann.

In Tafel 1 sind die funktionellen und gestalterischen Forderungen geordnet zusammengestellt, die nach einer "ingenieurmäßigen Optimierung", d.h., einer allein von Erfahrungen und Erkenntnissen abgeleiteten Einschätzung, die mit den neuentwickelten Dachelementen ausgeführten Dachkonstruktionen erfüllen müssen, können oder nicht befriedigen brauchen.

Tafel 1 Funktionelle und gestalterische Forderungen

die voll erfüllt werden müssen	die durch Variationen erfüllt werden müssen	die ausgeschlossen bleiben
<ul style="list-style-type: none"> -Schutz gegen Niederschläge -Entwässerung -Begehbarkeit -Anpassungsfähig an alle rechteckigen Grundrisse, ein- und mehrschiffig -Ausbildung relativ großer sützenfreier Räume -Gute architektonische Gestaltung des Gesamtbauwerkes -Ansprechende Innengestaltung -Geringster Unterhaltungsaufwand 	<ul style="list-style-type: none"> -Geringer Wärmeaustausch mit der Umwelt (1) -Anordnung von Oberlichten (2) -Anhängen einer Zwischendecke (3) -Anhängen von Ausrüstungen normaler Größenordnung (3) -Ausbildung von kleinen und mittleren Durchbrüchen (4) -Schallisolierend (5) -Befriedigung brandschutztechnischer Bedingungen(6) 	<ul style="list-style-type: none"> -Anpassung an vom Rechteck abweichende Grundrisse -Anhängen von schweren Lasten -Ausbildung großer Durchbrüche -Keine Schneesackbildung

(1) Variation der Wärmedämmstoffe und ihre Dicke

(2) Konstruktive Möglichkeiten und Zusatzbelastung vorsehen

(3) Befestigungsmöglichkeiten und Zusatzbelastung durch geringfügige Veränderung der Normalelemente vorsehen

(4) Tragfähigkeit auch mit Aussparungen sichern

(5) Anordnung geeigneter Isolierschichten

(6) In Sonderfällen durch Anordnung einer Brandschutzzwischen-
decke

2.2. Forderungen aus den Grundsätzen der Industrialisierung des Bauwesens

Die Veränderung des gesamten Bauwesens von der handwerklichen Fertigung zur industriemäßigen Großproduktion bedingt, daß die den Witterungsunbilden ausgesetzte, schwere körperliche Arbeit weitestgehend reduziert und durch Maschinen übernommen wird; daß ein großer Teil der Arbeitsprozesse von den ortsveränderlichen Baustellen in stationäre, hochmechanisierte Werke verlegt wird, wo serienmäßig weitgehend komplettierte Bauelemente für die Montage vorgefertigt werden, um in kürzester Zeit eine gestellte Bauaufgabe erfüllen zu können. In Tafel 2 sind die entsprechenden Forderungen an ein industriemäßig gefertigtes Dachelement aufgeführt.

Tafel 2 Forderungen der industriemäßigen Großproduktion

die voll erfüllt werden müssen	die erfüllt werden können
- Mechanisierte Fertigung in stationären Produktionsstätten	- Komplettiert mit Wärmedämmung
- Rationelle Serienfertigung variabler Elemente	- Komplettiert mit Dachhaut
- Kürzeste Lieferfristen	- Unterseite sichtflächenfertig
- Arbeitsprozesse auf der Baustelle für Montage und Verbindung weitestgehend reduzieren	

2.3. Eigenschaften und Preise der verfügbaren Baumaterialien

Die Baumaterialien beeinflussen die Optimierung einer Dachkonstruktion direkt durch die feststehenden Zahlengrößen, wie Festigkeitswerte, Verformungsgrößen, spezifisches Gewicht, durch ihre Dauerbeständigkeit, ihr Verhalten im Feuer und die sehr zeitvariablen Preise und Unterhaltungskosten. Die Auswahl der optimalsten Baustoffe aus der sich ständig erweiternden Palette der Grundbaustoffe und ihrer vielgestaltigen Kombinationsmöglichkeiten ist zur Zeit nur durch vorliegende Erfahrungen möglich. In vielen Fällen können jedoch eine Anzahl von Baustoffen aussortiert werden, die die vorgegebenen Bedingungen nicht ausreichend erfüllen.

Unter Beachtung der wirtschaftlich noch nicht befriedigend gelösten dauerbeständigen Konservierung der Stahlkonstruktionen und ihrer schnellen und großen Verformung im Feuer wurde der Stahlbau ausgeschlossen. Auch das Holz mußte hier trotz der Fortschritte in der Unbrennbarmachung gestrichen werden. Der Einsatz von Kunststoffen für tragende Konstruktionen war durch die noch zu geringen Erfahrungen ihres Dauerverhaltens und ihrer sehr hohen Preise unmöglich. Die bestehenden Preisrelationen nach Tafel 3 bedingten neben den anderen statisch-konstruktiven Vorteilen die Wahl des Spannbetons für die hier gestellte Aufgabe.

Tafel 3 Preisrelationen Bewehrungsstahl zu Beton

	Stahl im Mittel pro m ³ Beton bei Flächen- tragwerken [1] kg	Verhältnis der Materialkosten Stahl pro m ³ /m ³ Beton
Stahlbeton	190 ÷ 230	1,29/1,00 ÷ 1,57/1,00
Spannbeton	100 ÷ 130	0,79/1,00 ÷ 1,02/1,00

2.4. Statisch-konstruktive Forderungen

Die Gebrauchswerteigenschaften und die Lebensdauer werden entscheidend durch die Erfüllung der statisch-konstruktiven Forderungen beeinflusst. Vordringlich muß eine ausreichende Standesicherheit des Bauwerkes gewährleistet werden trotz, aus ökonomischen Gründen bedingten, minimalen Einsatzes von Baustoffen. Entsprechende Sicherheiten müssen auch für die Transport- und Montagezustände der Dachelemente vorhanden sein. Ein weiterer

gewichtiger Faktor ist die Dauerbeständigkeit unter den unterschiedlichsten Einflüssen. Es dürfen innerhalb der Nutzungszeit keine Veränderungen eintreten, die die Funktion des Bauwerkes einschränken oder gar zu Schäden führen. Tafel 4 enthält die statisch-konstruktiven Forderungen für eine ausreichende Sicherheit und Lebensdauer. Die Optimierung der Querschnittsbildung ist hierbei nach einer "delikatsten Formgebung" sehr genau möglich [2] [3].

Tafel 4 Statisch-konstruktive Forderungen

Eigenschaften des Bauteils	Statisch-konstruktive Forderungen
Tragfähigkeit	<ul style="list-style-type: none"> - groß - wenig schwankend durch Fertigungstoleranzen - Sicherheit gegen Bruch $\nu = 2,0 \div 2,5$ - keine Stabilitätsbrüche
Verformbarkeit	<ul style="list-style-type: none"> - begrenzt - geringe Auswirkungen von Schwinden und Kriechen sowie bei Temperaturänderungen
Rißbildung	<ul style="list-style-type: none"> - unerwünscht, durch Vorspannen vermeiden oder auf Haarrisse begrenzen
Querschnittsgestaltung	<ul style="list-style-type: none"> - großes Trägheitsmoment für beide Hauptachsen bei geringster Querschnittsfläche - kleines Verhältnis der abgewinkelten oberen Fläche zur Grundfläche
Verhalten bei Transport und Montage	<ul style="list-style-type: none"> - unempfindlich, keine größeren Rißerscheinungen, Abplatzungen oder bleibende Verformungen
Verbindungen untereinander und mit anderen Bauteilen	<ul style="list-style-type: none"> - einfach und schnell ausführbar - dauerbeständig und wartungsfrei
Korrosionsbeständigkeit	<ul style="list-style-type: none"> - ausreichend durch dichten Beton mit entsprechender Betondeckung für Spannstahl ≥ 25 mm für die schlaife Bewehrung ≥ 10 mm
Feuerwiderstand	<ul style="list-style-type: none"> - mindestens 1/2 Stunde nach vorgeschriebener Brandbelastung ohne zusätzliche Maßnahmen

2.5. Fertigungsbedingte Forderungen

Eine mechanisierte Serienfertigung mit hoher, gleichbleibender Qualität stellt an die Gestaltung der Elemente bestimmte Forderungen, wenn mit einem Minimum an Kosten produziert werden soll. In Tafel 5 sind die auf Grund von umfangreichen Untersuchungen ermittelten fertigungspezifischen Forderungen an ein dünnwandiges und großflächiges Dachelement niedergeschrieben. Als Fertigungsverfahren kommt für derartig großflächige Fertigteile nur ein Standverfahren auf Matrizen in Frage. Wegen der ungewöhnlichen Geometrie und Größe dieser Konstruktionen können andere Verfahren, wie beispielsweise die Aggregatfließfertigung, nicht angewandt werden.

Tafel 5 Fertigungsbedingte Forderungen

Fertigungsbedingte Forderungen	Die Erfüllung der Forderung ermöglicht:
- Unveränderlicher Querschnitt über die ganze Länge (keine Querrippen)	- Einsatz hintereinander laufender Aggregate nach dem Prinzip der Gleitfertigung zum Aufbringen, Verteilen, Verdichten und Glätten des Betons - Mechanisierung aller Arbeitsprozesse - Einfache Ausbildung der Matrice
- Dicke über die Breite unveränderlich oder nur wenig unterschiedlich (keine Längsrippen)	- Gleichbleibende intensive Verdichtung des Betons über die ganze Breite - Gleichmäßige Betonqualität im gesamten Querschnitt
- Querneigung im Querschnitt kleiner als 40°	- Verzicht auf eine Doppelschalung
- Keine oder nur eine geringe Längskrümmung (30 cm Stich bei 18 m Gesamtlänge)	- Einsatz geschweißter Bewehrungsmatten - Mechanisierung des gesamten Bewehrungsbaues - Gerade Spanngliedführung, wenn keine Längskrümmung vorhanden ist.
- Keine Auflagerverstärkungen	- Fertigung beliebiger Längen auf einer Matrice
- Unkomplizierte Bewehrung mit angemessener Betondeckung (Fertigungstoleranzen berücksichtigen)	- Geringer Arbeitszeitaufwand für die Vorfertigung und den Einbau der Bewehrung - Einhaltung der Qualitätsforderungen hinsichtlich der Betondeckung
- Betongüte \leq B 450	- Anwendung der Gleitfertigung mit relativ einfachen Aggregaten
- Variation der Elemente zur Aufnahme unterschiedlicher Nutzlasten nur durch Änderung der Anzahl und Durchmesser der Bewehrungseisen sowie einer gleichmäßigen Verstärkung der Dicke	- Fertigung aller Variationen auf der gleichen Matrice mit dem gleichen Fertigungsaggregat
- Fertigungsausrüstung einfach und wenig störanfällig	- Geringe Investkosten - Geringe laufende Kosten

2.6. Transport- und Montagebedingungen

Für einen wirtschaftlichen Transport und eine zügige Montage der Dachelemente ist die Erfüllung folgender Bedingungen von grosser Bedeutung.

- Breiten- und Längenabmessungen müssen sowohl Straßen- und Eisenbahntransport ermöglichen
- Quer- und Längsschnitt müssen eine günstige Stapelung gestatten (möglichst viele Elemente übereinander)
- Die Elemente müssen einfach anzuschlagen und ohne weitere Hilfsmittel montierbar sein (ohne Traverse, ohne Hilfsrüstungen)

-Die Masse der Fertigteile muß auf die im Einsatz befindlichen Hebezeuge abgestimmt sein.

3. Beschreibung des Flächentragwerkes

Beim Entwurf und der Konstruktion des im Bild 1 dargestellten vorgespannten trapezförmigen Faltenwerkträgers (VT-Falte) wurden alle vorgenannten Einflußfaktoren einbezogen, um ein optimales Tragwerk zu erhalten [4]. Dementsprechend wurde ein großflächiges Dachelement entwickelt, das infolge seiner Anpassungsmöglichkeiten vorteilhaft im Industrie-, Gesellschafts- und Landwirtschaftsbau eingesetzt werden kann. Durch seine variable Längengestaltung mit Stützweiten von 12,0 bis 18,0 m,

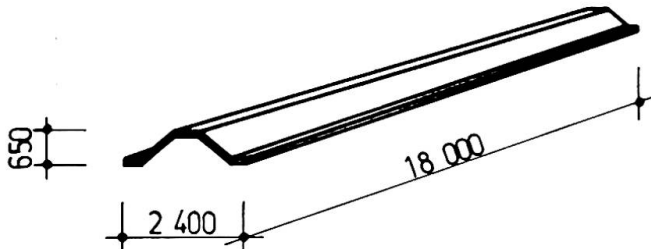


Bild 1 VT-Falte 18
Standardelement

Belastungsschema	Bereich	Eigenlast g (kp/m ²)	Flächenlast pF (kp/m ²)	Randlast PR (kp/m)
	A	155	130	0
		155	100	20
	B	155	250	0
		155	100	90
	C	180	320	0
		180	100	120

Bild 2 Grenzwerte der Belastung

die unterschiedliche Belastbarkeit (Flächenlasten, Randlasten und Einzellasten) und die große Tragfähigkeit bei Vermeidung jeglicher Stabilitätsgefährdung konnten die maßgebenden funktionalen Forderungen, wie Anpassung an alle rechteckigen Grundrisse, Anordnung von Oberlichtern, Anbringung von Einzellasten (bis 500 kp), Anhängen von Zwischendecken, Ausbildung von Durchbrüchen usw. allesamt erfüllt werden. Es können ein- und mehrschiffige Hallen als Kalt- und Warmdach mit Außen- oder Innenentwässerung und beliebigem rechteckigem Grundriß bis 18 m Spannweite ausgeführt werden. Gewisse Schwierigkeiten bereitet das Anbringen von Oberlichtern, da die Fuge im Tiefpunkt der Falten liegt und damit Probleme der einwandfreien Abdichtung der Oberlichte eintreten. Auch die gestalterischen Forderungen sind durch die geometrisch einfache Querschnittsgestaltung mit glatter Unterseite ohne Rippen und Verstärkungen und durch die Möglichkeit der Anordnung von Dachüberständen bis 2,5 m weitgehend befriedigt. Durch die Anwendung der beschränkten Vorspannung in Verbindung mit dem Einsatz von geschweißten Bewehrungsmatten aus St IVb wurde der Stahleinsatz auf ein Minimum reduziert und der Preis des Elementes niedrig gehalten. Die erreichten Materialkennwerte betragen für die Standardausführung

$$\text{Beton (B 450)} = 0,064 \text{ m}^3/\text{m}^2 \text{ / Stahl} = 6,00 \text{ kg/m}^2.$$

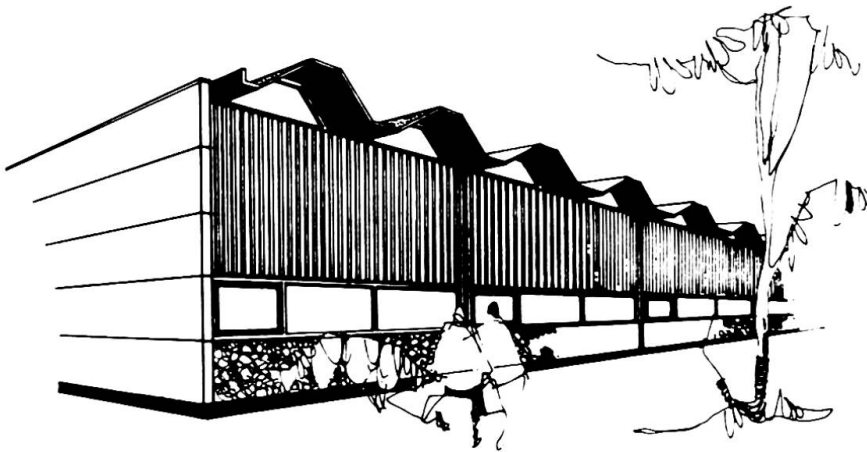


Bild 3 Perspektive eines Gebäudes mit VT-Falten

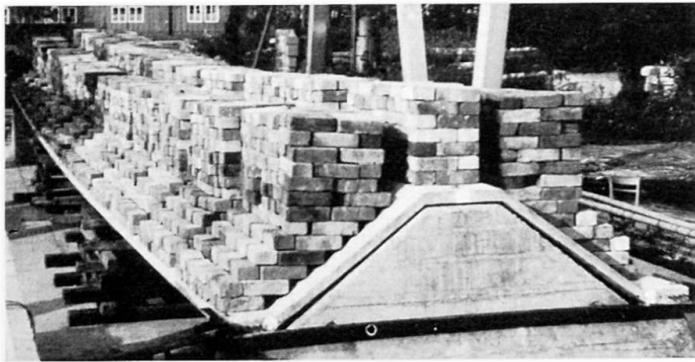


Bild 4 Testversuch (Ziegelbelastung)

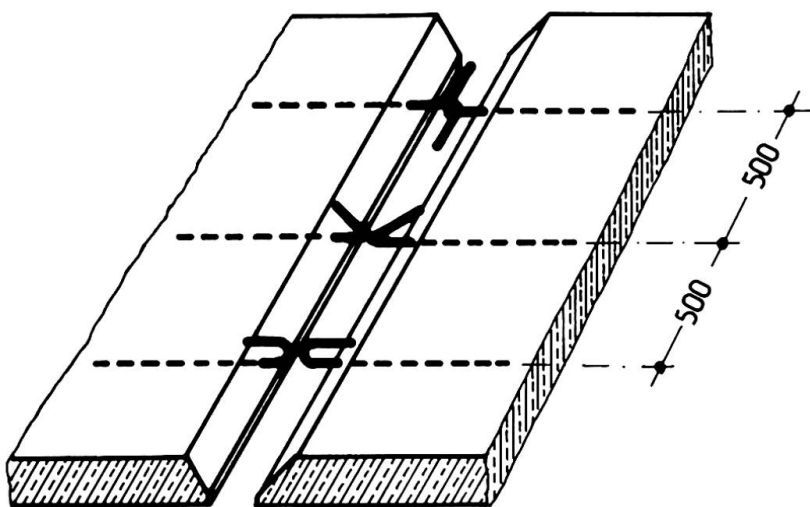


Bild 5 Fugenausbildung

Die statisch-konstruktiven Forderungen konnten vor allem durch Einsatz von Spannbeton und die Wahl des nach unten geöffneten Querschnittes erfüllt werden. Da die Längsränder der Falte unter Belastung Zugspannungen erhalten, war von vornherein ein Versagen des Bauteils infolge fehlender Stabilität des freien Randes ausgeschlossen. Daraus resultiert letztendlich die hohe Tragfähigkeit der Falte und ihre Unempfindlichkeit bei Transport und Montage. Die Vorspannung schränkte vor allem die Durchbiegung auch unter Beachtung von Kriechen und Schwinden ein und verhinderte das Auftreten von Rissen in sämtlichen Gebrauchszuständen. Zur Erfüllung des Korrosionsschutzes, vor allem des Spannstahles, ist ein dichter Beton von 30 mm vorgesehen. Die Fertigungstoleranz zur Mindestbetondeckung beträgt 5 mm. Diese Betondeckung kann im Bedarfsfall

auch auf 35 mm verstärkt werden, wobei zusätzlich noch der Vorspannungsgrad "volle Vorspannung" möglich ist. Für die schlaffe Bewehrung beträgt die theoretische Betondeckung 13 mm, wobei eine Fertigungstoleranz von 3 mm zugelassen wird. Die gewählte Querschnittsform wiederum ergibt bei geringem Materialeinsatz ein hohes Widerstandsmoment in senkrechter und waagerechter Richtung und trägt somit wesentlich zum guten Tragverhalten bei. Außerdem wirken sich Fertigungstoleranzen in der Elementendicke und der Lage der Mattenbewehrung nur geringfügig auf das Gesamttragvermögen aus, so daß auch in der Serienproduktion nahezu gleichbleibende Bruchsicherheiten die Falte charakterisieren. Die Verbindung der Falte mit der Unterkonstruktion erfolgt in einfacher Weise durch Verlegen in eine Mörtelfuge, während die Verbindung der Falten untereinander durch Ausbetonieren der Längsfuge geschieht, in die aus der Falte herausstehende Rundeisen hineinragen.

4. Fertigung des Flächentragwerkes

Im Ergebnis der Optimierung vorgenannter Einflußfaktoren wurde das nachfolgend beschriebene Fertigungsverfahren einschließlich seiner Ausrüstungen entwickelt und in die Produktion eingeführt[5].

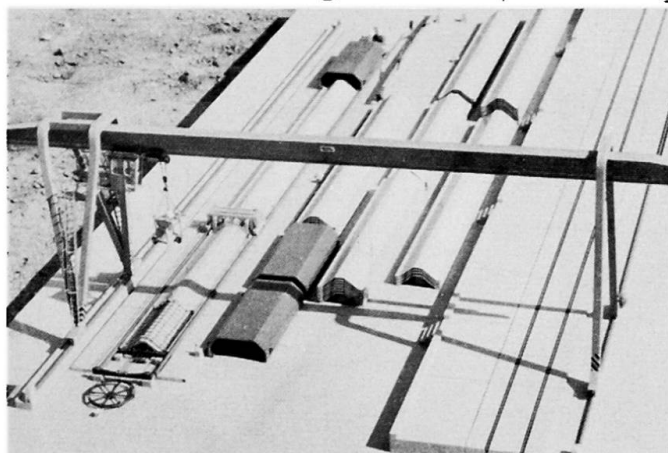


Bild 6 Modellaufnahme einer Fertigungsstätte für VT-Falten

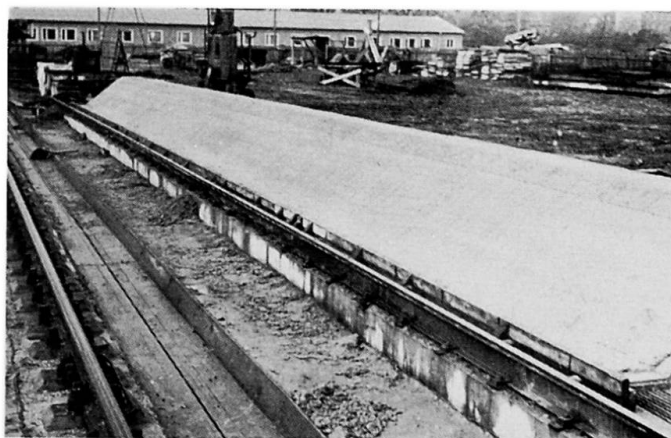


Bild 7 Stahlbeton-Matrize zur Fertigung von VT-Falten

Die Ausrüstung für die Fertigung von VT-Falten besteht aus einer Matrize mit zugehörigen Dampfhauben, einem Verdichtungs- und Glättaggregat mit Zugvorrichtung, einer Einzeldrahtspannpresse und geeigneten Hebezeugen. Die Fertigung kann sowohl in einer Halle als auch mit provisorischem Witterungsschutz im Freien erfolgen. Die Stahlbetonmatrize mit einer Gesamtlänge bis zu 80 m besteht aus hohlkastenförmigen Einzelteilen. Der Zusammenbau erfolgt mit Hilfe von Spanngliedern. Das Verdichtungs- und Glättaggregat besteht aus einem Fahrwerk mit Abstreich-, Rüttel- und Glättbohle.

Die eigentliche Fertigung beginnt mit der Vorbereitung der Bewehrung. Nach dem Abkanten der Bewehrungsmatten und dem Ölen der Matrize werden zunächst die im Auflagerbereich der Falten untenliegenden Matten und die Spaltzugbewehrung verlegt. Danach wird die Spannbewehrung ausgelegt und verankert. Anschließend wird die 12 cm hohe Seitenschalung befestigt und die oberen Bewehrungsmatten ausgelegt, mit Abstandhal-

tern versehen und die Spannbewehrung vorgespannt. Der Beton wird mit einem am Kran hängenden Kübel auf die Matrize aufgebracht und vorläufig noch von Hand vorverteilt. Das Fertigungsaggregat - mit einer Geschwindigkeit von 0,7 m/min über die Matrize gezogen - verteilt und verdichtet den Beton und glättet die Oberfläche. Nach der Fertigung wird das Element mit Hauben abgedeckt und mittels Dampf schnellerhärtet

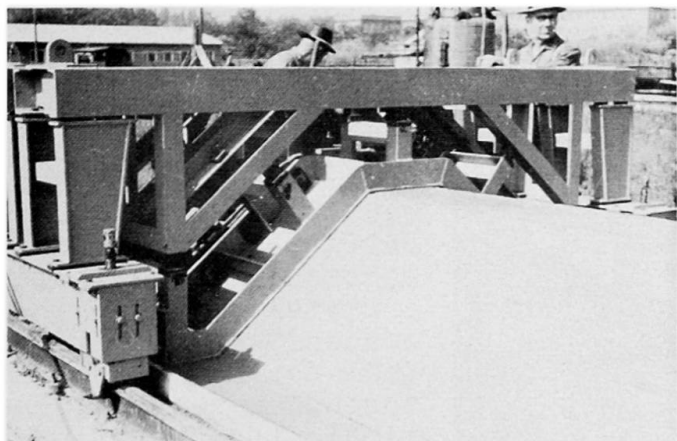


Bild 8 Aggregat zum Verteilen, Verdichten und Glätten des Betons

5. Durchgeführte Versuche

Zur Optimierung der Querschnittsform bei Ausschöpfung aller vorhandenen Tragreserven wurden eine Anzahl Testversuche und anschließend Tragfähigkeitsversuche des ausgewählten Elementes durchgeführt. Auf Modellversuche wurde nicht zurückgegriffen, da sie bei der Dünnwandigkeit des Elementes verbunden mit der gewünschten Genauigkeit der Versuche keine ausreichenden Ergebnisse liefern. Die Testversuche sollten in erster Linie entscheiden, ob das Element mit nach oben oder nach unten geöffneten Querschnitt ausgeführt werden sollte und ob man auf eine Längskrümmung der Falte verzichten kann. Der nach oben offene Querschnitt zeigte eine sehr große Empfindlichkeit gegenüber nicht exakter Lage der Mattenbewehrung und gab keine Garantie für eine gleichbleibende Güte des Elementes in der Serienproduktion. Außerdem lassen sich die Querbiegemomente dieses Querschnittes nur durch eine nicht erwünschte Längskrümmung auf die Werte des nach unten offenen Querschnittes ohne eine Längskrümmung reduzieren. Weiterhin liegen hierbei die freien Ränder im Druckbereich und sind dadurch stabilitätsgefährdet. Es wurde deshalb der unter 3 beschriebene nach unten offene Querschnitt ohne Längskrümmung des Elementes ausgewählt.

Durch Vorversuche wurde festgestellt, daß bei einer starren, nicht mitschwingenden Matrize (Stahlbeton oder Stahl) bei reichlicher Bewehrung in den Hochpunkten des Querschnittes, geeigneter Betonkonsistenz und Betondicken von 40 bis 70 mm ein Abrutschen des Betons bei Oberflächenverdichtung bis zu einer Neigung von 40° nicht auftritt und gute Betonqualitäten (B 450) und eine hohe Dichtigkeit erreicht werden können. Bei Fertigungsversuchen mit Faltenträgern zeigte sich, daß ein nach unten offener Querschnitt auch hinsichtlich seiner Fertigung günstigere Voraussetzungen bietet. Das gilt besonders für den Einbau und die Einhaltung der Lage der Bewehrung. Außerdem wird hierbei die Spannbewehrung gradlinig geführt und der Aufwand für die Ausrüstung ist wesentlich geringer als für einen Faltenträger mit nach oben offenem Querschnitt und einer Längskrümmung. Die zahl-

reichen Fertigungsversuche wurden unter unterschiedlichen Bedingungen durchgeführt. Dabei wurde das Verfahren und die Ausrüstung ständig verbessert, so daß schließlich eine produktionsreife Anlage mit optimalen Kennwerten zur Verfügung steht.

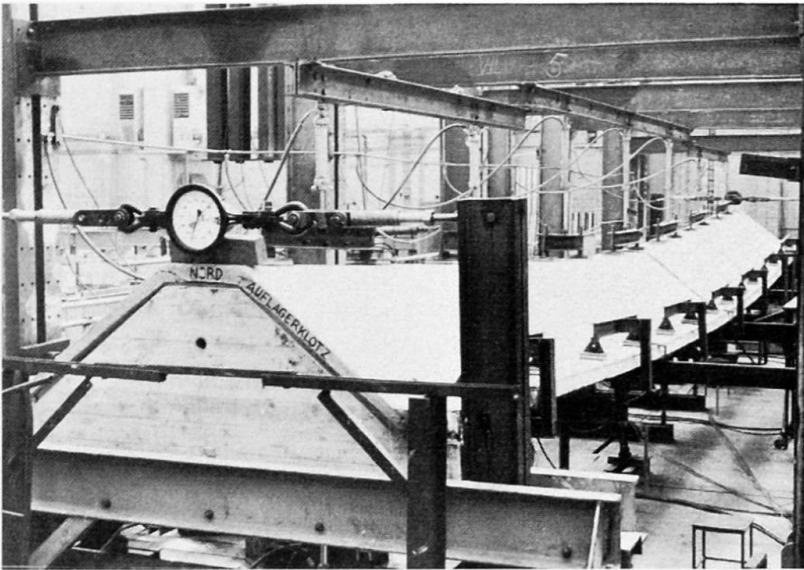


Bild 9 Tragfähigkeitsversuch
VT-Falte 18



Bild 10 Transport einer VT-Falte

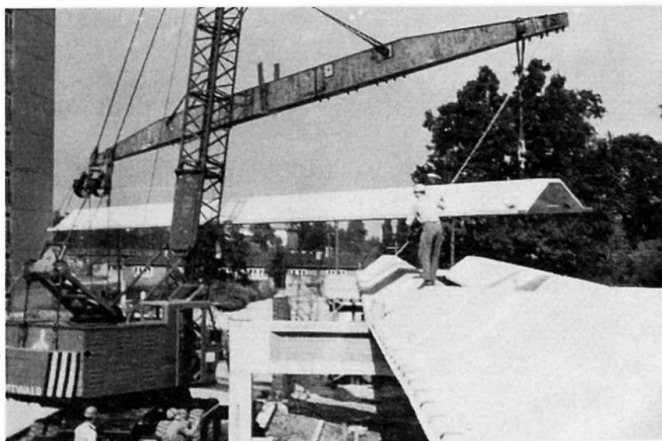


Bild 11 Montage von VT-Falten

Aus den Tragfähigkeitsversuchen konnte die exakte Tragfähigkeit des Elementes ermittelt und alle vorhandenen Reserven ausgeschöpft werden. So wurden die aufnehmbaren Flächenlasten, die aufnehmbaren Linienlasten pro Faltwerkstrand und die möglichen Einzellasten ermittelt. Weiterhin wurden Größe, Form und Zahl der möglichen Aussparungen geprüft, maximale Dachüberstände ermittelt, die aufnehmbaren Torsionsmomente (einseitige Belastung) festgestellt und alle zugehörigen Durchbiegungen und Verformungen gemessen. Im Gegensatz zu den Testversuchen, bei denen die Belastung mittels Ziegelsteinen erfolgte, sind bei den Tragfähigkeitsversuchen hydraulische Lasteintragungen mit exakten Messungen durchgeführt worden. Zur Ermittlung der Spannungen im Element wurden Dehnungsmessungen des Betons, des schlaffen Stahls und des Spannstahles vorgenommen.

Bei durchgeführten Transportversuchen erwies sich die VT-Falte als sehr unempfindlich gegenüber Schwingungen und zeigte keinerlei Risse oder Verformungen, obwohl einesteils mit hohen Geschwindigkeiten (60 km/h) und andererseits auch über unwegsames Baugelände gefahren wurde. Die Montageversuche, die in Zusammenhang mit der Errich-

tung eines kleinen Experimentalbaues durchgeführt wurden, zeigten durch die Obergurtaufhängung der Falte eine sehr stabile Lage der Falte während der Montage und gestatteten ein ungleiches und ruckartiges Anheben und Absetzen sowie andere ungünstige Montagebeanspruchungen, ohne daß Beschädigungen oder Verformungen der Elemente eingetreten sind. Gleichzeitig ergab sich durch diese Unempfindlichkeit der Falte und durch die einfache Auflagerung auf Mörtelfuge eine zügige Montage. Innerhalb einer Stunde konnten 3 Falten mit insgesamt 140 m² Grundrißfläche montiert werden.

Literatur:

- [1] Schmidt, H. u. Kühn, E.: Internationaler Stand und Entwicklungstendenzen von Montageraumtragwerken aus Stahl- und Spannbeton
Bauplanung-Bautechnik 21 (1967)
S. 177
- [2] Basler, E.: Allgemeine Merkmale der Vorfabrikation
Technische Forschungs- und Beratungsstelle der Schweizerischen Zementindustrie Wildegge (1963)
- [3] Rühle, H. u. Tobisch, F.: Zur Optimierung von Schalen- und Faltenträgern
Bauplanung-Bautechnik 22 (1968)
S. 79
- [4] Kühn, E. u. Riethmüller, R.: Entwicklung und Erprobung eines vorgespannten Faltwerkträgers als großflächiges Dachelement
Bauplanung-Bautechnik 22 (1968)
S. 73
- [5] Weißbach, K.: Fertigung von Faltwerkträgern
Baustoffindustrie (1968) S. 42

ZUSAMMENFASSUNG

Nach Diskussion und systematischer Zusammenstellung aller wesentlichen Einflußfaktoren auf die Entwicklung eines großflächigen, montagefähigen, industriell zu fertigenden Dachelementes erfolgte eine "ingenieurmäßige Optimierung" durch Auswertung von Erfahrungen, Erkenntnissen und zielgerichteten Tragfähigkeits-, Fertigungs-, Transport- und Montageversuchen. Der Diskussionsbeitrag nennt die Einflußfaktoren und erläutert kurz die durchgeführten Versuche. Das Ergebnis, ein optimales Flächentragwerk und ein dazu entwickeltes Fertigungsverfahren werden beschrieben.

SUMMARY

The "Engineering optimisation" took place after discussing and compiling all the essential factors influencing the development of an industrially producible and erectable large size roof unit through the analysis of experience, knowledge and aimed experiments to determine its ultimate strength and suitability for prefabrication, transportation and erection. The paper mentions the influencing factors and illustrates briefly the experiments carried out. The results, an optimum plate structure and a prefabrication process developed for it, are described.

RÉSUMÉ

Après discussion et rapprochement systématique de tous les facteurs essentiels dans le développement d'un élément de toiture avec une grande surface de couverture à monter et à fabriquer industriellement, on procéda à une optimisation "dans le style de l'ingénieur", c.-à-d. en se servant des expériences, des connaissances, des essais de charge adéquats, des essais de fabrication, de transport et de montage. La contribution à la discussion indique les facteurs influents et explique en peu de mots les essais exécutés. Le résultat, une structure bi-dimensionnelle optimale et un procédé de fabrication pour la-dite construction, sont décrits.